

Reguläre Plan- und Raumtheilung.

Von

E. von Fedorow.

(Mit 13 Tafeln.)

УПРЪЖИТЕ СЕБЕ ВЪЗЪЗНАТИ

60

(ИЗЪЗНАТИ)

ВЪЗЪЗНАТИ

АВЪ

ВЪЗЪЗНАТИ

ВЪЗЪЗНАТИ

Die Theorie der Krystallstruktur hat u. A. folgende rein geometrische Aufgabe aufgestellt:

Den unbegrenzt gedachten Raum in congruent resp. symmetrisch gleiche continuirliche Raumfiguren gesetzmässig zu theilen.

Unter gesetzmässigen Theilungen werden hier solche verstanden, für welche sämmtlich dieselben Deckoperationen gültig sind. Wenn wir also auf der Oberfläche einer einzigen Raumeinheit auf irgend welche Weise die Deckoperationen mit den anliegenden angeben würden, so werden dadurch die Gesetze der Deckoperationen für die Einheiten des ganzen Systems eindeutig bestimmt.

Da aber die Lösung dieser Aufgabe in ihrer Allgemeinheit mit einer ansehnlichen Anstrengung der geometrischen Einbildungskraft verbunden ist, so erlaube ich mir, wegen der Erleichterung der Auffassung des Untersuchungsganges, zuerst die einfachere, aber ganz analoge Aufgabe der regulären Plantheilung in ihrer Allgemeinheit zu behandeln. Somit zerfällt diese Abhandlung in zwei Theile.

I. Theil. Reguläre Plantheilung.

1. Es steht uns zuerst die Aufgabe bevor, sämmtliche Typen der regulären Theilung der unbegrenzten Ebene aufzusuchen.

In dieser Hinsicht sind nur zwei Arten solcher Theilung denkbar: entweder a) sämmtliche ebene Figuren sind parallel orientirt oder b) dies ist nicht der Fall.

Systeme, welche der ersten Voraussetzung entsprechen, wollen wir die Systeme I. Ordnung bezeichnen, und zuerst nur solche der Untersuchung unterziehen.

2. Denken wir beliebige hierzu gehörende Figuren herausgenommen. Sie sind untereinander durch einfache Translation verbunden, welche zugleich die Decktranslation für sämmtliche andere Figuren ist. Für diese Translation erhalten wir eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Strecke. Die Deckung kann in dieser Richtung und um diese Strecke beliebige Male wiederholt werden, und jedes Mal kommt das ganze System mit sich selbst zur Deckung. Jede einzelne Einheit bestimmt somit eine congruente Reihe der Figuren. Nehmen wir beliebig einen Punkt in einer Einheit und die analogen Punkte in sämmtlichen anderen Figuren, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte ein ebenes Netz (analytisch ausgedrückt quadratische Form II. Grades).

3. Nehmen wir aber nur zwei anliegende (also eine Grenzlinie gemeinsam besitzende) Einheiten in Betracht, so erhalten wir eine Reihe besonderer Art, in welcher jede zwei nächststehende Einheiten anliegende sind. Wir wollen solche Reihen als Columnen I. Ordnung bezeichnen.

Hiermit kann das ganze System I. Ordnung als das System der anliegenden parallelen Columnen I. Ordnung aufgefasst werden.

4. Jede Einheit kann als eine gemeinsame Figur von wenigstens zwei verschiedenen Columnen I. Ordnung aber verschiedener Richtung aufgefasst werden.

Nun ist es klar, dass irgend welche zwei durch die gegebene Einheit hindurchgehende Columnen eindeutig das ganze System bestimmen.

Der Deutlichkeit wegen nehmen wir zwei solche Columnen in Betracht. In der 1. Colonne bezeichnen wir die als Ausgangspunkt der Betrachtung dienende Einheit durch die Zahl 0, die anliegende in bestimmter Richtung durch 1, die weitere durch 2 u. s. f., und in entgegengesetzter Richtung die anliegende durch $\bar{1}$, die nächstfolgende durch $\bar{2}$ u. s. f. Die betreffenden Zahlen für die Einheiten der 2. Colonne wollen wir an zweiter Stelle placiren, und wieder in einer bestimmten Richtung durch 1, 2 u. s. f. und in entgegengesetzter Richtung durch $\bar{1}$, $\bar{2}$ u. s. f. bezeichnen.

Es ist dann einleuchtend, dass nach dem Princip der Coordinatenaxen wir jetzt jede beliebige Einheit des Systems genau und eindeutig durch zwei nebeneinander gestellte Zahlen bezeichnen können. Somit bedeuten zwei solche Zahlen z. B. $m\bar{n}$ eine ganz bestimmte Einheit des Systems.

5. Denken wir durch einen Punkt der für zwei anliegende Einheiten gemeinsamen Grenzlinie in der Richtung der betreffenden Colonne eine Gerade gezogen, so schneidet diese Gerade sämtliche analoge Grenzlinien dieser Colonne in analogen Punkten; diese Punkte bilden somit eine congruente Punktreihe, und der gemeinsame Abstand der Punkte dieser Reihe ist nichts Anderes als die der Colonne zugeordnete Deckstrecke λ .

Also die Planeinheiten I. Ordnung sind von einander durch analoge, gleiche und parallele Grenzlinien getrennt, deren Abstand gleich λ ist (wo λ die der Colonne zugeordnete Deckstrecke bezeichnet).

Die Anzahl der Grenzlinien einer Einheit kann also nur gerade sein.

Solche ebene Figuren wollen wir als Parallelogone bezeichnen.¹⁾

¹⁾ Die Definition des Parallelogons wurde in der Arbeit „Elemente der Gestaltenlehre“ (russisch) § 56 gegeben. Da hier ganz besonders diese und zwei andere Grundwerke berücksichtigt werden, so wollen wir dieselben im Weiteren in verkürzter Form citiren. Dieses Werk wurde im Jahre 1881 fertig und im Manuscripte Herrn Tschebyschew vorgelegt (vgl. Einleitung zu demselben, Anmerkung S. V). Dieser berühmte Mathematiker hat aber die Vermittelung der Erleichterung der Publication dieses umfassenden Werkes (in gedruckter Form 277 Seiten und 18 grosse Tafeln) abgelehnt und sogar die Meinung geäußert, ohne dasselbe in die Hände zu nehmen, sondern ausschliesslich von principiellen Standpunkte, dass solche Werke gegenwärtig die Mathematiker nicht interessiren können. Die daraus entstandene Verlegenheit hat das Erscheinen des Werkes im Drucke sehr verzögert und wurde erst 1883 durch den bedeutenden Krystallographen Gadolin beseitigt, nachdem derselbe in einer Reihe von Vorträgen des Verfassers mit der Theorie der Krystalstruktur desselben bekannt geworden war. Da aber diese Theorie durch einen Theil der Sätze dieses Werkes ihre Stütze fand und dabei durch zahlreiche specielle Beobachtungen experimentell nachgewiesen wurde, so hat Derselbe der k. mineralogischen Gesellschaft zu

6. Jetzt stellen wir uns die Frage, wie viele Paare Grenzlinien ein Parallelogon besitzen kann, oder, was dasselbe ist, für wie viel Columnen es die gemeinsame Figur bildet.

Der gegebenen Einheit 0 sind jedenfalls die Figuren 10, $\bar{10}$, 01, $\bar{01}$ anliegend und durch besondere Grenzlinien davon getrennt. In der anliegenden Column sind der Einheit 01 die Einheiten $\bar{11}$ und 11 anliegend; diese beiden Einheiten sind von 01 durch zwei analoge gleiche und parallele Grenzlinien getrennt, und der Abstand zwischen den analogen Punkten dieser Grenzlinien ist in der Richtung der Column wieder 2.

Es ist also ganz unmöglich, dass ausser 01 noch zugleich die beiden Einheiten $\bar{11}$ und 11 von der Einheit 0 durch Grenzlinien getrennt wären. Es kann also höchstens ausser 01 nur eine von beiden, entweder $\bar{11}$ oder 11 von 0 durch Grenzlinien begrenzt werden.

Es giebt also lediglich durch zwei und durch drei Paar Grenzlinien umschriebene Parallelogone. Wir wollen dieselben resp. Diparallelogone und Triparallelogone bezeichnen.

Dass die Grenzlinien auch Gerade sein können, wurde schon längst früher bewiesen.¹⁾ Nun ist es klar, dass die Parallelogone, welche durch Grenzlinien anderer Art und nicht durch Gerade begrenzt sind, als Varietäten der geradlinigen Parallelogone aufgefasst werden können, indem die parallelen Grenzgeraden durch irgend welche andere, mehr oder weniger beliebige Linien ersetzt werden. Diese Varietäten sind in unbegrenzter

St. Petersburg vorgeschlagen, für die Publication dieses Werkes Sorge zu tragen (vgl. Verhandlungen der k. Mineralogischen Gesellschaft Bd. XX S. 334). Im Folgenden wird das Werk einfach E. G. L. citirt.

Das zweite in mancher Hinsicht auch der jetzigen Arbeit zu Grunde liegende Werk sind die „Analytisch-krystallographischen Studien“, welche als vier besonders zur Publication gelangten Studien im Jahre 1885—1887 erschienen. Im Folgenden werden sie kurz A. K. S. citirt.

Das dritte hier zu Grunde liegende Werk, in welchem schon das meiste davon enthalten ist, was hier dargelegt worden ist, ist die Symmetriellehre, welche ebenfalls in vier verschiedenen Theilen während d. Z. 1888—1891 zur Publication gelangte. Der erste ist „Grundformeln der analytischen Geometrie“, wo das neue überzählige Coordinatensystem ausführlich entwickelt wurde. In weiteren Arbeiten wurde gezeigt, dass die Anwendung desselben fast in allen Fällen die Lösung der Aufgaben der elementaren analytischen Geometrie erleichtert und vereinfacht, indem bei dem neuen Coordinatensystem der Unterschied der Lösung in orthogonalen und schiefwinkligen Coordinaten ganz verschwindet, und alle Grundaufgaben durch die Formeln aufgelöst werden, welche denjenigen für orthogonales Coordinatensystem gehörenden ganz analog und von demselben Grade der Einfachheit sind. Der zweite Theil ist unter dem Titel „Die Symmetrie der endlichen Figuren“, der dritte „Die Symmetrie der unendlichen regelmässigen Systeme der Figuren“ und der vierte „Die Symmetrie auf der Ebene“ erschienen. In Weiterem werden diese Theile einfach S. L. I, resp. II, III oder IV citirt.

Die einfachen geradlinigen Parallelogone wurden in E. G. L. § 57 ausgeführt. Dabei wurde gezeigt, dass ausser zwei convexen Formen noch eine concave Form des einfachen Triparallelogons vorhanden ist.

Wenn die Ebene nicht durch Formen einer und derselben Art, sondern von verschiedenen in der Anzahl m vorhandenen, ebenen Figuren regelmässig ausgefüllt ist, so werden solche Figuren Parallelogone m^{ter} Ordnung genannt. Die erschöpfende Darstellung convexer Parallelogone II. Ordnung wurde daselbst in § 60 ausgeführt und in der Tafel X bildlich reproducirt. Diese Darstellung hat die Bedeutung, dass die Schnittfiguren der Paralleloëdersysteme durch besondere § 81 und 82 näher bestimmte Ebenen convexe Parallelogone II. Ordnung sind. Andere ebene Schnittfiguren sind Parallelogone höherer Ordnung.

¹⁾ Die vollständige Darstellung dieser Systeme ist in E. G. L. § 57 ausgeführt.

Anzahl zu denken, aber natürlich kommt ihnen keine besondere Bedeutung zu, und wir können die Gesamtheit aller Parallelogone einer Art in einem Typus vereinigen, und die geradlinigen als die einfachsten für die typischen betrachten, welche als die primären bezeichnet wurden, da sämtliche anderen, die secundären, von ihnen durch eine unendliche Anzahl verschiedener Operationen abgeleitet gedacht werden können.¹⁾

7. Nun ist aber die Möglichkeit dieser Operationen durch die aufgestellte Bedingung der Continuität wesentlich beschränkt. Es ist also unmöglich, die geraden Grenzlinien durch solche andere zu ersetzen, welche einander schneiden würden.

Eine weitere Beschränkung dieser Operationen bringt die Symmetrie mit.

Es war schon längst bewiesen worden, dass das Vorhandensein einer zur Ebene senkrechten zweizähligen Symmetrieaxe allein genügt, um die krummlinigen Grenzlinien unmöglich zu machen.²⁾

8. Die Symmetrie einer Planeinheit kann aber viel höher sein. Um die möglichen Symmetrieelemente aufzusuchen, müssen wir die mögliche Vertheilung der Colonne resp. der Grenzlinien in Betracht ziehen.

Dass zur Ebene senkrechte Symmetrieebenen möglich sind, bedarf keines speciellen Beweises.

Unter den zur Ebene senkrechten Symmetriaxen ist für das Diparallelogon die höchst mögliche vierzählige und für das Triparallelogon die sechszählige Symmetriaxe denkbar.

Diesen Symmetriaxen entspricht unter den geradlinigen, also primären Parallelogonen das reguläre Viereck (Quadrat) resp. das reguläre Sechseck.

Die höchst möglichen Symmetriearten der Parallelogone, folglich auch der Systeme I. Ordnung überhaupt, sind diejenigen, welche durch eine vierzählige Symmetrieaxe und vier verticale Symmetrieebenen (ditetragonal-pyramidale Symmetrieart) resp. durch eine sechszählige Symmetrieaxe und sechs verticale Symmetrieebenen bedingt werden (dihexagonal-pyramidale Symmetrieart).

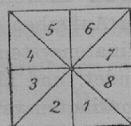


Fig. 1.

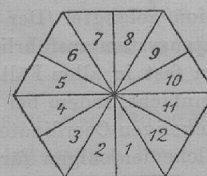


Fig. 2.

Die erste entspricht dem Quadrat (Fig. 1), die zweite dem regulären Sechseck (Fig. 2).

¹⁾ Die Definition und nähere Untersuchung der secundären Parallelogonsysteme ist in E. G. L. § 58 enthalten. Hierselbst wurde auch gezeigt, dass durch die zur Darstellung der secundären Parallelogone dienende Construction sich nicht nur die krummlinigen und sonst complicirten Formen erhalten lassen, sondern auch die Verwandlung der Diparallelogone in Triparallelogone und umgekehrt zu Stande kommen kann. Diese specielle Construction ist in der Fig. 89 veranschaulicht.

²⁾ Dieser Beweis in E. G. L. § 57 wurde dadurch erbracht, dass in die Definition des primären Parallelogons das Vorhandensein dieses Symmetrieelementes eingeführt wurde (Definition 6), und dann der Beweis geliefert wurde, dass solche einfache Figuren nur convexe sein können (Zusatz S. 173).

Es ergibt sich weiter von selbst, dass auch sämtliche andere, in Bezug auf diese beiden untergeordnete, Symmetriearten (man pflegt zuweilen dieselben als Untergruppen zu bezeichnen) ebenfalls für die betreffenden Parallelogone zulässig sind.

9. Die Aufgabe der Aufsuchung sämtlicher hierzu gehörender Symmetriearten gehört der reinen Symmetrietheorie an und ist schon längst erschöpfend gelöst.¹⁾

Hier können wir uns also mit den Resultaten begnügen.

Wollen wir sämtliche durch die Symmetrieebenen getrennten Theile abzählen, so finden wir für jeden Typus der Parallelogone, dass jede bestimmte Nummer in Bezug auf jede andere ein bestimmtes Symmetrieelement ausdrückt. Beziehen wir alle diese Nummern auf die Nr. 1, so finden wir:

für das Quadrat: 2, 4, 6 und 8 drücken verticale Symmetrieebenen von entsprechender bestimmter Lage aus, 3 und 7 gehören zur verticalen vierzähligen Symmetrieaxe und sind untrennbar verbunden, 5 gehört zur verticalen zweizähligen Symmetrieaxe, welche der vierzähligen untergeordnet ist, aber auch als selbständige Axe auftreten kann;

für das reguläre Sechseck: 2, 4, 6, 8, 10 und 12 drücken ebenfalls 6 verticale Symmetrieebenen von ganz bestimmter Lage aus, 3 und 11 beziehen sich speciell auf die sechszählige, 5 und 9 auf die dreizählige Symmetrieaxe; beide letzte Zahlenpaare sind unter sich untrennbar, aber die letzte kann auch selbständig auftreten, ebenso wie die zweizählige Symmetrieaxe, welche hier durch 7 ausgedrückt wird.

Berücksichtigen wir die vorangehenden Resultate, so erhalten wir folgende Tabelle der

Symmetriearten der ebenen Systeme.

Nr.	Symmetriegrösse	Charakteristische für Diparallelogone	Zahlencomplexe für Triparallelogone	Gleichungen der Symmetrie
1	1	1	1	$z = c; \quad v = d$
2	2	1 5	1 7	$z = n^k c; \quad v = n^k d$
3	2	1 2	1 2	$z = n^k c; \quad v = d$
4	4	1 2 5 6	1 2 7 8	$z = n^k c; \quad v = n^l d$
5	4	1 3 5 7	—	$y_0 = b_s^4; \quad y_1 = l_{s+1}^4$
6	8	1 2 3 4 5 6 7 8	—	$y_0 = b_s^4; \quad y_1 = b_{s+n^k}^4$
7	3	—	1 5 9	$y_0 = b_s^3; \quad y_1 = b_{s+1}^3$
8	6	—	1 2 5 6 9 10	$y_0 = b_s^3; \quad y_1 = b_{s+n^k}^3$
9	6	—	1 3 5 7 9 11	$y_0 = b_s^6; \quad y_1 = b_{s+1}^6$
10	12	—	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	$y_0 = b_s^6; \quad y_1 = b_{s+n^k}^6$

¹⁾ Die vollständige Auffindung der Symmetriearten auf der Ebene überhaupt und speciell diejenige der regulären Plantheilungen wurde S.L. IV I. Theil ausgeführt.

Dabei wurde gezeigt, dass eine unendliche Reihe geometrischer Symmetriesysteme vorhanden ist, und in jedem System vier verschiedene Symmetriearten enthalten sind.

Zuerst wurde der analytische Ausdruck durch Symmetriegleichungen in dem neu eingeführten geradlinigen Coordinatenaxensystem gegeben und dann auf Grund der Transformationsformel dieselben

Hier sind die algebraischen Gleichungen sämtlicher Symmetriearten angegeben, da durchaus nicht alle Zahlencomplexe für eine gegebene Symmetriearart eindeutig sind. Die dritte Symmetriearart bedeutet z. B. das Vorhandensein einer einzigen verticalen Symmetrieebene. Dieselbe kann aber in verschiedener Weise orientirt und in verschiedenen Fällen durch verschiedene Zahlencomplexe ausgedrückt werden. Die Symmetriegleichungen sind aber von mehr abstracter Natur, indem die Coordinatenachsen verschiedenartig vorgestellt werden können.

Gleichungen im polaren Coordinatensystem ausgedrückt. Auch von der Lehre der Radien-Vectoren wurde Anwendung gemacht.

Auf diese Weise liess sich folgende Tabelle der Symmetriearten auf der Ebene herstellen:

2p-gonales Symmetriesystem.

Sym- metriearart	Geradliniges Coordinatensystem	Polares Coordinatensystem	Analytischer Ausdruck durch Vektoren
I	$y_0 = b_s^{2p} \quad y_1 = b_{s+n^k}^{2p}$ oder $y_0 = n^l b_s^p \quad y_1 = n^l b_{s+n^k}^p$	$\varrho = r \quad \gamma = n^k g + s \cdot \frac{\pi}{p}$	$V = \sqrt[p]{a' + n^k b' \cdot i} = n^l \sqrt[p]{a + n^k b \cdot i}$ $= r \cdot e^{i \left(n^k g + s \cdot \frac{\pi}{p} \right)}$
II	$y_0 = b_s^{2p} \quad y_1 = b_{s+1}^{2p}$ oder $y_0 = n^l b_s^p \quad y_1 = n^l b_{s+1}^p$	$\varrho = r \quad \gamma = g + s \cdot \frac{\pi}{p}$	$V = \sqrt[p]{a' + b' \cdot i} = n^l \sqrt[p]{a + b \cdot i}$ $= r \cdot e^{i \left(g + s \cdot \frac{\pi}{p} \right)}$
III	$y_0 = b_s^p \quad y_1 = b_{s+n^k}^p$	$\varrho = r \quad \gamma = n^k g + s \cdot \frac{2\pi}{p}$	$V = \sqrt[p]{a' + n^k b' \cdot i} = r \cdot e^{i \left(n^k g + s \cdot \frac{2\pi}{p} \right)}$
IV	$y_0 = b_s^p \quad y_1 = b_{s+1}^p$	$\varrho = r \quad \gamma = g + s \cdot \frac{2\pi}{p}$	$V = \sqrt[p]{a' + b' \cdot i} = r \cdot e^{i \left(g + s \cdot \frac{2\pi}{p} \right)}$

Für die Systeme, in welchen p eine gerade Zahl ist, bleiben nur die beiden ersten Symmetriearten übrig. Für das System, für welches $p=1$, also das digonale, ist das geradlinige Coordinatensystem schon ungenügend, und für dasselbe gelten folgende specielle und einfachere Symmetriegleichungen:

Digonales System.

Sym- metriearart	Geradliniges Coordinatensystem	Polares Coordinatensystem	Analytischer Ausdruck durch Vektoren
I	$z = n^k c \quad v = n^l d$	$\varrho = r \quad \gamma = n^k g + s \cdot \pi$	$V = \sqrt[2]{a' + n^k b' \cdot i} = n^l (a + n^k b \cdot i)$
II	$z = n^k c \quad v = n^k d$	$\varrho = r \quad \gamma = g + s \cdot \pi$	$V = \sqrt[2]{a' + b' \cdot i} = n^l (a + b \cdot i)$
III	$z = n^k c \quad v = d$	$\varrho = r \quad \gamma = n^k g + s \cdot 2\pi$	$V = a + n^k b \cdot i$
IV	$z = c \quad v = d$	$\varrho = r \quad \gamma = g + s \cdot 2\pi$	$V = a + b \cdot i$

Natürlich weisen die Gleichungen der letzten Zeile auf das vollständige Fehlen der Symmetrie hin.

In derselben Arbeit wurden ebenfalls die allgemeinsten Ausdrücke für die jeder Symmetriearart angehörenden Curven angegeben, und die einfachsten Reihen ausführlicher besprochen. Die einfachste unendliche Reihe der symmetrischen Curven wurde mit besonderem Namen „Die Actinoiden“ belegt. Auch wurde hieselbst auf die Rolle der von Cauchy als „symmetrische“ bezeichneten Functionen in der Symmetriellehre hingewiesen.

Natürlich lassen sich dieselben Principien auch zur Behandlung der symmetrischen Raumgebilde ganz analog anwenden.

Die Bedeutung der Parameter dieser Gleichungen ebenso wie die richtige Vereinigung dieser zehn Symmetriearten in Gruppen wird aus dem Folgenden ersichtlich.

10. Für jede Symmetrieart und eine gegebene Richtung von allgemeiner Lage (d. h. eine Gerade, welche weder in der Symmetrieebene liegt noch zu ihr senkrecht steht) erhalten wir eine Anzahl gleichwerthiger Richtungen, welche der Symmetriegrösse gleich ist. Für die particulären Richtungen ist die Anzahl gleicher Richtungen eine geringere und es kann sogar der Fall vorkommen, dass diese Anzahl sich zu einer Einheit reducirt. Solche Richtungen wollen wir als singuläre bezeichnen.¹⁾

Die angegebenen Symmetriearten können in dieser Hinsicht in folgende Gruppen getheilt werden, welche wir als die Arten der Syngonie bezeichnen wollen.

I. Sämmtliche Richtungen sind singuläre. Dazu gehören die beiden ersten Symmetriearten. Diese Syngonie bezeichnen wir als die monokline.

II. Es giebt nur zwei untereinander senkrechte singuläre Richtungen, und zwar diejenigen, welche mit der Trace der Symmetrieebenen auf der Ebene oder mit dem Perpendikel zusammenfallen. Hierzu gehören die dritte und die vierte Symmetrieart.

Diese Syngonie soll die rhombische heissen.

III. Es giebt keine singulären Richtungen. Die gleichen oder speciell die particulären Richtungen, wenn vorhanden, sind in der Anzahl 2 da. Hierzu gehören die fünfte und die sechste Symmetrieart.

Diese Syngonie werde als die tetragonale bezeichnet.

IV. Ebenfalls keine singulären Richtungen, aber die Anzahl der gleichen oder speciell der particulären Richtungen, wenn solche überhaupt vorhanden sind, ist gleich 3. Hierzu gehören die Symmetriearten sieben, acht, neun und zehn.

Diese Syngonie werde als die hexagonale bezeichnet.

Für die Coordinatenaxe der Symmetriegleichungen werden entweder die singulären (für die ersten vier Symmetriearten) oder die particulären gleichen Richtungen, oder endlich (für die Symmetriearten fünf, sieben und neun) beliebige gleiche Richtungen genommen. Die singulären Richtungen bezeichnen wir durch verschiedene Buchstaben z und v , die gleichen aber durch dieselben Buchstaben y_s , wo s die Ordnungszahl ist, und zwar besitzt diese Zahl vier Bedeutungen für die 5. und 6. Symmetrieart, drei Bedeutungen für die 7. und 8. Symmetrieart, sechs Bedeutungen für die 9. und 10. Symmetrieart.

Die Coordinatengrösse eines Punktes wird stets durch die durch diesen Punkt gezogenen Perpendikel auf die Coordinatenachsen bestimmt.

Das Coordinatensystem lässt sich auf diese Weise für tetragonale und hexagonale Syngoniearten als eine überzählige characterisiren. Somit müssen unter den Coordinatengrössen specielle Relationen vorhanden sein. Dieselben sind nämlich²⁾

$$y_s \sin(y_0 y_1) = y_0 \sin(y_s y_1) + y_1 \sin(y_0 y_s).$$

¹⁾ Diese Begriffe wurden in der Zeitschrift für Krystallographie Bd. XXXI, S. 21 ff. eingeführt.

²⁾ Diese, ebenso wie sämmtliche andere Grundformeln der analytischen Geometrie auf der Ebene in neuem Coordinatensystem ausgedrückt, sind in dem II. Kapitel S. L. IV. enthalten.

Wie oben erwähnt, lassen sich die Aufgaben der elementaren analytischen Geometrie durch das Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XX. Bd. II. Abth.

In allen in der angegebenen Tabelle enthaltenen Gleichungen bedeutet n die negative Einheit (-1), die Parameter k und l sind zweizählig und bedeuten eine der zwei Zahlen 0 oder 1. Der Parameter s ist aber mehrzählig und periodisch. Seine Zähligkeit ist diejenige der durch denselben auszudrückenden Symmetrieaxe, wie eben erwähnt wurde. Der Deutlichkeit wegen ist die Periode jedes Mal durch eine obenstehende Zahl angezeigt.

11. Die Darstellung der Systeme I. Ordnung wird dadurch erschöpft, dass man alle diesen Systemen zukommenden Symmetriearten in Betracht zieht. Dabei kann aber vorkommen, dass man für einen und denselben Parallelogontypus und eine und dieselbe Symmetrieart verschiedene Systeme erhält, indem die Symmetrieelemente in Bezug auf die Columnen resp. Grenzlinien verschieden orientirt sind.

Unter den vier Symmetrieebenen, welche z. B. in dem Quadrate auftreten, kommt den verschiedenen auch eine verschiedene Bedeutung zu, aber nicht alle vier sind in Bezug auf ihre Lage in dem System verschieden.

Die Lösung der Fragen dieser Art gehört einer besonderen Abzweigung der Symmetriellehre — der Lehre über scheinbare Symmetrie (l'aspect nach C. Jordan) oder Symmetrie der Lage an.

Die beiden Lehren, die Symmetriellehre und die Lehre über die scheinbare Symmetrie, stehen untereinander im Besonderen in demselben Verhältniss, in welchem im Allgemeinen die metrische Geometrie und die Geometrie der Lage untereinander stehen. Die Grundzüge der Lehre von der scheinbaren Symmetrie wurden schon früher ziemlich ausführlich behandelt.¹⁾ Das Resultat dieser Lehre ist, dass die Arten der scheinbaren Symmetrie zu denjenigen der wirklichen Symmetrie in so naher Beziehung stehen, dass sie analog von derselben Anzahl sind und durch dieselben Bezeichnungen angemerkt werden können, z. B. von der Sym-

Einführen des neuen Coordinatensystems einfacher auflösen. Als Beispiel kann die Auffindung einer merkwürdigen (übrigens schon längst bekannten, aber speciell für rechtwinkliche Coordinaten hervorgehobenen) Eigenschaft des Kreises dienen, welche von selbst bei der Darstellung der Kreisgleichung in neuen Coordinaten

$$y_0^2 - 2y_0y_1 \cos \alpha + y_1^2 = r^2 \sin^2 \alpha$$

ersichtlich wird. Diese Eigenschaft hat bei den Ausführungen der Constructionen in stereographischen Projectionen im Gebiete der Krystallographie Anwendung gefunden (vgl. Universalmethode in der Mineralogie und Petrographie, Zeitschrift für Krystallographie XXI, S. 620).

¹⁾ Diese Frage ist in der Abhandlung „Grundzüge der Morphologie und Systematik der Polyeder“ (1893) besprochen. Die Aufgabe der Abhandlung selbst ist aus deren Titel direct ersichtlich. Derselben ist eine historische Einleitung beigegeben und speciell die Abhandlung von Eberhardt „Zur Morphologie der Polyeder“ besprochen. In dieser Arbeit wird die Methode gegeben, sämtliche Polyederarten einer Ordnung aus denen der vorigen erschöpfend abzuleiten. Während H. Eberhardt diese Ableitung mit der IV. Ordnung („Heptaeder“ von ihm bezeichnet) abgeschlossen hat, ist in dieser Arbeit die vollständige Ableitung nicht nur der 7-Flächner, sondern auch der 8-Flächner und 9-Flächner gegeben. Jede Polyederart wird durch ein besonderes systematisches Symbol bezeichnet, in welchem diese einen anschaulichen Ausdruck findet. Dabei wurde hervorgehoben, dass selbst für die 7-Flächner H. Eberhardt einen Fehler begangen und zwar einen Typus weniger dargestellt hat. (Bei ihm sind 5 Typen und in der Wirklichkeit deren 6 vorhanden.)

Ausser den allgemeinen Polyedern (d. h. Polyeder mit lauter dreiflächigen Ecken; solche Polyeder wurden in E. G. L. als trigonoëdrische resp. theoretische bezeichnet) wurde in derselben Arbeit auch die

metrie des Quadrates können wir sagen, dass dieselbe ditetragonal (Nr. 6 der Tabelle)¹⁾ sei, ebenso wie von der scheinbaren Symmetrie eines beliebigen Parallelogramms.

In Anbetracht des von der Lehre der scheinbaren Symmetrie begründeten Standpunktes müssen wir also die beiden Symmetrieebenen, deren Tracen den Seiten des Quadrates parallel sind, als gleichwerthige betrachten, wenn auch in der Wirklichkeit keine vierzählige Symmetrieaxe vorhanden wäre. Dasselbe gilt auch für beide diagonale Symmetrieebenen. Die ersten und die letzten Symmetrieebenen sind aber, auf demselben Princip der scheinbaren Symmetrie fussend, keineswegs untereinander gleichwerthig.

Bei der Erschöpfung der möglichen Fälle müssen wir also nothwendig diesen Standpunkt berücksichtigen und erhalten dann als allein mögliche, und dabei sämmtlich untereinander verschiedene, folgende Systeme:

12. 1) 1 II und 2) 1 III bezeichnet zwei Systeme, in welchen Symmetrie vollständig fehlt. Die Zahl 1 soll die Lagerung der Symmetrieelemente in der Ebene ausdrücken, welche aber gerade in diesem Fall gar nicht vorhanden sind; II und III bezeichnen das Di- resp. Triparallelogon.

3) 2 II und 4) 2 III bedeuten zwei Systeme, in welchen nur zweizählige, in die Centra der Einheiten fallende Symmetrieaxen vorhanden sind (s. Tafel I für diese und andere Systeme).

5) 3 II, wenn Symmetrieebenen allein vorhanden sind, welche einem Paar Seiten parallel sind (allgemeiner ausgedrückt der Richtung einer der beiden Columnen parallel sind).

6) 4 II, 7) 4 III und 8) 4 III', wenn ebenfalls eine Symmetrieebene allein vorhanden ist; in den beiden ersten Fällen besitzt dieselbe die diagonale Lage, im dritten steht sie zum einen Seitenpaar senkrecht.

9) 5 II, wenn zwei Symmetrieebenen vorhanden sind, welche beide zur Seite senkrecht stehen.

10) 6 II, 11) 6 III. Dieselben senkrechten Symmetrieebenen vorhanden. In dem Diparallelogon besitzen beide die diagonale Lage; in dem Triparallelogon steht nur eine derselben diagonal, die andere aber senkrecht zu einem Seitenpaar.

Methode gegeben, die particulären erschöpfend darzustellen. Dadurch erwirbt die Ableitung der Polyederarten ihre höchste Allgemeinheit. Das Resultat ist in folgender Tabelle enthalten:

	Allgemeine	Particuläre Polyederarten	Zusammen
I. Ordnung (Vierflächner)	1	—	1
II. „	1	1	2
III. „	2	6	8
IV. „	6	40	46
V. „	17	—	—
VI. „	75	—	—

In derselben Arbeit ist ausserdem die vollständige Ableitung der Paarflächner V., VII. und IX. Ordnungen ausgeführt und dabei der Dualismus berücksichtigt. Dadurch wird die Anzahl der erschöpfend dargestellten Typen verdoppelt. Alles das blieb der Arbeit von H. Eberhardt fremd.

¹⁾ Die Bezeichnung der Symmetrieart wird von der allgemeinen Figur entnommen. Unter allgemeiner Figur wird eine solche verstanden, welche dadurch entsteht, dass man eine Grenzgerade allgemeiner Lage nimmt und auf Grund aller vorhandenen Symmetrieelemente daraus alle anderen Grenzgeraden ermittelt. Für den betrachteten Fall ist diese Figur ein Ditetragon.

- 12) 7 II. Es giebt nur eine einzige in das Centrum fallende vierzählige Symmetrieaxe.
 13) 8 II. Zu derselben kommen noch vier Symmetrieebenen hinzu.
 14) 9 III. Es giebt nur eine einzige in das Centrum fallende dreizählige Symmetrieaxe.
 15) 10 III und 16) 11 III. Zu derselben kommen noch Symmetrieebenen hinzu. Im ersten Fall stehen dieselben senkrecht zu Seitenpaaren; im zweiten stehen dieselben diagonal.
 17) 12 III. Es giebt eine einzige sechszählige, in das Centrum fallende Symmetrieaxe.
 18) 13 III. Zu derselben kommen noch Symmetrieebenen hinzu.

13. Nehmen wir innerhalb einer Einheit beliebig einen Punkt, so bedingen die Symmetrieelemente der Einheit ebenso wie die Translationsdeckbewegungen eine unbegrenzte Gesamtheit analoger Punkte, welche als ein regelmässiges Punktsystem bezeichnet wird.

Die erschöpfende Darstellung solcher ebener Punktsysteme war schon längst früher ausgeführt,¹⁾ und ist in der Tafel I anschaulich auf graphischem Wege reproducirt, sowie am Schlusse dieses ersten Theiles tabellarisch durch analytische Gleichungen zusammengefasst.

Jedes dieser Systeme ist durch die Art und Lage der Symmetrieelemente charakterisirt.

Jetzt kommen wir zur Lösung derselben Frage auf ganz anderem Wege, indem durch die Symmetrie einer einzelnen Planeinheit und durch die Decktranslationsbewegungen wieder dieselben Systeme reproducirt werden, obgleich es nicht von vornherein ersichtlich ist, ob auch jetzt wir zur erschöpfenden Darstellung derselben Systeme kommen.

Zu dem Zwecke, für sämmtliche Fälle die Lagerung der Symmetrieelemente erschöpfend darzustellen, müssen wir folgende, längst bewiesene Sätze berücksichtigen:²⁾

1. Satz. Existirt eine p -zählige Symmetrieaxe 0 und eine Deckschiebung l , so existirt auch eine resultirende zu 0 parallele p -zählige Axe 0' von solcher Lage, dass sie gleichen Abstand hat von der Axe 0 in der primitiven Lage und in der anderen Lage 1, welche letztere nach der erfolgten Schiebung erhält; dabei bilden die durch die Axe 0' und die die Axen 0 und 1 gehenden Ebenen einen inneren Winkel $2\frac{\pi}{p}$.

¹⁾ Diese Aufgabe wurde in dem II. Theile des S. L. IV behandelt. Da dieser Theil der Zeit nach der Arbeit S. L. III folgte, wo die regelmässigen Punktsysteme im Raume vollständig ausgeführt und durch algebraische Gleichungen ausgedrückt wurden, so liess sich diese Aufgabe ausserordentlich einfach dadurch auflösen, dass in diesen Gleichungen die erste Coordinatengrösse gleich Null gesetzt wurde.

Da aber diese Frage schon früher durch zwei Autoren behandelt wurde, so wurden die Resultate vergleichungsweise in folgender Tabelle dargestellt. Diese Autoren sind C. Jordan („Memoires sur les groupes de mouvements“ in Brioschi e Cremona Annali di matematica. Ser. II T. II und L. Sohncke („Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung.“ Borchardt, Journ. für die reine und ang. Mathematik Bd. 77.)

Ebene Punktsysteme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C. Jordan (1869)	2	27	28	32	86	87	53	115	60	129	—	46	107	30	90	88	123
L. Sohncke (1879) nicht angezeigt	XI	—	—	X	VI	IV	VII	III	IX	II	I	VIII	—	XIII	XII	V	

²⁾ Die betreffenden Sätze (in der Anzahl 8), sind in S. L. III enthalten. Hier wurde die analytische Methode angewandt. Später wurde dieselbe durch die einfachere Methode der Construction ersetzt (Cursus der Krystallographie 1897, §§ 2 und 3).

Zusatz. Speciell für die zweizählige Symmetrieaxe haben wir den Fall, dass die resultirende Axe O' in der Mitte zwischen 0 und 1 steht, also in der Translationsrichtung um eine Hälfte der Decktranslationsstrecke, also $\frac{l}{2}$, von derselben entfernt ist.

2. Satz. Existirt eine Symmetrieebene und eine zu ihr senkrechte Deckschiebung λ , so existirt auch eine resultirende parallele Symmetrieebene, die von derselben den Abstand $\frac{\lambda}{2}$ hat. Ist die Deckschiebung nicht die senkrechte, so existirt in der Mitte zwischen zweien nächsten Symmetrieebenen eine resultirende Gleitebene; die Richtung und die Grösse der ihr zugehörenden Deckschiebung sind die Richtung der Trace dieser Ebene und resp. die Hälfte der Deckschiebung der Translation in dieser Richtung.

Auf Grund dieser beiden Sätze sind sämmtliche den aufgefundenen Systemen entsprechende Punktsysteme bestimmt und durch die Nummer angezeigt. Man sieht, dass aus der Anzahl 17 der früher dargestellten Punktsysteme jetzt 13 derselben reproducirt worden sind, als diejenigen, welche den Systemen I. Ordnung zu Grunde liegen.

14. Wir haben sämmtliche Systeme I. Ordnung aus zwei Grundsystemen 8 II und 13 III dadurch abgeleitet, dass wir die ihnen zukommenden Symmetriearten durch die untergeordneten ersetzt hatten. Dabei verschwinden einige Symmetrieelemente; die Form der Einheiten und die Lage der Reihen und Columnen wird aber dadurch nicht berührt.

Nun ist zu berücksichtigen, dass es schon längst bewiesen worden, dass die Systeme, je nach ihrer Syngonie, durch homogene Deformationen transformirt werden können, ohne die denselben innewohnende Eigenschaft der regulären Plantheilungen zu verlieren.¹⁾

¹⁾ Dieser Frage über die homogenen Deformationen und der Aufstellung der Sätze über die homogenen Transformationen des Parallelogonsystems wurde in den Arbeiten des Verfassers viele Beachtung geschenkt. Zuerst in E. G. L. wurden denselben die §§ 61, 62 und 63 gewidmet, und die Sache auf einfachste Weise in constructionellem Wege behandelt. Die allgemeinsten hier bewiesenen Sätze sind die folgenden: Ein Parallelogon, welches einer beliebigen Gesammtheit von Dilatationen und Verschiebungen unterworfen worden ist, bleibt als ein solches bestehen (§ 62). Jedes gegebene Parallelogramm kann durch Dilatationen und Verschiebungen in jedes andere verwandelt werden (Satz 15). Bei dieser Gelegenheit liess sich ein neuer Flächensatz aufstellen: Die Flächengrösse eines Parallelogramms ist gleich dem Producte der Länge des von zwei parallelen Seiten des Parallelogramms abgeschnittenen Theiles einer beliebigen Geraden durch die Projectionsgrösse einer zu einem anderen Paar gehörenden Seite auf die zu der Geraden senkrechte Richtung.

Später wurde dieselbe Frage in A. K. S. I und III ausführlich auf analytischem Wege behandelt, und zwar als eine Frage der Projectivitätslehre. Der Grund der analytischen Behandlung entfliesst aus dem der Arbeit vorgestellten Zwecke — das einfachste System der krystallographischen Berechnungen auszuarbeiten. Obgleich dem vorgestellten Zwecke gemäss die Aufgabe scheinbar die des dreidimensionalen Raumes war, reducirt sich aber in der That dieselbe auf eine zweidimensionale und zwar in Folge davon, dass die der Berechnung unterliegenden Raumgebilde eigentlich Ebenen- resp. Geradenbüschel darstellen, so dass dieselben mittelst Linearprojection sich eindeutig als zweidimensionale Gebilde bestimmen lassen. In Folge dessen wurde gerade die Aufgabe der allgemeinsten Projectivität auf der Ebene mit ganz besonderer Ausführlichkeit behandelt.

Der Zweck war in vollkommenster Weise dadurch erreicht, dass man sich zwei Krystallflächen-complexe vorgestellt hatte, einen allgemeiner Art, und den anderen der kubischen Syngonie gehörig, für welchen die einfachsten Berechnungsformeln giltig sind. Der eine Complex wurde durch Linear- und der andere durch gnomonische Projection (also die Linearprojection des polaren Geradenbüschels) dargestellt, und dann die allgemeinsten (linearen) Gleichungen der eindeutigen Projectivität zwischen

Es ist nämlich der Beweis dafür erbracht worden, dass solche Systeme zweierlei Art von Deformationen unterzogen werden können: a) Dilatationen und b) Verschiebungen. Die Deformationen beider Art führen uns aber zu Systemen, deren einzelne Figuren in Bezug auf die Figuren der Grundsysteme wie unter einander überhaupt in derjenigen Beziehung stehen, welche von Möbius als Affinität bezeichnet wurde.

Die Möglichkeit solcher Deformationen ist, wie erwähnt, durch die Syngonieart bedingt und zwar kann durch folgende Sätze ausgedrückt werden:

1. Satz. In jeder singulären Richtung kann positive oder negative Dilatation hervorgerufen werden.

Werden z. B. in einem Quadrat die Diagonalen desselben die singulären Richtungen (also im Falle der rhombischen Syngonie), so kann dasselbe in einen beliebigen Rhombus verwandelt werden, ohne die Grundeigenschaft, reguläre Plantheilung zu sein, zu verlieren. Sind die Richtungen seiner Seiten singuläre, so verwandelt es sich daher in ein beliebiges Rechteck.

2. Satz. Sind alle Richtungen singulär (also der Fall der monoklinen Syngonie), so kann jede derselben als eine Axe der Verschiebung angenommen werden.

Dadurch kann z. B. ein Quadrat in ein Parallelogramm verwandelt werden mit beliebigen inneren Winkeln ebenso wie mit beliebiger Relation seiner Seiten. Auf Grund dieses Satzes verliert es dabei keineswegs die ihm zukommende Grundeigenschaft, eine reguläre Plantheilung zu bilden.

3. Satz. Gibt es keine singuläre Richtungen, so sind Deformationen unmöglich.

Durch diese Sätze erwirbt die oben ausgeführte Ableitung der regulären Plantheilungen I. Ordnung die erwünschte Allgemeinheit.

15. Jetzt gehen wir einen Schritt weiter und unterziehen unserer Untersuchung die Frage, ob Systeme möglich sind, in welchen die Einheiten verschiedenartig orientirt sind? Ist dies der Fall, so stellt sich die weitere Aufgabe bevor, solche Systeme erschöpfend darzustellen.

Für solche Systeme, falls sie überhaupt vorhanden sind, kann die Deckoperation als aus den zwei folgenden zusammengesetzt aufgefasst werden: 1. eine Drehung um eine zur Ebene senkrechte (verticale) Axe und um einen bestimmten Winkel α , und 2. eine einfache Translation.

Dazu kann noch eine Spiegelung in einer verticalen Symmetrieebene kommen.

diesen als einem Geraden- und einem Punktsystem auf der Ebene aufgestellt. Daraus liessen sich auf die einfachste Weise die Formeln zur Berechnung der Krystalle für alle Fälle aufstellen; dadurch wurde das System der krystallographischen Berechnung entwickelt, welches durch die Einfachheit der für die Ausführung der Berechnung nöthigen Operationen alle bisher vorgeschlagenen Systeme weit hinter sich liess. Dieses System der Berechnungen wurde mit bestem Erfolge sogar bei elementaren Vorträgen der Krystallographie im Berginstitut in St. Petersburg angewendet und in dem elementaren „Cursus der Krystallographie“ (Cap. XI) eingeführt.

Als Nebenresultat dieser ausführlichen Behandlung sei erwähnt, dass in den Fällen, in welchen die Projectivitätscurve (eines Punktsystems und eines Geradensystems auf der Ebene) eine Ellipse (reelle oder imaginäre) oder eine Hyperbel ist, sich die beiden correlativen Systeme in polarer Lage (im Sinne Schröter's) aufstellen lassen. In dem Falle der Parabel scheitert aber die Richtigkeit dieses Satzes, und die beiden correlativen Systeme (mit Ausnahme eines ganz speciellen Falles) lassen sich nicht in polare Lage bringen.

Betrachten wir zuerst den Fall ohne hinzukommende Spiegelung.

Dem bekannten elementaren Satze der Kinematik zufolge kann eine Combination von einer Drehung und einer (senkrechten) Translation als eine einzige Drehung aufgefasst werden, wobei die resultirende Drehaxe eine bestimmte Lage erhält. Somit kann das ganze System als um diese Axe gedreht gedacht werden, und kommt dabei wieder zur Deckung mit seiner primitiven Lage. Ist aber die Coincidenz erfolgt, so kann dieselbe Drehung d. h. die Drehung um dieselbe Axe und um denselben Winkel α unbestimmte Male wiederholt werden mit demselben Resultate.

Daraus ist zu schliessen, dass der Drehungswinkel durch den Ausdruck $\frac{2\pi}{p}$ bestimmt werden kann, wo p eine ganze Zahl ist; der Definition gemäss ist also diese Drehaxe nichts anderes als die Symmetrieaxe. Dadurch kommen wir zum Schlusse, dass die allgemeinste congruente Deckoperation eines ebenen Systems eine Drehung um eine Symmetrieaxe ist.

Der elementare Drehungswinkel α kann nicht unendlich klein sein, da wir sonst für eine endliche Deckbewegung die resultirende Drehaxe unendlich weit entfernt gefunden hätten, und dann wäre diese Deckbewegung einfach als Decktranslation zu deuten.

Es sind aber zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden: entweder a) fällt die resultirende Symmetrieaxe in das Innere einer Einheit, oder b) sie fällt in einen Punkt der Peripherie derselben Einheit.

Im ersten Falle ist die Einheit selbst eine symmetrische, und die Symmetrieaxe werden wir als eine explicite bezeichnen. In dem zweiten Falle ist dieselbe als ein Element der Symmetrie des Verbandes (einfacher Verbandssymmetrie) aufzufassen.

16. Wenn zu diesen Operationen noch die Spiegelung hinzukommt, so ist nur der folgende Satz zu berücksichtigen:¹⁾ Das aus einer p -zähligen Symmetrieaxe und einer durch dieselbe hindurchgehenden Symmetrieebene resultirende Symmetrieelement ist die Symmetrieebene, welche mit der gegebenen einen inneren Winkel $\frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}$ bildet.

Auf Grund dieses Satzes können wir schliessen, dass, wenn eine Spiegelung als Deckoperation auftritt, allein die Lage der resultirenden Symmetrieebene in Betracht zu ziehen und auf den Satz 2 § 13 Rücksicht zu nehmen ist.

Auch jetzt kann die Symmetrieebene explicit auftreten, und dann ist die Einheit selbst symmetrisch, oder dieselbe wird als solche oder als Gleitebene zum Element der Verbandssymmetrie.

17. Da die Anzahl der möglichen Orientirungen der Einheiten eine endliche ist, so müssen unter denselben auch gleichorientirte vorkommen.

Nehmen wir eine solche, z. B. die nächstliegende in Betracht, so finden wir, dass dadurch schon eine unendliche congruente Reihe bestimmt wird mit bestimmter Richtung

¹⁾ Da in den hier in Betracht kommenden Systemen die Einheiten nicht gleich orientirt sind, sind dieselben keine Parallelogone im strengen Sinne des Wortes. Als solche können nur deren zusammenhängende Gruppen betrachtet werden, in welchen jede Einheit von besonderer Orientirung vertreten ist. Solche durch Verbands-Symmetrieelemente die Parallelogone bestimmenden Figuren pflegt man Planigone zu bezeichnen. Ein hierzu gehörendes Planigon entspricht dieser Form nach dem einfachen Parallelogon der Systeme I. Ordnung.

und Strecke, und dann folgt von selbst, dass die Gesamtheit gleich orientirter Einheiten ein Netz bildet; also können wir die für die Systeme I. Ordnung gefassten Schlüsse darauf anwenden und finden, dass solche Systeme nur mit denselben zehn Symmetriearten verträglich sind, welche sich ihrerseits in vier Sygoniearten gruppieren.

Wenn die gegebene Einheit nicht von vornherein ein Parallelogon (primäres oder secundäres) ist, so können wir wenigstens eine Anzahl derselben zu einem solchen sich gruppieren lassen. Die Frage besteht eigentlich darin, ob in dem Innern der Einheit ein Punkt vorhanden ist, dessen analoge Punkte in ihrer Gesamtheit ein ebenes Netz bilden. Solche Punkte werden Hauptpunkte genannt.

Ist ein solcher Punkt vorhanden, so wollen wir denselben für das Centrum eines primären Parallelogons annehmen, welches explicit mit allen Arten der Symmetrieelemente versehen ist, die überhaupt in dem System auftreten. Dann werden alle Deckbewegungen der gegebenen Einheit mit den anliegenden zu einfachen Decktranslationen, und das System selbst zu solchem I. Ordnung. Bei dieser Transformation der Einheit wird in der Deckoperation nichts geändert; die transformirte Einheit bleibt mit der gegebenen gleichflächig und ist also die gegebene ein secundäres Parallelogon.

Giebt es keinen solchen Punkt in dem Inneren der Einheit, so muss nothwendiger Weise ein solcher an der Peripherie derselben vorhanden sein. Dies lässt sich einfach dadurch beweisen, dass die Fusspunkte sämtlicher Symmetrieachsen nothwendig ein ebenes Netz bilden.

Es ist also nur der Fall zu besprechen, in welchem keine Symmetrieachsen vorhanden sind. Dann fehlen die Symmetrieelemente überhaupt (das System ist nothwendiger Weise I. Ordnung) oder es treten ausschliesslich parallele Symmetrie- resp. Gleitebenen auf.

Aber auch dieser Fall ist augenscheinlich kein Ausnahmefall, da auch jetzt Hauptpunkte vorhanden sind, und zwar ist ein jeder Punkt, welcher in der Symmetrie- resp. in der Gleitebene oder in der Mittellinie zwischen zwei nächsten Tracen solcher Ebenen liegt, ein Hauptpunkt.

18. Das Resultat aller dieser Betrachtungen ist, dass man zu einer erschöpfenden Darstellung aller typischen Systeme kommt, wenn man alle Symmetriearten eine nach der anderen berücksichtigt, und für jede derselben zum Ausgangspunkt die dazu gehörenden Typen der Parallelogone I. Ordnung auswählt, aber denselben eine geringere explicite Symmetrie zuerkennt, und zwar alle diejenigen Symmetriearten, welche der gegebenen untergeordnet sind, und die frei bleibenden Symmetrieelemente als Elemente der Verbandssymmetrie auffasst.

Die Symmetriegrösse wird dann aus zwei Factoren zusammengesetzt: der Symmetriegrösse der expliciten und derjenigen der Verbandssymmetrie, und deren Product stellt also die Symmetriegrösse des ganzen Systems dar.

Die Symmetriegrösse der Verbandssymmetrie ist dann der Anzahl der Orientirungen der Einheiten des Systems gleich. Im besonderen Falle der asymmetrischen Einheiten ist somit diese Anzahl die Symmetriegrösse des ganzen Systems.

19. Jedes System der Planeinheiten kann seiner Definition gemäss durch das Parallelogon und dessen Orientirungen in den anliegenden Einheiten eindeutig und streng bestimmt werden. Ist das Parallelogon asymmetrisch, so kann die Orientirung der anliegenden Einheiten durch eine einzige Operation bestimmt werden, und zwar entweder a) durch ein-

fache Translation oder b) durch ein Element der Verbandssymmetrie. Die letzte Operation kann durch eine einzige charakteristische Zahl angegeben werden, und zwar auf derjenigen Grenzlinie, in Bezug auf welche die anliegende Raumeinheit die angezeigte Orientirung besitzt. Die Angabe der einfachen Translation kann einfach durch die Abwesenheit einer solchen charakteristischen Zahl angezeigt werden.

Sind die Einheiten symmetrisch und ist ihre explicite Symmetriegrösse s , so kann dieselbe, wie auch sämtliche andere Einheiten des Systems, als solche angesehen werden, welche zugleich s verschiedene Orientirungen besitzen. Somit sind auch die charakteristischen Zahlen für jede Grenzlinie in der Anzahl s vorhanden. Für die Translation bleibt natürlich die Abwesenheit dieser Zahlen bestehen.

Die Systeme wollen wir in solche von verschiedenen Ordnungen gruppieren, je nach der Anzahl der verschiedenen Orientirungen der Einheiten, also nach der Symmetriegrösse der Verbandssymmetrie, d. h. die Anzahl der Orientirungen und zugleich die Ordnung des Systems durch die Division der Symmetriegrösse des ganzen Systems durch diejenige der expliciten Symmetrie erhalten.

20. Bei der erschöpfenden Darstellung der Systeme II. und höherer Ordnung wollen wir der Ordnungsreihe folgen und dabei zuerst die Diparallelogon- und dann die Triparallelogonsysteme aufsuchen.

Jedes Mal beginnen wir mit der vollständigen Darstellung der Ableitungsformen der Systeme d. h. den Formen der für jeden Fall möglichen Vertheilungen der gleich orientirten Einheiten des Systems. Diese Darstellung wird erschöpft, wenn man in der Reihe der absoluten Entfernung verschiedene Einheiten als die nächstliegenden gleich orientirten ansieht.

Jede solche Annahme giebt uns sofort eine bestimmte Reihe mit der ihr zugeordneten Richtung und Strecke. Ist diese Richtung keine singuläre, so erhalten wir sofort wenigstens zwei gleiche Reihen in verschiedenen Richtungen, und das Netz der gleich orientirten Raumeinheiten, also auch die Ableitungsform, ist bestimmt.

Ist diese Richtung singulär, so führt diese Annahme nur zur Bestimmung einer einzigen Reihe, und dann steht noch bevor, eine andere Annahme beizufügen. Die Anzahl der zulässigen Annahmen, folglich auch die Anzahl der zulässigen Ableitungsformen, wird in diesem Falle grösser.

Daraus ist zu schliessen: a) dass die Aufsuchung der Ableitungsformen eine Frage der Syngonie und nicht der Symmetrie ist, und b) dass die Ableitungsformen der höheren Syngoniearten für jeden Parallelogontypus und jede gegebene Ordnungszahl des Systems unter denjenigen der niederen Syngoniearten stehen.

Also die Ableitungsformen der rhombischen Syngonie sind in denen der monoklinen, und die Ableitungsformen der tetragonalen und hexagonalen Syngonie in denen der rhombischen Syngonie enthalten.

21. Ist eine Ableitungsform ermittelt worden, so werden dadurch bestimmte Relationen in der Orientirung verschiedener Einheiten bedingt. Dabei sind aber auch individuelle Eigenschaften der aufzutretenden Symmetrieelemente in Betracht zu ziehen. Diese Eigenschaften lassen sich auf Grund der Sätze § 13 entwickeln.

Auf dem Satze 1 fussend, können wir in Bezug auf die sechszählige Symmetrieaxe schliessen, dass dieselbe keineswegs als ein Element der Verbandssymmetrie auftreten kann.

Demselben Satze zu Folge ist dies aber keineswegs für vier-, drei- und zweizählige Axen der Fall, indem die erste in den Eckpunkt des Quadrates, die zweite in den Eckpunkt des regulären Sechsecks, und die dritte in den Mittelpunkt jeder Grenzlinie überhaupt fallen kann.

Das Vorhandensein jeder dieser Axen als Elemente der Verbandssymmetrie giebt uns die Orientirung zweier anliegenden (für vier- und dreizählige Axen) oder nur einer einzigen anliegenden Einheit (für zweizählige Axe) an, und keineswegs die Orientirung derjenigen, welche durch parallele und entgegengesetzte Grenzlinien von der gegebenen Einheit abgetrennt sind. Sämmtliche durch eine einzige Axe angegebenen Orientirungen sind dabei verschieden.

Solche Elemente der Verbandssymmetrie wollen wir speciell als periphere bezeichnen.

Dann lautet der Schluss dieser Betrachtungen:

Vier-, drei- und zweizählige Symmetrieaxen, welche als Elemente der Verbandssymmetrie auftreten, sind periphere.

22. Sind für eine Symmetrieebene charakteristische Zahlen angegeben, so haben dieselben verschiedene Bedeutung, je nach der relativen Lage des entsprechenden Symmetrieelementes.

Beziehen sich diese Zahlen auf Grenzgeraden, welche zu den Tracen der betreffenden Symmetrieebene parallel sind, so drücken sie die Symmetrieebene selbst als ein periphere Symmetrieelement aus. Dies kann aber nur für Diparallelogonsysteme der Fall sein, da die periphere liegende Symmetrieebene der Triparallelogone zugleich die explicite ist.

Beziehen sich diese Zahlen auf Grenzgeraden, welche zu den Tracen der betreffenden Symmetrieebene senkrecht stehen, so drücken sie die Gleitebene als ein centrales Element der Verbandssymmetrie aus. Dazu gehört eine Colonne II. Ordnung.

Beziehen sich endlich diese Zahlen auf die Tracen der Symmetrieebenen schief stehender Grenzgeraden, so drücken sie die Gleitebene als ein schief schneidendes Element der Verbandssymmetrie aus.

23. Jetzt können wir die Aufgabe der Aufsuchung der Systeme höherer Ordnung behandeln.

Ist die gegebene Einheit mit einer anliegenden durch Translation verbunden, so entsteht dadurch eine Colonne I. Ordnung, und das ganze System stellt dann eine Reihe paralleler anliegender Columnen I. Ordnung dar, deren Einheiten aber verschiedene Orientirung besitzen. Die Richtungen solcher Columnen können aber nur singuläre sein. Solche Columnensysteme sind also nur bei monokliner und rhombischer Syngonie möglich.

Dabei können die gleich orientirten Einheiten einer Colonne mit der gegebenen durch periphere oder durch schneidende Elemente der Verbandssymmetrie verbunden sein. Ist dabei ein centrales Element der Verbandssymmetrie vorhanden, so kann das System nur II. Ordnung sein. Dasselbe ist der Fall überhaupt, wenn die durch die gegebene Einheit abgetrennten Einheiten einer Colonne gleich orientirt sind.

Wir wollen die Systeme dieser Art durch Beigabe des Buchstaben *c* besonders anmerken.

24. Zwei Colonnen I. Ordnung aber verschiedener Richtung bedingen das ganze System I. Ordnung.

Es bleibt uns also den Fall zu besprechen, in welchem keine anliegende Einheit mit der gegebenen durch Translation verbunden ist.

Nun unterscheiden wir folgende wichtigste Unterfälle:

a) Die entgegengesetzten parallelen Grenzlinien sind immer durch dieselben charakteristischen Zahlen besetzt. In den Systemen dieses Typus sind sämtliche Colonnen solche II. Ordnung.

Als periphere Symmetrieelemente können zwei- und vierzählige Symmetrieachsen auftreten; für die letzteren werden alle vier Grenzlinien besetzt und das System eindeutig bestimmt.

Die dreizählige Symmetrieachse kann aber als periphere nicht auftreten, da für diese Systeme das Vorhandensein einer solchen Achse schon genügend zur Bestimmung des Systems wäre, welches dabei III. Ordnung sein müsste, während solche Systeme nur II. oder mehrfacher Ordnung sein können.

Als centrale können hier Gleitebenen auftreten. Tritt aber eine Gleitebene schneidend dazu, so lässt sich dadurch ein einziges System bestimmen.

Die Wichtigkeit der Abgliederung der Systeme dieser Art besteht darin, dass denselben eine einfachere Bestimmung durch charakteristische Zahlen zukommt, indem man nur zwei Zahlen aufstellt und von den den entgegengesetzten Grenzlinien angehörenden Zahlen absieht.

Diese Systeme wollen wir als phanerotopische bezeichnen, in Anbetracht dessen, dass für dieselben durch die charakteristischen Zahlen sämtliche Colonnen ausdrücklich bestimmt werden, und dabei keine centralen Symmetrieelemente in versteckter Form auftreten.

25. In dem Unterfalle b) sind die beiden charakteristischen Zahlen einer Colonne für die durch gegebene abgetrennte Einheiten nicht sämtlich dieselben. Nehmen wir eine Colonne heraus, so finden wir, dass die gegebene Einheit mit den anliegenden und nur mit diesen ausdrücklich durch ein gewisses Element der Verbandssymmetrie verbunden ist; für die folgenden Einheiten ist das entsprechende Element in versteckter Form enthalten und ist erst auf Grund der speciellen Sätze zu ermitteln. In Folge dessen wollen wir die Systeme dieser Art als kryptotopische bezeichnen.

Hierzu gehören auch die Colonnensysteme von höherer als II. Ordnung; ferner die Systeme mit peripherischen dreizähligen Symmetrieachsen.

In diesen Systemen können auch centrale Gleitebenen in versteckter Form auftreten, und zwar dann, wenn unter zwei entgegengesetzten charakteristischen Zahlen eine die zweizählige Symmetrieachse und die andere die Symmetrieebene ausdrückt.

Speciell für solche Systeme ist der folgende Satz giltig:

Ist in einer Colonne die gegebene Einheit mit der nicht anliegenden durch eine centrale Gleitebene singulärer Richtung kryptotopisch verbunden, so ist die zu ihr senkrechte Colonne höchstens II. Ordnung; ist eine solche

Colonne überhaupt nicht vorhanden, so sind die zu der gegebenen Colonne senkrechten Reihen I. Ordnung.

Es sei die in der Fig. 3 punktirt angegebene centrale kryptotopische Gleitebene abc vorhanden; da dieselbe singular vorausgesetzt wird, so sind ebensolche centrale Gleitebenen in sämtlichen Einheiten des Systems vorhanden. Es sei d eine der gegebenen Einheit a anliegende Einheit. Nach der erfolgten Gleitung an der Ebene abc wird d in die Lage e kommen, wobei e die der c anliegende Einheit ist. Unterwerfen wir die Einheit e der Gleitung in der entgegengesetzten Richtung, indem wir dabei für die Gleitebene die Centrale in Bezug auf sie selbst annehmen, so kommt dieselbe in die Lage f , wird also zugleich zur anliegenden in Bezug auf a , gehört derselben Colonne daf wie d an, ist aber mit d gleich orientirt. Folglich ist die Colonne daf II. Ordnung.

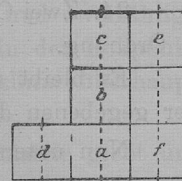


Fig. 3.

Falls aber die Einheiten d und f nicht einer und derselben zu abc senkrechten Colonne angehören, so bedingen sie doch die zu abc senkrechte Reihe I. Ordnung.

Die Zugehörigkeit zu kryptotopischen Systemen wird durch die Beigabe zweier charakteristischer Zahlen erwiesen.

26. In dem eben besprochenen Falle der kryptotopischen Colonne abc können die zu d oder f zugehörenden charakteristischen Zahlen keineswegs mit einer der beiden der Colonne abc zugehörenden Zahlen identisch sein, da, auf diese Annahme fussend, wir zwei Reihen I. Ordnung erhalten hätten, etwa die Reihen bd und bf , und dann wäre die Colonne abc II. Ordnung gewesen. Sie können aber mit der der Einheit c entsprechenden Zahl identisch sein.

In diesem besonderen Falle kann die Einheit selbst kein Symmetrieelement explicit enthalten. Auch die Auswahl der Elemente der Verbandssymmetrie für d und f ist in hohem Grade beschränkt.

27. Wenn die Einheit die explicite Symmetrie enthält, so sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Entweder a) ist diese Symmetrie der Verbandssymmetrie untergeordnet. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Einheit zweizählige Symmetrieachsen besitzt, und dabei unter den Elementen der Verbandssymmetrie vierzählige Symmetrieachsen vorkommen.

Ist dies der Fall, so wird die Ordnung um so viele Male im Vergleiche mit den analogen, deren Einheiten asymmetrisch sind, niedriger, als die Zahl der expliciten Symmetriegrösse beträgt.

Oder b) sind die Elemente der expliciten Symmetrie von denjenigen der Verbandssymmetrie unabhängig. In diesem Falle bleibt die Ordnung dieselbe. Solche Systeme lassen sich also aus den asymmetrischen durch einfache Einschaltung der betreffenden Symmetrieelemente ableiten.

Es ist aber stets bei dieser Einschaltung zu berücksichtigen, ob die Lagerung der Elemente der Verbandssymmetrie solche Einschaltung zulässt.

28. Jetzt verfolgen wir den Gang der Darstellung der in der Tabelle I zusammengestellten Systeme.

Diese Tabelle ist in acht Colonnen getheilt; in der 1. Colonne ist die Ableitungsform, in der 2. die Symmetrieart durch Nummern ausgedrückt, in der 3. die Symmetriegrösse des

Systems, in der 6. die charakteristischen Zahlen der expliziten Symmetrie, in der 5. der zu Grunde liegende Typus des Systems I. Ordnung, in der 4. die Nummerierung nach den Symmetriearten, in der 7. die charakteristischen Zahlen, und endlich in der 8. wird die Bezeichnung des gefundenen Systems durch ein besonderes Symbol angegeben, dessen I. Theil das entsprechende Punktsystem und der II. Theil die explizite Symmetrie der Einheit ausdrückt. Wenn für die gegebene Symmetriearart verschiedene Typen der Parallelogone I. Ordnung untergeordnet sind, so wird der Bezeichnung des bezüglichen Parallelogons durch die untere Zahl noch die Bezeichnung des entsprechenden Typus zugefügt. Die Bezeichnungen für Colonnensysteme und kryptotopische Systeme sind schon oben erwähnt.

Die Bedeutung der Buchstaben der I. Colonne wird für die entsprechenden Parallelogone durch die Figuren 4 und 5 erläutert. Dann findet man sogleich auf Grund der Zahlen der 7. Colonne die Lage der Elemente der Verbandssymmetrie.

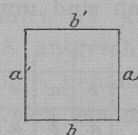


Fig. 4.

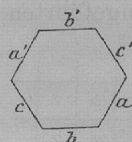


Fig. 5.

29. Die allein möglichen Ableitungsformen für die Systeme der Diparallelogone II. Ordnung und monokliner Syngonie sind diejenigen, welche durch die Annahmen bedingt worden sind, dass entweder a) eine der Columnen derselben I. Ordnung ist, oder b) keine derselben I. Ordnung ist. Für die erste Annahme erhalten wir die charakteristischen Zahlen $a1$ oder $1a$, wobei die Zahl 1 die einfache Translation ausdrückt. Für die zweite erhalten wir die entsprechenden Zahlen aa .

Dieselben Ableitungsformen bleiben auch für die rhombische Syngonie gültig.

Für die tetragonale Syngonie bleibt allein die Form aa gültig.

30. Die Diparallelogonsysteme IV. Ordnung sind nur für die rhombische und tetragonale Syngonie zulässig.

Als allein zulässige Ableitungsformen für rhombische Symmetrie, je nachdem, sind die Columnen von singulärer Richtung; wenn nicht, erhalten wir die folgenden.

I. Die Richtungen der Columnen sind singuläre.

1) Als die nächsten gleich orientirten Einheiten werden die Einheiten 02 und 20 angenommen (Fig. 6). Man erhält das phanerotopische System ab .

2) Als die nächsten gleich orientirten Einheiten werden die Einheiten 04 und 10 angenommen (Fig. 7). Man erhält das kryptotopische Colonnensystem $\frac{a}{a'}$; wo $\frac{a}{a'}$ zwei einer

	1	a	1	a	1
	b	c	b	c	b
	1	a	1	a	1
	b	c	b	c	b
	1	a	1	a	1

Fig. 6.

	1	1	1	1	1
	a'	a'	a'	a'	a'
	b	b	b	b	b
	a	a	a	a	a
	1	1	1	1	1

Fig. 7.

Colonne angehörende und zu zwei anliegenden Einheiten bezügliche charakteristische Zahlen sind.

3) Als die nächsten gleich orientirten Einheiten werden die Einheiten 04 und 12 angenommen (Fig. 8). Man erhält das kryptotopische System $\frac{a}{a'}$; b .

Weitere Annahmen sind ausgeschlossen.

II. Die Richtungen der Columnen sind nicht singuläre.

In diesem Falle sind die diagonalen Richtungen singuläre.

Aus den eben ermittelten Ableitungsformen erscheint zwar die 1. d. h. 11 als die zulässige. In der Wirklichkeit kann dieselbe aber durch kein System vertreten werden, da dazu gehörende Symmetrieelemente fehlen, weil das dazu gehörende Symmetrieelement allein die zweizählige Symmetrieaxe ist und kein anderes.

Die beiden anderen angeführten Ableitungsformen sind unmöglich.

	1	b	1	b	1
	a'	a	a'	a	a'
	b	1	b	1	b
	a	a'	a	a'	a
	1	b	1	b	1

Fig. 8.

	b	a'	1	a	b
	a	b	a'	1	a
	1	a	b	a'	1
	a'	1	a	b	a'
	b	a'	1	a	b

Fig. 9.

Die einzige dazu gehörende Ableitungsform ist die folgende: die nächsten gleich orientirten Einheiten 04 und 13 (Fig. 9). Man erhält das kryptotopische System $\frac{a}{a'}$; $\frac{a}{a'}$.

Für die tetragonale Syngonie bleibt allein die Ableitungsform ab zulässig.

31. Die Diparallelogone VIII. Ordnung sind nur für tetragonale Syngonie und zwar für die 6. Symmetrieart möglich. Dabei sind die Einheiten nothwendig asymmetrische.

Da jetzt keine singulären Richtungen da sind, so kann es nur eine einzige Ableitungsform geben, und zwar diejenige, welche der Annahme entspricht, dass die nächste gleich orientirte Einheit 22 ist. Man erhält das kryptotopische System $\frac{a}{a'}$; $\frac{b}{b'}$.

32. Der Ableitungsgang der Systeme II. Ordnung ist so einfach und verständlich, dass schwerlich nähere Hinweise dazu erforderlich sind.

Für monokline Systeme steht ein einziges Element der Verbandssymmetrie zur Verfügung.

Dasselbe gilt für die 3. Symmetrieart.

Für die vierte Symmetrieart sind zwei verschiedene zu Grunde liegende Typen I. Ordnung zu berücksichtigen. Für jeden Typus sind weiter die verschiedenen Arten der expliciten Symmetrie in Betracht zu ziehen, und zwar 2. und 3.

Für die 5. Symmetrieart steht allein die 2. Symmetrieart als untergeordnet zur Verfügung.

Für die 6. Symmetrieart sind die 4. und die 5. als die untergeordneten Symmetriearten zu berücksichtigen.

Was die Systeme IV. Ordnung betrifft, so sind die der 4. und 5. Symmetrieart zugehörigen Einheiten asymmetrisch, und bei der Berücksichtigung der möglichen Combinationen der Elemente der Verbandssymmetrie in erster Linie die leitenden Gesichtspunkte der Lehre von der scheinbaren Symmetrie (§ 11) zu berücksichtigen, damit ein und dasselbe System nicht für verschiedene anzunehmen ist.

Derselbe Zweck kann aber dadurch erreicht werden, dass man sich direct von der Verschiedenheit der durch dasselbe Symbol auszudrückenden Systeme wie 16 (1 II₅) und 16 (1 II₅)' genaue Rechenschaft giebt. Für diese Systeme ist z. B. die Verschiedenheit ganz augenscheinlich, indem für das erste eine zweizählige Symmetrieaxe und eine centrale Gleitebene, für das zweite zwei centrale Gleitebenen als Elemente der Verbandssymmetrie auftreten.

Was endlich die Systeme VIII. Ordnung betrifft, so ist das Vorhandensein der untrennbaren charakteristischen Zahlen 37 ganz augenscheinlich, und umgekehrt sind die charakteristischen Zahlen 4 und 8 ausgeschlossen, da deren Anwesenheit die Gleichheit einiger Zahlen als nothwendige Folge gehabt haben würde, was auf Grund der Ableitungsform unzulässig ist. Somit lässt sich ein einziges hierzu gehörendes System ableiten.

33. Für Triparallelogonsysteme II. Ordnung liegt nun eine einzige Ableitungsform zu Grunde, da jetzt die Formen $a;1$ und $a;a$ nicht mehr verschieden sind. Diese Systeme sind die Colonnensysteme. Solche Systeme sind aber für hexagonale Syngonie unmöglich (§ 23). Was aber die Systeme der monoklinen und rhombischen Syngonie betrifft, so stehen dieselben den Systemen der Diparallelogone, und speciell die der rhombischen Syngonie jenen der Typen 4 II und 6 II so nahe, dass die hierzu gehörende Ableitung fast als reine Wiederholung desselben aufzufassen wäre.

Ganz besondere Verhältnisse treffen wir aber für die Systeme der hexagonalen Syngonie, für welche allein die Systeme III. Ordnung möglich sind mit alleiniger Ableitungsform $\frac{a}{a'}; \frac{a'}{a}$ (Fig. 10).

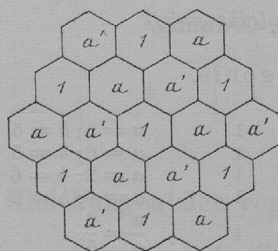


Fig. 10.

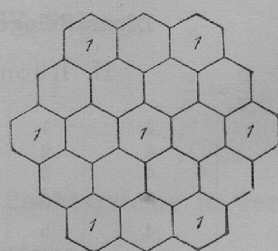


Fig. 11.

Die allein noch zulässige Ableitungsform ab (Fig. 11), welcher die phanerotropischen Systeme IV. Ordnung entsprechen würden, wird aber in den wirklichen Systemen weder für rhombische noch für hexagonale Syngonie vertreten, und zwar aus demselben Grunde, wie die Systeme ab der Diparallelogone, in welchen die singulären Richtungen die diagonalen sind (§ 30), d. h. dass die dazu nöthigen Symmetrieelemente nicht zur Disposition stehen.

Dadurch ist die aufgestellte Aufgabe dieses I. Theiles in erschöpfender Weise gelöst.

Es sei erlaubt hervorzuheben, dass jetzt auch diejenigen regelmässigen Punktsysteme zu Tage getreten sind (14, 15, 16 und 17), welche in regulären Theilungen I. Ordnung nicht vorkommen.

I. Reguläre Plantheilungen II. und höherer Ordnung.

Ableitungs- form	Symmetrie- art	Symmetrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Explicite Symmetrie	Verbands- Symmetrie	Symbol des Systems
---------------------	-------------------	----------------------	-----	---------------------	------------------------	------------------------	-----------------------

Diparallelogonsysteme II. Ordnung.

I. Monokline Syngonie.

$a1$	2	2	1	2 II	1	$a = 5$	$2(1 II)^c$
aa	2	2	2	2 II	1	$a = 5$	$2(1 II)$

II. Rhombische Syngonie.

$a1$	3	2	1	3 II	1	$a = 2$	$3(1 II_5)^c$
aa	3	2	2	3 II	1	$a = 2$	$4(1 II_5)$
aa	3	2	3	4 II	1	$a = 4$	$14(1 II_6)$
$a1$	4	4	1	5 II	15	$a = 26$	$15(2 II_5)^c$
aa	4	4	2	5 II	15	$a = 26$	$6(2 II_5)$
$a1$	4	4	3	5 II	12	$a = 56$	$15(3 II_5)^c$
$1b$	4	4	4	5 II	12	$a = 56$	$5(3 II_5)^c$
aa	4	4	5	5 II	12	$a = 56$	$6(3 II_5)$
aa	4	4	6	6 II	15	$a = 48$	$16(2 II_6)$
aa	4	4	7	6 II	14	$a = 58$	$15(4 II_6)$

III. Tetragonale Syngonie.

aa	5	4	1	7 II	15	$a = 37$	$7(2 II)$
aa	6	8	1	8 II	1357	$a = 2468$	$17(7 II)$
aa	6	8	2	8 II	1256	$a = 3478$	$17(5 II)$
aa	6	8	3	8 II	1458	$a = 2367$	$8(6 II)$

Diparallelogonsysteme IV. Ordnung.

II. Rhombische Syngonie.

ab	4	4	1	5 II	1	$a = 2; b = 5$	$15(1 II_5)$
ab	4	4	2	5 II	1	$a = 6; b = 5$	$16(1 II_5)$
ab	4	4	3	5 II	1	$a = 2; b = 6$	$5(1 II_5)$
ab	4	4	4	5 II	1	$a = 6; b = 2$	$16(1 II_5)'$
$\frac{a}{a'}; 1$	4	4	5	5 II	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{5}$	$15(1 II_5)_{25}^c$
$\frac{a}{a'}; b$	4	4	6	5 II	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{5}; b = 6$	$6(1 II_5)_{25}$
$\frac{a}{a'}; \frac{a}{a'}$	4	4	7	6 II	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4}{5}$	$16(1 II_6)_{45}$

III. Tetragonale Syngonie.

ab	5	4	1	7 II	1	$a = 3; b = 7$	$7(1 II)$
ab	6	8	1	8 II	18	$a = 23; b = 67$	$8(4 II)$
ab	6	8	2	8 II	14	$a = 36; b = 27$	$17(4 II)$

Ableitungs- form	Symmetrie- art	Symmetrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Explicite Symmetrie	Verbands- Symmetrie	Symbol des Systems
---------------------	-------------------	----------------------	-----	---------------------	------------------------	------------------------	-----------------------

Diparallelogonsysteme VIII. Ordnung.

$\frac{a}{a'}; \frac{b}{b'}$	6	8	1	8 II	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{3}; \frac{b}{b'} = \frac{6}{7}$	17 (1 II) ₂₃
------------------------------	---	---	---	------	---	--	-------------------------

Triparallelogonsysteme II. Ordnung.

I. Monokline Syngonie.

aa	2	2	1	2 III	1	$a = 7$	2 (1 III) ^c
------	---	---	---	-------	---	---------	------------------------

II. Rhombische Syngonie.

$a1$	3	2	1	4 III	1	$a = 2$	14 (1 III) ^c
$a1$	3	2	2	4 III'	1	$a = 8$	14 (1 III') ^c
$a1$	4	4	1	6 III	17	$a = 28$	16 (2 III) ^c
$a1$	4	4	2	6 III	12	$a = 78$	15 (4 III') ^c
$a1$	4	4	3	6 III	18	$a = 27$	15 (4 III) ^c

Triparallelogonsysteme III. Ordnung.

IV. Hexagonale Syngonie.

$\frac{a}{a'}; \frac{a'}{a}$	7	3	1	9 III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{9}$	9 (1 III) ₅₉
$\frac{a}{a'}; \frac{a'}{a}$	8	6	1	11 III	1·12	$\frac{a}{a'} = \frac{45}{89}$	11 (4 III) ₄₈

Triparallelogonsysteme IV. Ordnung.

$\frac{a}{a'}; 1$	4	4	1	6 III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{7}$	16 (1 III) ₂₇
-------------------	---	---	---	-------	---	------------------------------	--------------------------

II. Die Gleichungen der regelmässigen Punktsysteme in der Ebene.¹⁾

A. Symmorphie Systeme.

I. Monokline Syngonie.

Nr.	Symmetrieart		
1	1	$z = c + \lambda_0;$	$v = d + \lambda_1$
2	2	$z = n^k c + \lambda_0;$	$v = n^k d + \lambda_1$

¹⁾ Wie die Symmetriearten selbst (S. 471 Anm.), so können auch die regelmässigen ebenen Punkt-
Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XX. Bd. II. Abth.

II. Rhombische Syngonie.

Nr.	Symmetrieart		
3	3	$z = n^k c + \lambda_0;$	$v = d + \lambda_1$
4	3	$z = n^k c + f \frac{\lambda_0}{2};$	$v = d + f \frac{\lambda_1}{2}$
5	4	$z = n^k c + \lambda_0;$	$v = n^l d + \lambda_1$
6	4	$z = n^k c + f \frac{\lambda_0}{2};$	$v = n^l d + f \frac{\lambda_1}{2}$

III. Tetragonale Syngonie.

7	5	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0;$	$y_1 = b_{s+1}^4 + \lambda_0$
8	6	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0;$	$y_1 = b_{s+n^k}^4 + \lambda_0$

systeme ausser geradelinigen Coordinaten noch in Vektoren analytisch ausgedrückt werden, wie man dies aus folgender Zusammenstellung ersieht (S. L. IV S. 42).

Die Gleichungen der regelmässigen ebenen Punktsysteme
in Linearcoordinaten in Vektoren

A. Symmorphie Systeme.

I. Monokline Syngonie.

Nr.	Symmetrieart			
1	1	$z = c + \lambda_0$	$v = d + \lambda_1$	$V = a + b \cdot i + \lambda_0 + B (\lambda'_0 + \lambda'_1 \cdot i)$
2	2	$z = n^k c + \lambda_0$	$v = n^k d + \lambda_1$	$V = n^l (a + b \cdot i) + \lambda_0 + B (\lambda'_0 + \lambda'_1 \cdot i)$

II. Rhombische Syngonie.

3	3	$z = n^k c + \lambda_0$	$v = d + \lambda_1$	$V = a + n^k b \cdot i + \lambda_0 + \lambda_1 \cdot i$
4	3	$z = n^k c + f \frac{\lambda_0}{2}$	$v = d + f \frac{\lambda_1}{2}$	$V = a + n^k b \cdot i + f \frac{\lambda_0}{2} + f \frac{\lambda_1}{2} \cdot i$
5	4	$z = n^k c + \lambda_0$	$v = n^l d + \lambda_1$	$V = n^l a + n^k b \cdot i + \lambda_0 + \lambda_1 \cdot i$
6	4	$z = n^k c + f \frac{\lambda_0}{2}$	$v = n^l d + f \frac{\lambda_1}{2}$	$V = n^l a + n^k b \cdot i + f \frac{\lambda_0}{2} + f \frac{\lambda_1}{2} \cdot i$

III. Tetragonale Syngonie.

7	5	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0$	$y_1 = b_{s+1}^4 + \lambda_0$	$V = \sqrt[4]{a + b \cdot i} + \lambda_0 + i \lambda_0$
8	6	$y_0 = b_s^4 + \lambda_0$	$y_1 = b_{s+n^k}^4 + \lambda_0$	$V = \sqrt[4]{a + n^k b \cdot i} + \lambda_0 + i \lambda_0$

IV. Hexagonale Syngonie.

9	7	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0$	$y_1 = b_{s+1}^3 + \lambda_0$	$V = \sqrt[3]{a + b \cdot i} + \lambda_0 + B (1 + \sqrt{3} \cdot i) \frac{\lambda_0}{2}$
10	8	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0$	$y_1 = b_{s+n^k}^3 + \lambda_0$	$V = \sqrt[3]{a + n^k b \cdot i} + \lambda_0 + B (1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot i) \frac{\lambda_0}{2}$
11	9	$y_0 = b_s^3 + f \frac{\lambda_0}{3}$	$y_1 = b_{s+n^k}^3 + f \frac{\lambda_0}{3}$	$V = \sqrt[3]{a + n^k b \cdot i} + \lambda_0 + B (1 + \sqrt{3} \cdot i) \frac{\lambda_0}{2}$
12	9	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0$	$y_1 = b_{s+1}^6 + \lambda_0$	$V = \sqrt[6]{a + b \cdot i} + \lambda_0 + B (1 + \sqrt{3} \cdot i) \frac{\lambda_0}{2}$
13	10	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0$	$y_1 = b_{s+n^k}^6 + \lambda_0$	$V = \sqrt[6]{a + n^k b \cdot i} + \lambda_0 + B (1 + \sqrt{3} \cdot i) \frac{\lambda_0}{2}$

IV. Hexagonale Syngonie.

Nr.	Symmetrieart		
9	7	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0;$	$y_1 = b_{s+1}^3 + \lambda_0$
10	8	$y_0 = b_s^3 + \lambda_0;$	$y_1 = b_{s+n^k}^3 + \lambda_0$
11	8	$y_0 = b_s^3 + f \frac{\lambda_0}{3};$	$y_1 = b_{s+n^k}^3 + f \frac{\lambda_0}{3}$
12	9	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0;$	$y_1 = b_{s+1}^6 + \lambda_0$
13	10	$y_0 = b_s^6 + \lambda_0;$	$y_1 = b_{s+n^k}^6 + \lambda_0$

B. Asymorphe Systeme.

II. Rhombische Syngonie.

14	3	$z = n^k c + \lambda_0;$	$v = d + k \frac{\lambda_1}{2}$
15	4	$z = n^k c + l \frac{\lambda_0}{2};$	$v = n^l d + \lambda_1$
16	4	$z = n^k c + l \frac{\lambda_0}{2};$	$v = n^l d + k \frac{\lambda_1}{2}$

III. Tetragonale Syngonie.

17	6	$y_0 = b_s^4 + (f+k) \frac{\lambda_0}{2};$	$y_1 = b_{s+n^k}^4 + f \frac{\lambda_0}{2}$
----	---	--	---

III. Zusammenstellung der regelmässigen ebenen Punktsysteme und der ihnen zugeordneten regulären Plantheilungen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

I. Monokline Syngonie.

$\begin{array}{c c c c} 1 & 1 & \text{II} & \\ \hline 2 & 2 & \text{II} & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} & & & \\ \hline (1 \text{ II})^c & (1 \text{ II}) & & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} - & - & - & \\ \hline - & - & - & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} \text{III} & \text{III} & \text{III} & \\ \hline \text{III} & \text{III} & \text{III} & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} - & - & - & \\ \hline (1 \text{ III})^c & (1 \text{ III}) & & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} - & - & - & \\ \hline - & - & - & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} 1 & 1 & 1 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} 2 & 2 & 2 & \\ \hline 5 & 5 & 5 & \end{array}$		
zusammen								4	3	7

B. Asymorphe Systeme.

I. Rhombische Syngonie.

Nr.	Symmetrieart			
14	3	$z = n^k c + \lambda_0$	$v = d + k \frac{\lambda_1}{2}$	$V = a + n^k \cdot b \cdot i + k \frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cdot i$
15	4	$z = n^k c + l \frac{\lambda_0}{2}$	$v = n^l d + \lambda_1$	$V = n^l a + n^k \cdot b \cdot i + l \cdot \frac{\lambda_0}{2} \cdot i + \lambda_1$
16	4	$z = n^k c + l \frac{\lambda_0}{2}$	$v = n^l d + k \frac{\lambda_1}{2}$	$V = n^l a + n^k \cdot b \cdot i + k \cdot \frac{\lambda_0}{2} \cdot i + l \cdot \frac{\lambda_1}{2} \cdot i$

II. Tetragonale Syngonie.

17	6	$y_0 = b_s^4 + (f+k) \frac{\lambda_0}{2}$	$y_1 = b_{s+n^k}^4 + f \frac{\lambda_0}{2}$	$V = \sqrt[4]{a + n^k \cdot b \cdot i + (f+k) \frac{\lambda_0}{2}} + f \frac{\lambda_1}{2} \cdot i$
----	---	---	---	---

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

II. Rhombische Syngonie.

3	3	II	(1 II ₅) ^c	—	—	—	—	—	—	2	—	2
4	3	II	(1 II ₅)	—	—	III III'	—	—	—	2	2	4
14	3	—	(1 II ₆)	—	—	—	(1 III) ^c (1 III') ^c	—	—	1	2	3
5	4	II	(3 II ₅) ^c	(1 II ₅)	—	—	—	—	—	3	—	3
6	4	II	(2 II ₅) (3 II ₆)	(1 II ₅) ₂₅	—	III	—	—	—	4	1	5
15	4	—	(2 II ₆) ^c (3 II ₅) ^c (4 II ₆)	(1 II ₅) (1 II ₆) ₂₅ ^c	—	—	(4 III') ^c (4 III) ^c	—	—	5	2	7
16	4	—	(2 II ₆)	(1 II ₅) (1 II ₅ ') (1 II ₆) ₄₅	—	—	(2 III) ^c	—	(1 III) ₂₇ ^c	4	2	6
zusammen										21	9	30

III. Tetragonale Syngonie.

7	5	II	(2 II)	(1 II)	—	—	—	—	—	3	—	3
8	6	II	(6 II)	(4 II)	—	—	—	—	—	3	—	3
17	6	—	(7 II) (5 II)	(4 II)	(1 II) ₂₃	—	—	—	—	4	—	4
zusammen										10	—	10

IV. Hexagonale Syngonie.

9	7	—	—	—	—	III	—	(1 III) ₅₉	—	—	2	2
10	8	—	—	—	—	III	—	—	—	—	1	1
11	8	—	—	—	—	III	—	(4 III) ₄₈	—	—	2	2
12	9	—	—	—	—	III	—	—	—	—	1	1
13	10	—	—	—	—	III	—	—	—	—	1	1
zus.	8	—	16	10	1	10	6	2	1	—	7	7
Gesamtsumme										35	19	54

Hier bedeuten: Colonne 1: Nr. des regelmässigen Punktsystems; Col. 2: Nr. der Symmetrieart; Col. 3: Diparallelogonsysteme I. Ordnung; Col. 4: II. Ordnung; Col. 5: IV. Ordnung; Col. 6: VIII. Ordnung; Col. 7: Triparallelogonsysteme I. Ordnung; Col. 8: II. Ordnung; Col. 9: III. Ordnung; Col. 10: IV. Ordnung; Col. 11: Anzahl der Diparallelogonsysteme; Col. 12: Anzahl der Triparallelogonsysteme; Col. 13: Gesamtsumme der Diparallelogon- und Triparallelogonsysteme.

II. Theil. Reguläre Raumtheilung.

Die uns jetzt bevorstehende Aufgabe ist durch so viele Analogien mit der eben abgeschlossenen verbunden und durch deren Auflösung in solchem Grade erleichtert, dass die hierzu gehörende Untersuchung fast als eine Wiederholung des I. Theiles anzusehen wäre. Natürlich compliciren sich ansehnlich die Theilaufgaben und wird die Anzahl der zu erhaltenen Auflösungen in hohem Umfang grösser.

1. Auch hier sind in erster Linie zwei Hauptarten der regulären Raumtheilung zu unterscheiden: entweder a) sind sämtliche Raumfiguren parallel orientirt, oder b) ist dies nicht der Fall.

Die Systeme, welche erster Voraussetzung entsprechen, werden auch jetzt als Systeme I. Ordnung bezeichnet, und wir wollen unsere Untersuchung mit der erschöpfenden Aufsuchung dieser Systeme beginnen.

2. Denken wir zwei beliebige Systemfiguren herausgenommen. Sie sind untereinander durch einfache Translation verbunden, welche zugleich die Decktranslation für sämtliche

andere Raumeinheiten ist. Für diese Translation erhalten wir eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Strecke. Die Deckung kann in dieser Richtung und um diese Strecke beliebige Male wiederholt werden, und jedes Mal kommt das ganze System mit sich selbst zur Deckung. Jede einzelne beliebig herausgenommene Raumeinheit zusammen mit der gegebenen bestimmt eine congruente Reihe der Raumfiguren. Nehmen wir aus dem System noch eine dritte Einheit, welche dieser Reihe nicht angehört, so erhalten wir eine andere congruente Reihe in anderer Richtung und mit anderer Deckstrecke. Die beiden Reihen zusammen genommen bestimmen aber ein ebenes Netz. Ziehen wir noch irgend eine dritte Einheit in Betracht, welche diesem Netze nicht angehört, so erhalten wir eine dritte congruente Reihe in neuer Richtung und mit der ihr speciell zukommenden Strecke. Jede Einheit dieser letzten Reihe kann zum Ausgangspunkt für die Construction eines dem eben erwähnten Netze parallelen Netzes dienen, und die Gesamtheit dieser gleichen und parallelen Netze bildet ein Raumgitter (analytisch ausgedrückt: quadratische Form III. Grades).

3. Nehmen wir aber zwei anliegende (also eine Grenzfläche gemeinsam besitzende) Einheiten in Betracht, so erhalten wir eine Reihe besonderer Art, in welcher jede der zwei nächststehenden Einheiten die anliegenden sind. Wir wollen solche Reihen als *Colonnen I. Ordnung* bezeichnen. Falls aber die Glieder einer Reihe nur einen einzigen Punkt gemein haben, so wollen wir solche als *Colonnenreihen* bezeichnen.

Somit kann das ganze System als System anliegender gleicher und paralleler *Colonnen I. Ordnung* aufgefasst werden.

Zwei *Colonnen*, welche eine Einheit gemeinsam haben (man würde es auch ausdrücken können: welche in dieser Einheit sich schneiden), bestimmen ein besonderes ebenes Netz, und zwar ein solches, in welchem sämtliche Einheiten mit den nächstliegenden Grenzflächen gemeinsam haben. Wollen wir ein solches Netz als eine *Schicht I. Ordnung* bezeichnen.

Das ganze System kann als eine Gesamtheit solcher paralleler gleicher und anliegender *Schichten* aufgefasst werden.

Jeder *Schicht* ist eine *Schichtebene* zugeordnet, welche durch zwei den *Colonnen* dieser *Schicht* zugeordnete Richtungen bestimmt wird.

Wenn zwei parallele *Colonnenreihen* eine Grenzfläche gemein haben, so sind sämtliche Glieder dieser Reihen in Bezug auf die andere anliegend, und dann bildet sich ein besonderes Netz, welches aus lauter parallelen *Colonnen* besteht, und jede dieser *Colonnen* besitzt mit den beiden nächsten gemeinschaftliche Grenzlinien. Solche Netze wollen wir als *Schichtnetze* bezeichnen.

Besondere Anmerkung. Unter *Schichtebene* dürfen wir keineswegs eine individuelle Ebene verstehen, sondern den Complex paralleler Ebenen. Dieser Begriff ist demjenigen der Richtungen in Bezug auf die Geraden analog.

Leider giebt die Geometrie keinen dafür passenden Ausdruck, wohl aber die theoretische Mechanik in ihrer Behandlung der Kräftepaare. Ein solches Paar, welches eigentlich auf die *Schichtebene* Bezug hat, kann durch eine dazu senkrechte Gerade bestimmter Richtung (und dabei von bestimmter Länge) dargestellt werden. Ebenso können wir jetzt unter dem Worte *Schichtebene* eine zur bestimmten Richtung senkrechte Ebene verstehen.

4. Jeder Colonne I. Ordnung ist eine Grenzfläche der Raumeinheit zugeordnet. Da aber jede Einheit durch Translation in der dieser Colonne entsprechenden Richtung um die ihr zukommende Strecke mit den anliegenden zur Deckung kommt, so muss dieselbe nothwendiger Weise in ihrer Begrenzung zwei solche gleiche und parallel gestellte Grenzflächen besitzen, und dabei liegen je zwei zugeordnete Punkte dieser Grenzflächen auf den der erwähnten Richtung parallelen Geraden und besitzen einen und denselben Abstand; dieser Abstand ist der erwähnten Strecke gleich.

Daraus können wir schliessen, dass die Raumeinheiten I. Ordnung durch lauter einander zugeordnete gleiche und parallele Grenzflächenpaare begrenzt werden. Also ist die Anzahl der Grenzflächen einer Raumeinheit eine gerade. In Folge dessen wollen wir solche Raumeinheiten als Paralleloëder bezeichnen.

5. Wie die Grenzflächenpaare jeder gegebenen Colonne zugeordnet sind, so sind die Schnittlinien zweier solcher Flächen, die Kanten, den Schichtebenen zugeordnet, welche durch entsprechende Richtungen bestimmt werden.

Diese Zuordnung führt uns zu dem weiteren Schluss, dass sämmtliche einer Schichtebene zugeordnete Kanten einer Raumeinheit gleicher und paralleler Grenzlinien sind. Auch die Punkte dieser Kanten sind einander zugeordnet, indem jedem gegebenen Punkt einer Kante je ein zugeordneter Punkt in sämmtlichen zugeordneten parallelen Kanten einer Einheit entspricht. Diese Zuordnung wird durch die Richtungen der Columnen und die ihnen entsprechenden Strecken zum Ausdruck gebracht.

6. Die Gesamtheit der in gleichen und parallelen Kanten sich schneidenden Grenzflächen wollen wir als eine primäre Zone bezeichnen.

Nun können wir sagen, dass, wenn zwei Grenzflächen sich in einer Kante schneiden, durch diese Flächen eine bestimmte primäre Zone der Schichtebene zugeordnet ist, welche ihrerseits durch die den gegebenen Grenzflächen zugeordneten Columnenrichtungen bestimmt wird.

Jede primäre Zone wird durch die Schichtebene in zugeordneten Punkten geschnitten. Das ganze System wird aber durch diese Ebene in einem Parallelogonsystem I. Ordnung geschnitten.

Die den primären Zonen zugeordneten Schichtebenen wollen wir Hauptebenen des Systems nennen.

Nun können wir sagen, dass die Paralleloëdersysteme durch die Hauptebenen (wenn dieselben durch Punkte der ihnen zugeordneten Kanten hindurchgehen) in Parallelogonsystemen geschnitten werden.

Die primären Zonen der Paralleloëder sind parallelogonale. Sie können also entweder a) diparallelogonal oder b) triparallelogonal sein.¹⁾

7. Falls aber zwei Grenzflächenpaare vorhanden sind, welche untereinander keine Schnittkanten bilden, so sind dieselben doch zweien Columnenrichtungen zugeordnet; die Gesamt-

¹⁾ Die Zonenlehre als ein Abschnitt der Geometrie der Lage wurde ziemlich ausführlich in E. G. L. behandelt, wo derselben ein besonderes Capitel gewidmet wurde (Cap. 12). Dabei wurden aber ausschliesslich durch Grenzebenen bestimmte Polyëder berücksichtigt. Den Hauptgegenstand der Untersuchung bilden daselbst die durch lauter primäre Zonen begrenzten Zonoëder.

heit solcher Grenzflächen, welche wir als eine secundäre Zone bezeichnen wollen, ist also einer Schichtebene zugeordnet.

Nun ist leicht der Beweis zu erbringen, dass nicht sämtliche Zonen sechsflächig sein können, dass also nothwendig auch vierflächige vorhanden sind.

Denken wir durch einen Punkt, als Centrum einer Sphäre aufgefasst, Gerade in allen Columnenrichtungen gezogen. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Sphäre seien als Berührungspunkte der Grenzebenen eines typischen Polyeders angenommen.¹⁾

Für dasselbe gilt die Relation

$$(f-1)f = 1 \cdot 2 \cdot p_2 + 2 \cdot 3 \cdot p_3 + \dots + (n-1) n p_n \quad A)$$

wo f die Anzahl der (ebenen) Flächenpaare und p_m die Anzahl der $2m$ -flächigen primären oder secundären Zonen bezeichnet.

Jetzt denken wir uns ein diesem Polyöderpolar zugeordnetes Zonoöder in der Weise construirt, dass man die zu seinen Flächen senkrechten Geraden als die Zonenaxen annimmt, oder was dasselbe ist, die Flächenpole der ersten als die Pole der Grosskreise auf der Sphäre nimmt, und dann alle Schnittpunkte sämtlicher so gezogener Grosskreise auf der Sphäre als die Flächenpole eines neuen Polyeders nimmt.

Dieses Zonoöder, d. h. ein von lauter primären Zonen umgürtetes Polyöder, ist mit dem Paarflächner durch folgende Relationen verbunden: a) die Anzahl der primären Zonen des Zonoöders ist der Anzahl der Flächenpaare des Paarflächners gleich, b) die Zähligkeit der Flächen der ersten ist der Zähligkeit der primären und secundären zugeordneten Zonen der letzteren gleich.

Für jedes Zonoöder gilt aber die Relation

$$(p-1)p = 1 \cdot 2 \cdot f_2 + 2 \cdot 3 \cdot f_3 + \dots + (n-1) n f_n \quad B)$$

wo p die Anzahl der primären Zonen, und f_m die Anzahl der $2m$ -zähligen Flächen bedeutet.

Wären in dem ersteren sämtliche Zonen 6-flächige gewesen, so würden in dem letzteren sämtliche Flächen 6-flächig sein, was aber unmöglich ist.²⁾

¹⁾ Der Begriff des typischen Polyeders wurde ebenfalls in E. G. L. eingeführt und spielt daselbst, wie in allen folgenden hierzu gehörenden Arbeiten des Verfassers, die Rolle eines Grundbegriffs, auf welchem die Theorie der Polyöder überhaupt und besonders deren Classification ihre Basis findet. Dasselbe wird als ein besonderes typisches Glied einer unendlichen Gesamtheit der Polyöder aufgefasst, welche das gemein haben, dass die ihnen zugehörenden Grenzebenen sämtlich parallel sind (resp. parallel aufgestellt werden können) und dabei natürlich die Anzahl dieser Grenzebenen dieselbe ist. Diese Gesamtheit wird als eine Polyederspecies aufgefasst, also ein Grundglied der Classification, welche daselbst und in anderen Arbeiten weiter entwickelt wurde. Ein dem typischen Polyöder polar zugeordnetes wurde als subtypisches bezeichnet. Die betreffenden Relationen wurden ziemlich ausführlich in E. G. L. § 20—22 besprochen (übrigens findet man eine analoge Besprechung in manchen der neueren Geometrie angehörenden Werken). In erster Linie war stets ein Polyöder aufgestellt, in dessen Eckpunkten immer je drei Grenzebenen zusammentreffen. Solche Polyöder wurden als theoretische bezeichnet, und alle anderen, die particulären, als solche aufgefasst, von denen einige Kanten unendlich klein geworden sind. (Dieselbe Auffassung finden wir viel später bei H. Eberhardt.)

²⁾ Dieser Satz findet sich noch in Legendre, *Éléments de Géométrie* (z. B. 15 éd., 1862, p. 307). Später wurde er zu wiederholten Malen reproducirt (u. A. auch in E. G. L. § 24, wo auch geschichtliche Angaben anzutreffen sind).

8. Nehmen wir ein Flächenpaar in Betracht. Jedes andere Paar bestimmt eine primäre oder secundäre Zone. In der Anzahl $f-1$ ist jede 4-flächige Zone ein Mal, jede 6-flächige Zone 2 Mal ..., jede 2 m -flächige Zone $m-1$ Mal enthalten. Also

$$f-1 = 1 \cdot p_2 + 2 p_3 + \dots + (m-1) p_n.$$

Summieren wir diese Relation in Bezug auf sämtliche Flächen und berücksichtigen, dass in dieser Summe ein Glied $(m-1) p_n$ m Male wiederholt wird, so erhalten wir endgültig

$$(f-1)f = 1 \cdot 2 \cdot p_2 + 2 \cdot 3 \cdot p_3 + \dots + (n-1)n p_n. \quad C)$$

Der Form nach ist diese Relation mit der Relation A) identisch. Die Relation A) wurde aber bis jetzt ausschliesslich für die Polyeder (als durch Ebenen begrenzte Körper) bewiesen. Jetzt gilt aber dieselbe Relation C) für beliebige Raumfiguren mit der einzigen Beschränkung, dass dieselben continuirliche Paarflächner sind, mit welchen wir es jetzt zu thun haben.

9. Jetzt sind aber die Zonen höchstens 6-flächig (§ 6). Da aber auch 4-flächige Zonen nothwendig vorhanden sind, so können wir eine Schichtebene auswählen, welche dieser Bedingung entspricht d. h. deren Colonnen zu zwei sich in einer Einheit schneiden.

Auf Grund dessen, dass eine Einheit in der Richtung einer Colonne nicht mehr als zwei anliegende Einheiten hat, sind nur folgende Annahmen zulässig:

1) Die gegebene Einheit hat mit den Einheiten der in Betracht gezogenen anliegenden Schichteinheiten nur eine einzige zur anliegenden. Dann ist sie durch drei Flächenpaare begrenzt, welche drei 4-flächige Zonen bilden (in der Relation C ist $f=3$, $p_2=3$, $p_3=0$). Solche Raumeinheiten werden Triparalleloëder genannt.

2) Eine Colonne der anliegenden Schicht ist in Bezug auf die Colonnen der ersten Schicht nur mit einer einzigen anliegend. Jede Einheit derselben ist aber zweien Einheiten anliegend. In diesem Falle ist nur eine einzige Zone 6-flächig. Also $f=4$, $p_2=3$, $p_3=1$. Solche Raumeinheiten werden Tetraparalleloëder genannt.

3) Es bleibt nur noch eine einzige Annahme übrig; jede Colonne der anliegenden Schicht ist in Bezug auf zwei anliegende Colonnen der gegebenen Schicht anliegend und dabei besitzt jede Einheit jeder Colonne zwei anliegende Einheiten in den anliegenden Colonnen.

Hier sind aber zwei Fälle zu unterscheiden: eine gegebene Schicht ist nur in Bezug auf ein Paar ihr paralleler Schichten anliegend, oder dies ist für zwei Paare der Fall. Dies hängt davon ab, ob Colonnen in einer Richtung vorhanden sind, deren einzelne Einheiten zu anliegenden, in der Richtung der Colonne, je eine Einheit erster und eine Einheit zweiter Schicht besitzen, oder dies nicht der Fall ist.

In dem ersten Falle haben wir $f=6$, $p_2=3$, $p_3=4$.

Solche Raumeinheiten werden Hexaparalleloëder genannt.

In dem zweiten Falle haben wir $f=7$, $p_2=3$, $p_3=6$.

Solche Raumeinheiten werden Heptaparalleloëder genannt.

Es ist schon längst bewiesen worden, dass unter den hierzu gehörenden Raumfiguren auch solche mit Ebenen begrenzte vorkommen, welche, als die einfachsten, wir als Typen auffassen können¹⁾. Diese Polyöder sind in den Figuren 12—15 abgebildet.

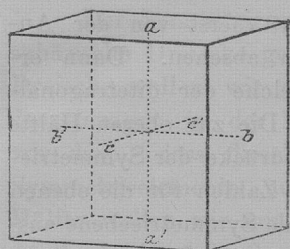


Fig. 12.

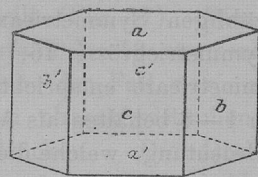


Fig. 13.

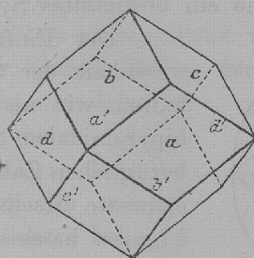


Fig. 14.

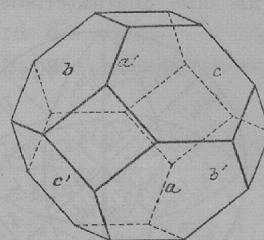


Fig. 15.

Auch jetzt sind diese Paralleloëdertypen als die primären aufzufassen, da alle andern, als Varietäten, von diesen dadurch secundär gebildet gedacht werden können, dass man die Grenzebenen durch beliebig andere Flächen ersetzt, mit der Beschränkung, dass dabei die neu construirten gleichen und parallelen Flächen nicht einander schneiden dürfen, da sonst keine continuirliche Raumfiguren entstünden.

9. Weitere Beschränkung führt die Symmetrie mit sich. Es genügt das Vorhandensein einer 2-zähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie (Inversionscentrum), um die Möglichkeit der krummen Flächen zu beseitigen²⁾. Die Symmetrie kann aber viel höher sein.

Die Möglichkeit der Symmetrieebenen ist augenscheinlich.

Die Möglichkeit gewisser Symmetrieebenen hängt aber von der Vertheilung der Columnen, respective von der Zähligkeit der Zonen ab. In dieser Beziehung sind die Paralleloëder in zwei Gruppen zu sondern. Der ersten Gruppe gehören das Tri-, Hexa- und Heptaparalleloëder an, welche das Vorkommen der 4-zähligen und nicht mehrzähligen Symmetrieeaxe zulassen. Die höchste allen drei zukommende Symmetrieart ist die (hexakis-)oktaëdrische mit der Symmetriegrösse 48. Der zweiten Gruppe gehört allein das Tetraparalleloëder an, für welche als höchste die 6-zählige Symmetrieeaxe zulässig ist. Die höchste ihm zukommende Symmetrieart ist die dihexagonal-bipyramidale mit der Symmetriegrösse 24.

Es versteht sich von selbst, dass den bezüglichen Paralleloëdern auch sämtliche andere Symmetriearten zukommen, welche in Bezug auf diese höchste untergeordnet sind.

10. Die Aufgabe der Aufsuchung sämtlicher hierzu gehörender Symmetriearten gehört der reinen Symmetriellehre an und ist schon längst erschöpfend aufgelöst. Es sind dies die 32 Symmetriearten der Krystallographie³⁾, welche jetzt auch in elementaren Lehrbüchern dieser Wissenschaft dargestellt werden.

¹⁾ Diese Ableitung wurde vom Verfasser noch in dem Ende der siebziger Jahre ausgeführt. Gerade darauf fussend wurde die specielle Theorie der Krystalstructure des Verfassers entwickelt und auf dem Wege der directen Erfahrung geprüft. Diese Entwicklung fand im Beginn der achtziger Jahre statt und ist in einer Reihe von Vorträgen in der k. mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg dargelegt (Verhandlungen der k. mineralog. Gesellschaft zu St. Petersburg, Bd. 17 S. 381, Bd. 18 S. 281 und 282).

²⁾ Der Beweis dieses Satzes war zuerst nicht explicit angegeben, sondern er steckt in den Sätzen § 76 E. G. L.

³⁾ Die vollständige Aufstellung der Symmetrieelemente wurde in S. L. II in der Einleitung und Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XX. Bd. II. Abth.

Jetzt führen wir eine 3-zählige Symmetrieaxe von bestimmter Lage ein, und diejenigen Dreiecke, welche in Folge der Drehung um diese Axe in bestimmtem (direct aus der Figur ersichtlichem) Sinne aus einem durch die Zahl a bezeichnetem Dreiecke entstehen, wollen wir der Reihe nach a_1 und a_2 bezeichnen ($a_3 = a$).

Der Symmetriegrösse 24 des Tetraparalleloëders entsprechend wird die Sphäre in 24 sphärische Dreiecke getheilt (Fig. 17). Die der oberen Hälfte der Sphäre angehörigen Dreiecke wollen wir einfach 1—12 enumeriren, wie dies für das Hexagon in der Ebene der Fall war, und dann kommen wir dazu, dass dieselben charakteristischen Zahlen dieselben Symmetrieelemente ausdrücken. Die Dreiecke der unteren Hälfte wollen wir mit Apostroph unterscheiden. Jetzt bedeutet 1' die horizontale Symmetrieebene, 2', 4', 6', 8', 10' und 12' horizontale 2-zählige Symmetrieachsen von verschiedener Lage, 3' und 11' beziehen sich auf die 6-zählige Axe I. Art der zusammengesetzten Symmetrie und sind von einander untrennbar, 5' und 9' gehören der 6-zähligen Axe II. Art der zusammengesetzten Symmetrie an und sind ebenfalls nicht von einander zu trennen; endlich drückt 7' das Inversionscentrum aus.

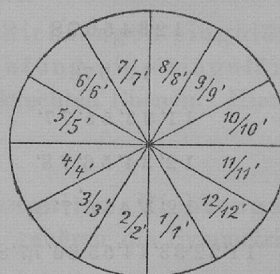


Fig. 17.

11. Auf Grund der eben entwickelten Betrachtungen erhalten wir folgende Tabelle der Symmetriearten der Raumsysteme¹⁾

Nr.	Symmetriegrösse	Charakteristische Zahlencomplexe für		Gleichungen der Symmetrie		
		Tri-, Hexa- und Heptaparalleloëder	Tetraparalleloëder			
1	1	1	1	$y = b$	$z = c$	$v = d$
2	2	15'	17'	$y = n^x b$	$z = n^x c$	$v = n^x d$
3	2	15	17	$y = b$	$z = n^y c$	$v = n^y d$
4	2	11'	11'	$y = n^z b$	$z = c$	$v = d$
5	4	11' 5 5'	11' 7 7'	$y = n^z b$	$z = n^y c$	$v = n^y d$

untrennbar, drücken also eine zusammengesetzte Symmetrie höherer Art aus, unter welchen auch 1' auftritt, welche, einzeln genommen, die horizontale Symmetrieebene ausdrückt.

Für jetzt genügt es uns vollständig, den speciellen Fall $p = 6$ zu besprechen.

In diesem Falle erhalten wir also zwei und nur zwei Arten der zusammengesetzten Symmetrie und zwar diejenigen, welche durch die Reihen a) 13' 5 7' 9 (11') und b) 11' 5 5' 9 9' angegeben werden.

Die erste Reihe (also auch die Zahl 3' allein genommen) drückt die 6-zählige Axe I. Art der zusammengesetzten Symmetrie aus. Das der Reihe b) entsprechende Symmetrieelement (also die Zahl 5' allein genommen) drückt die analoge Axe II. Art aus.

Hierzu gehört auch die Reihe 17', aber dieselbe drückt einfach das Inversionscentrum (resp. die 2-zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie) aus.

4-zählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie giebt es nur eine einzige Art, welche durch die Reihe 13' 5 7' bestimmt wird.

¹⁾ Der Anschaulichkeit wegen wird hier die graphische Darstellung sämtlicher Symmetriearten der regulären Raumtheilung beigegeben (Taf. II). Solche Tafeln werden jetzt elementaren Lehrbüchern der Krystallographie beigegeben, da die bezüglichen Symmetriearten mit den krystallographischen identisch sind.

Nr.	Sym- metrie- grösse	Charakteristische Zahlencomplexe für		Gleichungen der Symmetrie		
		Tri-, Hexa- und Heptaparalleloëder	Tetraparalleloëder			
6	4	1 2' 5 6'	1 2' 7 8'	$y = n^h b$	$z = n^v c$	$v = n^{h+v} d$
7	4	1 2 5 6	1 2 7 8	$y = b$	$z = n^v c$	$v = n^{v+q} d$
8	8	1 1' 2 2' 5 5' 6 6'	1 1' 2 2' 7 7' 8 8'	$y = n^{h+z} b$	$z = n^v c$	$v = n^{h+v} d$
9	4	1 3 5 7	—	$y = b$	$y_0 = b_v^4$	$y_1 = b_{v+1}^4$
10	8	1 2 3 4 5 6 7 8	—	$y = b$	$y_0 = b_v^4$	$y_1 = b_{v+n^q}^4$
11	4	1 3' 5 7'	—	$y = n^\pi b$	$y_0 = b_\pi^4$	$y_1 = b_{\pi+1}^4$
12	8	1 1' 3 3' 5 5' 7 7'	—	$y = n^\pi b$	$y_0 = b_v^4$	$y_1 = b_{v+1}^4$
13	8	1 2' 3 4' 5 6' 7 8'	—	$y = n^h b$	$y_0 = b_v^4$	$y_1 = b_{v+n^h}^4$
14	8	1 2' 3' 4 5 6' 7' 8	—	$y = n^\pi b$	$y_0 = b_\pi^4$	$y_1 = b_{\pi+n^\delta}^4$
15	16	1 1' 2 2' 3 3' 4 4' 5 5' 6 6' 7 7' 8 8'	—	$y = n^{z+h} b$	$y_0 = b_v^4$	$y_1 = b_{v+n^h}^4$
16	3	1 1 ₁ 1 ₂	1 5 9	$y = b$	$y_0 = b_v^3$	$y_1 = b_{v+1}^3$
17	6	1 1 ₁ 1 ₂ 8 8 ₁ 8 ₂	1 2 5 6 9 · 10	$y = b$	$y_0 = b_v^3$	$y_1 = b_{v+n^q}^3$
18	6	1 1 ₁ 1 ₂ 5' 5 ₁ ' 5 ₂ '	1 3' 5 7' 9 · 11'	$y = n^\alpha b$	$y_0 = n^\alpha b_v^3$	$y_1 = n^\alpha b_{v+1}^3$
19	6	1 1 ₁ 1 ₂ 4' 4 ₁ ' 4 ₂ '	1 2' 5 6' 9 10'	$y = n^h b$	$y_0 = b_v^3$	$y_1 = b_{v+n^h}^3$
20	12	1 1 ₁ 1 ₂ 4' 4 ₁ ' 4 ₂ ' 5' 5 ₁ ' 5 ₂ ' 8 8 ₁ 8 ₂	1 2' 3' 4 5 6' 7' 8 9 · 10' · 11' · 12	$y = n^{a+h} b$	$y_0 = n^\alpha b_v^3$	$y_1 = n^\alpha b_{v+n^h}^3$
21	6	—	1 3 5 7 9 · 11	$y = b$	$y_0 = b_v^6$	$y_1 = b_{v+1}^6$
22	12	—	1 2 3 4 5 6 7 8 9 · 10 · 11 · 12	$y = b$	$y_0 = b_v^6$	$y_1 = b_{v+n^q}^6$
23	6	—	1 1' 5 5' 9 9'	$y = n^\pi b$	$y_0 = n^\pi b_\pi^6$	$y_1 = n^\pi b_{\pi+1}^6$
24	12	—	1 1' 3 3' 5 5' 7 7' 9 9' · 11 · 11'	$y = n^\pi b$	$y_0 = b_v^6$	$y_1 = b_{v+1}^6$
25	12	—	1 2' 3 4' 5 6' 7 8' 9 · 10' · 11 · 12'	$y = n^h b$	$y_0 = b_v^6$	$y_1 = b_{v+n^h}^6$
26	12	—	1 1' 2 2' 5 5' 6 6' 9 9' · 10 · 10'	$y = n^{\pi+h} b$	$y_0 = b_\pi^6$	$y_1 = b_{\pi+n^h}^6$
27	24	—	{ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 · 10 · 11 · 12 1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8' 9' · 10' · 11' · 12' }	$y = n^{h+z} b$	$y_0 = b_v^6$	$y_1 = b_{v+n^h}^6$
28	12	1 1 ₁ 1 ₂ 2' 2 ₁ ' 2 ₂ ' 5 5 ₁ 5 ₂ ' 6 ₁ ' 6 ₂ ' = (1 2' 5 6') ₃	—	$x_0 = n^h a_0^3$	$x_1 = n^v a_{0+1}^3$	$x_2 = n^{h+v} a_{0+2}^3$
29	24	(1 1' 2 2' 5 5' 6 6') ₃	—	$x_0 = n^{h+z} a_0^3$	$x_1 = n^v a_{0+1}^3$	$x_2 = n^{h+v} a_{0+2}^3$
30	24	(1 2' 3' 4 5 6' 7' 8') ₃	—	$x_0 = n^h a_0^3$	$x_1 = n^v a_{0+n^\delta}^3$	$x_2 = n^{h+v} a_{0+2n^\delta}^3$
31	24	(1 2' 3 4' 5 6' 7 8') ₃	—	$x_0 = n^{h+d} a_0^3$	$x_1 = n^{d+v} a_{0+n^d}^3$	$x_2 = n^{d+h+v} a_{0+2n^d}^3$
32	48	(1 1' 2 2' 3 3' 4 4' 5 5' 6 6' 7 7' 8 8') ₃	—	$x_0 = n^{h+d+z} a_0^3$	$x_1 = n^{d+n} a_{0+n^d}^3$	$x_2 = n^{d+h+v} a_{0+2n^d}^3$

In den letzten fünf Zeilen haben wir der Kürze wegen $(a \dots c)_3$ anstatt $a a_1 a_2 \dots c c_1 c_2$ gesetzt.

12. Für jede gegebene Symmetrieart und eine gegebene Richtung von allgemeiner Lage (d. h. eine Gerade oder eine Ebene, welche weder parallel noch senkrecht zu irgend einem Symmetrieelemente steht, sei es eine Axe oder Ebene) erhalten wir eine Anzahl gleicher Richtungen, welche der Symmetriegrösse gleich sind. Für die particulären

Richtungen ist aber die Anzahl der gleichen Richtungen eine geringere, und es kann sogar der Fall vorkommen, dass diese Anzahl sich zu einer Einheit reducirt. Solche Richtungen (Gebilde) wollen wir als singuläre bezeichnen.

Die angegebenen Symmetriearten lassen sich in dieser Beziehung in folgende Gruppen sondern, welche wir als die Arten der Syngonie auffassen wollen.

I. Sämmtliche Richtungen sind singuläre. Dazu gehören die beiden ersten Symmetriearten. Diese Syngonie wird als die triklone bezeichnet.

II. Es giebt nur eine einzige Ebene, in welcher alle Richtungen singuläre sind, und ausserdem ist die zu dieser Ebene senkrechte Richtung eine singuläre. Die Ebene selbst ist singulär, ebenso wie sämmtliche zu derselben senkrechten Ebenen. Hierzu gehören die Symmetriearten 3, 4 und 5.

Diese Syngonieart wird als die monokline bezeichnet.

III. Es giebt nur drei unter einander senkrechte singuläre Richtungen. Auch die zu denselben senkrechten Ebenen sind singuläre. Hierzu gehören die Symmetriearten 6, 7 und 8.

Diese Syngonieart wird als die rhombische bezeichnet.

IV. und V. Es giebt nur eine einzige singuläre Richtung (Hauptaxe); ebenso ist eine einzige zu dieser Richtung senkrechte Ebene singulär.

In diesem Falle unterscheiden wir diejenige Syngonie, in welcher die Anzahl der in der singulären Ebene vorkommenden gleichen Richtungen (der particulären, falls solche überhaupt vorhanden sind) gleich 2 oder 3 ist.

Die erste Syngonieart wird als die tetragonale, die letzte als die hexagonale bezeichnet. Der ersten gehören die 9.—15., der letzteren die 16.—27. Symmetrieart an¹⁾.

Endlich VI. Es sind keine singulären Richtungen vorhanden.

In diesem Falle giebt es drei besondere, unter einander senkrechte Richtungen, welche als die zu den Flächen eines Würfels senkrechten Geraden (kubische Axen), und noch vier andere besondere Richtungen, welche als die Diagonalen des Würfels angesehen werden können; den letzteren sind nothwendiger Weise vorkommende 3-zählige Symmetrieaxen parallel.

Diese Syngonieart wird als die kubische bezeichnet. Zu derselben gehören die Symmetriearten 28—32.

Für die in der Tabelle zusammengestellten Symmetriegleichungen werden, je nach der Symmetrieart, entweder drei singuläre Richtungen als Coordinatenachsen angenommen (dies für die Syngoniearten I, II und III), oder eine einzige vorhandene singuläre Richtung y , und zwei resp. drei gleiche in der singulären Ebene liegende Geraden (die particulären Richtungen, falls solche vorhanden sind). Es muss aber hervorgehoben werden, dass für

¹⁾ Unter den Symmetriearten der hexagonalen Syngonie lassen sich diejenigen Nr. 16—20 von denen Nr. 21—27 dadurch unterscheiden, dass in den ersten stets möglich ist, eine zur Hauptaxe schiefe Richtung so auszuwählen, dass die gleichwerthigen Richtungen eine dreigliederige Gruppe, in den letzten eine sechsgliederige Gruppe bilden. Dieser Unterschied kann dadurch ausdrücklich hervortreten, dass man die ersten Symmetriearten in eine trigonale, die letzten sieben in eine hexagonale Hyposyngoniegruppe vereinigt. Diese beiden Gruppen sind in der Taf. II besonders dargestellt.

die Symmetriearten 9—15 der elementare Axenwinkel $\frac{\pi}{2}$ ist, für 16—20 ist derselbe Winkel $\frac{2\pi}{3}$, und endlich für die Symmetriearten 21—27 ist derselbe Winkel $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Die Koordinatenachsen werden der Reihe nach mit $y_0, y_1, y_2 \dots$ bezeichnet.

Endlich werden für die kubische Syngonie als Koordinatenachsen drei oben besonders erwähnte besondere senkrechte Richtungen (kubische Axen) x_0, x_1, x_2 angenommen.

Was endlich die Bezeichnung der Periode, die Bedeutung der eingeführten Symmetrieparameter und die Ueberzähligkeit der Koordinatenachsen betrifft, so sind auch hier die Bemerkungen § 10, I. Theil geltend.

13. Die Darstellung der Systeme I. Ordnung wird auch jetzt dadurch erschöpft, dass man alle diesen Systemen zukommenden Symmetriearten berücksichtigt. Dabei kann aber vorkommen, dass man für einen und denselben Parallelöedertypus eine und dieselbe Symmetrieart verschiedener Systeme erhält, indem die Columnenrichtungen resp. Schichtebenen sich in Bezug auf die Symmetrieelemente verschieden orientirt erweisen.

Auch jetzt giebt für die Lösung derartiger Fragen die Lehre von der scheinbaren Symmetrie die leitenden Aufschlüsse. (Vergl. § 11, I. Theil.) Da aber die Betrachtungen dieser Art in ihren Anwendungen auf die Einzelheiten ziemlich viel Raum gefordert hätten, das zu Grunde liegende Princip aber ausserordentlich einfach ist, so erlauben wir uns hier wieder uns mit der Darlegung der Resultate zu begnügen, um so mehr, als die Resultate schon längst constatirt worden waren¹⁾.

14. Diese Systeme sind ganz anschaulich auf Taf. III dargestellt. Jetzt wollen wir dieselben in kurzen Worten charakterisiren.

1) 1 III, 2) 1 IV, 3) 1 VI und 4) 1 VII sind die Systeme, in welchen Symmetrieelemente vollständig fehlen.

5) 1π III, 6) 1π IV, 7) 1π VI und 8) 1π VII sind die Systeme, in welchen allein das Inversionssystem anwesend ist.

9) 2 III und 10) 2 IV sind zwei Systeme, in welchen allein 2-zählige Symmetrieachsen einer einzigen (parallelen) Richtung vorhanden sind.

11) 3 III, 12) 3 IV, 13) 3 IV', 14) 3 VI, 15) 3 VI', 16) 3 VII und 17) 3 VII' sind die Systeme, in welchen ausser 2-zähligen Symmetrieachsen noch ebensolche Schraubenachsen vorhanden sind, obgleich alle diese Symmetrieelemente parallel sind.

18) 1χ III und 19) 1χ IV sind zwei Systeme, in welchen allein lauter parallele Symmetrieebenen vorhanden sind.

20) $1\chi'$ III, 21) $1\chi'$ IV, 22) $1\chi'$ IV', 23) $1\chi'$ VI, 24) $1\chi'$ VI', 25) $1\chi'$ VII und 26) $1\chi'$ VII' sind die Systeme, in welchen ausser Symmetrieebenen noch ihnen parallele Gleitebenen vorhanden sind.

¹⁾ Die Gesamtheit der Parallelöedersysteme I. Ordnung war zuerst in E. G. L. § 84, S. 238 angedeutet und in S. L. III Taf. IV schon ganz anschaulich und vollständig abgebildet. Die jetzige Abbildung Taf. II unterscheidet sich von der vorigen dadurch, dass die Parallelöeder in nicht deformirter Form aufgezeichnet sind. Dadurch wird auf die Relationen unter Systemen verschiedener Symmetrie anschaulicher und einfacher hingewiesen und besonders wird dadurch die Lage der Symmetrieelemente durch entsprechende charakteristische Zahlen in Anschaulichkeit gewonnen.

27) 2χ III und 28) 2χ IV sind zwei Systeme, in welchen nur 2-zählige Symmetrieachsen und die zu ihnen senkrechten Symmetrieebenen vorhanden sind.

29) 3χ III, 30) 3χ IV, 31) 3χ IV', 32) 3χ VI, 33) 3χ VI', 34) 3χ VII und 35) 3χ VII' sind die Systeme, in welchen ausser 2-zähligen Symmetrieachsen noch die denselben parallelen Schraubenachsen und ausser Symmetrieebenen noch die denselben parallelen Gleitebenen vorhanden sind.

36) 4 III ist ein System, in welchem allein 2-zählige Symmetrieachsen vorhanden sind, welche gemeinsame Schnittpunkte besitzen.

37) 5 III, 38) 5 IV sind zwei Systeme, in welchen ausser dem eben charakterisirten System der Axen noch 2-zählige sich schneidende Schraubenachsen anwesend sind, durch deren Schnittpunkte diese beiden senkrechten 2-zähligen Symmetrieachsen hindurchgehen.

39) 6 VI, 40) 6 VII sind zwei Systeme, in welchen ausser dem Axensystem 4 III noch ein durchdringendes System der gemeinsame Schnittpunkte besitzenden 2-zähligen Schraubenachsen vorhanden ist.

41) 7 VI, 42) 7 VII sind zwei Systeme, in welchen in je einer Ebene eine 2-zählige Symmetrieaxe und eine Schraubenaxe in abwechselnder Reihe stehen.

43) 2φ III ist ein System, in welchem parallele aber zu einander senkrecht stehende Symmetrieebenen vorhanden sind (welche sich natürlich zu je zwei in je einer 2-zähligen Symmetrieaxe schneiden). Keine Schraubenachsen und keine Gleitebenen.

44) $2\varphi'$ III, 45) $2\varphi'$ IV sind zwei Systeme, in welchen ausserdem zwei Systeme senkrechter Gleitebenen vorhanden sind, aber keine Schraubenachsen.

46) 3φ III, 47) 3φ IV, 48) 3φ IV' sind drei Systeme, in welchen die 2-zähligen Symmetrie- und Schraubenachsen einer einzigen Richtung sich in singulären Ebenen abwechseln. Durch die Schraubenachsen allein gehen die Gleitebenen hindurch.

49) $3\varphi'$ VI, 50) $3\varphi'$ VI', 51) $3\varphi'$ VII sind drei Systeme, in welchen in je einer singulären Ebene entweder lediglich Symmetrieachsen oder lediglich Schraubenachsen liegen. Hier schneiden sich je zwei Gleitebenen in einer Schraubenaxe.

52) $3\varphi''$ VI, 53) $3\varphi''$ VII, 54) $3\varphi''$ VII' sind drei Systeme, in welchen in singulären Ebenen Symmetrie- und Schraubenachsen mit einander abwechseln. Hier schneiden sich Gleitebenen in Symmetrieachsen.

55) 4χ III ist ein System, in welchem nur Symmetrieebenen dreier verschiedener Lagen vorhanden sind und natürlich sämmtlich sich in 2-zähligen Symmetrieachsen schneiden; es sind aber weder Gleitebenen noch Schraubenachsen vorhanden.

56) 5χ III, 57) 5χ IV sind die Systeme, deren Symmetrieelemente sich aus System 5 ableiten lassen durch Hinzufügen der durch die Schnittpunkte der Symmetrieachsen hindurchgehenden Symmetrieebenen.

58) 6χ VI, 59) 6χ VII sind die Systeme, deren Symmetrieelemente sich ebenso von System 6 ableiten lassen wie 5χ aus 5.

60) 7χ VI, 61) 7χ VII sind die Systeme, deren Symmetrieelemente sich ebenso von System 7 ableiten lassen wie 5χ aus 5 und 6χ aus 6.

62) 8 III ist ein System, in welchem nur 4-zählige und die resultirenden 2-zähligen Symmetrieachsen einer einzigen (singulären) Richtung vorhanden sind.

63) 9 VI, 64) 9 VII sind zwei Systeme, in welchen neben 4-zähligen Symmetrieaxen und resultirenden 4-zähligen Schraubenaxen mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{2}$ 2-zählige Schraubenaxen vorhanden sind.

65) 8 φ III ist ein System, in welchem die Symmetrieelemente sich aus denen des Systems 8 durch Hinzufügung der verticalen Symmetrieebenen ableiten lassen.

66) 9 φ VI, 67) 9 φ VII sind zwei Systeme, deren Symmetrieelemente sich aus dem System 9 ebenso ableiten lassen wie 8 φ III aus 8.

68) 2 π III ist ein System, in welchem lediglich 4-zählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie und die resultirenden Axen vorhanden sind.

69) 3 π VI, 70) 3 π VII sind zwei Systeme, in welchen die resultirenden 4-zähligen Axen der zusammengesetzten Symmetrie eine andere Lage der Ebene dieser Symmetrie besitzen, als es für die als die primitiven Axen zu betrachtenden der Fall ist; ausserdem sind die resultirenden 2-zähligen Schraubenaxen vorhanden.

71) 8 χ III ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich von denen des Systems 8 durch Vorhandensein horizontaler Symmetrieebenen unterscheiden.

72) 9 χ VI, 73) 9 χ VII sind zwei Systeme, deren Symmetrieelemente sich zu denen des Systems 9 ganz analog verhalten wie 8 χ zu 8.

74) 10 III ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich aus 8 ableiten lassen durch Hinzufügung einer horizontalen, die 4-zählige Symmetrieaxe schneidenden 2-zähligen Symmetrieaxe.

75) 11 VI, 76) 11 VII sind zwei Systeme, deren Symmetrieelemente aus dem System 9 wie 10 aus 8 sich ableiten lassen.

77) 4 δ III ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich aus 4 ableiten lassen durch Hinzufügung einer diagonalen Symmetrieebene, welche durch Symmetrieaxen verläuft.

78) 5 δ III ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich aus 5 ebenso ableiten lassen wie 4 δ aus 4.

79) 6 δ VI, 80) 6 δ VII sind zwei Systeme, deren Symmetrieelemente sich aus 6 ebenso ableiten lassen wie 4 δ aus 4 und 5 δ aus 5.

81) 7 δ VI, 82) 7 δ VII sind zwei Systeme, deren Symmetrieelemente sich aus 7 ebenso ableiten lassen wie 4 δ aus 4 u. s. w.

83) 10 χ III ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich aus 10 ebenso ableiten lassen wie 8 χ aus 8 u. s. w.

84) 11 χ VI, 85) 11 χ VII sind zwei Systeme, deren Symmetrieelemente sich aus 11 ebenso ableiten lassen wie 8 χ aus 8 u. s. w.

86) 12 IV ist ein System, dessen Symmetrieelemente lauter 3-zählige Symmetrieaxen einer einzigen Richtung sind.

87) 13 III, 88) 13 VI, 89) 13 VII sind drei Systeme, unter deren Symmetrieelementen ausser 3-zähligen Symmetrieaxen noch rechte und linke Schraubenaxen von derselben einzigen (singulären) Richtung vorhanden sind.

90) 12 φ IV ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich aus 12 ableiten lassen durch Hinzufügung einer durch zwei nächste Symmetrieaxen hindurchgehenden verticalen Symmetrieebene.

91) $12\varphi'$ IV ist ein ganz analog abgeleitetes System, aber die beigefügte Symmetrieebene geht nicht durch zwei nächste Symmetrieachsen hindurch.

92) 13φ III, 93) 13φ VI, 94) 13φ VII sind drei Systeme, deren Symmetrieelemente aus 13 ganz analog abgeleitet worden sind wie 12φ aus 12.

95) 12π IV ist ein System, welches sich zu 12 ganz analog verhält wie 8χ zu 8 u. s. f.

96) 14 IV ist ein System, dessen Symmetrieelemente sich aus denen von 12 ableiten lassen durch Hinzufügung einer durch zwei nächste Symmetrieachsen nicht hindurchgehenden horizontalen 2-zähligen Symmetrieaxe.

97) 15 IV ist ein dem vorigen ganz analog abgeleitetes System, welches sich aber dadurch unterscheiden lässt, dass die beigefügte 2-zählige Symmetrieaxe durch zwei nächste 3-zählige Symmetrieachsen hindurchgeht.

98) 16 III, 99) 16 VI, 100) 16 VII sind drei Systeme, welche sich aus 13 ganz analog ableiten lassen wie das vorige System aus 12.

101) 14π IV lässt sich aus 14 IV ganz analog ableiten wie 12π aus 12.

102) 15π IV lässt sich analog aus 15 IV ableiten.

103) 17 IV ist ein System mit 6-zähligen und resultirenden 3- und 2-zähligen Symmetrieachsen einer einzigen (singulären) Richtung.

104) 17φ IV lässt sich aus dem vorigen ganz analog ableiten wie 8φ IV aus 8 IV.

105) $12a$ IV ist ein System, dessen Symmetrieelemente 6-zählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie und die resultirenden 3-zähligen Symmetrieachsen und Inversionscentren sind.

106) $13a$ III, 107) $13a$ VI, 108) $13a$ VII sind drei Systeme, deren Symmetrieelemente 6-zählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie sind mit drei verschiedenen Lagen der Ebenen dieser Symmetrie; ausserdem sind die resultirenden rechten und linken 3-zähligen Schraubenachsen vorhanden, und die Inversionscentra von verschiedenen Lagen.

109) 17χ IV lässt sich aus 17 IV ganz analog wie 12π aus 12 ableiten.

110) 18 IV lässt sich aus 17 IV durch Hinzufügung einer durch die 6-zählige Symmetrieaxe hindurchgehenden 2-zähligen horizontalen Symmetrieaxe ableiten.

111) $14a$ IV lässt sich aus 14 IV durch Hinzufügung der durch die nächsten 3-zähligen Symmetrieachsen hindurchgehenden verticalen Symmetrieebenen ableiten.

112) $15a$ IV lässt sich aus 15 IV durch Hinzufügung der durch die nächsten 3-zähligen Symmetrieachsen nicht hindurchgehenden verticalen Symmetrieebenen ableiten.

113) $16a$ III, 114) $16a$ VI, 115) $16a$ VII sind drei Systeme, welche sich resp. aus 16 III, 16 VI und 16 VII ableiten lassen durch Hinzufügung der durch die 3-zählige Symmetrieaxe hindurchgehenden Symmetrieebenen.

116) 18χ IV lässt sich aus 18 IV ganz analog ableiten wie 17χ IV aus 17 IV u. s. f.

Endlich lassen sich alle anderen der kubischen Syngonie angehörenden Systeme aus den vorigen durch Hinzufügung der oktaëdrischen 3-zähligen Symmetrieachsen ableiten und zwar:

117) 19 III aus 4 III, 118) 20 VII aus 6 VII, 119) 21 VI aus 7 VI, 120) 19χ III aus 4χ , 121) 20χ VII aus 6χ VII, 122) 21χ VI aus 7χ VI, 123) 19δ III aus 4δ , 124) 20δ VII aus 6δ VII, 125) 21δ VI aus 7δ VI, 126) 22 III aus 10 III, 127) 23 VII aus 11 VII, 128) 24 VI aus 11 VI, 129) 22χ III aus 10χ III, 130) 23χ VII aus 11χ VII und 131) 24χ VI aus 11χ VI.

15. Um für alle Systeme die Symmetrieelemente überhaupt vollständig darzustellen, müssen die Sätze § 13 (I. Theil) mit folgenden Ergänzungen berücksichtigt werden:

Ergänzung des 1. Satzes § 13. Hat die gegebene Deckschiebung l in Bezug auf die gegebene Symmetrieaxe eine schiefe Richtung, dessen Componente in der Richtung der Axe gleich l' ist, so ist die resultirende p -zählige Axe eine Schraubenaxe mit der Deckschiebung l' ; l' muss dabei nothwendigerweise gleich $n \frac{\lambda}{p}$ sein, wo λ die Deckschiebung des Systems in der Richtung der Axe, und n eine ganze Zahl bedeutet. Ist die gegebene Axe eine Schraubenaxe mit der Deckschiebung L , so ist die resultirende Axe eine Schraubenaxe mit der Deckschiebung $L + l'$. Ist dabei $L + \lambda' = n\lambda$, so ist diese Axe keine Schraubenaxe mehr, sondern eine Symmetrieaxe¹⁾.

Dabei muss in Rücksicht genommen werden, dass eine 4-zählige Symmetrieaxe zugleich 2-zählige, und eine 6-zählige Symmetrieaxe zugleich 2- und 3-zählige Symmetrieaxe ist. Dasselbe gilt analog für Schraubenaxen. Daraus geht hervor, dass die aus solchen Axen und der gegebenen Translation entstehenden resultirenden Axen verschiedenartig sind und zugleich verschiedene Lage erhalten.

Speciell für die Axen der zusammengesetzten Symmetrie erhalten wir, dass auch die resultirenden Symmetrieelemente eben solche Axen sind. Ist dabei die Translation senkrecht zur Axe, so behält die Ebene der zusammengesetzten Symmetrie ihre Lage; ist aber die Translationsrichtung in Bezug auf die Axe schief und besitzt in ihrer Richtung die Componente l' , so erhält die resultirende Ebene der zusammengesetzten Symmetrie eine neue Lage, und zwar wird sie nur um die Componente $\frac{l'}{2}$ verschoben.

Sind zwei beliebige Symmetrieelemente in beliebiger relativer Lage gegeben, so entsteht ein resultirendes Symmetrieelement, welches wir dadurch stets ermitteln können, dass wir zuerst die Symmetrieelemente sich in einem Punkt schneidend denken, das resultirende Element bestimmen, und dann noch die nicht in Betracht gezogene Translation berücksichtigen, welche auf Grund des eben angegebenen Satzes uns zu einem ganz bestimmten Symmetrieelement von ganz bestimmter Lage führt. Die Schraubenaxen und die Gleitebenen sind dabei stets in ihre Componenten zerlegt zu denken, d. h. als Symmetrieaxen resp. Symmetrieebenen und Translationsrichtungen mit ganz bestimmten Componenten.

Es wäre sehr viel Raum dazu nöthig, um diesen allgemeinen Satz für sämtliche vorkommende Fälle besonders anzuwenden.

Vergleichen wir die bei der Darstellung der Systeme I. Ordnung gefundenen regelmässigen Punktsysteme mit denjenigen 230 Systemen, welche früher auf anderem Wege erschöpfend abgeleitet wurden, so finden wir, dass die jetzt gefundenen Systeme sich zwar unter denselben befinden, aber von denselben hier nur durch 73 vertreten sind. Diese Systeme wurden bei ihrer Ableitung unter dem Namen symmorphie abgesondert.

Die Vertheilung der Symmetrieelemente sämtlicher regelmässiger Punktsysteme ist ganz anschaulich in den Tafeln IV und V graphisch dargestellt. Die Symmetriegleichungen dieser Systeme sind in der Tabelle V am Schlusse dieses Theiles zusammengestellt²⁾.

¹⁾ Die betreffende Reihe von Sätzen ist in S. L. III S. 20–29 enthalten. Vgl. Anm. 9.

²⁾ Die anschaulichen graphischen Darstellungen der Lagerung der Symmetrieelemente der regelmässigen Punktsysteme sind zuerst in S. L. III Taf. II und III und später in der Einleitung zur

16. Sämtliche Systeme I. Ordnung sind aus vier Grundsystemen 22γ III, 23γ VII, 24γ VI und 18γ IV dadurch abgeleitet, dass die denselben zukommenden Symmetrieelemente durch andere ersetzt sind, welche die ihnen untergeordneten Symmetriearten ausbilden.

Theorie der Krystallstruktur (Groth's Zeitschrift für Krystallographie Bd. 24, Taf. V und VI) erschienen. Dem Wesen nach sind jetzt die Taf. IV und V als blosse Reproduction zu betrachten, aber dieselben sind in Bezug auf die doppelten Systeme (d. h. diejenigen mit Elementen der geraden Symmetrie) vielfach vervollständigt durch die Angabe der Inversionscentra, der Axen der zusammengesetzten Symmetrie. Umgekehrt sind die Systeme der kubischen Syngonie in der Darstellung vereinfacht, indem viele der Symmetrieelemente, welche früher angezeigt wurden, jetzt beseitigt worden sind. Es sind nur solche zur Darstellung ausgewählt, welche diese Darstellung möglichst anschaulich machen. Dadurch werden auch die Analogien dieser Systeme mit denen der rhombischen und tetragonalen Syngonie bei weitem klarer hervortreten.

Jedem regelmässigen Punktsystem gehört in diesen Tafeln eine getrennte Zelle an. Die einfachen Systeme, welche also ausschliesslich die Elemente der Decksymmetrie enthalten, werden durch einfache Enumeration gekennzeichnet (zum Unterschiede der asymmetrischen Systeme wird die betreffende Nummer in Parenthesen eingeschlossen). Alle Systeme, welche von einem einfachen hergeleitet und durch dieselben Elemente der Decksymmetrie gekennzeichnet sind, wurden nebeneinander so eingezeichnet, dass die ihren Zellen angehörenden Conturen ihnen sämtlich gemeinsam sind und eine ununterbrochene Kette bilden. Bei solcher Anordnung werden besondere Zeichnungen der für alle diese Systeme gemeinschaftlichen Elemente der Decksymmetrie überflüssig, weil die letzteren schon aus der Zeichnung des zugehörigen einfachen Systems ersichtlich sind, in allen anderen wird ihre Anwesenheit von vornherein vorausgesetzt.

Die Bedeutung der Bezeichnungen bleibt dieselbe, wie damals, und zwar:

- verticale zweizählige Symmetrieaxe.
- ↻ verticale zweizählige Schraubenaxe.
- ▲ verticale dreizählige Symmetrieaxe.
- ↻ (rechts) rechte verticale dreizählige Schraubenaxe.
- ↻ (links) linke verticale dreizählige Schraubenaxe.
- ◆ verticale vierzählige Symmetrieaxe.
- ↻ (rechts) verticale vierzählige rechte Schraubenaxe.
- ↻ (links) verticale vierzählige linke Schraubenaxe.
- ↻ (nichtpolare) nichtpolare verticale vierzählige Schraubenaxe.
- ◆ verticale sechszählige Symmetrieaxe.
- ↻ (rechts) verticale rechte sechszählige Schraubenaxe mit Längsschiebung $\frac{\lambda}{6}$.
- ↻ (links) verticale linke sechszählige Schraubenaxe mit Längsschiebung $\frac{\lambda}{6}$.
- ↻ (rechts) verticale rechte sechszählige Schraubenaxe mit Längsschiebung $\frac{\lambda}{3}$.
- ↻ (links) verticale linke sechszählige Schraubenaxe mit Längsschiebung $\frac{\lambda}{3}$.
- ↻ (nichtpolare) verticale sechszählige (nicht polare) Schraubenaxe mit Längsschiebung $\frac{\lambda}{2}$.
- Inversionscentrum (zweizählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie).
- ◇ verticale vierzählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie.
- ⬡ verticale sechszählige Axe I. Art der zusammengesetzten Symmetrie.
- ⋈ verticale sechszählige Axe II. Art der zusammengesetzten Symmetrie.

Dabei verschwinden einige Symmetrieelemente; die Form der Raumeinheiten, die Lage der Columnen und Schichten bleibt dabei aber unberührt.

Nun ist auch hier in Rücksicht zu nehmen, dass es schon längst bewiesen worden, dass die Systeme, je nach ihrer Syngonie, durch homogene Deformationen transformirt werden können, ohne die denselben innewohnenden Eigenschaften der regulären Raumtheilungen zu verlieren¹⁾.

Es ist nämlich der Beweis dafür erbracht worden, dass solche Systeme zweierlei Art von Deformationen unterzogen werden können: a) Dilatationen und b) Verschiebungen. Das sind gerade die Relationen, in welchen die krystallographischen Figuren unter einander stehen, und welche desshalb als die der krystallographischen Projectivität bezeichnet werden und deren nähere Untersuchung zu dem Schlusse geführt hat, dass dieselben identisch sind mit der Affinität von Möbius.

Die Deformationen dieser Art stehen mit der Syngonie im nächsten Verhältniss und sind durch folgende Sätze bestimmt:

1. Satz. In jeder singulären Richtung kann positive oder negative Dilatation hervorgerufen werden.

Man unterscheidet dabei die orthogonale und die schiefe Dilatation, je nachdem die feste Dilatationsebene zur Dilatationsrichtung senkrecht ist oder nicht. Schiefe Dilatationen sind natürlich nur dann zulässig, wenn beide, die Richtung und die Ebene, singulär sind.

Die verticalen Symmetrieebenen werden direct durch ununterbrochene gerade Linien ersichtlich, ebenso wie die horizontalen zweizähligen Symmetrieaxen.

Die horizontalen zweizähligen Schraubenaxen und die verticalen Gleitebenen werden durch punktirte Linien angezeigt.

Für die letzteren wird die Richtung der Gleitschiebung dadurch angegeben, dass diejenigen mit verticaler Gleitschiebung einfach durch punktirte Linien angezeigt werden; ist die Richtung der Gleitschiebung horizontal, so ist dies aus den beigegebenen Pfeilen ersichtlich; sind diese Richtungen schief, so wird dies durch Querstriche angegeben und zwar bezeichnet ein einziger Querstrich die Componente $\frac{\lambda_0}{2}, \frac{\lambda_1}{2}$; sonst werden zwei Querstriche beigegeben.

Wenn eine horizontale Axe resp. Symmetrie- oder Gleitebene (Inversionscentrum u. A.) nicht mit der Zeichnungsebene zusammenfällt, so wird die Entfernung, von oben nach unten gerechnet, durch eine Ziffer angegeben, und zwar für sämtliche Syngoniearten ausser der hexagonalen wird als Einheit $\frac{\lambda}{4}$, und für die letzte $\frac{\lambda}{6}$ angenommen. Anstatt $\frac{1}{2}$ stellt man einfach einen Punkt auf. Für horizontale Symmetrie- resp. Gleitebenen, deren Vorhandensein aus der Anwesenheit der dem Zellenrande angefügten Linien ersichtlich wird, ist die Entfernungsziffer in Klammer eingeschlossen.

Für die Systeme der kubischen Syngonie sind manche schief stehenden Symmetrieelemente durch Buchstaben angezeigt, deren Bedeutung direct aus dem beigegebenen Diagramm ersichtlich ist. Schiefe Symmetrie- resp. Gleitebenen sind überhaupt nicht angezeigt worden; die Lagen der dreizähligen Symmetrieaxen, umgekehrt, werden vollständig angezeigt.

Dieselben Bezeichnungen gelten auch für die I. Tafel. Da aber hier nur verticale Symmetrieaxen und verticale Symmetrieebenen resp. Gleitebenen mit horizontaler Gleitschiebung vorhanden sind, so ist nur ein Theil dieser Bezeichnungen zu berücksichtigen. Die Pfeile für horizontale Gleitschiebung sind unterdrückt worden.

¹⁾ Die betreffenden Sätze sind in denselben Arbeiten aufgestellt, von welchen in der Anmerkung 1 S. 477 die Rede ist.

Besondere Anmerkung. Hier wird von der allseitigen Dilatation abgesehen, welche ebenfalls als ein besonderer Fall der Affinität auftritt und eigentlich den Fall der Aehnlichkeit darstellt.

2. Satz. Als Verschiebungsebenen und Verschiebungsrichtungen können die singulären Ebenen resp. Richtungen nur dann auftreten, wenn in der zur Verschiebungsebene senkrechten und der Verschiebungsrichtung parallelen Ebene sämtliche Richtungen singulär sind.

Ausser trikliner Syngonie ist dieser Fall für monokline Syngonie zulässig, wenn man als Verschiebungsebene eine der besonderen singulären Richtung parallele Ebene und als Verschiebungsrichtung die zu derselben Richtung senkrechte nimmt.

Durch diese Sätze erwirbt die ausgeführte Ableitung der regulären Raumtheilungen I. Ordnung die erwünschte Allgemeinheit.

17. Jetzt stellen wir die Frage auf, ob Systeme möglich sind, in welchen die Raumeinheiten verschiedenartig orientirt sind?

Auch jetzt können wir in allgemeinster Weise die Deckoperation irgend zweier Einheiten des Systems so auffassen, dass dieselbe aus 2 Theiloperationen besteht: 1. eine Drehung um eine bestimmte Axe um den Winkel α und 2. eine einfache Translation.

Dazu kann noch eine Spiegelung kommen.

Ohne die Betrachtungen des § 15 I. Theil zu wiederholen, können wir jetzt direct den Schluss angeben, dass die erste Theiloperation eine der Symmetrieaxe entsprechende Drehung ist. Dieselbe mit Translation combinirt, giebt eine Schraubenaxe als ein Symmetrieelement¹⁾.

Auch jetzt sind Symmetrieelemente von verschiedener Bedeutung unterschieden, und zu allererst diejenigen, welche in den Raumeinheiten explicit sind, von denjenigen, welche als Elemente der Verbandssymmetrie auftreten.

Als explicite Symmetrieelemente können Symmetrieaxen, Symmetrieebenen und Elemente der zusammengesetzten Symmetrie auftreten, keineswegs aber Schraubenaxen und Gleitebenen.

Aber dieselben Symmetrieelemente, welche explicit vorkommen, können auch als Elemente der Verbandssymmetrie auftreten. Solche Symmetrieelemente werden als periphere bezeichnet.

18. Da die Anzahl der möglichen Orientirungen der Raumeinheiten eine endliche ist, so müssen unter denselben auch gleichorientirte vorkommen.

Nehmen wir eine solche z. B. die nächstliegende in Betracht, so finden wir, dass dadurch schon eine unendlich congruente Reihe mit bestimmter Richtung und Strecke bestimmt wird; dann ergibt von sich selbst, dass die Gesamtheit gleichorientirter Raumeinheiten ein Raumgitter bildet; somit können wir auch für solche Systeme die für Systeme I. Ordnung gefassten Schlüsse anwenden; also finden wir, dass diese Systeme nur mit den oben angegebenen 32 Symmetriearten verträglich sind, welche sich ihrerseits zu 6 Syngonien gruppieren.

¹⁾ Leider sind bis jetzt in der Symmetriellehre solche Schraubenaxen von den allgemeinen Schraubenaxen nicht durch ein besonderes Fachwort unterschieden. Dies ist nur desswegen zulässig, weil in der Symmetriellehre, ebenso wie in der Lehre von der regulären Raumtheilung nur solche besondere Schraubenaxen zu berücksichtigen sind.

19. Wählen wir in einer Raumeinheit einen beliebigen, aber im Innern derselben befindlichen Punkt aus, so erhalten wir zuerst bei der Annahme der expliciten Symmetriegrösse s eben diese Anzahl der im Innern enthaltenen Punkte. Sämmtliche Deckbewegungen des Systems, welche ausschliesslich durch Symmetrieelemente vertreten sind (§ 17), bedingen eine unendliche Anzahl solcher Punktgruppen, welche, zusammengenommen, ein regelmässiges Punktsystem bilden.

Wären Punkte vorhanden, deren analoge Punkte in ihrer Gesamtheit ein Raumgitter gebildet hätten (Hauptpunkte), so hätten wir schliessen können, dass diese Punkte für die Centra des Paralleloëders genommen werden könnten, und dann wäre eine Raumeinheit, einzeln genommen oder in einer bestimmten Gruppe, als ein (der Form nach) primäres oder secundäres Paralleloëder aufzufassen. Wie aber dies zu beweisen für den allgemeinsten Fall nicht gelungen ist, so ist auch die Möglichkeit der Annahme nicht ausgeschlossen, dass dies auch nicht der Fall sein kann. Aber selbst dann kann das System so aufgefasst werden, als ob es aus lauter Einheiten bestünde, welche sämmtlich parallel orientirt sind, wobei aber jede einzelne Raumeinheit nicht mit einem einfachen Paralleloëder identisch ist, sondern eine vereinigte Anzahl derselben darstellt d. h. ein zusammengesetztes Paralleloëder ist.

20. Die aufgestellte Frage kann dadurch gelöst werden, dass man eine erschöpfende Darstellung der Systeme ausführt, deren Einheiten einfache Paralleloëder sind, und auf diese Weise eine Anzahl regelmässiger Punktsysteme reproducirt, und dann das gefundene Resultat mit der auf anderem Wege ausgeführten erschöpfenden Darstellung der regelmässigen Punktsysteme vergleicht. Würden die beiden Resultate zusammenfallen, so sollte es heissen, dass auch die regulären Raumtheilungen erschöpfend dargestellt worden sind; damit wird aber zugleich der Beweis geliefert, dass sämmtliche regelmässigen Punktsysteme auch als particulärer Fall die Hauptpunktsysteme enthalten. Sonst sind die Systeme vorhanden, ohne in sich Hauptpunkte zu enthalten.

Besondere Anmerkung. Der Bestimmtheit wegen sind folgende Betrachtungen zu berücksichtigen.

Da in jedem jetzt in Betracht kommenden System die (der Form nach) einfachen Paralleloëder verschieden orientirt sind, so sind dieselben streng genommen keine Paralleloëder mehr. Nur eine Gruppe derselben, in welcher je ein Paralleloëder jeder Orientirung vertreten ist, kann in strengem Sinne des Wortes als solches betrachtet werden. Die einzelnen Raumeinheiten sind nur als die integrierenden Theile eines Paralleloëders anzusehen, und solche, durch Symmetrieelemente unter einander verbundenen Raumfiguren pflegt man als Stereoëder zu bezeichnen. Wenn dabei dieselben explicite Symmetrie besitzen, so können sie in noch kleinere Figuren getheilt werden. Nennen wir die letzteren die einfachen Stereoëder, so sind die elementaren Raumeinheiten des Systems die zusammengesetzten Stereoëder.

Für die die Hauptpunkte enthaltenden Systeme sind also die zusammengesetzten Stereoëder der Form nach auch die Paralleloëder, und die eigentlichen Paralleloëder sind der Form nach die zusammengesetzten Paralleloëder.

Für die die Hauptpunkte nicht enthaltenden Systeme, wenn solche überhaupt vorhanden sind, sind sogar die eigentlichen Stereoëder der Form nach die zusammengesetzten Paralleloëder.

21. Das Resultat aller dieser Betrachtungen ist, dass man zu einer erschöpfenden Darstellung aller typischen Systeme mit Hauptpunkten kommt, wenn man alle Symmetriearten, eine nach der anderen, berücksichtigt und für jede derselben zum Ausgangspunkt die dazu gehörenden Typen des Paralleloëders I. Ordnung herauswählt, aber denselben eine geringere explizite Symmetrie zuerkennt, und zwar alle diejenigen Symmetriearten, welche derjenigen der I. Ordnung untergeordnet sind, und die frei bleibenden Symmetrieelemente als Elemente der Verbandsymmetrie auffasst.

Auch jetzt wird die Symmetriegrösse in zwei Factoren zerlegt: die der expliziten und die der Verbandsymmetrie, deren Product gleich ist der Symmetriegrösse des Systems.

Die Symmetriegrösse der Verbandsymmetrie ist zugleich der Anzahl der Orientirungen der Einheiten des Systems gleich. Im besonderen Falle der asymmetrischen Einheiten ist diese Anzahl zugleich die Symmetriegrösse des Systems.

22. Jedes solche System kann also durch das Paralleloëder und dessen Orientirungen in den anliegenden Raumeinheiten eindeutig und streng bestimmt werden. Ist das Paralleloëder asymmetrisch, so kann die Orientirung der anliegenden Einheiten durch eine einzige Operation bestimmt werden, und zwar entweder a) durch einfache Translation oder b) durch ein Element der Verbandssymmetrie. Die letzte Operation wird durch eine einzige charakteristische Zahl angegeben, und zwar eine Zahl, welche der bezüglichlichen Grenzfläche angehört. Die Angabe der einfachen Translation kann einfach durch die Abwesenheit einer solchen charakteristischen Zahl geschehen.

Die Systeme wollen wir in solche von verschiedenen Ordnungen gruppieren, je nach der Anzahl der verschiedenen Orientirungen der Einheiten, also nach der Symmetriegrösse der Verbandsymmetrie.

23. Die Darstellung der Systeme wollen wir in der Reihenfolge der Ordnungen ausführen, aber zugleich in der Ordnung der Paralleloëder, und zwar zuerst die Triparalleloëder, dann die Hexa- und Heptaparalleloëder und zuletzt die Tetraparalleloëder berücksichtigen.

Jedesmal ist dem Untersuchungsgang die Auffindung der Ableitungsformen vorzuschicken. Diese Auffindung wird auch hier erschöpfend ausgeführt, wenn man in der Reihe der absoluten Entfernung verschiedene Einheiten als die nächstliegenden gleich orientirten annimmt.

Jede solche Annahme giebt uns sofort eine bestimmte Reihe mit der ihr zugeordneten Richtung und Strecke. Ist diese Richtung keine singuläre, so erhalten wir wenigstens zwei gleiche Reihen, und hiermit ein ebenes Netz gleich orientirter Raumeinheiten. Ist die Anzahl gleicher Richtungen grösser als zwei, so erhalten wir wenigstens drei bestimmte Reihen und somit wird uns ein gewisses Raumgitter bestimmt.

Für zwei gleiche Richtungen ist aber eine andere Annahme nöthig, um das Raumgitter zu bestimmen. Die Anzahl der zulässigen Ableitungsformen wird dadurch vergrössert.

Sind die angenommenen Richtungen singuläre, so stellt sich den zulässigen Annahmen noch ein viel weiteres Gebiet, indem die Anzahl bis auf drei steigt.

Jedenfalls sind auch hier die beiden folgenden Sätze giltig: a) die Aufsuchung der Ableitungsformen ist eine Sygonie- und nicht eine Symmetriefrage¹⁾, und b) die

¹⁾ Speciell für hexagonale Sygonie sind auch Hyposygoniegruppen zu berücksichtigen.

Ableitungsformen der höheren Syngoniearten für jeden Paralleloëdertypus und jede gegebene Ordnungszahl des Systems stehen unter denjenigen der niederen Syngoniearten.

Die Ableitungsformen der monoklinen Syngonie stehen unter denen der triklinen, der rhombischen Syngonie unter denen der monoklinen, der tetragonalen und hexagonalen unter denen der rhombischen, und der kubischen Syngonie unter denen der tetragonalen und hexagonalen Syngonie.

24. Ist eine Ableitungsform ermittelt worden, so werden dadurch bestimmte Relationen in der Orientirung verschiedener Einheiten bedingt. Dabei sind aber auch individuelle Eigenschaften der auftretenden Symmetrieelemente in Betracht zu ziehen. Diese Eigenschaften lassen sich auf Grund der Sätze § 13 I. Theil und deren Ergänzungen § 15 II. Theil entwickeln.

Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass alle Systeme überhaupt als solche I. Ordnung, aber durch Symmetrieelemente ungesättigte aufgefasst werden können. Theoretisch genommen liegt stets die Möglichkeit vor, diese Sättigung zu vollbringen, d. h. den Einheiten die Symmetrieelemente des Systems explicit beizufügen, und dann kommt das System I. Ordnung zu Stande; in Folge dessen pflegt man solche Systeme auch als symmorphie zu bezeichnen. Auf Grund dessen können wir aber schliessen, dass in jedem hierzu gehörenden, also ungesättigten System sämtliche Arten der Symmetrieelemente nur dieselbe relative Lage annehmen können, welche ihnen in den Systemen I. Ordnung zukommt. Also z. B. eine 6-zählige Schraubenaxe kann nur centrale Lage besitzen, und dabei ausschliesslich beim Tetraparalleloëder, da dieselbe als eine 6-zählige Symmetrieaxe aufzufassen sei (verbunden mit der Translation), und solcher kommt eine bestimmte Lage zu; 6-zählige Schraubenaxen in den symmorphen Systemen fehlen vollständig.

Auch 4- und 3-zählige Symmetrieaxen ausser expliciter Form können auch als peripherische auftreten, aber die erste nur im Tri-, die letzte im Tetraparalleloëder. Im Hexa- und Heptaparalleloëder kann die erste Axe ausschliesslich in der Form einer Schraubenaxe (mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{2}$, um so mehr mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{4}$) vorkommen; dasselbe gilt für die 3-zählige Axe u. s. f.

Da aber die Aufzählung der möglichen Lagen der einzelnen Symmetrieelemente in den Paralleloëdern aller Art viel Raum gefordert hätte, so soll jetzt nur darauf aufmerksam gemacht werden, in jedem besonderen Falle diesen Standpunkt nicht zu vernachlässigen, da die Lagen sämtlicher Symmetrieelemente in den symmorphen Systemen leicht zu berücksichtigen ist¹⁾.

Der besondere Fall ist, wenn wenigstens zwei Symmetrieelemente sich in einem Punkte, Symmetriecentrum, schneiden. Das ist für sämtliche Symmetriearten ausser 1, 3, 4, 9, 10, 16, 17, 21 und 22 der Fall. Die Symmetriecentra erweisen sich als peripherische, wenn keine in ihnen sich schneidenden expliciten Symmetrieelemente in das Innere einer Raumeinheit eindringen (und gehen dann nothwendig durch das Centrum des primären Paralleloëders); ist aber dies für ein Element der Fall, so sind die Symmetriecentra halbperipherische.

¹⁾ Diese Frage wurde in dem I. Theile der Theorie der Krystallstructur ausführlich besprochen (Groth's Zeitschrift für Krystallographie, Bd. 25, S. 150 ff.).

25. Unter den Elementen der Verbandsymmetrie sind ausser den peripherischen noch die centralen und die schneidenden zu unterscheiden.

Die centralen Elemente der Verbandsymmetrie sind diejenigen, welche durch das Centrum des primären Paralleloëders hindurchgehen. Dazu gehören die Schraubenaxen und die Gleitebenen.

Dieselben Symmetrieelemente können aber auch als schneidende auftreten und zwar wenn sie durch das Centrum nicht hindurchgehen, aber die ihnen entsprechenden charakteristischen Zahlen als solche auf den Grenzflächen auftreten.

Die Anwesenheit solcher Symmetrieelemente ist mit besonderen Relationen der Raumeinheiten verbunden.

Ein centrales, durch zwei auf entgegengesetzt liegenden Flächen durch charakteristische Zahlen bestimmtes Element der Verbandsymmetrie bedingt eindeutig eine Colonne II. Ordnung. Diese Colonnen sind immer phanerotopische, da die entgegengesetzt liegenden charakteristischen Zahlen dieselben sind. Dieselben Symmetrieelemente können aber auch in den Colonnen kryptotopisch auftreten, indem die diesen Colonnen zugeordneten charakteristischen Zahlen zwei verschiedene sind, also verschiedene Arten von Symmetrieelementen ausdrücken, aber das resultirende Symmetrieelement ein centrales ist, und durch die Zahlen nicht angezeigt wird.

Die schneidenden Symmetrieelemente bedingen direct und eindeutig eine Reihe I. Ordnung, wenn die bezüglichlichen Grenzflächen nicht anliegende sind; sind dieselben anliegende, so bestimmen solche Symmetrieelemente eine Colonne I. Ordnung, welche aber der gegebenen Raumeinheit nicht angehört.

Die Möglichkeit des Vorkommens solcher Symmetrieelemente wird also durch die gegebene Ableitungsform bedingt, und solche Symmetrieelemente sind in erster Linie zu berücksichtigen. Diese Möglichkeit ist durch die Gleichheit zweier charakteristischer Zahlen und durch relative Lage der bezüglichlichen Grenzflächen bedingt. Sind keine zwei charakteristischen Zahlen gleich, so sind alle betrachteten Symmetrieelemente ausgeschlossen, und dann bleibt nur noch die Möglichkeit des Auftretens der peripherischen Elemente zu berücksichtigen.

26. Jetzt wenden wir uns zur Behandlung der Aufgabe der vollständigen Aufsuchung der Systeme höherer Ordnung.

Ein solches System wird eindeutig und streng bestimmt, wenn ein Paralleloëder mit den allen seinen Grenzflächen zukommenden charakteristischen Zahlen auftritt. Nun sind aber nicht diese sämtlichen Zahlen von einander unabhängig, und zu allererst entsteht die Frage, welche Zahlen zur Bestimmung des Systems nothwendig und hinreichend sind.

Denken wir uns das System in lauter parallele und anliegende ebene Netze getheilt. Es wird sofort ersichtlich, dass die Bestimmung der Orientirung der der gegebenen Einheit anliegenden und dabei den beiden anliegenden ebenen Netzen zugehörenden Einheiten hinreichend ist.

In Folge der dreidimensionalen Eigenschaft des Raumes ist aber die Bestimmung wenigstens dreier Colonnen nothwendig.

Daraus folgt, dass die aufgestellte Aufgabe dann aufgelöst wird, wenn wir das System in solche ebene Netze theilen würden, deren drei und drei Einheiten der gegebenen anliegend sind.

Diesen beiden aufgestellten Bedingungen entsprechen die in den Figuren 12—15 (S. 497) durch die Buchstaben abc angezeigten Flächen; dabei werden auch die entgegengesetzt liegenden a' , b' und c' mit verstanden werden.

Es bleibt also übrig, sämtliche Systeme dadurch zu charakterisiren, dass man $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$ bestimmten Symmetriezahlen gleich macht.

Es muss sogleich hervorgehoben werden, dass speciell für das Hexaparalleloëder ein besonderer Fall vorkommt, in welchem die Angabe der Verbandsymmetrieelemente für a , b und c nicht genügend ist zum eindeutigen Bestimmen des Systems. Das ist nämlich der Fall, in welchem die Angabe zweier Elemente, z. B. b und c , überhaupt nicht genügt (Systeme IV. und VIII. Ordnung), aber dabei die Orientirung der Einheiten b und c eine solche ist, dass ihr gegenseitiges Verbandsymmetrieelement 5 ist, dessen Lage in Bezug auf die Grenzfläche a peripherisch ist; folglich $a = 5$, und das System bleibt unbestimmt. Für diesen speciellen Fall können wir ausnahmsweise eine andere Grenzfläche, z. B. d , auswählen.

27. Es sind Systeme möglich, welche für sämtliche Columnen phanerotopisch sind. Solche Systeme wollen wir als phanerotopische bezeichnen, im Gegensatz zu denjenigen, in welchen auch kryptotopische Columnen vorkommen, und welche wir desswegen als kryptotopische Systeme bezeichnen.

Nun ist es einleuchtend, dass für die Bestimmung der phanerotopischen Systeme hinreichend ist, nur die Zahlen a , b und c bestimmten Symmetriezahlen gleich zu setzen; für die kryptotopischen Systeme ist aber nothwendig, die Zahlenpaare $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$ sämtlich oder theilweise zu berücksichtigen. Dadurch wird zugleich ersichtlich gemacht, welche von den drei das System bestimmenden Columnen die phanerotopischen sind.

28. Ist ein Paar Grenzflächen vorhanden, deren charakteristische Zahl gleich 1 ist (welche nicht aufgestellt wird) d. h. die auf die Translation als Deckoperation hinweisen, so ist hiermit eine Colonne I. Ordnung bestimmt und dann kann das ganze System als aus lauter solchen parallelen Columnen bestehend betrachtet werden. Solche Systeme wollen wir Colonnensysteme nennen und ihr Symbol durch den Buchstaben c anmerken. Natürlich sind solche Systeme nur dann möglich, wenn die Colonne die singuläre Richtung hat.

Sind wenigstens zwei Paar solcher Flächen vorhanden, so entstehen zwei Columnen I. Ordnung, aber verschiedener Richtung, und dieselben bestimmen eine Schicht I. Ordnung. Dann ist das System als aus lauter parallelen Schichten I. Ordnung bestehend aufzufassen. Solche Systeme wollen wir als Schichtsysteme bezeichnen und ihrem Symbol den Buchstaben s begeben. Dieselben sind nur dann möglich, wenn die Schichtebene singulär ist.

Endlich kann der Fall vorkommen, bei welchem drei Paar solcher Flächen vorhanden sind, und trotzdem das System noch nicht dasjenige I. Ordnung ist. Dieser Fall ist aber ausschliesslich für Systeme der Heptaparalleloëder möglich, und zwar nur dann, wenn die bezüglichen Flächen diejenigen sind, durch welche die gegebene Raumeinheit den Raumeinheiten einer Schicht anliegend ist, welche selbst aber nicht die nächst anliegende ist. In dem primären Heptaparalleloëder sind diese Flächen die Vierecke. In diesem Falle stellt das System zwei in einander gestellte Raumgitter dar, deren Raumeinheiten aber verschieden

orientirt sind. Solche Systeme sind also nothwendig Systeme II. Ordnung. Wir wollen dieselben als Gittersysteme bezeichnen und ihrem Symbol den Buchstaben g begeben.

29. Es ist selbstverständlich, dass die Aufsuchung der phanerotopischen Systeme viel einfacher vor sich geht, als die der kryptotopischen.

Für die letzteren sind folgende Sätze zu berücksichtigen.

1. Satz. Tritt eine 2-zählige Schraubenaxe singulärer Richtung oder eine singuläre Gleitebene mit singulärer Gleitrichtung central als ein Element der Verbandsymmetrie auf, so sind die senkrechten Columnen höchstens II. Ordnung und die senkrechten Reihen nothwendiger Weise I. Ordnung.

Der Satz lässt sich ganz analog dem Satze § 25, I. Theil beweisen, indem man sich eine der gegebenen anliegenden Raumeinheit A vorstellt und dieselbe der dem gegebenen central liegenden Symmetrieelement entsprechenden Deckoperation unterwirft. Dann erhält man eine andere Einheit B . Unterwirft man die letztere der analogen Operation, aber in Bezug auf das in derselben central auftretende Symmetrieelement und dabei in entgegengesetzter Richtung, so kommt man zu einer neuen Einheit C , welche mit A gleich orientirt ist und mit derselben in einer und derselben Colonne resp. Reihe liegt. Die Colonne ist also höchstens II. Ordnung, und die Reihe nothwendig I. Ordnung.

Der Satz gilt natürlich da, wo das Symmetrieelement kryptotopisch ist, ebenso wie da, wo dasselbe phanerotopisch auftritt (in letzterem Falle ist es also ein centrales Element der Verbandsymmetrie). Da aber eine 2-zählige Symmetrieaxe zugleich eine Schraubenaxe ist, und eine Symmetrieebene zugleich eine Gleitebene ist, so ist derselbe Satz auch dann giltig, wenn diese Symmetrieelemente explicit auftreten.

Derselbe Satz ist ebenfalls für die 4-zähligen und 6-zähligen Symmetrie- und Schraubenaxen giltig, da dieselben auch zugleich 2-zählige sind.

2. Satz. Tritt eine 4-zählige polare (d. h. rechte oder linke) Axe central auf, und enthalten dabei alle Raumeinheiten Schraubenaxen von einem und demselben Windungssinn, so sind die zu ihnen senkrechten Schichten höchstens II. Ordnung und die ebenen Netze nothwendig I. Ordnung.

Der Beweis dieses Satzes ist dem des vorigen ganz analog.

Da aber die 4-zählige Symmetrieaxe zugleich Schraubenaxe mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{2}$ ist, und die letzte zugleich als eine polare Axe mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{4}$ anzusehen ist, so gilt der Satz auch für diese Axen.

Natürlich ist aber bei dieser Auffassung für 4-zählige Symmetrieaxe die Decktranslation in ihrer Richtung 4 Mal und für 4-zählige Schraubenaxe mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{2}$ 2 Mal kürzer als die Decktranslationsgrösse in der Richtung der polaren Schraubenaxe anzunehmen.

Ist der Windungssinn der der gegebenen Raumeinheit anliegenden Raumeinheit A der direct entgegengesetzte, so erhalten wir nach dem Ausführen der elementaren Deckoperation um die centrale Schraubenaxe eine Einheit B , welche mit A denselben Windungssinn, also den der gegebenen entgegengesetzten besitzt. Es folgt daraus, dass die Einheit C , welche aus B durch die Deckoperation um die in B central auftretende Axe in entgegengesetzter Richtung zu Stande kommt, nicht dieselbe Orientirung wie A besitzt, sondern sich aus derselben durch Drehung um die 2-zählige Axe erhalten lässt.

30. Speziell für die kryptotopischen Colonnen sind noch folgende Sätze giltig.

Tritt eine, einer kryptotopischen Colonne parallele, 2-zählige Schraubenaxe singulärer Richtung oder eine singuläre Gleitebene mit singulärer Gleitrichtung central und kryptotopisch auf, so kann keine der gegebenen anliegende Einheit dieselbe Orientirung mit den der Colonne angehörenden anliegenden Einheiten besitzen; ausgenommen wird der Fall der monoklinen Syngonie mit kryptotopischer Gleitebene in Bezug auf die Einheiten, welche mit der gegebenen diese Ebene gemeinsam haben.

In dem letzten Ausnahmefalle allein erhalten wir auf Grund der entgegengesetzten Annahme eine singuläre Reihe I. Ordnung. Für sämtliche übrigen Fälle ist diese Reihe keine singuläre; also entsteht in allen diesen Fällen ein ebenes Netz I. Ordnung, und diesem Netze würden auch die beiden der Colonne angehörenden und der gegebenen Einheit anliegenden Einheiten zukommen; die Colonne würde somit keineswegs kryptotopisch sein.

Für die der gegebenen anliegenden und dabei, zusammen mit der gegebenen, der zur kryptotopischen Colonne senkrechten Colonne angehörenden Raumeinheiten ist ganz zulässig, ihnen die gleiche Orientirung mit derjenigen Einheit zuzusprechen, welche der kryptotopischen Colonne angehört, aber der gegebenen Einheit nicht anliegend ist. Diese Orientirung würde durch die Drehung um die 2-zählige Axe oder Spiegelung in der Symmetrieebene bestimmt werden.

Ganz Analoges gilt für die kryptotopischen Colonnen, in welchen eine 4-zählige polare Axe (d. h. eine rechte oder eine linke) central und kryptotopisch auftritt. Die der gegebenen Einheit anliegenden und den in Bezug auf die kryptotopische Colonne senkrechten Colonnen angehörenden Raumeinheiten können nicht mit den der kryptotopischen Colonne angehörenden Einheiten gleiche Orientirung besitzen, diejenigen ausgenommen, deren Orientirung durch Drehung um eine 2-zählige Axe aus der gegebenen hervorgeht.

31. Wenn die Raumeinheiten explicit symmetrisch sind, so kommen folgende Fälle in Betracht.

Entweder a) ist die explicite Symmetrie der Verbandsymmetrie untergeordnet.

Ist dies der Fall, so wird die Ordnung im Vergleich mit der Ordnung der Systeme, in welchen die Verbandsymmetrie dieselbe ist, aber die Einheiten asymmetrisch sind, um so viele Male geringer, als Einheiten in der Symmetriegrösse enthalten sind. Dadurch ist das Auffinden solcher Systeme vereinfacht.

Oder b) die Elemente der expliciten Symmetrie sind von denjenigen der Verbandsymmetrie unabhängig. In diesem Falle bleibt auch bei derselben Verbandsymmetrie die Ordnung der Systeme dieselbe. Solche Systeme lassen sich auch aus den entsprechenden asymmetrischen durch einfache Einschaltung der betreffenden Symmetrieelemente ableiten.

Bei dieser Einschaltung ist aber stets zu berücksichtigen, ob die Lage der Elemente der Verbandsymmetrie diese Operation zulässt.

32. Speziell für die Systeme der hexagonalen Syngonie tritt als Element der Verbandsymmetrie in den zur Hauptaxe senkrechten Schichten allein die 3-zählige Symmetrieaxe auf und zwar ist dies lediglich für Tetraparalleloëdersysteme der Fall. Würde es möglich sein, ein 2-zähliges Symmetrieelement als ein Element der Verbandsymmetrie einzuführen, so wären die Schichten II. Ordnung gewesen, was aber unmöglich ist (§ 33, I. Theil), da der Ableitungsform gemäss nur Schichten III. und IV. Ordnung möglich sind. Wird der 3-zähligen peripherischen Symmetrieaxe die singuläre Symmetrieebene hinzugefügt, so wird

dadurch dieselbe explicit eingeführt, und die Ableitungsform, folglich die Ordnung des Systems bleibt dieselbe. Folglich kann die 6-zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie I. Art nicht als Element der Verbandsymmetrie der Schichten auftreten.

Da aber das Inversionscentrum der 3-zähligen Symmetrieaxe nicht hinzugefügt werden kann, so kann auch die 6-zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie I. Art nicht als eben solches Symmetrieelement auftreten.

Da auch die 6-zählige Symmetrieaxe ebenfalls als Element der Verbandsymmetrie der Schichten nicht auftreten kann, so ist aus alledem der Schluss zu ziehen, dass sämtliche Systeme der Symmetriearten 18, 20, 21, 22, 24, 25 und 27 (d. h. Systeme, in welchen 6-zählige Deckaxen oder 6-zählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie I. Art auftreten) Schichtsysteme sind.

33. Jetzt verfolgen wir den Ableitungsgang der Systeme II. und höherer Ordnung.

Diese Aufsuchung beginnt mit den Triparalleloëdersystemen; ihnen folgen die Hexa- und Heptaparalleloëder und zuletzt die Tetraparalleloëder. Dabei folgt diese Untersuchung der Reihenfolge der Ordnungen, für jede Ordnung der Reihe der Symmetriearten, und für jede Symmetrieart der Reihe der entsprechenden Typen I. Ordnung.

Die Resultate sind in der Tabelle V zusammengestellt, welche 8 Columnen enthält. In der 1. Columnne wird die Ableitungsform angegeben, in der 2. die Symmetrieart, in der 3. die Symmetriegrösse, in der 4. sind die Nummern der Systeme für jede Symmetrieart besonders angezeigt, in der 5. ist der Typus des Systems I. Ordnung angegeben, die Columnen 6 und 7 enthalten die charakteristischen Symmetriezahlen, die erstere für die explicite und die letztere für die Verbandsymmetrie; endlich die 8. Columnne enthält das Symbol des gefundenen Systems.

34. Es ist ganz offenbar, dass für die Systeme der triklinen Syngonie nur drei Ableitungsformen zulässig sind, und zwar all , laa und aaa , d. h. solche, in welchen zwei resp. eine resp. keine von den Grenzflächenpaaren mit Decktranslation verbunden ist. Diesen Ableitungsformen entspricht ein Schicht-, ein Colonnensystem und ein individuelles System. Für die triklone Syngonie sind lediglich drei diesen Formen entsprechende Systeme möglich.

35. Für die monokline Syngonie sind dieselben Formen gültig. Auf Grund der Principien der Lehre von der scheinbaren Symmetrie sind aber für die Typen 2 III , $1\chi\text{ III}$ und $2\chi\text{ III}$ je zwei Varietäten der ersten und der zweiten Form zulässig, also zusammen je fünf Systeme, während für die Typen 3 III , $1\chi'\text{ III}$ und $3\chi\text{ III}$ nur je eine Variation von jeder Form zulässig ist, also nur je drei Systeme.

Für die 5. Symmetrieart sind aber noch die untergeordneten Symmetriearten und zwar die 2., 3. und 4. berücksichtigt. In Folge dessen erhalten wir für diese Symmetrieart $3 \times 5 + 3 \times 3 = 24$ Systeme.

36. Für die 6. und andere Symmetriearten der rhombischen Syngonie gelten dieselben Ableitungsformen, aber für manche Typen wird vom Standpunkte der scheinbaren Symmetrie die Anzahl der Varietäten grösser angenommen werden müssen. Für den Typus $2\phi\text{ III}$ mit expliciter Symmetrie 12 sind jetzt $1a1$ von $11a$ und $aa1$ von $a1a$ zu unterscheiden. Dadurch wird die Anzahl der Varietäten bis auf 7 vergrössert. Von demselben Standpunkte aus kann ein und dasselbe explicite Symmetrieelement auf verschiedene Weise

hinzugefügt werden. Für den Typus 5 III sind die Symmetrieachsen 4' und 8' der Lage nach von 5 zu unterscheiden, wenn auch die Axen 4' und 8' unter einander gleichwerthig sind. Für den Typus 3 φ III sind wieder die Symmetrieebenen 1' und 4 ungleichwerthig.

Hier kommt ein besonderer Fall vor, indem einer und derselben Symmetrieart, einem und demselben Grundtypus 4 III zwei verschiedene Systeme angehören, welchen eigentlich ein und dasselbe Symbol 5 (2 III₄)^c zukommt, da auch die beiden zu Grunde liegenden Punktsysteme sich als identische erweisen und zwar als das Punktsystem 5 (Taf. IV). Die Systeme müssen aber verschieden sein, da ihnen verschiedene Varietäten der Ableitungsformen und zwar 1aa und aa1 entsprechen. Die Verschiedenheit dieser Varietäten ist aber aus der Lage der expliciten Symmetrieaxe 5 ersichtlich. Die Verschiedenheit kommt dadurch zum Ausdruck, dass in dem ersten die besondere Symmetrieaxe des Systems (welche sich mit den anderen nicht schneidet) explicit vorkommt, während in dem zweiten dieselbe Axe eine peripherische ist (der Grenzfläche *b* zugeordnet). Um diese Verschiedenheit zum Ausdruck kommen zu lassen, ist dem Symbol des zweiten Systems ein Apostroph beigegeben.

37. Für die Systeme der tetragonalen Syngonie behalten dieselben drei Ableitungsformen ihre Giltigkeit, welche aber in Folge der Anwesenheit der 4-zähligen Deckaxen nur in drei typischen Varietäten vorkommen, und zwar a11, 1aa und aaa.

Für die vollständige Darstellung der Systeme bleiben nur die Grundtypen und untergeordnete Symmetriearten zu berücksichtigen. Vom Standpunkte der Lehre über scheinbare Symmetrie sind aber solche explicite Symmetriearten wie 1256 und 1458 u. dgl. von einander zu unterscheiden.

38. Für die Systeme der hexagonalen Syngonie ist eine einzige Ableitungsform aaa gültig.

Hier werden auch nicht alle Symmetriearten vertreten und zwar a) weil nicht für sämtliche Symmetriearten die Grundtypen überhaupt vorhanden sind, sondern lediglich für Symmetriearten der trigonalen Hyposyngonie, b) speciell für die 16. Symmetrieart fehlen die hierzu gehörenden Systeme einfach desswegen, weil unter den Symmetrieelementen keine 2-zähligen vorkommen. Aus diesem Grunde muss die 3-zählige Symmetrieaxe explicit auftreten. Dadurch lassen sich die untergeordneten Symmetriearten bestimmen.

39. Auch für die Systeme der kubischen Syngonie ist allein die Ableitungsform aaa gültig; auch hier muss die 3-zählige Symmetrieaxe explicit auftreten. In Folge dessen lassen sich die charakteristischen Zahlen der Verbandssymmetrie (ebenso wie die expliciten) kürzer anzeigen, wie darauf im § 11 hingewiesen wurde.

40. Systeme III. Ordnung sind nur dann möglich, wenn 3-zählige Deckaxen vorhanden sind. Da aber für Triparalleloëder 3-zählige Symmetrieachsen keinesfalls als Elemente der Verbandssymmetrie auftreten können, so bleiben lediglich die polaren 3-zähligen Schraubenachsen zulässig. In einem und demselben System können dann niemals polare Axen von entgegengesetztem Sinne auftreten, da Kraft der Sätze § 15 die resultirenden Symmetrieelemente 3-zählige Symmetrieachsen sein würden, welche aber hier ausgeschlossen sind.

Die einzige hier zulässige Ableitungsform ist $\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$, wo *a* und *a'* verschiedene Zahlen sind. Die Zähler dieser Ausdrücke sind nothwendiger Weise die gleichen, gemäss der Annahme, dass 3-zählige Deckaxen vorkommen. Solche Systeme können also aus lauter

parallelen ebenen Netzen I. Ordnung bestehen, welche zu den Deckaxen senkrecht sind. Daraus folgt, dass solche Systeme für die kubische Syngonie unzulässig sind.

Es bleibt also allein die hexagonale Syngonie zu berücksichtigen, und zwar die Symmetriearten der trigonalen Hyposyngonie.

Die 16. Symmetriearart ist offenbar zulässig, indem hier als Verbandsymmetrieelemente rechte resp. linke 3-zählige Axen auftreten. Die Lage dieser Axen kann leicht auf Grund des Ergänzungssatzes § 15 ermittelt werden, indem man sich zuerst eine explicite 3-zählige Symmetrieaxe denkt, und dann dem Satze gemäss die resultierende Axe der ihr zukommenden elementaren, rechten oder linken Drehung mit der Translation aufsucht. Für die Axen von entgegengesetztem Windungssinn werden auf diese Weise verschiedene Lagen gefunden. Für die rechten Axen findet man den Schnittpunkt einer Axe mit den Flächen a und c (Fig. 18), indem man auf der rechten Mittelkante der Fläche a den Mittelpunkt e durch Gerade mit den Scheitelpunkten A verbindet, und dann bestimmen die Schnittpunkte d und d' dieser Geraden Ae mit den horizontalen Diagonalen der Flächen die Lage einer rechten 3-zähligen Schraubenaxe. Für die linken Axen wird eine analoge Construction gelten mit dem einzigen Unterschied, dass man dazu den Punkt e auf der linken Mittelkante auswählt (Fig. 19).

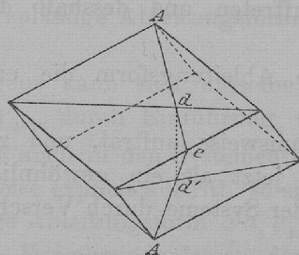


Fig. 18.

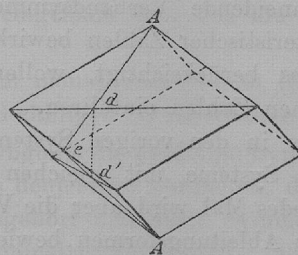


Fig. 19.

Unter anderen Symmetriearten sind nur diejenigen zulässig, deren Systeme aus den eben beschriebenen zwei Systemen sich durch Hinzufügung der expliciten Symmetrieelemente ableiten lassen (§ 31). Da aber in diesen Systemen lediglich die polaren Axen mit einem Windungssinn auftreten, so ist die Hinzufügung der Elemente der geraden Symmetrie (Symmetrieebenen, Gleitebenen, zusammengesetzte Symmetrie) ausgeschlossen.

Es bleibt allein die Hinzufügung der 2-zähligen Symmetrieaxen möglich, was der 19. Symmetriearart entspricht. Die Anwendung der Betrachtungen des § 31 kann den directen Beweis für die Möglichkeit der betreffenden zwei Systeme beibringen. Sämmtliche anderen Annahmen sind unzulässig.

41. Die Systeme IV. Ordnung sind nur dann möglich, wenn die Symmetriegrösse durch eine Zahl $4n$ ausgedrückt werden kann, wo n eine ganze Zahl, inclusive der Einheit, ist. Die niedrigste hierzu gehörende Syngonie ist die monokline, und zwar die 5. Symmetriearart.

Dazu gehören folgende Ableitungsformen: Für phanerotopische Systeme erhalten wir $1ab$ (resp. $ab1$ u. dgl.), wo a und b verschiedene Zahlen sind, abb (resp. aab u. dgl.) und endlich abc , wo abc drei Zahlen bedeuten, welche zwar verschieden, aber nicht unabhängig sind, da sonst dieselben sich sämmtlich auf 2-zählige Symmetrieelemente beziehen würden und wir ein System VIII. Ordnung erhalten hätten; für die Systeme IV. Ordnung muss ein z. B. a

entsprechendes Symmetrieelement in Bezug auf die durch b und c ausgedrückten Symmetrieelemente das resultierende Symmetrieelement sein.

Für kryptotopische Systeme erhalten wir $\frac{a}{a'}; 1; 1, \frac{a}{a'}; \frac{a}{a'}; 1, \frac{a}{a'}; \frac{a}{a'}; \frac{a}{a'}; \frac{a}{a'}; b; 1, \frac{a}{a'}; b; b, \frac{a}{a'}; a; b, \frac{a}{a'}; \frac{a}{a'}; b$, wo stets zwischen 3 Zahlen a, a' und b die eben angedeutete Relation besteht.

Hierzu gehören nur zwei Grundtypen 2χ III und 3χ III.

Wenn man den Standpunkt der scheinbaren Symmetrie berücksichtigt, so unterscheidet man für den ersten Typus $1ab$ von $ab1$, abb von aab , $\frac{a}{a'}11$ von $1\frac{b}{b'}1$, $\frac{a}{a'}b1$ von $1\frac{b}{b'}c$ und von $\frac{b}{b'}1$, $\frac{a}{a'}bb$ von $a\frac{b}{b'}a$; die Ableitungsformen $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}1$ und $\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}b$ sind aber für denselben unmöglich (1. Satz, § 29).

Für den zweiten Typus sind aber die Ableitungsformen $1ab$, abc , $\frac{a}{a'}b1$, $\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}b$ unmöglich, da die Richtungen zweier Columnen nicht die singulären sind, und speciell die zwei letzten in Folge davon, dass unter drei zu Gebote stehenden Symmetrieelementen zwei derselben als schneidende Verbandsymmetrieelemente auftreten und deshalb die Gleichheit zweier charakteristischer Zahlen bewirken.

Alles dies berücksichtigt, wollen wir für jede Ableitungsform die entsprechenden charakteristischen Zahlen einführen.

Das, was in den vorigen Systemen ganz ausnahmsweise auftrat, und zwar die Erscheinung der Systeme mit gleichen Symbolen, ist jetzt als ein gewöhnlicher Fall zu bezeichnen. Jedes Mal wird aber die Verschiedenheit der Systeme durch Verschiedenheit der Varietäten der Ableitungsformen bewiesen.

42. Für die Systeme der rhombischen Syngonie sind dieselben Ableitungsformen gültig, so dass bei der Aufsuchung nur die bezüglichen Elemente der Verbandsymmetrie zu berücksichtigen und das Princip der scheinbaren Symmetrie nicht ausser Acht zu lassen sind.

Speciell für die 8. Symmetrieart ist noch die explicite Symmetrie untergeordneter Symmetriearten einzuführen. Mit der Einführung des Inversionscentrums fallen von selbst kryptotopische Ableitungsformen weg.

43. Bei der Aufsuchung der Systeme der tetragonalen Syngonie sind zwar die Ableitungsformen dieselben, aber es kommt ein besonderer Umstand hinzu, indem die charakteristischen Zahlen 3 und 7, ebenso wie 3' und 7' immer unter einander verbunden auftreten, da schon eine dieser Zahlen die Lage des 4-zähligen Symmetrieelementes eindeutig bestimmt. Wenn $a=3$, so muss $a'=7$, wenn $b=3$, so muss $c=7$ sein; wenn $b=3'$, so ist $c=7'$, wenn $a=3'$, so müssen die Zahlen 3' und 7' vereinigt auftreten, und 5 tritt dann explicit auf.

Nimmt man in Rücksicht, dass für die Systeme IV. Ordnung sämtliche charakteristische Symmetriezahlen sich in 4 Gruppen sondern, von denen eine die explicite Symmetrie ausdrückt, und nur drei andere Gruppen zu Gebote stehen, so findet man leicht, dass nur dann zwei solche Gruppen, welche weder 3, 7 noch 3', 7' enthalten, entstehen können, wenn diese Zahlen vereinigt in einer Gruppe enthalten sind. Das ist ja aber wieder nur dann der Fall, wenn 5 explicit auftritt.

Von diesem Fall abgesehen, sind nur zwei Annahmen zulässig: a) entweder $a = 3$ (oder 7), dann haben wir ein System mit lauter polaren Axen in centraler Lage und es sind die Sätze § 29 zu Hilfe zu nehmen, b) oder $b = 3$, $c = 7$ (auch $b = 3'$, $c = 7'$); dann ist eine Schicht IV. Ordnung bestimmt, und nur ist die Auswahl der anderen Elemente der Verbandsymmetrie dadurch beschränkt, dass die ihnen entsprechenden Deckoperationen die peripherischen 4-zähligen Symmetriearien zur Deckung bringen müssen.

Treten die beiden Zahlen vereinigt auf, so erhalten wir für die Systeme die analogen Einschränkungen. Treten endlich diese Zahlen gar nicht auf, so ist das der Fall der peripherischen 4-zähligen Schraubenaxe mit der Deckschiebung $\frac{\lambda}{2}$, und wir erhalten wieder die analogen Beschränkungen in der Auswahl der übrigen Symmetrieelemente.

Für die hierzu gehörenden Systeme ist die Annahme der der singulären Ebene parallelen kryptotopischen Columnen ausgeschlossen, da wir derselben gemäss Schichten von mindestens VIII. Ordnung erhalten hätten, was für diese Systeme unzulässig ist.

44. Für die Systeme der hexagonalen Syngonie ist unentbehrlich die 3-zählige Symmetriearie explicit anzunehmen. Die Symmetriegrösse würde dann wenigstens 12 enthalten, was allein für die 20. Symmetriearie der Fall ist (unter den Systemen der trigonalen Hyposyngonie). Die einzige zulässige Ableitungsform ist $\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$. Demgemäss lässt sich ein einziges System auffinden.

Uebrigens kann sich dasselbe System aus dem monoklinen System (5. Symmetriearie) $3\chi 1 (1 III_3)_{4/5}$ durch Einführung der expliciten 3-zähligen Symmetriearie ableiten lassen.

45. Da auch in den Systemen der kubischen Syngonie die 3-zählige Symmetriearie nothwendiger Weise explicit auftritt, so sind dieselben aus denjenigen abzuleiten, denen die einzige hier zulässige Ableitungsform aa_1a_2 (resp. abc) angehört und deren Symmetriearie sich aus dieser durch Verschwindenlassen der 3-zähligen Symmetriearie ergibt. Also sind für die 28. Symmetriearie die Systeme 8, 9 und 10 der 6. Symmetriearie, für die 29. Symmetriearie die Systeme 8, 9, 10 der 8., für die 30. Symmetriearie die Systeme 11 und 12 der 14., für die 31. Symmetriearie die Systeme 15 und 16 der 13. und für die 32. Symmetriearie die Systeme 9 und 10 der 15. Symmetriearie zu berücksichtigen, und zwar der Prüfung zu unterziehen, ob die Einführung der 3-zähligen Symmetriearie explicit zulässig ist.

Nun ist leicht zu constatiren, dass dies wirklich für die Systeme 6 ($1 III_4$), 5 ($1 III_4$), $6\chi (1\pi III_4)$, $3(\chi 3) (1\pi III_4)$, $6\delta (1\chi' III)'$, 11 ($3 III$), $11\chi 1 (3\chi III)$ der Fall ist. Auf diese Weise erhalten wir die aufgestellten Systeme.

46. Es ist offenbar, dass die Systeme VI. Ordnung nur dann möglich sind, wenn die 3-zählige Deckaxe nicht explicit, sondern als ein Element der Verbandsymmetrie, also in der Form polarer Schraubenaxen auftritt. Dabei ist aber die gerade Symmetrie ausgeschlossen. Folglich sind solche Systeme für eine einzige Symmetriearie und zwar die 19. zulässig. Da aber für die hexagonale Syngonie überhaupt nur die Ableitungsform $\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$ zulässig ist, so können die Schraubenaxen nicht in der der schneidenden Symmetrieelemente vorkommen, sondern nur in versteckter Form. Als Symmetrieelemente des Verbandes treten jetzt die 2-zähligen Deckaxen, und zwar theils als peripherische, theils als schneidende auf.

Auf Grund dieser Betrachtungen findet man die aufgestellten Systeme.

47. Für die Systeme VIII. Ordnung muss die Symmetriegrösse wenigstens 8 betragen, oder eine vielfache Zahl davon sein. Die niedrigste hierzu gehörende Syngonie ist die rhombische und zwar die 8. Symmetrieart.

Die einzige Ableitungsform der phanerotopischen Systeme ist abc , wo abc charakteristische Zahlen sind, welche sämtlich unabhängige Symmetrieelemente ausdrücken, d. h. kein von einem dieser Zahlen ausgedrücktes Symmetrieelement kann ein resultirendes der beiden anderen sein. Von beiden hierzu gehörenden Grundtypen 4χ III und 5χ III kann dies nur für den ersteren der Fall sein, da für den zweiten solche drei Symmetrieelemente fehlen, welche zugleich verschieden sind und von welchen keines zugleich ein schneidendes ist; dies ist nämlich für die besondere Schicht der Fall, deren Columnen nicht singulär sind; für diese Schichten als Elemente der Verbandsymmetrie können nur $5'$ und 5 als die peripherischen, und $1'$ als das centrale dieser Bedingung genügen. Die Annahme zweier von diesen Elementen würde aber die Annahme eines jeden unabhängigen dritten Elementes der Verbandsymmetrie ausschliessen. Diesem Typus würden somit lediglich kryptotopische Systeme entsprechen.

Für eine singuläre kryptotopische Colonne, z. B. die Colonne $\frac{a}{a'}$, sind die Symmetrieelemente 5 , 2 und 6 , als centrale Verbandsymmetrieelemente, ausgeschlossen (diese Elemente treten central nur in versteckter Form auf, d. h. kryptotopisch); es sind also nur die Combinationen $\frac{2'}{6'}$, $\frac{5'}{1'}$, $\frac{5'}{2'}$, $\frac{1'}{2'}$ zulässig; in allen tritt central kryptotopisch ein Symmetrieelement (Schraubenaxe resp. Gleitebene) auf, und dann sind Kraft des 1. Satzes, § 29, die übrigen Columnen phanerotopische.

Wenn aber eine nicht singuläre Colonne kryptotopisch ist, so sind die beiden gleichwerthigen Columnen kryptotopisch, und dies ist speciell für den Typus 5χ III der Fall. Da aber hier nothwendiger Weise die schneidenden Elemente der Verbandsymmetrie auftreten, so sind die zu entgegengesetzten Grenzflächen gehörenden nothwendiger Weise die centralen, d. h. $5'$ oder 5 .

Für die Systeme 1. Art erhalten wir als Ableitungsformen $\frac{a}{a'}b1$, wo b von a und a' unabhängig ist, oder $\frac{a}{a'}bc$, wo c von a , a' und b nicht unabhängig zu sein braucht (was übrigens unmöglich ist) und sogar mit b gleich sein kann, aber keineswegs mit a oder a' (§ 30).

Für die Systeme 2. Art erhalten wir die Ableitungsform $a\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$, wo a von b und b' unabhängig ist.

Bei der Anwendung der angegebenen Principien entsteht uns nämlich bei der Aufsuchung der Systeme abc eine specielle Schwierigkeit in Anbetracht der von dem Standpunkte der scheinbaren Symmetrie aufgestellten Forderungen, da sämtliche drei Columnen in dieser Hinsicht gleichwerthig sind. Diese Schwierigkeiten werden durch die Anwendung einer speciellen Anordnung der Aufsuchung beseitigt. Zuerst nimmt man als Elemente der Verbandsymmetrie die Symmetrieebenen (1) sämtlich an, dann folgen Systeme mit nur zwei peripherischen Symmetrieebenen (2, 3), weiter diejenigen mit einer einzigen Symmetrieebene (4, 5, 6, 7, 8, 9), endlich die Systeme mit Inversionscentrum, aber ohne Symmetrieebenen (10, 11, 12, 13). Nun werden auch die Gleitebenen eingeführt, und zwar zuerst

eine Symmetrieebene und zwei Gleitebenen (14), weiter eine Symmetrieebene und eine Gleitebene (15, 16, 17) und endlich das Inversionscentrum mit einer Gleitebene (18, 19, 20, 21, 22, 23). Somit ist die Ableitung sämtlicher Systeme erschöpft, in welchen Symmetrieebenen und Inversionscentrum vorkommen. Nun bleiben die Systeme mit Deckaxen und Gleitebenen allein aufzusuchen. Demgemäss werden zuerst das System mit drei Gleitebenen (24), die Systeme mit zwei Gleitebenen (25, 26, 27) und die mit einer einzigen Gleitebene (28, 29, 30, 31, 32, 33) aufgesucht. Auf diese Weise können wir uns vergewissern, dass dabei weder ein System übersehen ist, noch zwei der Systeme identisch seien.

48. Unter den Systemen der tetragonalen Syngonie giebt es auch phanerotopische mit der Ableitungsform abc , aber hier kann a weder 3, 7 noch 3', 7' in sich enthalten; wäre dies der Fall, so würde die Einführung eines einzigen Elementes der Verbandsymmetrie das ganze System eindeutig bestimmen, und dann das System IV. Ordnung zu Stande kommen.

Sind die Systeme kryptotopisch, so sind diejenigen mit der kryptotopischen Colonne singulärer Richtung von denjenigen mit kryptotopischen Schichten zu unterscheiden. Für die ersteren gelten als die Ableitungsformen $\frac{a}{a'}bb$ und $\frac{a}{a'}bc$, wo natürlich b nicht unabhängig von c ist, da schon allein zwei erste Glieder dieser Form das System vollständig bestimmen. Für die letzteren gelten die Ableitungsformen $a\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$, wo b, c die Zahlen 3, 7 resp. 3', 7' in sich enthalten.

Hier treten aber zuerst die Columnen VIII. Ordnung auf. Dies ist nur möglich, wenn die polaren 4-zähligen Schraubenaxen kryptotopisch auftreten. Für solche Systeme gelten die Ableitungsformen $\frac{a}{a'}11$ und $\frac{a}{a'}bb$, wo a, a' keine Elemente der geraden Symmetrie sein können, also nur 2', 4', 6', 8' bezeichnen. Die erste von diesen Formen gehört den Systemen mit Schraubenaxe eines und desselben Windungssinnes, die zweite den Systemen mit Axen von verschiedenem Windungssinne an. Ueberhaupt ist dies nur für die 13. Symmetrieart der Fall.

Die Systeme der 15. Symmetrieart lassen sich aus den vorigen ableiten durch einfaches Einführen der Elemente der expliciten Symmetrie. Das ist aber für die Systeme nicht der Fall, wo 5 explicit auftritt, da wir für dieselben eine explicite Symmetrie besitzen, welche der Verbandsymmetrie untergeordnet ist. Diese Systeme können phanerotopische nicht sein, da wir sonst die Systeme IV. Ordnung erhalten hätten; dem 1. Satze § 29 zu Folge können aber die singulären Schichten dieser Systeme keine kryptotopische Columnen enthalten. Es bleiben also die Formen $\frac{a}{a'}bb$ oder $\frac{a}{a'}bc$ allein zulässig. Hier sind für a und a' centrale Elemente der Verbandsymmetrie ausgeschlossen, also periphere allein zulässig. Für b wären die centralen Symmetrieelemente singulärer Richtung ausgeschlossen, und zwar auf Grund des 1. Satzes, § 29, aber für die Gleitebene 1' ist dies nicht der Fall, da die ihr zukommende Gleitrichtung keine singuläre ist. Auch nicht singuläre horizontale Schraubenaxen sind nur dann zulässig, wenn sie für die Glieder der kryptotopischen Colonne keine neue Verbandsymmetrieelemente mit sich einführen¹⁾.

¹⁾ Was die Systeme (15) (1 III)₇⁸, (17) (1 III)₇, u. a. betrifft, in welchen mehr als zweizählige polare Schraubenaxen kryptotopisch auftreten, so erleiden für dieselben die Sätze § 23 in ihrer Anwendung eine Modification. Die Sache ist aber so einfach, dass es vielleicht ganz genügend ist, darauf hinzuweisen.

49. Was die Systeme der kubischen Syngonie betrifft, so sind die der 28. Symmetrieart von vornherein ausgeschlossen, die der 29. aus den Systemen der 8., die der 30. aus denen der 14., die der 31. aus denen der 13. und die der 32. aus denen der 15. Symmetrieart auszuwählen, und zwar unter denjenigen, welche die Einführung der 3-zähligen Symmetrieaxe zulassen, welche nothwendiger Weise explicit auftritt. Daraus folgt zuerst, dass kryptotopische Systeme von vornherein auszuschliessen sind. Aus den Systemen der 8. Symmetrieart bleiben die Systeme 1 und 24 zu berücksichtigen, da sich sämtliche übrigen Systeme durch verschiedenartige Elemente der Verbandsymmetrie auszeichnen. Aus den Systemen der 14. Symmetrieart sind allein 1. und 2., aus den Systemen der 13. Symmetrieart 1. und 2. zu berücksichtigen; endlich lassen sich die Systeme der 32. Symmetrieart aus den vorigen durch Hinzufügung der Symmetrieelemente 5', 8 und 4' ableiten.

50. Die Möglichkeit des Auftretens der Systeme XVI. Ordnung ist von vornherein auf die 15. und 32. Symmetrieart beschränkt. Die Systeme der letzteren, wenn dieselben überhaupt vorhanden sind, würden sich von den ersteren ableiten lassen.

Der Definition dieser Systeme zu Folge ist es unmöglich unter ihnen phanerotopische zu treffen, da solche höchstens VIII. Ordnung wären. Hier haben wir also wieder diejenigen mit der kryptotopischen singulären Colonne und die mit der phanerotopischen Colonne zu unterscheiden. Den ersteren liegen die Ableitungsformen $\frac{a}{a'}bc$ und $\frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$ zu Grunde. Der Gang der Ableitung besteht darin, für a und a' die zulässigen charakteristischen Zahlen aufzufinden und dann eine zulässige Zahl für b aufzustellen; sämtliche andere Zahlen werden von selbst gefunden, da dieselben von den ersteren abhängig sind.

Die vier letzten sind diejenigen besonderen Systeme, in welchen in der Richtung der singulären Colonne polare 4-zählige Schraubenaxen kryptotopisch auftreten, also VIII. Ordnung sind.

Aus der auf diese Weise dargestellten Liste der Systeme XVI. Ordnung ist leicht zu ersehen, dass die 3-zählige Symmetrieaxe sich nicht explicit einschalten lässt. Daraus ist zu folgern, dass die Systeme dieser Ordnung für die kubische Syngonie nicht existieren.

IV. Triparalleloëdersysteme II. und höherer Ordnung.

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

Triparalleloëdersysteme II. Ordnung.

I. Triklone Syngonie.

$a11$	2	2	1	1π III	1	$a = 5'$	$1\pi (1 \text{ III})^s$
$1aa$	2	2	2	1π III	1	$a = 5'$	$1\pi (1 \text{ III})^c$
aaa	2	2	3	1π III	1	$a = 5'$	$1\pi (1 \text{ III})$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

II. Monokline Syngonie.

a11	3	2	1	2 III	1	$a = 5$	(1) (1 III ₂) ^s
1a1	3	2	2	"	1	$a = 5$	2 (1 III ₂) ^s
1aa	3	2	3	"	1	$a = 5$	2 (1 III ₂) ^c
aaa	3	2	4	"	1	$a = 5$	3 (1 III ₂)
aal	3	2	5	"	1	$a = 5$	3 (1 III ₂) ^c
a11	3	2	6	3 III	1	$a = 4$	3 (1 III ₃) ^s
1aa	3	2	7	"	1	$a = 4$	(1) 1 III ₃) ^c
aaa	3	2	8	"	1	$a = 4$	3 (1 III ₃)
a11	4	2	1	1 χ III	1	$a = 1'$	1 χ (1 III ₂) ^s
1a1	4	2	2	"	1	$a = 1'$	1 χ 1 (1 III ₂) ^s
1aa	4	2	3	"	1	$a = 1'$	1 χ 1 (1 III ₂) ^c
aal	4	2	4	"	1	$a = 1'$	1 χ' (1 III ₂) ^c
aaa	4	2	5	"	1	$a = 1'$	1 χ' (1 III ₂)
a11	4	2	6	1 χ' III	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 III ₃) ^s
1aa	4	2	7	"	1	$a = 8$	1 χ 1 (1 III ₃) ^c
aaa	4	2	8	"	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 III ₃)
a11	5	4	1	2 χ III	15'	$a = 1'5$	1 (χ 1) (1 π III ₂) ^s
1a1	5	4	2	"	15'	$a = 1'5$	2 χ 1 (1 π III ₂) ^s
1aa	5	4	3	"	15'	$a = 1'5$	2 χ 1 (1 π III ₂) ^c
aal	5	4	4	"	15'	$a = 1'5$	3 χ (1 π III ₂) ^c
aaa	5	4	5	"	15'	$a = 1'5$	3 χ (1 π III ₂)
a11	5	4	6	"	15	$a = 1'5'$	2 χ (2 III ₂) ^s
1a1	5	4	7	"	15	$a = 1'5'$	2 χ 1 (2 III ₂) ^s
1aa	5	4	8	"	15	$a = 1'5'$	2 χ 1 (2 III ₂) ^c
aal	5	4	9	"	15	$a = 1'5'$	3 χ (2 III ₂) ^c
aaa	5	4	10	"	15	$a = 1'5'$	3 χ (2 III ₂)
a11	5	4	11	"	11'	$a = 5'5'$	1 (χ 1) (1 χ III ₂) ^s
1a1	5	4	12	"	11'	$a = 5'5'$	2 χ (1 χ III ₂) ^s
1aa	5	4	13	"	11'	$a = 5'5'$	2 χ (1 χ III ₂) ^c
aal	5	4	14	"	11'	$a = 5'5'$	3 χ (1 χ III ₂) ^c
aaa	5	4	15	"	11'	$a = 5'5'$	3 χ (1 χ III ₂)
a11	5	4	16	3 χ III	15'	$a = 4'8$	3 χ 1 (1 π III ₃) ^s
1aa	5	4	17	"	15'	$a = 4'8$	1 (χ 2) (1 π III ₃) ^c
aaa	5	4	18	"	15'	$a = 4'8$	3 χ 1 (1 π III)
a11	5	4	19	"	14'	$a = 5'8$	3 χ 1 (3 III ₃) ^s
1aa	5	4	20	"	14'	$a = 5'8$	2 χ 1 (3 III ₃) ^c
aaa	5	4	21	"	14'	$a = 5'8$	3 χ 1 (3 III ₃)
a11	5	4	22	"	18	$a = 4'5'$	3 χ (1 χ' III ₃) ^s
1aa	5	4	23	"	18	$a = 4'5'$	1 (χ 1) (1 χ' III ₃) ^c
aaa	5	4	24	"	18	$a = 4'5'$	3 χ (1 χ' III ₃)

III. Rhombische Syngonie.

a11	6	4	1	4 III	15	$a = 2'6'$	4 (2 III ₄) ^s
1aa	6	4	2	"	15	$a = 2'6'$	5 (2 III ₄) ^c
aaa	6	4	3	"	15	$a = 2'6'$	7 (2 III ₄)
1a1	6	4	4	"	15	$a = 2'6'$	(3) (2 III ₄) ^s
aal	6	4	5	"	15	$a = 2'6'$	5 (2 III ₄) ^c
a11	6	4	6	5 III	15	$a = 4'8'$	5 (2 III ₅) ^s
1aa	6	4	7	"	15	$a = 4'8'$	(2) (2 III) ^c
aaa	6	4	8	"	15	$a = 4'8'$	6 (2 III ₅)
a11	6	4	9	"	14'	$a = 5'8'$	(4) (3 III ₅) ^s
1aa	6	4	10	"	14'	$a = 5'8'$	(3) (3 III ₅) ^c
aaa	6	4	11	"	14'	$a = 5'8'$	(5) (3 III ₅)
a11	7	4	1	2 φ III	15	$a = 26$	2 φ 1 (2 III ₄) ^s
1a1	7	4	2	"	15	$a = 26$	2 φ 2 (2 III ₄) ^s

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
1aa	7	4	3	2φ III	15	a = 26	2φ' (2 III ₄) ^c
aal	7	4	4	"	15	a = 26	3φ 1 (2 III ₄) ^c
aaa	7	4	5	"	15	a = 26	3φ'' (2 III ₄)
all	7	4	6	"	12	a = 56	1 (φ 1) (1χ III ₄) ^s
lal	7	4	7	"	12	a = 56	2φ 2 (1χ III ₄) ^s
lla	7	4	8	"	12	a = 56	2φ (1χ III ₄) ^s
laa	7	4	9	"	12	a = 56	2φ' (1χ III ₄) ^c
aal	7	4	10	"	12	a = 56	3φ 1 (1χ III ₄) ^c
ala	7	4	11	"	12	a = 56	3φ (1χ III ₄) ^c
aaa	7	4	12	"	12	a = 56	3φ'' (1χ III ₄)
all	7	4	13	2φ' III	15	a = 48	2φ' 1 (2 III ₅) ^s
laa	7	4	14	"	15	a = 48	2φ 5 (2 III ₅) ^c
aaa	7	4	15	"	15	a = 48	3φ' 2 (2 III ₅)
all	7	4	16	"	18	a = 45	1 (φ 5) (1χ' III ₅) ^s
laa	7	4	17	"	18	a = 45	2φ 2 (1χ' III ₅) ^c
aaa	7	4	18	"	18	a = 45	3φ' 1 (1χ' III ₅)
all	7	4	19	3φ III	14	a = 1' 4	3φ 2 (3 III ₅) ^s
laa	7	4	20	"	14	a = 1' 4	2φ 3 (3 III ₅) ^c
aaa	7	4	21	"	14	a = 1' 4	3φ' 1 (3 III ₅)
all	7	4	22	"	11	a = 44	3φ 2 (1χ III ₅) ^s
laa	7	4	23	"	11	a = 44	1 (φ 1) (1χ III ₅) ^c
aaa	7	4	24	"	11	a = 44	3φ' 1 (1χ III ₅)
all	7	4	25	"	14	a = 1' 4	3φ (1χ' III ₅) ^s
laa	7	4	26	"	14	a = 1' 4	1 (φ 2) (1χ' III ₅) ^c
aaa	7	4	27	"	14	a = 1' 4	3φ' (1χ' III ₅)
all	8	8	1	4χ III	11' 55'	a = 22' 66'	4χ 1 (2χ III ₄) ^s
lal	8	8	2	"	11' 55'	a = 22' 66'	3 (χ 1) (2χ III ₄) ^s
laa	8	8	3	"	11' 55'	a = 22' 66'	5χ (2χ III ₄) ^c
aal	8	8	4	"	11' 55'	a = 22' 66'	5χ 2 (2χ III ₄) ^c
aaa	8	8	5	"	11' 55'	a = 22' 66'	7χ (2χ III ₄)
all	8	8	6	"	12' 56'	a = 1' 25' 6	4χ 1 (4 III ₄) ^s
laa	8	8	7	"	12' 56'	a = 1' 25' 6	5χ 2 (4 III ₄) ^c
aaa	8	8	8	"	12' 56'	a = 1' 25' 6	7χ (4 III ₄)
all	8	8	9	"	1256	a = 1' 2' 5' 6'	4χ (2φ III ₄) ^s
lal	8	8	10	"	1256	a = 1' 2' 5' 6'	3 (χ 1) (2φ III ₄) ^s
laa	8	8	11	"	1256	a = 1' 2' 5' 6'	5χ 2 (2φ III ₄) ^c
aal	8	8	12	"	1256	a = 1' 2' 5' 6'	5χ (2φ III ₄) ^c
aaa	8	8	13	"	1256	a = 1' 2' 5' 6'	7χ (2φ III ₄)
all	8	8	14	5χ III	11' 55'	a = 44' 88'	5χ 1 (2χ III ₅) ^s
laa	8	8	15	"	11' 55'	a = 44' 88'	2 (χ 1) (2χ III ₅) ^c
aaa	8	8	16	"	11' 55'	a = 44' 88'	6χ 1 (2χ III ₅)
all	8	8	17	"	14' 5' 8	a = 1' 45' 8	4 (χ 1) (3χ III ₅) ^s
laa	8	8	18	"	14' 5' 8	a = 1' 45' 8	3 (χ 2) (3χ III ₅) ^c
aaa	8	8	19	"	14' 5' 8	a = 1' 45' 8	5 (χ 1) (3χ III ₅)
all	8	8	20	"	14' 58'	a = 1' 45' 8	5χ 1 (5 III ₅) ^s
laa	8	8	21	"	14' 58'	a = 1' 45' 8	4χ 2 (5 III ₅) ^c
aaa	8	8	22	"	14' 58'	a = 1' 45' 8	6χ 1 (5 III ₅)
all	8	8	23	"	1458	a = 1' 4' 5' 8'	5χ (3φ' III ₅) ^s
laa	8	8	24	"	1458	a = 1' 4' 5' 8'	2 (χ 3) (3φ' III ₅) ^c
aaa	8	8	25	"	1458	a = 1' 4' 5' 8'	6χ (3φ' III ₅)
all	8	8	26	"	11' 44'	a = 55' 88'	4 (χ 1) (3φ III ₅) ^s
laa	8	8	27	"	11' 44'	a = 55' 88'	3 (χ 1) (3φ III ₅) ^c
aaa	8	8	28	"	11' 44'	a = 55' 88'	5 (χ 1) (3φ III ₅)

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

IV. Tetragonale Syngonie.

all	9	4	1	8 III	15	$a = 37$	(6) (2 III) ^s
laa	9	4	2	"	15	$a = 37$	8 (2 III) ^c
aaa	9	4	3	"	15	$a = 37$	9 (2 III)
all	10	8	1	8 φ III	1357	$a = 2468$	8 φ 1 (8 III) ^s
laa	10	8	2	"	1357	$a = 2468$	8 φ 2 (8 III) ^c
aaa	10	8	3	"	1357	$a = 2468$	9 φ 1 (8 III)
all	10	8	4	"	1256	$a = 3478$	6 (φ 1) (2 φ III) ^s
laa	10	8	5	"	1256	$a = 3478$	8 φ 2 (2 φ III) ^c
aaa	10	8	6	"	1256	$a = 3478$	9 φ 1 (2 φ III)
all	10	8	7	"	1458	$a = 2367$	6 (φ 2) (2 φ' III) ^s
laa	10	8	8	"	1458	$a = 2367$	8 φ (2 φ' III) ^c
aaa	10	8	9	"	1458	$a = 2367$	9 φ (2 φ' III)
all	11	4	1	2 π III	15	$a = 3'7'$	2 π (2 III) ^s
laa	11	4	2	"	15	$a = 3'7'$	2 π (2 III) ^c
aaa	11	4	3	"	15	$a = 3'7'$	3 π (2 III)
all	12	8	1	8 χ III	11'55'	$a = 33'77'$	6 (χ 1) (2 χ III) ^s
laa	12	8	2	"	11'55'	$a = 33'77'$	8 χ (2 χ III) ^c
aaa	12	8	3	"	11'55'	$a = 33'77'$	9 χ (2 χ III)
all	12	8	4	"	1357	$a = 1'3'5'7'$	8 χ (8 III) ^s
laa	12	8	5	"	1357	$a = 1'3'5'7'$	8 χ 1 (8 III) ^c
aaa	12	8	6	"	1357	$a = 1'3'5'7'$	9 χ (8 III)
all	12	8	7	"	13'57'	$a = 1'35'7$	6 (χ 1) (2 π III) ^s
laa	12	8	8	"	13'57'	$a = 1'35'7$	8 χ 1 (2 π III) ^c
aaa	12	8	9	"	13'57'	$a = 1'35'7$	9 χ (2 π III)
all	13	8	1	10 III	12'56'	$a = 34'78'$	(8) (4 III) ^s
laa	13	8	2	"	12'56'	$a = 34'78'$	(7) (4 III) ^c
aaa	13	8	3	"	12'56'	$a = 34'78'$	11 (4 III)
all	13	8	4	"	14'58'	$a = 2'36'7$	(8) (5 III) ^s
laa	13	8	5	"	14'58'	$a = 2'36'7$	10 (5 III) ^c
aaa	13	8	6	"	14'58'	$a = 2'36'7$	11 (5 III)
all	13	8	7	"	1357	$a = 2'4'6'8'$	10 (8 III) ^s
laa	13	8	8	"	1357	$a = 2'4'6'8'$	(7) (8 III) ^c
aaa	13	8	9	"	1357	$a = 2'4'6'8'$	11 (8 III)
all	14	8	1	4 δ III	12'56'	$a = 3'47'8$	4 δ 1 (4 III) ^s
laa	14	8	2	"	12'56'	$a = 3'47'8$	5 δ 2 (4 III) ^c
aaa	14	8	3	"	12'56'	$a = 3'47'8$	7 δ 1 (4 III)
all	14	8	4	"	1458	$a = 2'3'6'7'$	4 δ (3 φ' III) ^s
laa	14	8	5	"	1458	$a = 2'3'6'7'$	5 δ (3 φ' III) ^c
aaa	14	8	6	"	1458	$a = 2'3'6'7'$	7 δ (3 φ' III)
all	14	8	7	"	13'57'	$a = 2'46'8$	4 δ 1 (2 π III) ^s
laa	14	8	8	"	13'57'	$a = 2'46'8$	5 δ 2 (2 π III) ^c
aaa	14	8	9	"	13'57'	$a = 2'46'8$	7 δ 1 (2 π III)
all	14	8	10	5 δ III	14'58'	$a = 23'67'$	5 δ 1 (5 III) ^s
laa	14	8	11	"	14'58'	$a = 23'67'$	4 δ (5 III) ^c
aaa	14	8	12	"	14'58'	$a = 23'67'$	6 δ (5 III)
all	14	8	13	"	1256	$a = 3'4'7'8'$	5 δ (2 φ III) ^s
laa	14	8	14	"	1256	$a = 3'4'7'8'$	2 (δ 1) (2 φ III) ^c
aaa	14	8	15	"	1256	$a = 3'4'7'8'$	6 δ (2 φ III)
all	14	8	16	"	13'57'	$a = 24'68'$	5 δ 1 (2 π III) ^s
laa	14	8	17	"	13'57'	$a = 24'68'$	2 (δ 1) (2 π III) ^c
aaa	14	8	18	"	13'57'	$a = 24'68'$	6 δ (2 π III)
all	15	16	1	10 χ III	11'22'55'66'	$a = 33'44'77'88'$	8 (χ 1) (4 χ III) ^s
laa	15	16	2	"	11'22'55'66'	$a = 33'44'77'88'$	7 (χ 1) (4 χ III) ^c
aaa	15	16	3	"	11'22'55'66'	$a = 33'44'77'88'$	11 χ 1 (4 χ III)
all	15	16	4	"	11'44'55'88'	$a = 22'33'66'77'$	8 (χ 1) (5 χ III) ^s
laa	15	16	5	"	11'44'55'88'	$a = 22'33'66'77'$	10 χ (5 χ III) ^c
aaa	15	16	6	"	11'44'55'88'	$a = 22'33'66'77'$	11 χ (5 χ III)

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
<i>a</i> 11	15	16	7	10 χ III	12345678	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'$	10 χ (8 φ III) ^s
1 <i>aa</i>	15	16	8	"	12345678	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'$	10 χ (8 φ III) ^c
<i>aaa</i>	15	16	9	"	12345678	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'$	11 χ (8 φ III)
<i>a</i> 11	15	16	10	"	11'33'55'77'	$a = 2'2'44'66'88'$	10 χ 1 (8 χ III) ^s
1 <i>aa</i>	15	16	11	"	11'33'55'77'	$a = 2'2'44'66'88'$	7(χ 1) (8 χ III) ^c
<i>aaa</i>	15	16	12	"	11'33'55'77'	$a = 2'2'44'66'88'$	11 χ 1 (8 χ III)
<i>a</i> 11	15	16	13	"	12'34'56'78'	$a = 1'23'45'67'8$	10 χ 1 (10 III) ^s
1 <i>aa</i>	15	16	14	"	12'34'56'78'	$a = 1'23'45'67'8$	10 χ 2 (10 III) ^c
<i>aaa</i>	15	16	15	"	12'34'56'78'	$a = 1'23'45'67'8$	11 χ 1 (10 III)
<i>a</i> 11	15	16	16	"	12'3'456'7'8	$a = 1'23'4'5'67'8'$	8(χ 2) (4 δ III) ^s
1 <i>aa</i>	15	16	17	"	12'3'456'7'8	$a = 1'23'4'5'67'8'$	10 χ 2 (4 δ III) ^c
<i>aaa</i>	15	16	18	"	12'3'456'7'8	$a = 1'23'4'5'67'8'$	11 χ 1 (4 δ III)
<i>a</i> 11	15	16	19	"	123'4'567'8'	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8$	8(χ 1) (5 δ III) ^s
1 <i>aa</i>	15	16	20	"	123'4'567'8'	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8$	10 χ 2 (5 δ III) ^c
<i>aaa</i>	15	16	21	"	123'4'567'8'	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8$	11 χ 1 (5 δ III)

V. Hexagonale Syngonie.

<i>aaa</i>	17	6	1	13 φ III	11 ₁ 1 ₂	$a = 8\ 8_1\ 8_2$	13 φ 1 (13 III)
<i>aaa</i>	18	6	1	13 α III	11 ₁ 1 ₂	$a = 5'5'_15'_2$	13 α (13 III)
<i>aaa</i>	19	6	1	16 III	11 ₁ 1 ₂	$a = 4'4'_14'_2$	16 (13 III)
<i>aaa</i>	20	12	1	16 α III	11 ₁ 1 ₂ 8 8 ₁ 8 ₂	$a = 4'4'_14'_25'_15'_2$	16 α (13 φ III)
<i>aaa</i>	20	12	2	16 α III	11 ₁ 1 ₂ 4'4' ₂	$a = 5'5'_15'_28\ 8_1\ 8_2$	16 α 1 (16 III)
<i>aaa</i>	20	12	3	16 α III	11 ₁ 1 ₂ 5'5' ₂	$a = 4'4'_14'_28\ 8_1\ 8_2$	16 α 1 (13 α III)

VI. Kubische Syngonie.

<i>aaa</i>	29	24	1	19 χ III	(12'56') ₃	$a = (1'2'5'6')_3$	21 χ 1 (19 III)
<i>aaa</i>	30	24	1	19 δ III	(12'56') ₃	$a = (3'4'7'8')_3$	21 δ 1 (19 III)
<i>aaa</i>	31	24	1	22 III	(12'56') ₃	$a = (3'4'7'8')_3$	(9) (19 III)
<i>aaa</i>	32	48	1	22 χ III	(11'22'55'66') ₃	$a = (3'3'4'4'7'7'8'8')_3$	24 χ 1 (19 χ III)
<i>aaa</i>	32	48	2	22 χ III	(12'3'4'5'6'7'8') ₃	$a = (1'2'3'4'5'6'7'8')_3$	24 χ (19 δ III)
<i>aaa</i>	32	48	3	22 χ III	(12'3'4'5'6'7'8') ₃	$a = (1'2'3'4'5'6'7'8')_3$	24 χ 1 (22 III)

Triparalleloëdersysteme III. Ordnung.

V. Hexagonale Syngonie.

$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	1	13 III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1_2}{1_1}$	(10) (1 III) _r
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	2	13 III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1_1}{1_2}$	(11) (1 III) _l
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	1	16 III	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{1_2\ 4'_2}{1_1\ 4'_1}$	(12) (3 III) _r
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	19	6	2	16 III	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{1_1\ 4'_1}{1_2\ 4'_2}$	(13) (3 III) _l

Triparalleloëdersysteme IV. Ordnung.

II. Monokline Syngonie.

1 <i>ab</i>	5	4	1	2 χ III	1	$a = 5' \quad b = 5$	2 χ 1 (1 III) ₂ ^c
1 <i>ab</i>	5	4	2	"	1	$a = 5' \quad b = 1'$	2 χ 1 (1 III) ₂ ^{c'}
1 <i>ab</i>	5	4	3	"	1	$a = 5 \quad b = 1'$	2 χ 1 (1 III) ₂ ^{c''}
<i>ab</i> 1	5	4	4	"	1	$a = 5' \quad b = 5$	2 χ 1 (1 III) ₂ ^{c'''}
<i>ab</i> 1	5	4	5	"	1	$a = 5' \quad b = 1'$	1(χ 2) (1 III) ₂ ^c
<i>ab</i> 1	5	4	6	"	1	$a = 5 \quad b = 5'$	1(χ 2) (1 III) ₂ ^{c'}

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$ab1$	5	4	7	2χ III	1	$a=5 \quad b=1'$	$1(\chi 2)(1 III_2)''$
$ab1$	5	4	8	"	1	$a=1' \quad b=5'$	$1(\chi 1)(1 III_2)^c$
$ab1$	5	4	9	"	1	$a=1' \quad b=5$	$2\chi(1 III_2)^c$
abb	5	4	10	"	1	$a=5' \quad b=5$	$2\chi 1(1 III_2)$
abb	5	4	11	"	1	$a=5' \quad b=1'$	$1(\chi 2)(1 III_2)$
abb	5	4	12	"	1	$a=5 \quad b=5'$	$1(\chi 2)(1 III_2)'$
abb	5	4	13	"	1	$a=5 \quad b=1'$	$1(\chi 2)(1 III_2)''$
abb	5	4	14	"	1	$a=1' \quad b=5'$	$1(\chi 1)(1 III_2)$
abb	5	4	15	"	1	$a=1' \quad b=5$	$2\chi(1 III_2)$
aab	5	4	16	"	1	$a=5' \quad b=5$	$3\chi 1(1 III_2)$
aab	5	4	17	"	1	$a=5' \quad b=1'$	$3\chi 1(1 III_2)'$
aab	5	4	18	"	1	$a=5 \quad b=5'$	$3\chi 1(1 III_2)''$
aab	5	4	19	"	1	$a=5 \quad b=1'$	$3\chi 1(1 III_2)'''$
aab	5	4	20	"	1	$a=1' \quad b=5'$	$3\chi(1 III_2)$
aab	5	4	21	"	1	$a=1' \quad b=5$	$3\chi(1 III_2)'$
abc	5	4	22	"	1	$a=5' \quad b=5 \quad c=1'$	$3\chi 1(1 III_2)^{IV}$
abc	5	4	23	"	1	$a=5 \quad b=5' \quad c=1'$	$3\chi 1(1 III_2)^V$
abc	5	4	24	"	1	$a=1' \quad b=5' \quad c=5$	$3\chi(1 III_2)''$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	25	"	1	$\frac{a}{a'}=5'$	$1(\chi 1)(1 III_2)^{s_{1'5'}}$
$\frac{a}{a'}b1$	5	4	26	"	1	$\frac{a}{a'}=5' \quad b=5$	$3\chi(1 III_2)^{c_{1'5'}}$
$\frac{a}{a'}bb$	5	4	27	"	1	$\frac{a}{a'}=5' \quad b=5$	$3\chi(1 III_2)_{1'5'}$
$1\frac{b}{b'}1$	5	4	28	"	1	$\frac{b}{b'}=5'$	$2\chi 1(1 III_2)^{s_{55'}}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	29	"	1	$\frac{b}{b'}=5'$	$2\chi 1(1 III_2)^{c_{55'}}$
$1\frac{b}{b'}c$	5	4	30	"	1	$\frac{b}{b'}=5' \quad c=1'$	$2\chi 1(1 III_2)^{c'_{55'}}$
$\frac{b}{b'}1$	5	4	31	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'}=5'$	$3\chi(1 III_2)^{c_{55'}}$
$\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	32	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'}=5'$	$3\chi(1 III_2)_{55'}$
$\frac{b}{b'}a$	5	4	33	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'}=5'$	$3\chi(1 III_2)_{55'}$
abb	5	4	34	3χ III	1	$a=5' \quad b=4'$	$1(\chi 2)(1 III_3)$
abb	5	4	35	"	1	$a=5' \quad b=8$	$1(\chi 2)(1 III_3)'$
abb	5	4	36	"	1	$a=4' \quad b=5'$	$2\chi 1(1 III_3)$
abb	5	4	37	"	1	$a=4' \quad b=8$	$2\chi 1(1 III_3)'$
abb	5	4	38	"	1	$a=8 \quad b=5'$	$1(\chi 2)(1 III_3)''$
abb	5	4	39	"	1	$a=8 \quad b=4'$	$1(\chi 2)(1 III_3)'''$
$\frac{a}{a'}11$	5	4	40	"	1	$\frac{a}{a'}=5'$	$3\chi 1(1 III_3)^{s_{4'5'}}$
$\frac{a}{a'}bb$	5	4	41	"	1	$\frac{a}{a'}=5' \quad b=8$	$2\chi 1(1 III_3)_{4'5'}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	42	"	1	$\frac{b}{b'}=5'$	$1(\chi 2)(1 III_3)^{c_{5'8}}$
$\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	43	"	1	$a=4' \quad \frac{b}{b'}=5'$	$3\chi 1(1 III_3)_{5'8}$
$1\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	44	"	1	$\frac{b}{b'}=5'$	$1(\chi 2)(1 III_3)^{c_{4'5'}}$
$\frac{b}{b'}\frac{b}{b'}$	5	4	45	"	1	$a=8 \quad \frac{b}{b'}=5'$	$1(\chi 2)(1 III_3)_{4'5'}$
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	5	4	46	"	1	$\frac{a}{a'}=5'$	$3\chi 1(1 III_3)_{4'5'}$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

III. Rhombische Syngonie.

1ab	6	4	1	4 III	1	$a=5 \quad b=2'$	(2) (1 III ₄) ^c
1ab	6	4	2	"	1	$a=5 \quad b=6'$	(3) (1 III ₄) ^c
1ab	6	4	3	"	1	$a=2' \quad b=6'$	4 (1 III ₄) ^c
1ab	6	4	4	"	1	$a=6' \quad b=2'$	(2) (1 III ₄) ^{c'}
abb	6	4	5	"	1	$a=5 \quad b=2'$	(4) (1 III ₄)
abb	6	4	6	"	1	$a=2' \quad b=5$	5 (1 III ₄)
abb	6	4	7	"	1	$a=2' \quad b=6'$	(4) (1 III ₄)'
abc	6	4	8	"	1	$a=5 \quad b=6' \quad c=2'$	6 (1 III ₄)
abc	6	4	9	"	1	$a=5 \quad b=2' \quad c=6'$	6 (1 III ₄)'
abc	6	4	10	"	1	$a=2' \quad b=5 \quad c=6'$	(5) (1 III ₄)
$\frac{a}{a'}11$	6	4	11	"	1	$\frac{a}{a'}=2'$	(3) (1 III ₄) ^s _{2'6'}
$\frac{a}{a'}b1$	6	4	12	"	1	$\frac{a}{a'}=2' \quad b=5$	5 (1 III ₄) ^c _{2'6'}
$\frac{a}{a'}bb$	6	4	13	"	1	$\frac{a}{a'}=2' \quad b=5$	7 (1 III ₄) _{2'6'}
abb	6	4	14	5 III	1	$a=5 \quad b=4'$	(14) (1 III ₅)
abb	6	4	15	"	1	$a=4' \quad b=5$	(3) (1 III ₅)
abb	6	4	16	"	1	$a=4' \quad b=8'$	(2) (1 III ₅)
$\frac{a}{a'}11$	6	4	17	"	1	$\frac{a}{a'}=4'$	(4) (1 III ₅) ^s _{4'8'}
$\frac{a}{a'}bb$	6	4	18	"	1	$\frac{a}{a'}=4' \quad b=5$	(5) (1 III ₅) _{4'8'}
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	19	"	1	$\frac{b}{b'}=4'$	(2) (1 III ₅) _{4'5}
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	20	"	1	$\frac{b}{b'}=4' \quad a=8'$	(4) (1 III ₅) _{4'5}
1ab	7	4	1	2 φ III	1	$a=6 \quad b=2$	2 φ 5 (1 III ₄) ^c
1ab	7	4	2	"	1	$a=6 \quad b=5$	2 φ 5 (1 III ₄) ^{c'}
1ab	7	4	3	"	1	$a=5 \quad b=6$	2 φ 2 (1 III ₄) ^c
1ab	7	4	4	"	1	$a=2 \quad b=6$	2 φ (1 III ₄) ^c
a1b	7	4	5	"	1	$a=5 \quad b=2$	1 (φ 3) (1 III ₄) ^c
a1b	7	4	6	"	1	$a=5 \quad b=6$	1 (φ 2) (1 III ₄) ^c
a1b	7	4	7	"	1	$a=2 \quad b=5$	2 φ 1 (1 III ₄) ^c
a1b	7	4	8	"	1	$a=2 \quad b=6$	1 (φ 1) (1 III ₄) ^c
a1b	7	4	9	"	1	$a=6 \quad b=5$	2 φ 3 (1 III ₄) ^c
abb	7	4	10	"	1	$a=6 \quad b=2$	1 (φ 3) (1 III ₄) ^{c'}
abb	7	4	11	"	1	$a=5 \quad b=2$	1 (φ 5) (1 III ₄)
abb	7	4	12	"	1	$a=2 \quad b=5$	2 φ' 1 (1 III ₄)
abb	7	4	13	"	1	$a=2 \quad b=6$	1 (φ 5) (1 III ₄)
aab	7	4	14	"	1	$a=5 \quad b=2$	3 φ 3 (1 III ₄)
aab	7	4	15	"	1	$a=5 \quad b=6$	3 φ 2 (1 III ₄)
aab	7	4	16	"	1	$a=2 \quad b=5$	3 φ 1 (1 III ₄)
aab	7	4	17	"	1	$a=2 \quad b=6$	3 φ (1 III ₄)
aab	7	4	18	"	1	$a=6 \quad b=5$	3 φ 1 (1 III ₄)
aab	7	4	19	"	1	$a=6 \quad b=2$	3 φ 3 (1 III ₄)'
abc	7	4	20	"	1	$a=5 \quad b=2 \quad c=6$	3 φ' (1 III ₄)
abc	7	4	21	"	1	$a=5 \quad b=6 \quad c=2$	3 φ' 2 (1 III ₄)
abc	7	4	22	"	1	$a=2 \quad b=5 \quad c=6$	3 φ' 1 (1 III ₄)'
abc	7	4	23	"	1	$a=2 \quad b=6 \quad c=5$	3 φ' 2 (1 III ₄)
$1 \frac{b}{b'}1$	7	4	24	"	1	$\frac{b}{b'}=5$	2 φ 2 (1 III ₄) ^s ₂₅
$1 \frac{b}{b'}c$	7	4	25	"	1	$\frac{b}{b'}=5 \quad c=6$	2 φ' (1 III ₄) ^c ₂₅

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{b}{b'} 1$	7	4	26	2φ III	1	$a=6 \quad \frac{b}{b'}=\frac{5}{2}$	$3\varphi 1 (1 \text{ III}_4)_2^c$
$\frac{b}{b'} a$	7	4	27	"	1	$a=6 \quad \frac{b}{b'}=\frac{5}{2}$	$3\varphi'' (1 \text{ III}_4)$
abb	7	4	28	$2\varphi'$ III	1	$a=5 \quad b=4$	$1(\varphi 4) (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	29	"	1	$a=4 \quad b=5$	$2\varphi 3 (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	30	"	1	$a=4 \quad b=8$	$1(\varphi 3) (1 \text{ III}_5)$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	31	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4}{5}$	$2\varphi 5 (1 \text{ III}_5)^c$
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	32	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4}{5} \quad a=8$	$3\varphi 3 (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	33	3φ III	1	$a=4' \quad b=1'$	$2\varphi 4 (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	34	"	1	$a=4' \quad b=4$	$2\varphi 3 (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	35	"	1	$a=1' \quad b=4'$	$1(\varphi 2) (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	36	"	1	$a=1' \quad b=4$	$1(\varphi 1) (1 \text{ III}_5)$
abb	7	4	37	"	1	$a=4 \quad b=4'$	$1(\varphi 4) (1 \text{ III}_5)'$
abb	7	4	38	"	1	$a=4 \quad b=1'$	$1(\varphi 4) (1 \text{ III}_5)''$
$\frac{a}{a'} 11$	7	4	39	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{1'}$	$3\varphi 2 (1 \text{ III}_5)_{1'4'}^s$
$\frac{a}{a'} bb$	7	4	40	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{1'} \quad b=4$	$3\varphi' 1 (1 \text{ III}_5)_{1'4'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	41	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{4'}{4}$	$1(\varphi 3) (1 \text{ III}_5)_{4'4'}$
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	42	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'}=\frac{4'}{4}$	$1(\varphi 5) (1 \text{ III}_5)_{4'4'}$
$1ab$	8	8	1	4χ III	$15'$	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$2(\chi 3) (1 \pi \text{ III}_4)^c$
$1ab$	8	8	2	"	$15'$	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$2(\chi 2) (1 \pi \text{ III}_4)^c$
$1ab$	8	8	3	"	$15'$	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$3(\chi 3) (1 \pi \text{ III}_4)^c$
$1ab$	8	8	4	"	$15'$	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$4\chi 2 (1 \pi \text{ III}_4)^c$
abb	8	8	5	"	$15'$	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$4(\chi 1) (1 \pi \text{ III}_4)$
abb	8	8	6	"	$15'$	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$5\chi 3 (1 \pi \text{ III}_4)$
abb	8	8	7	"	$15'$	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$4(\chi 2) (1 \pi \text{ III}_4)$
abc	8	8	8	"	$15'$	$a=1'5' \quad b=2'6' \quad c=2'6'$	$6\chi (1 \pi \text{ III}_4)$
abc	8	8	9	"	$15'$	$a=1'5' \quad b=2'6' \quad c=2'6'$	$6\chi 1 (1 \pi \text{ III}_4)$
abc	8	8	10	"	$15'$	$a=2'6' \quad b=1'5' \quad c=2'6'$	$5(\chi 2) (1 \pi \text{ III}_4)$
$1ab$	8	8	11	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$2(\chi 2) (2 \text{ III}_4)^c$
$1ab$	8	8	12	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$3(\chi 3) (2 \text{ III}_4)^c$
$1ab$	8	8	13	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$3(\chi 2) (2 \text{ III}_4)^c$
$a1b$	8	8	14	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$3(\chi 1) (2 \text{ III}_4)^c$
$a1b$	8	8	15	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$3(\chi 2) (2 \text{ III}_4)^{c'}$
$a1b$	8	8	16	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$3(\chi 3) (2 \text{ III}_4)^c$
$a1b$	8	8	17	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$3(\chi 3) (2 \text{ III}_4)^{c'}$
$a1b$	8	8	18	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$4\chi 2 (2 \text{ III}_4)^c$
$a1b$	8	8	19	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$4\chi 1 (2 \text{ III}_4)^c$
abb	8	8	20	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$5\chi (2 \text{ III}_4)$
abb	8	8	21	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$5\chi 1 (2 \text{ III}_4)$
abb	8	8	22	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$5\chi 3 (2 \text{ III}_4)$
abb	8	8	23	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$5\chi 3 (2 \text{ III}_4)'$
abb	8	8	24	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$5\chi 3 (2 \text{ III}_4)''$
abb	8	8	25	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$5\chi 2 (2 \text{ III}_4)$
aab	8	8	26	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$4(\chi 1) (2 \text{ III}_4)$
aab	8	8	27	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6'$	$4(\chi 2) (2 \text{ III}_4)$
aab	8	8	28	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$4(\chi 2) (2 \text{ III}_4)'$
aab	8	8	29	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$4(\chi 2) (2 \text{ III}_4)''$
aab	8	8	30	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5'$	$5\chi 3 (2 \text{ III}_4)''$
aab	8	8	31	"	15	$a=2'6' \quad b=2'6'$	$5\chi 1 (2 \text{ III}_4)'$
abc	8	8	32	"	15	$a=1'5' \quad b=2'6' \quad c=2'6'$	$5(\chi 1) (2 \text{ III}_4)$
abc	8	8	33	"	15	$a=2'6' \quad b=1'5' \quad c=2'6'$	$5(\chi 2) (2 \text{ III}_4)$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
abc	8	8	34	4χ III	15	$a = 2'6' \quad b = 1'5' \quad c = 26$	$4\chi 1 (2 III_4)$
$\frac{a}{a'} 11$	8	8	35	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{2'6'}$	$4\chi 1 (2 III_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'} b1$	8	8	36	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{2'6'} \quad b = 26$	$5\chi 2 (2 III_4)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'} bb$	8	8	37	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{2'6'} \quad b = 26$	$5\chi (2 III_4)_{1'2'}$
$1ab$	8	8	38	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 22'$	$2(\chi 1) (1\chi III_4)^c$
$1ab$	8	8	39	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 6'6'$	$3(\chi 1) (1\chi III_4)^c$
$1ab$	8	8	40	"	11'	$a = 22' \quad b = 6'6'$	$4\chi (1\chi III_4)^c$
$1ab$	8	8	41	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 22'$	$2(\chi 1) (1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	42	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 22'$	$2(\chi 2) (1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	43	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 6'6'$	$2(\chi 3) (1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	44	"	11'	$a = 22' \quad b = 5'5'$	$4\chi 1 (1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	45	"	11'	$a = 22' \quad b = 6'6'$	$3(\chi 1) (1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	46	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 5'5'$	$3(\chi 2) (1\chi III_4)^c$
$a1b$	8	8	47	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 22'$	$2(\chi 2) (1\chi III_4)^c$
abb	8	8	48	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 22'$	$4(\chi 1) (1\chi III_4)$
abb	8	8	49	"	11'	$a = 22' \quad b = 5'5'$	$5\chi 1 (1\chi III_4)$
abb	8	8	50	"	11'	$a = 22' \quad b = 6'6'$	$4(\chi 1) (1\chi III_4)'$
aab	8	8	51	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 22'$	$4(\chi 2) (1\chi III_4)$
aab	8	8	52	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 6'6'$	$4(\chi 1) (1\chi III_4)''$
aab	8	8	53	"	11'	$a = 22' \quad b = 5'5'$	$5\chi 2 (1\chi III_4)$
aab	8	8	54	"	11'	$a = 22' \quad b = 6'6'$	$5\chi (1\chi III_4)$
aab	8	8	55	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 5'5'$	$4(\chi 2) (1\chi III_4)'$
abc	8	8	56	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 22'$	$4(\chi 2) (1\chi III_4)''$
abc	8	8	57	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 22' \quad c = 6'6'$	$6\chi (1\chi III_4)$
abc	8	8	58	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 6'6' \quad c = 22'$	$6\chi 1 (1\chi III_4)$
abc	8	8	59	"	11'	$a = 22' \quad b = 5'5' \quad c = 6'6'$	$5(\chi 1) (1\chi III_4)$
abc	8	8	60	"	11'	$a = 22' \quad b = 6'6' \quad c = 5'5'$	$6\chi 1 (1\chi III_4)'$
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	61	"	11'	$\frac{b}{b'} = \frac{5'5'}{22'}$	$3(\chi 1) (1\chi III_4)_{2'5}$
$\frac{b}{b'} c$	8	8	62	"	11'	$\frac{b}{b'} = \frac{5'5'}{22'} \quad c = 6'6'$	$5\chi (1\chi III_4)_{2'5}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} 1$	8	8	63	"	11'	$a = 6'6' \quad \frac{b}{b'} = \frac{5'5'}{22'}$	$5\chi 2 (1\chi III_4)_{2'5}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} a$	8	8	64	"	11'	$a = 6'6' \quad \frac{b}{b'} = \frac{5'5'}{22'}$	$7\chi (1\chi III_4)_{2'5}$
abb	8	8	65	5χ III	15'	$a = 1'5' \quad b = 4'8'$	$14(\chi 1) (1\chi III_5)$
abb	8	8	66	"	15'	$a = 4'8' \quad b = 1'5'$	$3(\chi 4) (1\chi III_5)$
abb	8	8	67	"	15'	$a = 4'8' \quad b = 4'8'$	$2(\chi 5) (1\chi III_5)$
abb	8	8	68	"	15	$a = 1'5' \quad b = 4'8'$	$2(\chi 4) (2 III_5)$
abb	8	8	69	"	15	$a = 1'5' \quad b = 4'8'$	$2(\chi 1) (2 III_5)$
abb	8	8	70	"	15	$a = 4'8' \quad b = 1'5'$	$4\chi 3 (2 III_5)$
abb	8	8	71	"	15	$a = 4'8' \quad b = 4'8'$	$4\chi 2 (2 III_5)$
abb	8	8	72	"	15	$a = 4'8' \quad b = 1'5'$	$2(\chi 6) (2 III_5)$
abb	8	8	73	"	15	$a = 4'8' \quad b = 4'8'$	$2(\chi 6) (2 III_5)'$
$\frac{a}{a'} 11$	8	8	74	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{4'8'}$	$5\chi 1 (2 III_5)_{1'4'}$
$\frac{a}{a'} bb$	8	8	75	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{4'8'} \quad b = 4'8'$	$6\chi 1 (2 III_5)_{1'4'}$
abb	8	8	76	"	14'	$a = 1'4' \quad b = 5'8'$	$3(\chi 2) (3 III_5)$
abb	8	8	77	"	14'	$a = 1'4' \quad b = 5'8'$	$2(\chi 2) (3 III_5)$
abb	8	8	78	"	14'	$a = 5'8' \quad b = 1'4'$	$3(\chi 4) (3 III_5)$
abb	8	8	79	"	14'	$a = 5'8' \quad b = 5'8'$	$3(\chi 4) (3 III_5)'$
abb	8	8	80	"	14'	$a = 5'8' \quad b = 1'4'$	$2(\chi 5) (3 III_5)$
abb	8	8	81	"	14'	$a = 5'8' \quad b = 5'8'$	$3(\chi 4) (3 III_5)''$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	82	5 χ III	14'	$\frac{b}{b'} = \frac{5'8}{5'8'}$	3 (χ 4) (3 III ₅) _{55'} ^c
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	83	"	14'	$\frac{b}{b'} = \frac{5'8}{5'8'}$ $a = 1'4$	4 (χ 2) (3 III ₅) _{55'}
abb	8	8	84	"	11'	$a = 5'5'$ $b = 4'4'$	14 (χ 1) (1 χ III ₅)
abb	8	8	85	"	11'	$a = 4'4'$ $b = 5'5'$	3 (χ 2) (1 χ III ₅)
abb	8	8	86	"	11'	$a = 4'4'$ $b = 8'8'$	2 (χ 2) (1 χ III ₅)
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	87	"	11'	$\frac{b}{b'} = \frac{4'4'}{5'5'}$	2 (χ 1) (1 χ III ₅) _{4'5} ^c
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	88	"	11'	$a = 8'8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'4'}{5'5'}$	3 (χ 2) (1 χ III ₅) _{4'5}
abb	8	8	89	"	18	$a = 4'5'$ $b = 4'5'$	3 (χ 2) (1 χ' III ₅)
abb	8	8	90	"	18	$a = 4'5'$ $b = 1'8'$	2 (χ 4) (1 χ' III ₅)
abb	8	8	91	"	18	$a = 4'5'$ $b = 4'5'$	14 (χ 1) (1 χ' III ₅)
abb	8	8	92	"	18	$a = 4'5'$ $b = 1'8'$	14 (χ 1) (1 χ' III ₅)
abb	8	8	93	"	18	$a = 1'8'$ $b = 4'5'$	2 (χ 3) (1 χ' III ₅)
abb	8	8	94	"	18	$a = 1'8'$ $b = 4'5'$	3 (χ 1) (1 χ' III ₅)
$\frac{a}{a'} 11$	8	8	95	"	18	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5'}{1'8'}$	4 (χ 1) (1 χ' III ₅) _{1'4'} ^s
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	96	"	18	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5'}{1'8'}$ $b = 4'5'$	5 (χ 1) (1 χ' III ₅) _{1'4'}
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	97	"	18	$\frac{b}{b'} = \frac{4'5'}{4'5'}$	2 (χ 2) (1 χ' III ₅) _{4'4'} ^c
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	98	"	18	$\frac{b}{b'} = \frac{4'5'}{4'5'}$ $a = 1'8'$	4 (χ 1) (1 χ' III ₅) _{4'4'}

IV. Tetragonale Syngonie.

$1bc$	9	4	1	8 III	1	$b = 3$ $c = 7$	8 (1 III) ^c
abc	9	4	2	"	1	$a = 5$ $b = 3$ $c = 7$	9 (1 III)
$\frac{a}{a'} 11$	9	4	3	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$	(15) (1 III) _r ^s
$\frac{a}{a'} 11$	9	4	4	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$	(16) (1 III) _l ^s
$\frac{a}{a'} bb$	9	4	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 5$	(17) (1 III) _r
$\frac{a}{a'} bb$	9	4	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 5$	(17) (1 III) _l
abb	10	8	1	8 φ III	15	$a = 3'7$ $b = 2'6$	6 (φ 3) (3 III)
abb	10	8	2	"	15	$a = 3'7$ $b = 4'8$	6 (φ 4) (3 III)
abb	10	8	3	"	15	$a = 2'6$ $b = 3'7$	8 φ 3 (3 III)
abb	10	8	4	"	15	$a = 2'6$ $b = 4'8$	6 (φ 4) (3 III) [']
abb	10	8	5	"	15	$a = 4'8$ $b = 3'7$	8 φ 1 (3 III)
abb	10	8	6	"	15	$a = 4'8$ $b = 2'6$	6 (φ 2) (3 III)
$1bc$	10	8	7	"	18	$b = 2'3$ $c = 6'7$	8 φ (1 χ' III) ^c
$1bc$	10	8	8	"	18	$b = 6'7$ $c = 2'3$	8 φ 2 (1 χ' III) ^c
abc	10	8	9	"	18	$a = 4'5$ $b = 2'3$ $c = 6'7$	9 φ (1 χ' III)
abc	10	8	10	"	18	$a = 4'5$ $b = 6'7$ $c = 2'3$	9 φ 1 (1 χ' III)
$1bc$	11	4	1	2 π III	1	$b = 3'$ $c = 7'$	2 π (1 III) ^c
abc	11	4	2	"	1	$a = 5$ $b = 3'$ $c = 7'$	3 π (1 III)
abc	12	8	1	8 χ III	15'	$a = 1'5$ $b = 3'7'$ $c = 3'7$	9 χ (1 π III)
abb	12	8	2	"	15	$a = 3'7$ $b = 1'5'$	6 (χ 2) (2 III)
abb	12	8	3	"	15	$a = 3'7$ $b = 3'7'$	6 (χ 2) (2 III) [']
abb	12	8	4	"	15	$a = 1'5'$ $b = 3'7$	8 χ (2 III)
abb	12	8	5	"	15	$a = 1'5'$ $b = 3'7'$	6 (χ 1) (2 III)
abb	12	8	6	"	15	$a = 3'7'$ $b = 3'7$	8 χ 1 (2 III)
abb	12	8	7	"	15	$a = 3'7'$ $b = 1'5'$	6 (χ 2) (2 III) ["]

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} 11$	12	8	8	8 χ III	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{1'5'}$	6 (χ 1) (2 III) $_{1,3'}$
$\frac{a}{a'} b b$	12	8	9	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{1'5'}$ $b = 37$	9 χ (2 III) $_{1,3'}$
1 b c	12	8	10	"	11'	$b = 33' c = 77'$	8 χ (1 χ III)
a b c	12	8	11	"	11'	$b = 33' c = 77'$ $a = 55'$	9 χ (1 χ III)
a b b	13	8	1	10 III	15	$a = 37 b = 2'6'$	(18) (2 III)
a b b	13	8	2	"	15	$a = 37 b = 4'8'$	(18) (2 III)'
a b b	13	8	3	"	15	$a = 2'6' b = 37$	(7) (2 III)
a b b	13	8	4	"	15	$a = 2'6' b = 4'8'$	(18) (2 III)''
a b b	13	8	5	"	15	$a = 4'8' b = 37$	10 (2 III)
a b b	13	8	6	"	15	$a = 4'8' b = 2'6'$	(8) (2 III)
$\frac{a}{a'} 11$	13	8	7	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'}{4'8'}$	(8) (2 III) $_{2,4'}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	8	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'}{4'8'}$ $b = 37$	11 (2 III) $_{2,4'}$
$\frac{a}{a'} 11$	13	8	9	"	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{78'}{34'}$	(19) (2 III) $_r$
$\frac{a}{a'} 11$	13	8	10	"	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{34'}{78'}$	(20) (2 III) $_l$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	11	"	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{78'}{34'}$ $b = 2'6'$	(21) (2 III) $_r$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	12	"	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{34'}{78'}$ $b = 2'6'$	(21) (2 III) $_l$
1 b c	13	8	13	"	14'	$b = 36' c = 2'7'$	(7) (3 III) $_c$
1 b c	13	8	14	"	14'	$b = 2'7' c = 36'$	10 (3 III) $_c$
a b c	13	8	15	"	14'	$a = 58' b = 36'$ $c = 2'7'$	11 (3 III)
a b c	13	8	16	"	14'	$a = 58' b = 2'7'$ $c = 36'$	11 (3 III)'
$\frac{a}{a'} 11$	13	8	17	"	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{2'7'}{36'}$	(19) (3 III) $_r$
$\frac{a}{a'} 11$	13	8	18	"	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{36'}{2'7'}$	(20) (3 III) $_l$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	19	"	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{2'7'}{36'}$ $b = 58'$	(21) (3 III) $_r$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	20	"	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{36'}{2'7'}$ $b = 58'$	(21) (3 III) $_l$
a b b	14	8	1	4 δ III	15	$a = 3'7' b = 2'6'$	5 δ 3 (2 III)
a b b	14	8	2	"	15	$a = 3'7' b = 48$	5 δ 2 (2 III)
a b b	14	8	3	"	15	$a = 2'6' b = 3'7'$	5 δ 3 (2 III)'
a b b	14	8	4	"	15	$a = 2'6' b = 48$	5 δ 2 (2 III)'
a b b	14	8	5	"	15	$a = 48 b = 3'7'$	5 δ 1 (2 III)
a b b	14	8	6	"	15	$a = 48 b = 2'6'$	5 δ 1 (2 III)'
$\frac{a}{a'} 11$	14	8	7	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{2'6'}$	4 δ 1 (2 III) $_{2,3'}$
$\frac{a}{a'} b b$	14	8	8	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{2'6'}$ $b = 48$	5 δ 2 (2 III) $_{2,3'}$
1 b c	14	8	9	"	18	$b = 2'3' c = 3'7'$	4 δ (1 χ III) $_c$
1 b c	14	8	10	"	18	$b = 6'7' c = 2'3'$	2 (δ 1) (1 χ III) $_c$
a b c	14	8	11	"	18	$a = 45 b = 2'3'$ $c = 6'7'$	6 δ (1 χ III)
a b c	14	8	12	"	18	$a = 45 b = 6'7'$ $c = 2'3'$	6 δ (1 χ III)'
a b b	14	8	13	5 δ III	15	$a = 3'7' b = 26$	2 (δ 1) (2 III)
a b b	14	8	14	"	15	$a = 3'7' b = 4'8'$	2 (δ 2) (2 III)
a b b	14	8	15	"	15	$a = 26 b = 3'7'$	2 (δ 2) (2 III)'
a b b	14	8	16	"	15	$a = 26 b = 4'8'$	2 (δ 2) (2 III)''
a b b	14	8	17	"	15	$a = 4'8' b = 3'7'$	4 δ 1 (2 III)
a b b	14	8	18	"	15	$a = 4'8' b = 26$	4 δ (2 III)

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- größe	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
1bc	14	8	19	5δ III	14'	b = 23', c = 67'	5δ (3 III) ^c
1bc	14	8	20	"	14'	b = 67', c = 23'	5δ1 (3 III) ^c
abc	14	8	21	"	14'	a = 58', b = 23', c = 67'	7δ (3 III)
abc	14	8	22	"	14'	a = 58', b = 67', c = 23'	7δ1 (3 III)
abb	15	16	1	10χ III	11'55'	a = 33'77', b = 22'66'	18 (χ1) (2χ III)
abb	15	16	2	"	11'55'	a = 33'77', b = 44'88'	18 (χ3) (2χ III)
abb	15	16	3	"	11'55'	a = 22'66', b = 33'77'	7 (χ1) (2χ III)
abb	15	16	4	"	11'55'	a = 22'66', b = 44'88'	18 (χ3) (2χ III)
abb	15	16	5	"	11'55'	a = 44'88', b = 33'77'	10χ1 (2χ III)
abb	15	16	6	"	11'55'	a = 44'88', b = 22'66'	8 (χ2) (2χ III)
1bc	15	16	7	"	14'58'	b = 23'67', c = 2'3'67'	10χ2 (3χ III) ^c
1bc	15	16	8	"	14'58'	b = 23'67', c = 23'67'	7 (χ2) (3χ III) ^c
abc	15	16	9	"	14'58'	a = 1'458', b = 23'67', c = 2'3'67'	11χ1 (3χ III)
abc	15	16	10	"	14'58'	a = 1'458', b = 2'3'67', c = 23'67'	11χ (3χ III)
abb	15	16	11	"	12'56'	a = 1'25'6', b = 3'4'78'	7 (χ3) (4 III)
abb	15	16	12	"	12'56'	a = 1'25'6', b = 3'4'78'	18 (χ3) (4 III)
abb	15	16	13	"	12'56'	a = 3'4'78', b = 1'25'6'	8 (χ3) (4 III)
abb	15	16	14	"	12'56'	a = 3'4'78', b = 3'4'78'	8 (χ4) (4 III)
abb	15	16	15	"	12'56'	a = 3'4'78', b = 1'25'6'	18 (χ2) (4 III)
abb	15	16	16	"	12'56'	a = 3'4'78', b = 3'4'78'	7 (χ4) (4 III)
abb	15	16	17	"	14'58'	a = 1'45'8', b = 2'3'67'	10χ1 (5 III)
abb	15	16	18	"	14'58'	a = 1'45'8', b = 23'67'	8 (χ2) (5 III)
abb	15	16	19	"	14'58'	a = 2'3'67', b = 1'45'8'	8 (χ4) (5 III)
abb	15	16	20	"	14'58'	a = 2'3'67', b = 23'67'	8 (χ3) (5 III)
abb	15	16	21	"	14'58'	a = 23'67', b = 1'45'8'	8 (χ4) (5 III)
abb	15	16	22	"	14'58'	a = 23'67', b = 2'3'67'	10χ3 (5 III)
abb	15	16	23	"	1256	a = 1'2'5'6', b = 3'4'78'	7 (χ1) (2φ III)
abb	15	16	24	"	1256	a = 1'2'5'6', b = 3'4'78'	18 (χ1) (2φ III)
abb	15	16	25	"	1256	a = 3'4'78', b = 1'2'5'6'	18 (χ2) (2φ III)
abb	15	16	26	"	1256	a = 3'4'78', b = 3'4'78'	18 (χ2) (2φ III)
abb	15	16	27	"	1256	a = 3'4'78', b = 1'2'5'6'	8 (χ3) (2φ III)
abb	15	16	28	"	1256	a = 3'4'78', b = 3'4'78'	10χ2 (2φ III)
a 11	15	16	29	"	1256	a = 1'2'5'6', b = 3'4'78'	8 (χ2) (2φ III) ^s ₁₃
a	15	16	30	"	1256	a = 1'2'5'6', b = 3'4'78'	11χ1 (2φ III) ₁₃
a	15	16	31	"	1458	a = 1'4'5'8', b = 23'67'	10χ (2φ' III)
abb	15	16	32	"	1458	a = 1'4'5'8', b = 2'3'67'	8 (χ1) (2φ' III)
abb	15	16	33	"	1458	a = 23'67', b = 1'4'5'8'	18 (χ4) (2φ' III)
abb	15	16	34	"	1458	a = 23'67', b = 2'3'67'	18 (χ2) (2φ' III)
abb	15	16	35	"	1458	a = 2'3'67', b = 1'4'5'8'	18 (χ4) (2φ' III)
abb	15	16	36	"	1458	a = 2'3'67', b = 23'67'	10χ (2φ' III)
a 11	15	16	37	"	1458	a = 1'4'5'8', b = 2'3'67'	8 (χ1) (2φ' III) ^s ₁₂
a	15	16	38	"	1458	a = 1'4'5'8', b = 23'67'	11χ1 (2φ' III) ₁₂
abb	15	16	39	"	11'44'	b = 33'66', c = 22'77'	7 (χ1) (3φ III) ^c
1bc	15	16	40	"	11'44'	b = 22'77', c = 33'66'	10χ (3φ III) ^c
abc	15	16	41	"	11'44'	a = 55'88', b = 33'66', c = 22'77'	11χ1 (3φ III)
abc	15	16	42	"	11'44'	a = 55'88', b = 22'77', c = 33'66'	11χ (3φ III)
abb	15	16	43	"	1357	a = 1'3'5'7', b = 2'4'6'8'	7 (χ1) (8 III)
abb	15	16	44	"	1357	a = 1'3'5'7', b = 2'4'6'8'	7 (χ3) (8 III)
abb	15	16	45	"	1357	a = 2'4'6'8', b = 1'3'5'7'	7 (χ4) (8 III)
abb	15	16	46	"	1357	a = 2'4'6'8', b = 2'4'6'8'	7 (χ4) (8 III)
abb	15	16	46	"	1357	a = 2'4'6'8', b = 1'3'5'7'	10χ3 (8 III)
abb	15	16	48	"	1357	a = 2'4'6'8', b = 2'4'6'8'	10χ2 (8 III)

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} 11$	15	16	49	10 χ III	1357	$\frac{a}{a'} = \frac{1'3'5'7'}{2'4'6'8'}$	10 χ 1 (8 III) _{1,2'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	50	"	1357	$\frac{a}{a'} = \frac{1'3'5'7'}{2'4'6'8'}$ $b = 2468$	11 χ 1 (8 III) _{1,2'}
$a b b$	15	16	51	"	13'57'	$a = 1'35'7$ $b = 24'68'$	18 (χ 1) (2 π III)
$a b b$	15	16	52	"	13'57'	$a = 1'35'7$ $b = 2'46'8$	18 (χ 3) (2 π III)
$a b b$	15	16	53	"	13'57'	$a = 24'68'$ $b = 1'35'7$	10 χ 3 (2 π III)
$a b b$	15	16	54	"	13'57'	$a = 24'68'$ $b = 2'46'8$	8 (χ 4) (2 π III)
$a b b$	15	16	55	"	13'57'	$a = 2'46'8$ $b = 1'35'7$	7 (χ 4) (2 π III)
$a b b$	15	16	56	"	13'57'	$a = 2'46'8$ $b = 24'68'$	18 (χ 2) (2 π III)

V. Hexagonale Syngonie.

$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	20	12	1	16 δ III	111 ₂	$\frac{a}{a'} = \frac{5'5_1'5_2'}{4'4_1'4_2'}$	14 α 1 (13 III) _{4,5'}
--	----	----	---	-----------------	------------------	--	--

VI. Kubische Syngonie.

$a a_1 a_2$	28	12	1	19 III	111 ₂ = (1) ₃	$a = 2_2'5_16'$ $a_1 = 2'5_26_1'$	(22) (13 III)
$a a_1 a_2$	28	12	2	"	111 ₂ = (1) ₃	$a_2 = 2_1'5_62'$ $a_1 = 2_2'5_16'$	20 (13 III)
$a a_1 a_2$	29	24	1	19 χ III	111 ₂ 5'5 _{1'} 5 _{2'} = (15') ₃	$a = 1'2_22_1'5_61_26_2'$ $a_1 = 1_1'2_22_2'5_16_26'$ $a_2 = 1_2'2_12'5_26_61'$	20 χ (13 π III)
$a a_1 a_2$	29	24	2	"	111 ₂ 5'5 _{1'} 5 _{2'} = (15') ₃	$a = 1_1'2_22_2'5_16_26'$ $a_1 = 1_2'2_12'5_26_61'$ $a_2 = 1'2_22_1'5_61_26_2'$	22 (χ 1) (13 π III)
$a a_1 a_2$	30	24	1	19 δ III	(18) ₃	$a = 2_1'3_1'4_56_2'7_2'$ $a_1 = 2_2'3_2'4_15_61'7_1'$ $a_2 = 2'3_1'4_25_61_2'7_1'$	20 δ (13 φ III)
$a a_1 a_2$	31	24	1	22 III	(14') ₃	$a = 2_1'3_25_62'7_48'$ $a_1 = 2_2'3_15_61'7_28_1'$ $a_2 = 2'3_15_61_2'7_82'$	23 (16 III)
$a a_1 a_2$	32	48	1	22 χ III	(14'5'8) ₃	$a = 1'2_22_1'3_23_1'4_56_62'7_17_2'8'$ $a_1 = 1_1'2_22_2'3_32_2'4_15_626'7_27'8_1'$ $a_2 = 1_2'2_12'3_13_1'4_25_661'7_71'8_2'$	23 χ (16 δ III)

Triparalleloëdersysteme VI. Ordnung.

$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	19	6	1	16 III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{4_1'}$	(26) (1 III) _r
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	19	6	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{4_2'}$	(27) (1 III) _l

Triparalleloëdersysteme VIII. Ordnung.

III. Rhombische Syngonie.

$a b c$	8	8	1	4 χ III	1	$a = 1'$ $b = 2$ $c = 6$	4 χ (1 III) ₄
$a b c$	8	8	2	"	1	$a = 5'$ $b = 2$ $c = 6$	2 (χ 3) (1 III) ₄
$a b c$	8	8	3	"	1	$a = 2'$ $b = 2$ $c = 6$	3 (χ 1) (1 III) ₄
$a b c$	8	8	4	"	1	$a = 1'$ $b = 5'$ $c = 2'$	14 (χ 1) (1 III) ₄
$a b c$	8	8	5	"	1	$a = 1'$ $b = 5'$ $c = 6'$	2 (χ 2) (1 III) ₄
$a b c$	8	8	6	"	1	$a = 1'$ $b = 6'$ $c = 2'$	2 (χ 4) (1 III) ₄

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
abc	8	8	7	4χ III	1	$a=1' \quad b=5 \quad c=6'$	$3(\chi 2)(1 III_4)$
abc	8	8	8	"	1	$a=1' \quad b=5 \quad c=2'$	$2(\chi 4)(1 III_4)'$
abc	8	8	9	"	1	$a=1' \quad b=2' \quad c=6'$	$4\chi 1(1 III_4)$
abc	8	8	10	"	1	$a=5' \quad b=6' \quad c=2'$	$2(\chi 6)(1 III_4)$
abc	8	8	11	"	1	$a=5' \quad b=5 \quad c=2'$	$2(\chi 5)(1 III_4)$
abc	8	8	12	"	1	$a=5' \quad b=5 \quad c=6'$	$3(\chi 4)(1 III_4)$
abc	8	8	13	"	1	$a=5' \quad b=2' \quad c=6'$	$4\chi 3(1 III_4)$
abc	8	8	14	"	1	$a=1' \quad b=6 \quad c=2$	$2(\chi 1)(1 III_4)$
abc	8	8	15	"	1	$a=1' \quad b=6 \quad c=5'$	$14(\chi 1)(1 III_4)'$
abc	8	8	16	"	1	$a=1' \quad b=6 \quad c=2'$	$14(\chi 1)(1 III_4)''$
abc	8	8	17	"	1	$a=1' \quad b=6 \quad c=5$	$2(\chi 1)(1 III_4)'$
abc	8	8	18	"	1	$a=5' \quad b=6 \quad c=1'$	$2(\chi 5)(1 III_4)'$
abc	8	8	19	"	1	$a=5' \quad b=6 \quad c=2$	$4\chi 2(1 III_4)$
abc	8	8	20	"	1	$a=5' \quad b=6 \quad c=5$	$3(\chi 3)(1 III_4)$
abc	8	8	21	"	1	$a=5' \quad b=6 \quad c=6'$	$3(\chi 4)(1 III_4)'$
abc	8	8	22	"	1	$a=5' \quad b=1' \quad c=2'$	$14(\chi 2)(1 III_4)$
abc	8	8	23	"	1	$a=5' \quad b=1' \quad c=6'$	$2(\chi 6)(1 III_4)'$
abc	8	8	24	"	1	$a=6 \quad b=1' \quad c=2$	$14(\chi 2)(1 III_4)'$
abc	8	8	25	"	1	$a=2' \quad b=6 \quad c=2$	$3(\chi 3)(1 III_4)''$
abc	8	8	26	"	1	$a=5 \quad b=6 \quad c=1'$	$14(\chi 2)(1 III_4)''$
abc	8	8	27	"	1	$a=2' \quad b=6 \quad c=1'$	$2(\chi 5)(1 III_4)''$
abc	8	8	28	"	1	$a=5 \quad b=2' \quad c=1'$	$2(\chi 6)(1 III_4)''$
abc	8	8	29	"	1	$a=6' \quad b=2' \quad c=1'$	$3(\chi 3)(1 III_4)'$
abc	8	8	30	"	1	$a=2' \quad b=5 \quad c=1'$	$3(\chi 4)(1 III_4)''$
abc	8	8	31	"	1	$a=6' \quad b=5 \quad c=1'$	$4\chi 2(1 III_4)'$
abc	8	8	32	"	1	$a=2' \quad b=6' \quad c=1'$	$2(\chi 5)(1 III_4)'''$
abc	8	8	33	"	1	$a=5 \quad b=6' \quad c=1'$	$2(\chi 5)(1 III_4)''''$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	34	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=2$	$3(\chi 2)(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	35	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=6$	$3(\chi 3)(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	36	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=2 \quad c=5$	$5\chi 1(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	37	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=6 \quad c=5$	$5\chi 3(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	38	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=2 \quad c=2$	$4(\chi 2)(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	39	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=2 \quad c=6$	$5(\chi 1)(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	40	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{2'}{6'} \quad b=6 \quad c=2$	$5(\chi 2)(1 III_4)_{2'6'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	41	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=2$	$2(\chi 3)(1 III_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}b1$	8	8	42	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=6$	$2(\chi 2)(1 III_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	43	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=2 \quad c=5$	$4(\chi 1)(1 III_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	44	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=6 \quad c=5$	$4(\chi 2)(1 III_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	45	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=2 \quad c=2$	$4(\chi 1)(1 III_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	46	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=2 \quad c=6$	$6\chi(1 III_4)_{1'5'}$
$\frac{a}{a'}bc$	8	8	47	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{1'} \quad b=6 \quad c=2$	$6\chi 1(1 III_4)_{1'5'}$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	48	4 χ III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 5$	3 (χ 3) (1 III ₄) _{2'5'} ^c
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	49	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 2$	2 (χ 2) (1 III ₄) _{2'5'} ^c
$\frac{a}{a'} 1 c$	8	8	50	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $c = 5$	4 χ 2 (1 III ₄) _{2'5'} ^c
$\frac{a}{a'} 1 c$	8	8	51	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $c = 2$	3 (χ 3) (1 III ₄) _{2'5'} ^c
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	52	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 5$ $c = 6$	4 (χ 2) (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	53	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 6$ $c = 5$	5 χ 3 (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	54	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 2$ $c = 6$	4 (χ 1) (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	55	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 6$ $c = 2$	3 (χ 4) (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	56	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 2$ $c = 5$	6 χ 1 (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	57	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 5$ $c = 2$	5 (χ 2) (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	58	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 5$ $c = 5$	5 χ 3 (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	59	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{2'}$ $b = 2$ $c = 2$	4 (χ 2) (1 III ₄) _{2'5'}
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	60	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 5$	3 (χ 2) (1 III ₄) _{1'2'} ^c
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	61	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 6$	2 (χ 2) (1 III ₄) _{1'2'} ^c
$\frac{a}{a'} 1 c$	8	8	62	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $c = 5$	4 χ 1 (1 III ₄) _{1'2'} ^c
$\frac{a}{a'} 1 c$	8	8	63	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $c = 6$	3 (χ 1) (1 III ₄) _{1'2'} ^c
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	64	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 5$ $c = 2$	4 (χ 2) (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	65	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 2$ $c = 5$	5 χ 2 (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	66	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 6$ $c = 2$	4 (χ 2) (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	67	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 2$ $c = 6$	5 χ (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	68	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 5$ $c = 6$	5 (χ 1) (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	69	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 6$ $c = 5$	6 χ 1 (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	70	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 5$ $c = 5$	5 χ 1 (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b c$	8	8	71	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'}$ $b = 6$ $c = 6$	4 (χ 1) (1 III ₄) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	72	5 χ III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$ $b = 4$	3 (χ 4) (1 III ₅) _{4'8'}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	73	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{1'}$ $b = 4$	14 (χ 1) (1 III ₅) _{1'5'}

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	74	5 χ III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $b = 5$	3 (χ 4) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	75	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $b = 4$	2 (χ 5) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	76	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{4'}$ $b = 5$	3 (χ 2) (1 III ₅) _{1'4'}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	77	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{4'}$ $b = 8$	2 (χ 2) (1 III ₅) _{1'4'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	78	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'}{5'}$	2 (χ 4) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	79	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'}{5'}$	2 (χ 5) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	80	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{4'}$	14 (χ 1) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	81	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{4'}$	14 (χ 2) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	82	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{4'}$	14 (χ 1) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	83	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{4'}$	2 (χ 6) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	84	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'}{4'}$	14 (χ 2) (1 III ₅) _{4'4'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	85	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'}{4'}$	2 (χ 5) (1 III ₅) _{4'4'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	86	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{5'}$	2 (χ 5) (1 III ₅) _{5'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	87	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{5'}$	3 (χ 4) (1 III ₅) _{5'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	88	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'}{5'}$	2 (χ 1) (1 III ₅) _{4'5'}
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	89	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{4'}{5'}$	3 (χ 3) (1 III ₅) _{4'5'}

IV. Tetragonale Syngonie.

$a b c$	10	8	1	8 φ III	1	$a = 4$ $b = 3$ $c = 7$	8 φ 3 (1 III)
$a b c$	10	8	2	"	1	$a = 8$ $b = 3$ $c = 7$	8 φ 1 (1 III)
$\frac{a}{a'} b c$	10	8	3	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 2$ $c = 6$	17 (φ 1) (1 III) _r
$\frac{a}{a'} b c$	10	8	4	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 6$ $c = 2$	17 (φ 2) (1 III) _l
$\frac{a}{a'} b c$	10	8	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 2$ $c = 6$	17 (φ 1) (1 III) _r
$\frac{a}{a'} b c$	10	8	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 6$ $c = 2$	17 (φ 2) (1 III) _l
$1 \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	10	8	7	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{3}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6}$	8 φ 2 (1 III) ₂₃
$\frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	10	8	8	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{3}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6}$	9 φ 1 (1 III) ₂₃
$a b c$	12	8	1	8 χ III	1	$a = 1'$ $b = 3$ $c = 7$	8 χ (1 III)
$a b c$	12	8	2	"	1	$a = 5'$ $b = 3$ $c = 7$	8 χ 1 (1 III)
$a b c$	12	8	3	"	1	$a = 1'$ $b = 3'$ $c = 7'$	6 (χ 1) (1 III) _r
$a b c$	12	8	4	"	1	$a = 5'$ $b = 3'$ $c = 7'$	6 (χ 2) (1 III) _r

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b c$	12	8	5	8 γ III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 1'$ $c = 5'$	17 (γ 1) (1 III) $_{\gamma}$
$\frac{a}{a'} b c$	12	8	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 3'$ $c = 7'$	17 (γ 1) (1 III) $_{\gamma}'$
$\frac{a}{a'} b c$	12	8	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 1'$ $c = 5'$	17 (γ 1) (1 III) $_{\gamma}^i$
$\frac{a}{a'} b c$	12	8	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 3'$ $c = 7'$	17 (γ 1) (1 III) $_{\gamma}^i$
$\frac{a}{a'} b c$	12	8	9	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{1}$ $b = 3$ $c = 7$	9 γ (1 III) $_{1'5'}$
$\frac{a}{a'} b c$	12	8	10	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{1}$ $b = 3'$ $c = 7'$	6 (γ 1) (1 III) $_{1'5'}$
$1 \frac{b}{b'}$	12	8	11	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{3}{3}$ $c = \frac{7}{7}$	8 γ 1 (1 III) $_{33}^c$
$a \frac{b}{b'}$	12	8	12	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3}{3}$ $c = \frac{7}{7}$	9 γ (1 III) $_{33}$
$a b c$	13	8	1	10 III	1	$a = 4'$ $b = 3$ $c = 7$	(7) (1 III)
$a b c$	13	8	2	"	1	$a = 8'$ $b = 3$ $c = 7$	10 (1 III)
$a b c$	13	8	3	"	1	$a = 4'$ $b = 2'$ $c = 6'$	(8) (1 III)
$a b c$	13	8	4	"	1	$a = 4'$ $b = 6'$ $c = 2'$	(18) (1 III)
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 2'$	(23) (1 III) $_{\gamma}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$ $b = 4'$	(23) (1 III) $_{\gamma}'$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 2'$	(24) (1 III) $_{\gamma}^i$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$ $b = 4'$	(24) (1 III) $_{\gamma}^i$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	9	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{6'}$ $b = 4'$	(24) (1 III) $_{2'6'}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	10	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{6'}$ $b = 8'$	(23) (1 III) $_{2'6'}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	11	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$ $b = 2'$	(20) (1 III) $_{4'8'}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	12	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$ $b = 6'$	(19) (1 III) $_{4'8'}$
$\frac{a}{a'} b c$	13	8	13	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$ $b = 3$ $c = 7$	11 (1 III) $_{4'8'}$
$1 \frac{b c}{b' c'}$	13	8	14	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{3}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6'}$	(7) (1 III) $_{2'3}^c$
$a \frac{b c}{b' c'}$	13	8	15	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6'}$	11 (1 III) $_{2'3}$
$\frac{a}{a'} 1 1$	13	8	16	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{4'}$	(19) (1 III) $_{2'4'}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	17	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{4'}$ $b = 5$	(21) (1 III) $_{2'4'}$
$\frac{a}{a'} 1 1$	13	8	18	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{8'}$	(20) (1 III) $_{2'8'}$
$\frac{a}{a'} b b$	13	8	19	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{8'}$ $b = 5$	(21) (1 III) $_{2'8'}$
$a b c$	14	8	1	4 δ III	1	$a = 4$ $b = 3'$ $c = 7'$	2 (δ 2) (1 III) $_{\delta}$
$a b c$	14	8	2	"	1	$a = 8$ $b = 3'$ $c = 7'$	4 δ 1 (1 III) $_{\delta}$
$a b c$	14	8	3	"	1	$a = 8$ $b = 2'$ $c = 6'$	4 δ 1 (1 III) $_{\delta}'$
$a b c$	14	8	4	"	1	$a = 8$ $b = 6'$ $c = 2'$	2 (δ 2) (1 III) $_{\delta}'$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b c$	14	8	5	4 δ III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{6'}$ $b = 3'$ $c = 7'$	5 (δ 1) (1 III ₄) _{2'6'}
$1 \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	6	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	5 δ 2 (1 III ₄) _{2'3'}
$\frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	7	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	7 δ 1 (1 III ₄) _{2'3'}
$\frac{a}{a'} b c$	14	8	8	5 δ III	1	$a = 8$ $b = 3'$ $c = 7'$	4 δ 1 (1 III ₅)
$\frac{a}{a'} b c$	14	8	9	"	1	$a = 4'$ $b = 3'$ $c = 7'$	5 δ 3 (1 III ₅)
$\frac{a}{a'} b c$	14	8	10	"	1	$a = 8'$ $b = 2$ $c = 6$	5 δ (1 III ₅)
$\frac{a}{a'} b c$	14	8	11	"	1	$a = 8'$ $b = 6$ $c = 2$	5 δ 2 (1 III ₅)
$\frac{a}{a'} b c$	14	8	12	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$ $b = 3'$ $c = 7'$	7 δ 1 (1 III ₅) _{4'8'}
$1 \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	13	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	2 (δ 1) (1 III ₅) _{2'3'}
$\frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	14	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	6 δ (1 III ₅) _{2'3'}
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	1	10 χ III	15'	$a = 4'8$ $b = 3'7'$ $c = 3'7$	7 (χ 4) (1 π III)
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	2	"	15'	$a = 4'8$ $b = 3'7'$ $c = 3'7$	10 χ 3 (1 π III)
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	3	"	15'	$a = 4'8$ $b = 2'6$ $c = 2'6'$	8 (χ 4) (1 π III)
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	4	"	15'	$a = 4'8$ $b = 2'6'$ $c = 2'6$	18 (χ 3) (1 π III)
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	5	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{1'5'}$ $b = 2'6$	18 (χ 1) (3 III) _{1'3'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	6	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{1'5'}$ $b = 4'8$	18 (χ 3) (3 III) _{1'3'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	7	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{2'6'}$ $b = 3'7$	7 (χ 4) (3 III) _{2'3'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	8	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{2'6'}$ $b = 2'6$	18 (χ 2) (3 III) _{2'3'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	9	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{4'8'}$ $b = 3'7$	10 χ 3 (3 III) _{3'4'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	10	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{4'8'}$ $b = 4'8$	8 (χ 4) (3 III) _{3'4'}
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	11	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{3'7'}{4'8'}$ $b = 1'5'$ $c = 2'6'$	21 (χ 1) (3 III) _{3'4'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	12	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'}{4'8'}$ $b = 2'6$	8 (χ 3) (3 III) _{2'4'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	13	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'}{4'8'}$ $b = 4'8$	8 (χ 4) (3 III) _{2'4'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	14	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{2'6'}$ $b = 3'7$	7 (χ 3) (3 III) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	15	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{2'6'}$ $b = 4'8$	18 (χ 3) (3 III) _{1'2'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	16	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{4'8'}$ $b = 3'7$	10 χ 1 (3 III) _{1'4'}
$\frac{a}{a'} b b$	15	16	17	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{4'8'}$ $b = 2'6$	8 (χ 2) (3 III) _{1'4'}
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	18	"	18'	$a = 1'8$ $b = 2'3$ $c = 6'7$	10 χ 1 (4 III)
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	19	"	18'	$a = 4'5'$ $b = 2'3$ $c = 6'7$	10 χ 3 (4 III)
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	20	"	18'	$a = 1'8$ $b = 2'3'$ $c = 6'7'$	8 (χ 1) (4 III)
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	21	"	18'	$a = 4'5'$ $b = 2'3'$ $c = 6'7'$	18 (χ 4) (4 III)
$1 \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	22	"	18'	$\frac{b}{b'} = \frac{2'3}{2'3'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{6'7}{6'7'}$	10 χ 2 (4 III) _{2'2'}
$\frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	23	"	18'	$a = 1'8$ $\frac{b}{b'} = \frac{2'3}{2'3'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{6'7}{6'7'}$	11 χ 1 (4 III) _{2'2'}

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
abc	15	16	24	10 χ III	14'	$a=1'4 \quad b=3'6' \quad c=2'7$	7 (χ 3) (4 III)
abc	15	16	25	"	14'	$a=5'8 \quad b=3'6' \quad c=2'7$	7 (χ 4) (4 III)
abc	15	16	26	"	14'	$a=1'4 \quad b=3'6 \quad c=2'7'$	18 (χ 3) (4 III)
abc	15	16	27	"	14'	$a=5'8 \quad b=3'6 \quad c=2'7'$	8 (χ 4) (4 III)
abc	15	16	28	"	11'	$a=4'4' \quad b=3'3' \quad c=7'7'$	7 (χ 3) (1 χ III)
abc	15	16	29	"	11'	$a=8'8' \quad b=3'3' \quad c=7'7'$	10 χ 1 (1 χ III)
abc	15	16	30	"	11'	$a=4'4' \quad b=2'2' \quad c=6'6'$	8 (χ 1) (1 χ III)
abc	15	16	31	"	11'	$a=4'4' \quad b=6'6' \quad c=2'2'$	18 (χ 3) (1 χ III)
$1 \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	32	"	11'	$b=3'3' \quad c=7'7'$ $b'=2'2' \quad c'=6'6'$	7 (χ 1) (1 χ III) $_{23}^c$
$a \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	33	"	11'	$a=8'8' \quad b=3'3' \quad c=7'7'$ $b'=2'2' \quad c'=6'6'$	11 χ 1 (1 χ III) $_{23}$
abc	15	16	34	"	18	$a=1'8' \quad b=2'3 \quad c=6'7$	10 χ (1 χ' III)
abc	15	16	35	"	18	$a=4'5' \quad b=2'3 \quad c=6'7$	7 (χ 2) (1 χ' III)
abc	15	16	36	"	18	$a=1'8' \quad b=2'3' \quad c=6'7'$	8 (χ 2) (1 χ' III)
abc	15	16	37	"	18	$a=4'5' \quad b=2'3' \quad c=6'7'$	8 (χ 3) (1 χ' III)
abc	15	16	38	"	14	$a=1'4' \quad b=3'6 \quad c=2'7$	7 (χ 1) (1 χ' III)
abc	15	16	39	"	14	$a=5'8' \quad b=3'6 \quad c=2'7$	10 χ 2 (1 χ' III)
abc	15	16	40	"	14	$a=1'4' \quad b=3'6' \quad c=2'7'$	18 (χ 1) (1 χ' III)
abc	15	16	41	"	14	$a=5'8' \quad b=3'6' \quad c=2'7'$	18 (χ 2) (1 χ' III)
$\frac{a}{a'} bc$	15	16	42	"	14	$\frac{a}{a'} = \frac{5'8'}{1'4'} \quad b=3'6 \quad c=2'7$	11 χ 1 (1 χ' III) $_{15'}$
$\frac{a}{a'} bc$	15	16	43	"	18	$\frac{a}{a'} = \frac{1'8'}{4'5'} \quad b=2'3 \quad c=6'7$	11 χ (1 χ' III) $_{14'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	44	"	18	$b=2'3 \quad c=6'7$ $b'=2'3' \quad c'=6'7'$	7 (χ 2) (1 χ' III) $_{83'}$
$a \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	45	"	18	$a=1'8' \quad b=2'3 \quad c=6'7$ $b'=2'3' \quad c'=6'7'$	11 χ (1 χ' III) $_{83'}$

VI. Kubische Syngonie.

$a a_1 a_2$	29	24	1	19 χ III	1 1 ₁ 1 ₂	$a=1'2_2 6_1 \quad a_1=1'2_2 6_2$ $a_2=1_2' 2_1 6$	19 χ (13 III)
$a a_1 a_2$	29	24	2	"	1 1 ₁ 1 ₂	$a=1_2' 2_1 6 \quad a_1=1'2_2 6_1$ $a_2=1_1' 2_2 6_2$	25 (χ 1) (13 III)
$a a_1 a_2$	30	24	1	19 δ III	1 1 ₁ 1 ₂	$a=3_1' 4_7 2_1' \quad a_1=3_2' 4_1 7'$ $a_2=3' 4_2 7_1'$	19 δ 1 (13 III)
$a a_1 a_2$	31	24	1	22 III	1 1 ₁ 1 ₂	$a=3_2 7_1 8' \quad a_1=3_2 7_2 8_1'$ $a_2=3_1 7_2 8_2'$	22 (13 III)
$a a_1 a_2$	32	24	1	22 χ III	(15') ₃	$a=3_2 3_1' 4_7 7_2' 8_1'$ $a_1=3_3 2_1' 4_1 7_2 7' 8_1'$ $a_2=3_1 3' 4_2 7_1 7_2' 8_2'$	22 χ 1 (13 α III)
$a a_1 a_2$	32	24	2	"	(18) ₃	$a=1'2_2 3_2 6_1 7_1 8'$ $a_1=1_1' 2_3 3_2 7_2 8_1'$ $a_2=1_2' 2_1 3_1 6_7 8_2'$	22 χ (13 φ III)
$a a_1 a_2$	32	24	3	"	(14') ₃	$a=1'2_2 3_1' 4_6 7_2'$ $a_1=1_1' 2_3 2_2' 4_1 6_2 7'$ $a_2=1_2' 2_1 3' 4_2 6_7 7_1'$	9 (χ 1) (16 III)

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen			Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie		
Triparalleloëdersysteme XVI. Ordnung.								
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	1	10 χ III	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{4'}$ $b = 3$ $c = 7$	7 (χ 3) (1 III) _{1'4'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{4'}$ $b = 7$ $c = 3$	10 χ 1 (1 III) _{1'4'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	3	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{4'}$ $b = 2$ $c = 6$	8 (χ 1) (1 III) _{1'4'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	4	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{4'}$ $b = 6$ $c = 2$	18 (χ 3) (1 III) _{1'4'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $b = 3$ $c = 7$	7 (χ 4) (1 III) _{4'5'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $b = 7$ $c = 3$	10 χ 3 1 III) _{4'5'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $b = 2$ $c = 6$	18 (χ 4) (1 III) _{4'5'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $b = 6$ $c = 2$	8 (χ 4) (1 III) _{4'5'}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	9	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{4'}$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	21 (χ 1) (1 III) _{4'5'3'}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	10	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6}$	10 χ 2 (1 III) _{2'3}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	11	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6}$	7 (χ 3) (1 III) _{2'3}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	12	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{3}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7}{6}$	7 (χ 4) (1 III) _{2'3}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	13	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6}$	18 (χ 1) (1 III) _{2'3'}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	14	"	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6}$	18 (χ 2) (1 III) _{2'3'}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	15	"	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	18 (χ 3) (1 III) _{2'3'}	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	16	"	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{2'}$ $\frac{c}{c'} = \frac{7'}{6'}$	8 (χ 4) (1 III) _{2'3'}	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	17	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{4'}$ $b = 6$ $c = 2$	21 (χ 1) (1 III) _r	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	18	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{4'}$ $b = 2$ $c = 6$	21 (χ 2) (1 III) _r	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	19	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{2'}$ $b = 6$ $c = 2$	21 (χ 1) (1 III) _l	
$\frac{a}{a'} b c$	15	16	20	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{2'}$ $b = 2$ $c = 6$	21 (χ 2) (1 III) _l	

51. Hexa- und Heptaparakleödersysteme haben unter einander so viele Analogien, dass es sachgemäss erscheint, dieselben zusammen zu behandeln. Diese Analogien rühren daher, dass ausser für die triklone Syngonie diese Raumfiguren stets Grenzflächen besitzen, welche nicht singulären Columnen zugeordnet sind. Da aber dieser Umstand der wichtigste ist bei der Auffindung der Ableitungsformen, so kommt es, dass in den überaus meisten Fällen diesen Systemen dieselben Punktsysteme zu Grunde liegen. Daraus entsteht die auffallende Analogie auch in den Symbolen. Am schärfsten ist diese Analogie für die tetragonale

und die hexagonale Syngonieart ausgeprägt (für die letztere zeigen mit diesen Systemen auch die Triparalleloëdersysteme auffallende Analogie). Umgekehrt tritt am schärfsten der Unterschied für die kubische Syngonie zu Tage, da z. B. Systeme II. Ordnung nur unter den Hepta- und nicht unter den Hexaparalleloëdersystemen bestehen.

Was speciell die Systeme II. Ordnung betrifft, so ist offenbar, dass allein die Ableitungsformen $a11$ (resp. $1a1$, $11a$), $1aa$ (resp. $a1a$, $aa1$) und aaa denkbar sind. Für die triklone Syngonie haben wir die Gleichwerthigkeit der Ableitungsformen $a11$ und aaa für die Hexaparalleloëder und $a11$ und $1aa$ für die Heptaparalleloëder, indem die ersten wie die letzten sich auf triparallelogonale primäre Schichtensysteme, aaa für Heptaparalleloëder auf Gittersysteme, $1aa$ für Hexaparalleloëder auf diparallelogonale Schichtensysteme beziehen. Da aber die Schichten I. Ordnung der Schichtensysteme nur den singulären Flächen entsprechen können, welche für die kubische Syngonie unmöglich sind, so ergibt sich daraus von selbst, dass für dieselbe die Hexaparalleloëdersysteme unmöglich sind.

Sonst ist der Ableitungsgang der Systeme II. Ordnung so einfach, dass er schwerlich aufklärender Bemerkungen bedarf¹⁾.

¹⁾ Bei dem Vergleich ganz verschiedener Paralleloëdersysteme ersehen wir als einen recht allgemeinen Fall, dass denselben ein und dasselbe regelmässige Punktsystem zu Grunde liegt, was übrigens aus den Symbolen direct einleuchtend ist. Da aber sämtliche regelmässige Punktsysteme sich unter einander durch das Gesetz der Vertheilung der Symmetrieelemente scharf unterscheiden, und auch umgekehrt diejenigen, welche dieselben Symmetrieelemente in derselben räumlichen Vertheilung enthalten, als ein einziges aufgefasst werden, so zeigt dieser Umstand, dass die Verschiedenheit solcher Systeme nicht in dem Gesetz dieser Vertheilung ihren Grund findet.

Von Anfang an wurde in dieser Arbeit hervorgehoben, dass jetzt nicht nur allein die Symmetrieelemente und deren Vertheilung im Raume, sondern auch die Vertheilung der Columnen und Schichten und deren Verhältniss zu den Symmetrieelementen in Betracht zu ziehen sind. Es wurde von Anfang an festgestellt, dass diese letzte Vertheilung in den Systemen der Paralleloëder verschiedener Art verschieden ist. Dabei bleibt es überhaupt gleichgiltig, ob wir mit primären oder beliebig secundären Paralleloëdern operiren, da diejenigen Constructionen, welche hierzu dienen, keinen Einfluss auf die Vertheilung der Columnen und Schichten im Raume besitzen.

Aber es ist am Platze, darauf hinzuweisen, dass es besondere Constructionen giebt, welche dazu führen, die Form der als primär aufgefassten Paralleloëder zu ändern, oder sogar die Paralleloëder einer Art in eine andere zu überführen.

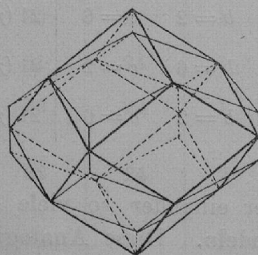


Fig. 20.

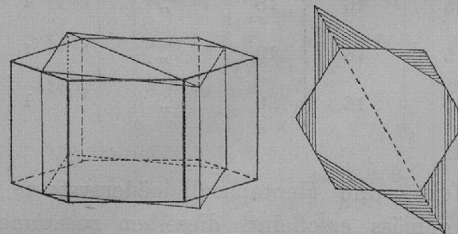


Fig. 21.

Um die Constructionen I. Art an einem Beispiel zu veranschaulichen, vergleiche man die in der Fig. 20 dargestellte Construction. Man sieht, dass sie zu denjenigen gehört, welche ein primäres Paralleloëder in ein secundäres verwandeln; wenn aber auch diese Construction keinen Einfluss auf die Vertheilung der Schichten und Columnen besitzt, so wird durch dieselbe doch die Form des Parallelo-

52. Die Systeme III. Ordnung sind den Triparalleloëdern so nahe analog, dass jetzt nur auf die Ausführungen des § 40 Bezug zu nehmen ist.

Was nun die Lage der polaren Schraubenaxen betrifft, so ist leicht zu beweisen, dass ihre Schnittpunkte mit den Grenzebenen durch folgende Construction bestimmt werden.

Für das Hexaparakelloëder (Fig. 22) ziehe man die längere Rhombendiagonale ab , bc und ca und von Punkt A aus die Geraden Ae und Ae' , wo e und e' die Mittelpunkte der entsprechenden Kanten sind. Die Schnittpunkte r bestimmen die rechten, und die Schnittpunkte l die linken Axen.

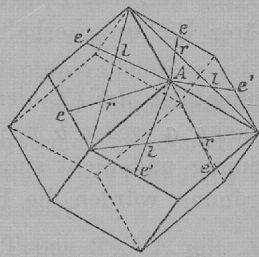


Fig. 22.

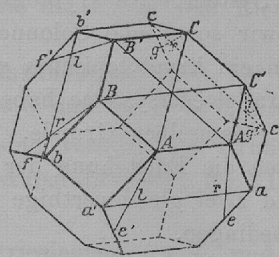


Fig. 23.

Für das Heptaparakelloëder (Fig. 23) ziehe man die Diagonalen aa' , bb' und cc' , und man verbinde die Eckpunkte A , A' , B , B' , C und C' der zur Axe senkrechten Grenzebene resp. mit den Mittelpunkten e , e' , f , f' , g und g' der Kanten. Die Schnittpunkte r bestimmen die Lage der rechten, die Schnittpunkte l die der linken Axen.

eders wesentlich verändert; es entsteht diejenige Form, welche vom Verfasser seit den 70^{er} Jahren als verlängertes Hexaparakelloëder bezeichnet wurde.

Noch tiefgreifender ist die in der Fig. 21 veranschaulichte Construction, welche, obgleich sie ebenfalls zu denjenigen gehört, welche die primären Paralleloëder in die secundären verwandeln, aber jetzt, dem Wesen nach, das Paralleloëder einer Art, und zwar das Tetraparakelloëder, in ein Paralleloëder anderer Art, in das Triparalleloëder, verwandelt, oder auch umgekehrt, das Triparalleloëder in das Tetraparakelloëder. Als Resultat dieser Construction erhält man eine ganz andere Vertheilung der Columnen und Schichten. Man sieht aber, dass man dieses Resultat nicht stufenweise, sondern nur auf einmal, abrupt, erzielt; es giebt keine Uebergänge zwischen beiden extremen Fällen, und somit kann kein Zweifel entstehen, von welchem Punkt an man anstatt des Tetraparakelloëdersystems ein Triparalleloëdersystem, oder umgekehrt, erhält. Derartige Constructionen lassen sich auch für andere Paralleloëderarten aufstellen. Auf diese Verhältnisse wurde vom Verfasser seit der Aufstellung der Theorie der regulären Plan- und Raumtheilung hingewiesen (E. G. L. § 58).

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass unter den hier aufgestellten Systemen auch so nahestehende vorkommen, dass es vielleicht in Frage gestellt werden kann, ob dieselben nicht als identische aufzufassen wären. Hierzu gehören z. B. einerseits alle diejenigen Tri- und Tetraparakelloëdersysteme, in welchen die Einheiten asymmetrisch sind und zugleich Symmetrieebenen als die peripherischen Elemente der Verbandsymmetrie auftreten, andererseits diejenigen, in welchen dieselben Symmetrieebenen explicit auftreten, wenn dabei das zu Grunde liegende regelmässige Punktsystem dasselbe bleibt. Es giebt in dieser Hinsicht analoge Fälle, in welchen die 2-zählige Symmetrieaxe einerseits peripherisch, andererseits explicit auftritt. Analoges gilt für Triparalleloëdersysteme mit asymmetrischen Einheiten und peripherischen 4-zähligen Symmetrieaxen u. s. f. In allen derartigen Fällen sind die Systeme zwar durch entsprechende Symbole von einander scharf zu unterscheiden (die Systeme erweisen sich nothwendiger Weise als zu verschiedenen Ordnungen zugehörig), aber denselben liegen nicht nur identische regelmässige Punktsysteme zu Grunde, sondern auch die Vertheilung der Schichten und

53. Da die Auffindung der Systeme IV. Ordnung umständlicher ist, wollen wir dieselbe etwas ausführlicher angeben.

Drei Zahlen abc der Ableitungsform können keineswegs sämmtlich von einander unabhängig sein, da dies mindestens das System VIII. Ordnung bedeuten würde.

Betrachten wir zuerst die phanerotopischen Hexaparalleloëdersysteme.

Keine von den Zahlen b und c kann gleich 1 sein. Wenn eine davon gleich 1 wäre, so würden wir eine Colonne I. Ordnung und nicht singulärer Richtung haben; eine andere gleichwerthige Colonne I. Ordnung würde die Entstehung einer Schicht I. Ordnung bedingen, und das System wäre kryptotopisch. Auch keine von den Zahlen c und b kann gleich a sein, da wir sonst eine Colonne nicht singulärer Richtung erhalten hätten, und folglich das System ein kryptotopisches wäre.

Für Heptaparalleloëdersysteme haben wir, dass keine der drei Zahlen gleich 1 sein kann, und zwar aus demselben Grunde. Auch für sie kann a weder b noch c gleich sein, da diese Gleichheiten die Entstehung der Reihen I. Ordnung und nicht singulärer Richtung bedingt hätten, und zwei gleichwerthige Columnen I. Ordnung würden die Entstehung eines Schichtensystems bedingen.

54. Wenn eine Colonne höherer Ordnung $\frac{a}{a'}$ vorhanden ist und eine andere durch charakteristische Zahlen $\frac{b}{b'}$ bestimmt wird, so folgt, dass, wenn $b=a$, b nicht gleich b' sein kann; wäre dies der Fall, so würden wir ein Netz I. Ordnung haben, welchem auch die Einheit a' angehört hätte, und dann würde auch a gleich a' sein, was der Annahme widerspricht.

Daraus folgt, dass wenn eine Colonne höherer Ordnung $\frac{a}{a'}$ vorhanden ist, keine phanerotopische Colonne durch eine der Zahlen a oder a' charakterisirt werden kann.

Wenn $a=b$, so ist leicht einzusehen, dass auch $a'=b'$ sein muss. In der That bestimmen die Einheiten a und b eine Reihe I. Ordnung; a' und b' gehören aber einer parallelen Reihe I. Ordnung an und sind folglich unter einander gleich.

Columnen darf als analog angesehen werden. Dem Wesen nach besteht hier der Unterschied darin, dass, was in einem Fall für eine einzige mit expliciter Symmetrie begabte Einheit gilt, in anderem Fall für eine Gesammtheit von 2, von 4 Einheiten angenommen wird, welche dabei ebenso viel in ihrer expliciten Symmetrie verlieren.

Ich halte aber denjenigen Standpunkt in rein geometrischer wie in praktischer Hinsicht (in Bezug auf die Anwendungen auf die Theorie der Krystallstructur) als allein richtig, von welchem aus solche Systeme als verschiedene behandelt werden.

Vom rein geometrischen Standpunkte können wir nämlich als Einheiten ebenso asymmetrische wie durch verschiedene Symmetrieelemente ausgezeichnete Einheiten annehmen, und dieser Umstand allein ist hinreichend, um den Unterschied der Systeme festzustellen. Dabei aber ergiebt sich auch der Unterschied in den gegenseitigen Verhältnissen der Symmetrieelemente und Columnen resp. Schichten.

Vom Standpunkte der Anwendungen ist natürlich die Frage, was eigentlich für eine Einheit der Krystallstructur anzunehmen wäre, nicht einstimmig und unwidersprechlich aufgelöst, und es bleibt noch viel Raum, diese Frage von verschiedensten Seiten zu behandeln und in erster Linie die physikalischen Folgerungen von verschiedenen Annahmen zu erschöpfen. Es wäre also nicht zweckmässig, von Anfang an Dinge zu identificiren, welche nach einem längeren Ueberlegen und Experimentiren als sehr verschiedene sich erweisen können.

Für Systeme IV. Ordnung ist die Annahme zweier verschiedener Colonnen $\frac{a}{a'}$ und $\frac{b}{b'}$ höherer Ordnung unmöglich, da jetzt überhaupt nur drei verschiedene charakteristische Zahlen zur Verfügung stehen.

55. Bei der Auswahl der charakteristischen Zahlen sind folgende Beschränkungen zu berücksichtigen.

Für das Hexaparalleloëder sind die Annahmen $a=3$, $a=7$, $a=3'$, $a=7'$, $a=4$ ausgeschlossen, da diese Annahme das Auftreten der entsprechenden Symmetrieelemente in expliciter Form zur Folge hätte, und dann würden sie überhaupt kein Element der Verbandssymmetrie sein. Ist $c=3'$, so ist $b=7'$, $a=5$.

Für das Heptaparalleloëder ist nothwendig anzunehmen, dass bei $c=3$, $a=7$ und bei $a=3$, $b=7$, und umgekehrt (bei $a=7$, $c=3$ und bei $b=7$, $a=3$).

56. Für Systeme der monoklinen Syngonie sind verschiedene Grundtypen zu berücksichtigen, und zwar 3χ VI und 3χ VI' für das Hexaparalleloëder, 3χ VII und 3χ VII' für das Heptaparalleloëder.

Für den Typus 3χ VI mit Verbandssymmetrieelement $1'$, 5 und $5'$ erhalten wir direct sämtliche phanerotopische Systeme durch einfache Permutation der Zahlen, wobei die Zahlen b und c als gleichwerthige nicht permutirt werden. Dies hat darin seinen Grund, dass man weder $b=c$, noch $a=b$ (resp. c) setzen kann.

Für die kryptotopischen Systeme kann man a nur gleich $\frac{5}{5'}$ setzen, da $1'$ central ist; b kann ausser $\frac{5}{5'}$ noch $\frac{5'}{1'}$, aber nicht $\frac{5}{1'}$ gleich gesetzt werden.

Für den Typus 3χ VI' und phanerotopische Systeme ist ebenfalls weder $b=c$ noch $a=b$ (resp. c) zu setzen erlaubt, und nun bleiben die Zahlen b und c zu permutiren.

In den kryptotopischen Systemen kann die Colonne a überhaupt nicht kryptotopisch auftreten, da weder $a=4$ noch $a=8'$ zu setzen erlaubt ist. Für b ist das Setzen $\frac{4}{8'}$ nicht zulässig (daraus würde nothwendig $5'$ explicit erscheinen). Es bleiben also zwei zulässige Annahmen übrig, und zwar $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{8'}$ und $\frac{b}{b'} = \frac{5'}{4}$.

Für den Typus 3χ VII der Heptaparalleloëder haben wir mit dem Typus 3χ VI so auffallende Analogie, dass es nur der Wiederholung bedarf.

Sämmtliche phanerotopische Heptaparalleloëdersysteme IV. Ordnung sind überhaupt Colonnensysteme, da dieser Raumfigur 7 Colonnen zugeordnet sind, während die Anzahl der Verbandssymmetrieelemente 3 ist, und keine von ihnen zu mehr als einer Colonne gehören kann. Nun existirt in dem Typus 3χ VII' nur eine einzige (verticale) Colonne singulärer Richtung; sie muss also nothwendig die Colonne I. Ordnung sein; daraus folgt aber, dass $b=c'$ und $c=b'$, also $b=b'=c=c'$. Diese Bedingung führt aber dazu, dass allein die Ableitungsform abb zulässig ist, und dass die vollständige Darstellung der Systeme auf die einfache und vollständige Permutation der Zahlen 4 , $5'$ und $8'$ hinauskommt.

Für kryptotopische Systeme ist die Annahme $b=4$ überhaupt unzulässig (da das Symmetrieelement central wäre); auch ist die Annahme $\frac{a}{a'} = \frac{4}{8'}$ ausgeschlossen (dies würde

zur expliziten Symmetrie führen). Es bleiben also die Annahmen $b = \frac{5'}{8'}$ und $a = \frac{5'}{8'}$ und $\frac{4}{5'}$ allein zulässig.

57. Für die rhombische Syngonie ist zuerst hervorzuheben, dass nicht bei allen Grundtypen entsprechende phanerotopische Systeme vorhanden sind, und zwar diejenigen nicht, welche Grenzflächen besitzen, deren zugeordnete Columnen von ganz allgemeiner Lage sind, d. h. zu allen drei singulären Richtungen schief stehen. Solche Richtungen treten in der Anzahl 4 gleichwerthig auf. Sehen wir von der 8. Symmetrieart ab, so finden wir, dass sämtliche Elemente der Verbandsymmetrie schneidende sind. Jedes derselben, einzeln genommen, bestimmt eine Reihe resp. eine Colonne I. Ordnung; zwei derselben würden also ein Schichtnetz resp. eine Schicht I. Ordnung bestimmen. Solche Systeme IV. Ordnung können aber nicht phanerotopisch sein. Die Systeme der 8. Symmetrieart lassen sich aber von den vorigen durch Einführen der expliziten Symmetrie ableiten. Dabei bleibt aber die Ableitungsform unberührt erhalten.

Somit sind die phanerotopischen Systeme nur für die Typen 7 VI, 7 VII, 3 φ'' VI, 3 φ'' VII, 3 φ'' VII', 7 χ VI und 7 χ VII zulässig. Für Hexaparalleloëder gilt dabei allein die Ableitungsform abc , und für Heptaparalleloëder abb . Für jede Symmetrieart sind dann nur die charakteristischen Zahlen zu permutiren mit Rücksicht auf die scheinbare Symmetrie.

Die kryptotopischen Systeme lassen sich als solche, welche aus lauter Schichten resp. Schichtnetzen I. Ordnung bestehen, besonders einfach ableiten, in Anbetracht, dass die Schichtebenen nur die singulären sein können.

58. Für die Systeme der tetragonalen Syngonie ist die Möglichkeit des Auftretens der Symmetrieelemente als die des Verbandes in ansehnlichem Grade beschränkt, und es erscheint zweckmässig, die individuellen Eigenschaften dieser Elemente tabellarisch darzustellen. Die peripherischen Symmetrieelemente stehen frei zur Verfügung. Die wenigen Beschränkungen in dieser Verfügung sind oben (§ 55) erwähnt. Das Auftreten eines centralen Elementes hat die Entstehung einer Colonne II. Ordnung zur directen Folge. Ist aber diese Colonne von nicht singulärer Richtung, so werden dadurch 4 Columnen (in der Anzahl der gleichwerthigen Richtungen) II. Ordnung bedingt; folglich kommt das phanerotopische System zu Stande. Speciell für 1' (a des Hexaparalleloëders) wird zuerst nur die singuläre phanerotopische Schicht bedingt; für dieselbe gilt aber jetzt der 1. Satz, § 29; obgleich die Gleitrichtung nicht die singuläre ist, so folgt doch aus dem Vorhandensein der 4-zähligen Deckaxen nothwendig, dass stets zugleich beide unter einander senkrechte Gleitrichtungen vorhanden sind. Auf Grund dieses Satzes ist die Folgerung aufzustellen, dass auch in diesem Falle das System phanerotopisch ist. Kurz ausgedrückt, tritt ein einziges centrales Element der Verbandsymmetrie auf, so ist das System phanerotopisch. Tritt ein schneidendes Element in singulärer Richtung auf, so ist dadurch das Colonnensystem bedingt. Wenn aber die Richtung nicht die singuläre ist, so wird ein Schicht- resp. Schichtnetzsystem bedingt, welches nicht das phanerotopische sein kann, sondern nur das kryptotopische. Wie aber jetzt die Schichten nur singulär sein können, so muss die durch das gesagte Element bedingte Colonne der singulären Ebene parallel sein. Solche Systeme lassen sich aber besonders einfach darstellen.

Nun lassen wir alle diese Eigenschaften der Symmetrieelemente tabellarisch zusammenstellen.

		1'	2	6	2'	6'	4	8	4'	8'	3	7	3'	7'	5	5'
Hexaparalleloëder	a	ph	s	s	s	s	x	ph	—	ph	x	x	—	—	—	—
	b	s	ph	c	s	—	x	x	s	s	—	—	—	—	c	—
	c	s	c	ph	—	s	x	x	s	s	—	—	—	—	c	—
Heptaparalleloëder	a	s	x	x	s	s	c	ph	—	s	—	—	—	—	c	—
	b	s	x	x	s	s	ph	c	s	—	—	—	—	—	c	—
	c	s	x	x	s	s	ph	c	s	—	—	—	—	—	c	—

In dieser Tabelle bedeutet ph phanerotopisches, c Columnen-, s Schicht- resp. Schichtnetzsystem, — bedeutet ein peripherisches Symmetrieelement und x ist ein unzulässiges.

Die Aufsuchung der Systeme bezieht sich eigentlich auf die 9. und 11. Symmetrieart, und auf diejenige der 10., 12., 13. und 14., welche explicit das Element 5 enthalten; die übrigen lassen sich von den vorigen einfach durch Hinzufügung der expliciten 2-zähligen Symmetrieelemente ableiten. Die Systeme der 15. Symmetrieart lassen sich ebenfalls aus den vorigen durch die Einschaltung der 2-zähligen Symmetriearten in expliciter Form darstellen; man braucht aber dabei nicht alle vier (und zwar 10., 12., 13. und 14) zu berücksichtigen. Es sind nur die untergeordneten Symmetriegruppen auszubilden (5., 6., 7., 9. und 11. Symmetrieart), und dann nur diejenigen zu berücksichtigen, welche dazu geeignet sind. Wie aber die einzuschaltenden Symmetriearten die Gruppen darstellen müssen, welche nicht der Gruppe der Verbandsymmetrie untergeordnet sind, sondern davon unabhängig sein muss, so können wir z. B. sämtliche Systeme aus den Systemen der 12. Symmetrieart durch Einschaltung der Symmetrieelemente 2, 4, 6, 8, 2', 4', 6', 8' darstellen, und auf diese Weise die 5., 6., 7., aber nicht die 9. und 11. Symmetrieart explicit einschalten; speciell für die 9. müssen wir die Systeme der 14., und speciell für die 11. die 13. (oder 10.) Symmetrieart berücksichtigen.

59. Für die Systeme der hexagonalen Syngonie haben wir nur die für Triparalleloëder geltenden Betrachtungen zu wiederholen.

60. Die Systeme der kubischen Syngonie lassen sich sämtlich von denen der 28. Symmetrieart, und diese von denjenigen Systemen der 6. Symmetrieart durch die Einschaltung der expliciten 3-zähligen Symmetrieaxe ableiten, welche solche Einschaltung zulassen.

Für Hexaparalleloëdersysteme sind also nur die Systeme 1, 2 und 3, und für Heptaparalleloëder diejenigen phanerotopischen Systeme der 6. Symmetrieart zu berücksichtigen, welche dem Typus 6 VII zu Grunde liegen, solche sind aber nicht vorhanden. Daraus ist zu schliessen, dass überhaupt Heptaparalleloëdersysteme IV. Ordnung der kubischen Syngonie nicht möglich sind.

Von den drei zu Grunde liegenden Hexaparalleloëdersystemen lassen nur 1. und 3. die genannte Symmetrieaxe einschalten. Es sind also nur zwei Hexaparalleloëdersysteme IV. Ordnung der 28. Symmetrieart möglich. Die Systeme der 29. Symmetrieart lassen sich von denselben durch Hinzufügung des Inversionscentrums ableiten; die beiden sind möglich. Die Systeme der 30. Symmetrieart würden durch Einschaltung der Symmetrieebene 8, und die Systeme der 31. Symmetrieart durch die Einschaltung der 2-zähligen Symmetrieaxe 4'

zu Stande kommen; solche Einschaltung ist aber nur für System 19 (13 VI) zulässig. Endlich lässt sich ein einziges System der 32. Symmetrieart durch die Einschaltung der Symmetriearten 4', 5' und 8 zusammengekommen ableiten.

61. Für die Systeme VI. Ordnung haben wir nur die für Triparalleloëdersysteme geltenden Betrachtungen zu wiederholen.

62. Bei der Auffindung der Systeme VIII. Ordnung und rhombischer Syngonie sind die Typen 7χ VI, 6χ VI, 6χ VII und 7χ VII zu berücksichtigen.

Schicken wir erst als Vorbemerkung den Satz voran, dass jetzt die Schicht- resp. Schichtnetzsysteme ausgeschlossen sind. In der That würden solche Systeme als aus lauter parallel gestellte Schichten resp. Schichtnetzen I. Ordnung aufzufassen sein, und dann wäre das die Einheiten jeder ersten und dritten Schicht verbindende Symmetrieelement ein vierzähliges, was für die Systeme der rhombischen Syngonie ausgeschlossen ist. Somit ist aber zugleich jedes Verbandsymmetrieelement ausgeschlossen, welches eine Colonne resp. Colonnenreihe I. Ordnung in nicht singulärer Richtung bedingt.

Darauf fussend, ist es leicht, die hierzu gehörenden Systeme erschöpfend darzustellen.

Für den Typus 7χ VI stehen überhaupt nur folgende Verbandsymmetrieelemente zur Verfügung: 1', 2, 2', 5, 5', 6 und 6'. Von diesen ist 5' für sämtliche Grenzflächen peripherisch, 5 ist für a , 6' für b und 2' für c peripherisch; 1', 2 und 6 sind resp. für a , b und c central; alle übrigen sind die schneidenden und bedingen die Colonnenreihen I. Ordnung.

Für phanerotopische Systeme sind die letzteren überhaupt ausgeschlossen, da ein solches Element eine Schicht II. Ordnung bedingen würde, und das phanerotopische System, welches aus lauter solchen parallelen Schichten II. Ordnung bestehe, wäre das System IV. und nicht VIII. Ordnung. Für phanerotopische Systeme bleiben somit nur die peripherischen und centralen Elemente zur Verfügung stehen. In Folge dessen können wir zwei derselben beliebig auswählen, z. B. $b = 2$, $c = 6$; dann ist aber $a = 5$ nothwendige Folge, und es bleibt (§ 26) eine andere Fläche d auszuwählen; nehmen wir in Betracht, dass 2' und 6' nothwendiger Weise in diesem Fall peripherisch auftreten, so finden wir, dass die Annahme $d = 5'$ unzulässig ist, und es bleibt eine einzige Annahme $d = 1'$ übrig, und somit kommt ein einziges hierzu gehöriges System zu Stande.

Alle übrigen Systeme sind die kryptotopischen. Da in denselben nothwendiger Weise Schichten II. Ordnung vorhanden sind, so sind die Systeme selbst als aus lauter solchen parallelen Schichten bestehend zu betrachten. Diese Schichten bilden aber dabei eine kryptotopische Reihe. Der Bestimmtheit wegen können wir für diese Schichten die horizontalen annehmen; somit werden die Combinationen der Symmetrieelemente durch zweckmässige Vertauschung bestimmt.

Für den Typus 6χ VI, wo die Symmetrieelemente 1', 4, 4', 5, 5', 8, 8' zur Verfügung stehen, finden wir, dass nur 5' für sämtliche Grenzflächen peripherisch ist; für die Grenzflächen b und c sind sämtliche übrigen Elemente die schneidenden. Daraus kommt, dass irgend eine Auswahl, in welcher zwei schneidende Symmetrieelemente ausgeschlossen sind, unmöglich ist, also die Systeme selbst unmöglich sind.

Die Heptaparalleloëdersysteme und zwar des Typus 7χ VII erhalten wir direct, sich auf die Analogie mit 7χ VI stützend. Die Systeme des Typus 6χ VII sind ebenfalls unmöglich.

63. Für die Systeme der tetragonalen Syngonie sind die Schichtsysteme zulässig, da ein 4-zähliges Symmetrieelement, welches versteckt auftreten kann, wirklich vorhanden ist: das ist die polare 4-zählige Schraubenaxe. Diejenigen schneidenden Symmetrieelemente, welche eine zur singulären Richtung schief stehende Colonne I. Ordnung bedingen, sind gänzlich ausgeschlossen. Diejenigen, welche eine der singulären Ebene parallele Colonne I. Ordnung bedingen, führen zur Ausbildung der Schichtsysteme, und diejenigen in der singulären Richtung zur Ausbildung der Colonnensysteme; die letzteren können aber nicht phanerotopisch auftreten, da sonst die Systeme höchstens IV. Ordnung zu Stande kämen. Das Auftreten eines centralen Verbandsymmetrieelementes bedingt nothwendig die Ausbildung des phanerotopischen Systems.

Die Schichtsysteme VIII. Ordnung sind nur dann möglich, wenn sämtliche kryptotopisch auftretende polare Schraubenaxen von einem und demselben Windungssinn sind. Dabei ist aber das Vorhandensein jeglicher Elemente der geraden Symmetrie ausgeschlossen. Folglich sind solche Systeme allein für die 13. Symmetrieart zulässig.

Bei der Aufsuchung müssen wir wieder von der Tabelle, § 58, Gebrauch machen. Für die Systeme VIII. Ordnung sind aber auch die Annahmen $a = 3'$ und $a = 7'$ ausgeschlossen (es würde daraus explicite Symmetrie folgen).

Für die 10. Symmetrieart sind die Schichtsysteme ausgeschlossen; folglich keine zwei von drei Zahlen a, b, c gleich sein können. Wie aber für Hexaparalleloëder die Annahmen $a = 3, a = 7$ ebenso ausgeschlossen sind, so muss entweder b oder c einer dieser Zahlen gleich sein. Aus den hierzu gehörenden Zahlencomplexen 2 3 4 5 6 7 8 sind für b und c die Zahlen 4 und 8 ausgeschlossen. Andere Annahmen sind unzulässig.

Die Heptaparalleloëdersysteme lassen sich direct auf Grund der mit der ersteren bestehenden Analogie ermitteln.

Für die 12. Symmetrieart lässt sich das einzige phanerotopische System aus der Annahme $b = 7', c = 3'$ direct auffinden, da daraus $a = 5$, und die Lagen der 4-zähligen Schraubenaxen eindeutig bestimmt sind. Dabei ist $d = 1'$. Es bleiben allein die Annahmen übrig, dass $d = 5'$ resp. 5 ist, und dann treten zwei kryptotopische Systeme zu Tage.

Die Heptaparalleloëdersysteme ergeben sich direct auf Grund ihrer Analogie.

Ebenfalls lässt sich für die 13. Symmetrieart das einzige vorhandene phanerotopische Hexaparalleloëdersystem dadurch eindeutig bestimmen, dass man z. B. $b = 7$ und $c = 2'$ setzt. Als phanerotopisches enthält es nothwendiger Weise die polaren Axen von entgegengesetztem Windungssinn. Andere Systeme lassen sich dadurch bestimmen, dass man entweder den beiden Zahlen b und c die Bedeutungen 3 oder 7 zuschreibt, oder eine dieser Zahlen wird z. B. b und die andere c' zugeschrieben. Im ersten Falle b' und c' , im zweiten b' und c kommen die eindeutig festzustellenden Zahlen für peripherische Symmetrieelemente $2'$ oder $6'$ zu.

Wird aber eine der letzteren Zahlen als der Ausdruck einer schneidenden Schraubenaxe angenommen, so entstehen nothwendig die Schichtsysteme mit kryptotopischen polaren Axen. Je nach dem Windungssinne unterscheidet man zwei verschiedene Systeme.

Für Heptaparalleloëder werden die Systeme auf Grund der Analogie direct erschöpfend aufgefunden.

Für die 14. Symmetrieart geht die Auffindung der Systeme besonders einfach vor sich, da es nothwendig ist, für b und c die Zahlen $3'$ und $7'$ zu setzen, und für die übrigen schiefen Flächen sind die peripherischen und nur diejenigen schneidenden Symmetriearien zu setzen erlaubt, welche die Reihen I. Ordnung bedingen.

Die Systeme der 15. Symmetrieart lassen sich aus den vorigen durch Einschaltung eines 2-zähligen Symmetrieelementes in expliciter Form ausbilden. Es sind also die Systeme der Prüfung zu unterziehen, ob sie eine solche Einschaltung zulassen. Diese Operation ist allein für die explicit auftretende Axe 5 nicht zulässig, da dieselbe stets eine untergeordnete Symmetrieart ausbildet. Für dieselbe ist also eine specielle Operation anzuwenden.

Auf Grund des 1. Satzes, § 29, schliessen wir, dass in diesem Fall die der singulären Ebene parallelen Reihen nothwendig I. Ordnung sind; die dieser Ebene parallelen Schichten sind also höchstens II. Ordnung. Ein hierzu gehörendes System wäre also als solches aufzufassen, welches aus lauter parallelen Schichten höchstens II. Ordnung bestehe. Schichten I. Ordnung kann es jetzt nicht geben, da ein 8-zähliges Symmetrieelement, welches in diesem Falle kryptotopisch auftreten müsste, nicht vorhanden ist. Es sind also allein die Schichten II. Ordnung zulässig, welche eine Aneinanderfolge von 4 verschiedenen Gliedern darstellen, und keine Einheit einer dieser Schicht kann dieselbe Orientirung mit keiner Einheit jeder der 3 anderen Schichten zulassen. Somit sind als Verbandsymmetrieelemente alle diejenigen ausgeschlossen (2 4 6 8), welche dieser Bedingung nicht genügen; auch 3 und 7 sind ausgeschlossen, da sie den kryptotopisch auftretenden polaren Schraubenaxen angehören müssen (wobei natürlich die Axen beiderlei Windungssinnes hätten vorkommen müssen). Für 4 Paar schiefer Flächen bleiben allein folgende Gruppen zulässig: a) $1'5'$, b) $2'6'$, c) $4'8'$, d) $3'7'$. Da aber von zwei Gruppen b) und c) eine den Symmetrieelementen angehört, welche die Ausbildung der Columnen I. Ordnung und folglich auch die Schichten I. Ordnung bedingen, so ist auch von denselben nur eine zulässig. Daraus folgt, dass überhaupt kein hierzu gehöriges System vorhanden ist.

64. Die Systeme kubischer Syngonie lassen sich einfach aus den früheren durch die Einschaltung der 3-zähligen Symmetrieaxe explicit ableiten.

Für Hexaparalleloëder der 29. Symmetrieart ist das einzige System 1 der 8. Symmetrieart um die Möglichkeit dieser Einschaltung zu prüfen (wie aber dies zulässig erscheint, erhalten wir wirklich ein hierzu gehöriges System). Für Hexaparalleloëder der 30. Symmetrieart erhält man auf eben diese Weise aus dem System 1 der 14. Symmetrieart, und für die 31. Symmetrieart erhält man das neue System aus System 1 der 13. Symmetrieart. Wie aber in allen diesen Fällen je ein einziges System zur Verfügung steht, so sind alle übrigen Annahmen ausgeschlossen, und keine Systeme mehr möglich.

Endlich erhalten wir noch zwei neue Systeme der 32. Symmetrieart durch die Einschaltung des Inversionscentrums resp. der Symmetrieebene 8 in die eben erhaltenen Systeme. Auch jetzt sind alle übrigen Annahmen ausgeschlossen.

Die analoge Prüfung für das Heptaparalleloëdersystem führt uns dazu, dass dem System 1 der 8. Symmetrieart die 3-zählige Symmetrieaxe nicht eingeschaltet werden kann, was übrigens daraus augenscheinlich ist, dass aus drei gleichwerthigen (in Bezug auf die einschaltende Symmetrieaxe) Zahlen 8, $8'$ und 4 zwei der geraden und eine der Decksymmetrie gehören. Für die Systeme der 13. und 14. Symmetriearten führt uns die Prüfung zum

positiven Resultate, und wir erhalten zwei neue Systeme der 30. und 31. Symmetrieart und dabei je eine mit Ausschluss der übrigen Annahmen. Aus diesen beiden lässt sich durch Einschaltung des Inversionscentrums ein und nur ein der 32. Symmetrieart zugehöriges System erhalten.

65. Was die Systeme XVI. Ordnung betrifft, so sind folgende Annahmen zu prüfen: a) entweder besteht ein solches der 15. Symmetrieart angehörendes System aus lauter parallelen Schichten I. Ordnung, oder b) sind solche Schichten II. Ordnung, oder endlich c) sind diese Schichten IV. oder höherer Ordnung.

Die Annahme a) ist von vornherein ausgeschlossen, da für dieselbe das Vorhandensein eines 8-zähligen Symmetrieelementes nothwendig ist, welches kryptotopisch auftreten würde. Solche Symmetrieelemente sind aber nicht vorhanden.

Die Annahme b) schliesst aus der Reihe der Verbandsymmetrieelemente diejenigen, welche durch die Zahlen 3 und 7 ausgedrückt werden, und auch alle diejenigen, welche eine Schicht mit der dritten verbindet, also die Zahlen 2, 4, 6, 8, aus; dabei sind die Zahlen der beiden durch eine Schicht getrennten Schichten von einander nicht unabhängig, sondern derart verbunden, dass aus denselben die resultirenden 4-zähligen polaren Axen herauskommen. Hier liegen offenbar zwei und nur zwei Möglichkeiten vor: es sind entweder die Zahlen einer Schicht 3' und 7' und der anderen 5' und 1', oder die Zahlen einer Schicht 2' und 6' und der anderen 4' und 6'; beide Annahmen führen aber zu Systemen VIII. Ordnung.

Die Annahme der Schichten IV. Ordnung erfordert, dass für jede der zwei Schichten je vier den gestellten Bedingungen genügende Elemente der Verbandsymmetrie vorhanden sind. Dies ist aber nicht der Fall, da von den vier Elementen 2', 4', 6' und 8' stets zwei schneidende sind, welche die Entstehung von Schichten höchstens II. Ordnung bedingen. Da weitere Annahmen ausgeschlossen sind, so erhalten wir als Resultat, dass überhaupt Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme XVI. Ordnung nicht möglich sind.

V. Hexa- und Heptaparalleloëder II. und höherer Ordnung.

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

Hexa- und Heptaparalleloëder II. Ordnung.*)

I. Triklone Syngonie.

1 a a	2	2	1	1 π VI	1	$a = 5'$	1 π (1 VI) ^s
a a a	2	2	2	„	1	$a = 5'$	1 π (1 VI) ^{s'}
a 1 1	2	2	1	1 π VII	1	$a = 5'$	1 π (1 VII) ^s
a a a	2	2	2	„	1	$a = 5'$	1 π (1 VII) ^g

*) Der Anschaulichkeit wegen sind sämmtliche Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme bildlich in den Tafeln VI—XIII dargestellt. Aus diesen Tabellen ist sehr leicht die Tri- und Tetraparalleloëdersysteme mit der ihnen entsprechenden Lagerung der Symmetrieelemente in Vorstellung zu halten. Dies ist aber für Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme etwas schwieriger.

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus 1. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

II. Monokline Syngonie.

1 a a	3	2	1	3 VI	1	$a = 5$	(1) (1 VI) ^s
a 1 a	3	2	2	"	1	$a = 5$	3 (1 VI) ^s
1 a a	3	2	3	3 VI'	1	$a = 4'$	(1) (1 VI') ^s
a a a	3	2	4	"	1	$a = 4'$	3 (1 VI') ^s
a 1 1	3	2	1	3 VII	1	$a = 5$	3 (1 VII) ^s
a a a	3	2	2	"	1	$a = 5$	(1) (1 VII) ^g
a 1 1	3	2	3	3 VII'	1	$a = 4'$	3 (1 VII') ^s
a a a	3	2	4	"	1	$a = 4'$	3 (1 VII') ^g
1 a a	3	2	5	"	1	$a = 4'$	(1) (1 VII') ^s
1 a a	4	2	1	1 χ' VI	1	$a = 1'$	1 χ' 1 (1 VI) ^s
a 1 a	4	2	2	"	1	$a = 1'$	1 χ' 1 (1 VI) ^s
1 a a	4	2	3	1 χ' VI'	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 VI') ^s
a a a	4	2	4	"	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 VI') ^s
a 1 1	4	2	1	1 χ' VII	1	$a = 1'$	1 χ' 1 (1 VII) ^s
a a a	4	2	2	"	1	$a = 1'$	1 χ' 1 (1 VII) ^g
a 1 1	4	2	3	1 χ' VII'	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 VII') ^s
a a a	4	2	4	"	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 VII') ^g
1 a a	4	2	5	"	1	$a = 8$	1 χ' 1 (1 VII') ^s
1 a a	5	4	1	3 χ' VI	15'	$a = 1'5$	1 (χ' 2) (1 π VI) ^s
a 1 a	5	4	2	"	15'	$a = 1'5$	3 χ' 1 (1 π VI) ^s
1 a a	5	4	3	"	15'	$a = 1'5'$	2 χ' 1 (3 VI') ^s
a 1 a	5	4	4	"	15'	$a = 1'5'$	3 χ' 1 (3 VI') ^s
1 a a	5	4	5	"	11'	$a = 5'5'$	1 (χ' 1) (1 χ' VI) ^s
a 1 a	5	4	6	"	11'	$a = 5'5'$	3 χ' 1 (1 χ' VI) ^s
1 a a	5	4	7	3 χ' VI'	15'	$a = 4'8$	1 (χ' 2) (1 π VI') ^s
a a a	5	4	8	"	15'	$a = 4'8$	3 χ' 1 (1 π VI') ^s
1 a a	5	4	9	"	14'	$a = 5'8$	2 χ' 1 (3 VI') ^s
a a a	5	4	10	"	14'	$a = 5'8$	3 χ' 1 (3 VI') ^s
1 a a	5	4	11	"	18	$a = 4'5'$	1 (χ' 1) (1 χ' VI') ^s
a a a	5	4	12	"	18	$a = 4'5'$	3 χ' 1 (1 χ' VI') ^s
a 1 1	5	4	1	3 χ' VII	15'	$a = 1'5$	3 χ' 1 (1 π VII) ^s
a a a	5	4	2	"	15'	$a = 1'5$	1 (χ' 2) (1 π VII) ^g
a 1 1	5	4	3	"	15'	$a = 1'5'$	3 χ' 1 (3 VII) ^s
a a a	5	4	4	"	15'	$a = 1'5'$	2 χ' 1 (3 VII) ^g
a 1 1	5	4	5	"	11'	$a = 5'5'$	3 χ' 1 (1 χ' VII) ^s
a a a	5	4	6	"	11'	$a = 5'5'$	1 (χ' 1) (1 χ' VII) ^g
a 1 1	5	4	7	3 χ' VII'	15'	$a = 4'8$	3 χ' 1 (1 π VII') ^s
a a a	5	4	8	"	15'	$a = 4'8$	3 χ' 1 (1 π VII') ^g
1 a a	5	4	9	"	15'	$a = 4'8$	1 (χ' 2) (1 π VII') ^s
a 1 1	5	4	10	"	14'	$a = 5'8$	3 χ' 1 (4 VII') ^s
a a a	5	4	11	"	14'	$a = 5'8$	3 χ' 1 (4 VII') ^g
1 a a	5	4	12	"	14'	$a = 5'8$	2 χ' 1 (4 VII') ^s
a 1 1	5	4	13	"	18	$a = 4'5'$	3 χ' 1 (1 χ' VII') ^s
a a a	5	4	14	"	18	$a = 4'5'$	3 χ' 1 (1 χ' VII') ^g
1 a a	5	4	15	"	18	$a = 4'5'$	1 (χ' 1) (1 χ' VII') ^s

III. Rhombische Syngonie.

1 a a	6	4	1	7 VI	15	$a = 2'6'$	5 (3 VI) ^s
a a 1	6	4	2	"	15	$a = 2'6'$	(4) (3 VI) ^s
1 a a	6	4	3	6 VI	15	$a = 4'8'$	(2) (3 VI) ^s
1 a a	6	4	4	"	14'	$a = 5'8'$	(2) (3 VI') ^s
a a a	6	4	1	6 VII	15	$a = 2'6'$	(2) (3 VII) ^g
a 1 1	6	4	2	7 VII	15	$a = 4'8'$	(4) (3 VII) ^s
a a a	6	4	3	"	15	$a = 4'8'$	5 (3 VII) ^g
a 1 1	6	4	4	"	14'	$a = 5'8'$	(4) (3 VII') ^s
a a a	6	4	5	"	14'	$a = 5'8'$	(4) (3 VII') ^g

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
1 a a	6	4	6	7 VII	14'	$a = 5'8'$	5 (3 VII) ^s
1 a a	7	4	1	3 φ'' VI	15	$a = 2'6'$	2 $\varphi' 1$ (3 VI) ^s
a a 1	7	4	2	"	15	$a = 2'6'$	3 $\varphi 3$ (3 VI) ^s
1 a a	7	4	3	"	12	$a = 5'6'$	1 ($\varphi 5$) (1 χ' VI) ^s
a a 1	7	4	4	"	12	$a = 5'6'$	3 $\varphi 1$ (1 χ' VI) ^s
a 1 a	7	4	5	"	12	$a = 5'6'$	3 $\varphi 2$ (1 χ' VI) ^s
1 a a	7	4	6	3 φ' VI	15	$a = 4'8'$	2 $\varphi 4$ (3 VI) ^s
1 a a	7	4	7	"	18	$a = 4'5'$	1 ($\varphi 2$) (1 χ' VI) ^s
1 a a	7	4	8	3 φ' VI'	14'	$a = 1'4'$	2 $\varphi 4$ (3 VI) ^s
1 a a	7	4	9	"	11'	$a = 4'4'$	1 ($\varphi 2$) (1 χ' VI) ^s
1 a a	7	4	10	"	14	$a = 1'4'$	1 ($\varphi 2$) (1 χ' VII) ^s
a a a	7	4	1	3 φ' VII	15	$a = 2'6'$	2 ($\varphi 4$) (3 VII) ^s
a a a	7	4	2	"	12	$a = 5'6'$	1 ($\varphi 2$) (1 χ' VII) ^s
a a a	7	4	3	3 φ'' VII	15	$a = 4'8'$	2 $\varphi' 1$ (3 VII) ^s
a 1 1	7	4	4	"	15	$a = 4'8'$	3 $\varphi 3$ (3 VII) ^s
a 1 1	7	4	5	"	18	$a = 4'5'$	3 $\varphi 1$ (1 χ' VII) ^s
a a a	7	4	6	"	18	$a = 4'5'$	1 ($\varphi 5$) (1 χ' VII) ^s
1 a a	7	4	7	"	18	$a = 4'5'$	3 $\varphi 2$ (1 χ' VII) ^s
a 1 1	7	4	8	3 φ'' VII'	14'	$a = 1'4'$	3 $\varphi 3$ (3 VII) ^s
a a a	7	4	9	"	14'	$a = 1'4'$	3 $\varphi 3$ (3 VII) ^s
1 a a	7	4	10	"	14'	$a = 1'4'$	2 $\varphi' 1$ (3 VII) ^s
a 1 1	7	4	11	"	11'	$a = 4'4'$	3 $\varphi 1$ (1 χ' VII) ^s
a a a	7	4	12	"	11'	$a = 4'4'$	3 $\varphi 2$ (1 χ' VII) ^s
1 a a	7	4	13	"	11'	$a = 4'4'$	1 ($\varphi 5$) (1 χ' VII) ^s
a 1 1	7	4	14	"	14	$a = 1'4'$	3 $\varphi 2$ (1 χ' VII) ^s
a a a	7	4	15	"	14	$a = 1'4'$	3 $\varphi 1$ (1 χ' VII) ^s
a 1 1	7	4	16	"	14	$a = 1'4'$	1 ($\varphi 5$) (1 χ' VII) ^s
1 a a	8	8	1	7 χ VI	11'55	$a = 2'2'6'6'$	5 $\chi 1$ (3 χ VI) ^s
a a 1	8	8	2	"	11'55	$a = 2'2'6'6'$	4 ($\chi 2$) (3 χ VI) ^s
1 a a	8	8	3	"	12'56'	$a = 1'2'5'6'$	5 $\chi 3$ (7 VI) ^s
1 a a	8	8	4	"	1256	$a = 1'2'5'6'$	5 $\chi 2$ (3 φ'' VI) ^s
a 1 a	8	8	5	"	1256	$a = 1'2'5'6'$	4 ($\chi 1$) (3 φ'' VI) ^s
1 a a	8	8	6	6 χ VI	11'55'	$a = 4'4'8'8'$	2 ($\chi 4$) (3 χ VI) ^s
1 a a	8	8	7	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	2 ($\chi 4$) (3 χ VI) ^s
1 a a	8	8	8	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	4 $\chi 3$ (6 VI) ^s
1 a a	8	8	9	"	1458	$a = 1'4'5'8'$	2 ($\chi 3$) (3 φ' VI) ^s
1 a a	8	8	10	"	11'44'	$a = 5'5'8'8'$	2 ($\chi 3$) (3 φ' VI) ^s
a a a	8	8	1	6 χ VII	11'55'	$a = 2'2'6'6'$	2 ($\chi 4$) (3 χ VII) ^s
a a a	8	8	2	"	12'56'	$a = 1'2'5'6'$	4 $\chi 3$ (6 VII) ^s
a a a	8	8	3	"	1256	$a = 1'2'5'6'$	2 ($\chi 3$) (3 φ' VII) ^s
a 1 1	8	8	4	7 χ VII	11'55'	$a = 4'4'8'8'$	4 ($\chi 2$) (3 χ VII) ^s
a a a	8	8	5	"	11'55'	$a = 4'4'8'8'$	5 $\chi 1$ (3 χ VII) ^s
a 1 1	8	8	6	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	4 ($\chi 2$) (3 χ VII) ^s
a a a	8	8	7	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	4 ($\chi 2$) (3 χ VII) ^s
1 a a	8	8	8	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	5 $\chi 1$ (3 χ VII) ^s
a 1 1	8	8	9	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	5 $\chi 3$ (7 VII) ^s
a a a	8	8	10	"	14'5'8'	$a = 1'4'5'8'$	5 $\chi 3$ (7 VII) ^s
a 1 1	8	8	11	"	1458	$a = 1'4'5'8'$	4 ($\chi 1$) (3 φ'' VII) ^s
a a a	8	8	12	"	1458	$a = 1'4'5'8'$	5 $\chi 2$ (3 φ'' VII) ^s
a 1 1	8	8	13	"	11'44'	$a = 5'5'8'8'$	4 ($\chi 1$) (3 φ'' VII) ^s
a a a	8	8	14	"	11'44'	$a = 5'5'8'8'$	4 ($\chi 1$) (3 φ'' VII) ^s
1 a a	8	8	15	"	11'44'	$a = 5'5'8'8'$	5 $\chi 2$ (3 φ'' VII) ^s

IV. Tetragonale Syngonie.

1 a a	9	4	1	9 VI	15	$a = 3'7'$	(6) (3 VI) ^s
a a a	9	4	1	9 VII	15	$a = 3'7'$	(6) (3 VII) ^s
1 a a	10	8	1	9 φ VI	1256	$a = 3'4'7'8'$	6 ($\varphi 3$) (3 φ'' VI) ^s
1 a a	10	8	2	"	1458	$a = 2'3'6'7'$	6 ($\varphi 1$) (3 φ' VI) ^s
1 a a	10	8	3	"	1357	$a = 2'4'6'8'$	8 $\varphi 3$ (9 VI) ^s

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
aaa	10	8	1	9 φ VII	1256	$a=3478$	6(φ 1)(3 φ' VII) φ
aaa	10	8	2	"	1458	$a=2367$	6(φ 3)(3 φ'' VII) φ
aaa	10	8	3	"	1357	$a=2468$	8 φ 3(9VII) φ
1aa	11	8	1	3 π VI	15	$a=3'7'$	2 π (3VI) π
aaa	11	8	1	3 π VII	15	$a=3'7'$	2 π (3VII) φ
1aa	12	8	1	9 φ VI	11'55'	$a=33'77'$	6(χ 1)(3 χ VI) π
1aa	12	8	2	"	13'57'	$a=1'35'7$	6(χ 2)(3 π VI) π
1aa	12	8	3	"	1357	$a=1'3'5'7'$	8 χ 1(9VI) π
aaa	12	8	1	9 χ VII	11'55'	$a=33'77'$	6(χ 1)(3 χ VII) φ
aaa	12	8	2	"	13'57'	$a=1'35'7$	6(χ 2)(3 π VII) φ
aaa	12	8	3	"	1357	$a=1'3'5'7'$	8 χ 1(9VII) φ
1aa	13	8	1	11VI	12'56'	$a=34'78'$	(18)(7VI) π
1aa	13	8	2	"	14'58'	$a=2'36'7$	(8)(6VI) π
1aa	13	8	3	"	1357	$a=2'4'6'8'$	(7)(9VI) π
aaa	13	8	1	11VII	12'56'	$a=34'78'$	(8)(6VII) φ
aaa	13	8	2	"	14'58'	$a=2'36'7$	(18)(7VII) φ
aaa	13	8	3	"	1357	$a=2'4'6'8'$	(7)(9VII) φ
1aa	14	8	1	7 δ VI	12'56'	$a=3'47'8$	5 δ 3(7VI) π
1aa	14	8	2	"	1458	$a=2'3'6'7'$	5 δ 3(3 φ' VI) π
1aa	14	8	3	"	13'57'	$a=2'46'8$	5 δ 3(3 π VI) π
1aa	14	8	4	6 δ VI	14'58'	$a=23'67'$	4 δ 1(6VI) π
1aa	14	8	5	"	1256	$a=3'4'7'8'$	2(δ 1)(3 φ'' VI) π
1aa	14	8	6	"	13'57'	$a=24'68'$	2(δ 2)(3 π VI) π
aaa	14	8	1	6 δ VII	12'56'	$a=3'47'8$	4 δ 1(6VII) φ
aaa	14	8	2	"	1458	$a=2'3'6'7'$	2(δ 1)(3 φ'' VII) φ
aaa	14	8	3	"	13'57'	$a=2'46'8$	2(δ 2)(3 π VII) φ
aaa	14	8	4	7 δ VII	14'58'	$a=23'67'$	5 δ 3(7VII) φ
aaa	14	8	5	"	1256	$a=3'4'7'8'$	5 δ (3 φ' VII) φ
aaa	14	8	6	"	13'57'	$a=24'68'$	5 δ 3(3 π VII) φ
1aa	15	16	1	11 χ VI	11'2'2'5'5'6'6'	$a=33'44'77'88'$	18(χ 1)7 χ VI) π
1aa	15	16	2	"	11'4'4'5'5'8'8'	$a=22'33'66'77'$	8(χ 1)(6 χ VI) π
1aa	15	16	3	"	12345678	$a=1'2'3'4'5'6'7'8'$	7(χ 2)(9 φ VI) π
1aa	15	16	4	"	11'3'3'5'5'7'7'	$a=22'44'66'88'$	7(χ 3)(9 χ VI) π
1aa	15	16	5	"	12'3'4'5'6'7'8'	$a=1'23'45'67'8$	10 χ 3(11VI) π
1aa	15	16	6	"	12'3'4'5'6'7'8'	$a=1'234'5'67'8$	18(χ 4)(7 δ VI) π
1aa	15	16	7	"	123'4'5'6'7'8'	$a=1'2'345'6'7'8$	8(χ 3)(6 δ VI) π
aaa	15	16	1	11 χ VII	11'2'2'5'5'6'6'	$a=33'44'77'88'$	8(χ 1)(6 χ VII) φ
aaa	15	16	2	"	11'4'4'5'5'8'8'	$a=22'33'66'77'$	18(χ 1)(7 χ VII) φ
aaa	15	16	3	"	12345678	$a=1'2'3'4'5'6'7'8'$	7(χ 2)(9 φ VII) φ
aaa	15	16	4	"	11'3'3'5'5'7'7'	$a=22'44'66'88'$	7(χ 3)(9 χ VII) φ
aaa	15	16	5	"	12'3'4'5'6'7'8'	$a=1'23'45'67'8$	10 χ 3(11VII) φ
aaa	15	16	6	"	12'3'4'5'6'7'8'	$a=1'234'5'67'8$	8(χ 3)(6 δ VII) φ
aaa	15	16	7	"	123'4'5'6'7'8'	$a=1'2'345'6'7'8$	18(χ 4)(7 δ VII) φ

V. Hexagonale Syngonie.

aaa	17	6	1	13 φ VI	11 ₁ 1 ₂	$a=88_18_2$	13 φ 1(13VI) π
aaa	17	6	1	13 φ VII	11 ₁ 1 ₂	$a=88_18_2$	13 φ 1(13VII) φ
aaa	18	6	1	13 α VI	11 ₁ 1 ₂	$a=5'5'_15'_2$	13 α (13VI) π
aaa	18	6	1	13 α VII	11 ₁ 1 ₂	$a=5'5'_15'_2$	13 α (13VII) φ
aaa	19	6	1	16VI	11 ₁ 1 ₂	$a=4'4'_14'_2$	16(13VI) π
aaa	19	6	1	16VII	11 ₁ 1 ₂	$a=4'4'_14'_2$	16(13VII) φ
aaa	20	12	1	16 α VI	(18) ₃	$a=(4'5')_3$	16 α (13 φ VI) π
aaa	20	12	2	"	(15') ₃	$a=(5'8)_3$	16 α 1(16VI) π
aaa	20	12	3	"	(14') ₃	$a=(4'8)_3$	16 α 1(13 α VI) π
aaa	20	12	1	16 δ VII	(18) ₃	$a=(4'5')_3$	16 α (13 φ VII) φ
aaa	20	12	2	"	(15') ₃	$a=(5'8)_3$	16 α 1(16VII) φ
aaa	20	12	3	"	(14') ₃	$a=(4'8)_3$	16 α 1(13 α VII) φ

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

VI. Kubische Syngonie.

aaa	29	24	1	20 χ VII	$(1'2'5'6')_3$	$a = (1'2'5'6')_3$	19 χ 1 (20 VII) g
aaa	30	24	1	20 δ VII	$(1'2'5'6')_3$	$a = (3'4'7'8')_3$	19 δ 1 (20 VII) g
aaa	31	24	1	23 VII	$(1'2'5'6')_3$	$a = (3'4'7'8')_3$	(9) (20 VII) g
aaa	32	48	1	23 χ VII	$(11'22'55'66')_3$	$a = (3'3'4'4'7'7'8'8')_3$	9 (χ 1) (20 χ VII) g
aaa	32	48	2	"	$(12'3'45'6'7'8')_3$	$a = (1'2'3'4'5'6'7'8')_3$	9 (χ 2) (20 δ VII) g
aaa	32	48	3	"	$(12'3'4'56'7'8')_3$	$a = (1'2'3'4'5'6'7'8')_3$	22 χ 1 (23 VII) g

Hexa- und Heptaparalleloëder III. Ordnung.

aaa	16	3	1	13 VI	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1_2}{1_1}$	(10) (1 VI) $_r^s$
$a'a'a'$	16	3	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1_1}{1_2}$	(11) (1 VI) $_l^s$
aaa	16	3	1	13 VII	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1_2}{1_1}$	(10) (1 VII) $_r^c$
$a'a'a'$	16	3	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1_1}{1_2}$	(11) (1 VII) $_l^c$
aaa	19	6	1	16 VI	1'4'	$\frac{a}{a'} = \frac{1_2 \ 4_2'}{1_1 \ 4_1'}$	(12) (3 VI) $_r^s$
$a'a'a'$	19	6	2	"	1'4'	$\frac{a}{a'} = \frac{1_1 \ 4_1'}{1_2 \ 4_2'}$	(13) (3 VI) $_l^s$
aaa	19	6	1	16 VII	1'4'	$\frac{a}{a'} = \frac{1_2 \ 4_2'}{1_1 \ 4_1'}$	(12) (3 VII) $_r^c$
$a'a'a'$	19	6	2	"	1'4'	$\frac{a}{a'} = \frac{1_1 \ 4_1'}{1_2 \ 4_2'}$	(13) (3 VII) $_l^c$

Hexa- und Heptaparalleloëder IV. Ordnung.

II. Monokline Syngonie.

abc	5	4	1	3 χ VI	1	$a = 5' \ b = 5 \ c = 1'$	1 (χ 2) (1 VI)
abc	5	4	2	"	1	$a = 5 \ b = 5' \ c = 1'$	2 χ 1 (1 VI)
abc	5	4	3	"	1	$a = 1' \ b = 5' \ c = 5$	1 (χ 2) (1 VI) $'$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	5	4	4	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5'}{1'}$	1 (χ 2) (1 VI) $_{1'5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	5	4	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{5} \ b = 1'$	3 χ 1 (1 VI) $_{5'5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	5	4	6	"	1	$a = 1' \ \frac{b}{b'} = \frac{5}{5'}$	1 (χ 2) 1 VI) $_{5'5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} 1$	5	4	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{5'}$	3 χ 1 (1 VII) $_{5'5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	5	4	8	"	1	$a = 5 \ \frac{b}{b'} = \frac{1'}{5'}$	2 χ 1 (1 VII) $_{1'5'}$
$1bc$	5	4	9	3 χ VI'	1	$b = 5' \ c = 4$	2 χ 1 (1 VI) $'^c$
$1bc$	5	4	10	"	1	$b = 5' \ c = 8'$	1 (χ 2) (1 VI) $'^c$
$1bc$	5	4	11	"	1	$b = 4 \ c = 8'$	1 (χ 2) (1 VI) $'^{c'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	5	4	12	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5'}{8'}$	1 (χ 2) (1 VI) $'^c_{5'8'}$
$1 \frac{b}{b'} 1$	5	4	13	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5'}{8'}$	3 χ 1 (1 VI) $'^s_{5'8'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	5	4	14	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5'}{8'}$	1 (χ 2) (1 VI) $'^s_{5'8'}$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	5	4	15	3 χ VI'	1	$a = 8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{4}{5'}$	1 (χ 2) (1 VI') $_{4,5'}$
$1 \frac{b}{b'} c$	5	4	16	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{8'}{5'} \quad c = 4$	3 χ 1 (1 VI') $_{5,8'}$
$\frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	5	4	17	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{4}{5'} \quad a = 8'$	3 χ 1 (1 VI') $_{4,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	5	4	1	3 χ VII	1	$a = 5' \quad b = 1'$	2 χ 1 (1 VII) c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	5	4	2	"	1	$a = 5' \quad b = 5$	1 (χ 2) (1 VII) c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	5	4	3	"	1	$a = 5 \quad b = 1'$	1 (χ 2) (1 VII) c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	4	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{1'}$	1 (χ 2) (1 VII) $_{1,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	5	4	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{1'}$	3 χ 1 (1 VII) $_{1,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{1'}$	3 χ 1 (1 VII) $_{1,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	5	4	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{5'} \quad b = 1'$	3 χ 1 (1 VII) $_{5,5'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	5	4	7	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5'}{5'}$	3 χ 1 (1 VII) $_{5,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	5	4	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{5'}$	1 (χ 2) (1 VII) $_{5,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	9	3 χ VII'	1	$a = 5' \quad b = 4$	1 (χ 2) (1 VII') c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	10	"	1	$a = 5' \quad b = 8'$	2 χ 1 (1 VII') c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	11	"	1	$a = 4 \quad b = 5'$	1 (χ 2) (1 VII') c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	12	"	1	$a = 4 \quad b = 8'$	2 χ 1 (1 VII') c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	13	"	1	$a = 8' \quad b = 5'$	1 (χ 2) (1 VII') c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	14	"	1	$a = 8' \quad b = 4$	1 (χ 2) (1 VII') c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	15	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{8'}$	3 χ 1 (1 VII') $_{5,8'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	5	4	16	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5'}{8'}$	3 χ 1 (1 VII') $_{5,8'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	5	4	17	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{8'}$	3 χ 1 (1 VII') $_{5,8'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	5	4	18	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4}{5'}$	1 (χ 2) (1 VII') $_{4,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	5	4	19	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4}{5'} \quad b = 8'$	2 χ 1 (1 VII') $_{4,5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{c}{c'}$	5	4	20	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5'}{8'} \quad c = 4$	1 (χ 2) (1 VII') $_{5,8'}$

III. Rhombische Syngonie.

$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	6	4	1	7 VI	1	$a = 5 \quad b = 6' \quad c = 2'$	4 (1 VI $_7$)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	6	4	2	"	1	$a = 5 \quad b = 2' \quad c = 6'$	(2) (1 VI $_7$)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	6	4	3	"	1	$a = 2' \quad b = 5 \quad c = 6'$	(14) (1 VI $_7$)
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	6	4	4	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{2'}{6'}$	(4) (1 VI $_7$) $_{2,6'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'}$	6	4	5	"	1	$a = 5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{2'}{6'}$	6 (1 VI $_7$) $_{2,6'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'}$	6	4	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{6'} \quad c = 2'$	6 (1 VI $_7$) $_{5,6'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	6	4	7	6 VI	1	$\frac{b}{b'} = \frac{4'}{8'}$	(14) (1 VI $_6$) $_{4,8'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	6	4	8	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{8'}$	(14) (1 VI $_6$) $_{5,8'}$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a} \frac{a'}{a}$	6	4	1	6 VII	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{6'}$	(14) (1 VII ₆) _{2,6} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	2	7 VII	1	$a = 4' \quad b = 8'$	4 (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	3	"	1	$a = 8' \quad b = 4'$	(2) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	4	"	1	$a = 5 \quad b = 4'$	(14) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	5	"	1	$a = 5 \quad b = 8'$	(2) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a} \frac{a'}{a}$	6	4	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$	6 (1 VII ₆) _{4,8} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a} \frac{a'}{a}$	6	4	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{8'}$	(4) (1 VII ₆) _{4,8} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{1}{1} \frac{1}{1}$	6	4	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{5}$	(4) (1 VII ₆) _{4,5} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	6	4	9	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{5} \quad b = 8'$	6 (1 VII ₆) _{4,5} ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	7	4	1	3 φ'' VI	1	$a = 5 \quad b = 6 \quad c = 2$	2 φ 1 (1 VII ₇)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	7	4	2	"	1	$a = 5 \quad b = 2 \quad c = 6$	2 φ 4 (1 VI ₇)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	7	4	3	"	1	$a = 6 \quad b = 5 \quad c = 2$	1 (φ 3) (1 VI ₇)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	7	4	4	"	1	$a = 6 \quad c = 2 \quad b = 5$	1 (φ 4) (1 VI ₇)
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a} \frac{c}{c'}$	7	4	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{2}$	3 φ 3 (1 VI ₇) _{2,5} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{a'}{a}$	7	4	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{6} \quad c = 2$	3 φ' 2 (1 VI ₇) _{5,6}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b'}{b'}$	7	4	7	3 φ' VI	1	$a = 8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{4}{5}$	1 (φ 4) (1 VI ₆) _{4,5} ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b'}{b'}$	7	4	8	"	1	$a = 5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{4}{8}$	3 φ'' 1 (1 VI ₆) _{4,8}
$\frac{1}{1} \frac{b}{b'} \frac{b'}{b'}$	7	4	9	3 φ' VI'	1	$\frac{b}{b'} = \frac{1'}{8'}$	1 (φ 4) (1 VI ₆) _{1,8} ^s
$\frac{1}{1} \frac{b}{b'} \frac{b'}{b'}$	7	4	10	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{8}{8'}$	1 (φ 4) (1 VI ₆) _{8,8} ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b'}{b'}$	7	4	11	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{1'}{8'} \quad a = 8'$	3 φ 3 (1 VI ₆) _{1,8}
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	7	4	1	3 φ' VII	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{6}$	3 φ'' 1 (1 VII ₆) _{2,6}
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	7	4	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{5}$	1 (φ 4) (1 VII ₆) _{2,5} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	3	3 φ'' VII	1	$a = 8 \quad b = 5$	1 (φ 4) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	4	"	1	$a = 8 \quad b = 4$	2 φ 4 (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	5	"	1	$a = 4 \quad b = 5$	1 (φ 3) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	6	"	1	$a = 4 \quad b = 8$	2 φ 1 (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{1}{1} \frac{1}{1}$	7	4	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4}{5}$	3 φ 3 (1 VII ₇) _{4,5} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4}{5} \quad b = 8$	3 φ 2' (1 VII ₇) _{4,5}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	9	3 φ'' VII'	1	$a = 8 \quad b = 8'$	2 φ 5 (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	10	"	1	$a = 8 \quad b = 1'$	1 (φ 4) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	11	"	1	$a = 1' \quad b = 8$	1 (φ 3) (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	12	"	1	$a = 1' \quad b = 8'$	3 φ 1 (1 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	13	"	1	$a = 8' \quad b = 1'$	1 (φ 4) (1 VII ₇) ^{c'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	14	"	1	$a = 8' \quad b = 8$	1 (φ 4) (1 VII ₇) ^{c''}
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	7	4	15	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{8'}$	3 φ' 2 (1 VII ₇) _{1,8} ^s
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	7	4	16	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{8'}$	3 φ 3 (1 VII ₇) _{1,8} ^s
$\frac{1}{1} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	7	4	17	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{8}{8'}$	3 φ 3 (1 VII ₇) _{8,8} ^s

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
abc	8	8	1	7 χ VI	15'	$a = 1'5 \quad b = 2'6 \quad c = 2'6$	2 (χ 6) (1 π VI $_7$)
abc	8	8	2	"	15'	$a = 1'5 \quad b = 2'6 \quad c = 2'6$	4 χ 3 (1 π VI $_7$)
abc	8	8	3	"	15'	$a = 2'6 \quad b = 1'5 \quad c = 2'6$	14 (χ 2) (1 π VI $_7$)
abc	8	8	4	"	12'	$a = 5'6 \quad b = 5'6 \quad c = 1'2$	3 (χ 3) (3 VI $_7$)
abc	8	8	5	"	12'	$a = 5'6 \quad b = 1'2 \quad c = 5'6$	3 (χ 4) (3 VI $_7$)
abc	8	8	6	"	12'	$a = 5'6 \quad b = 1'2 \quad c = 5'6$	2 (χ 5) (3 VI $_7$)
$a \frac{a'}{a} b$	8	8	7	"	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{5'6}{5'6} \quad b = 1'2$	5 (χ 2) (3 VI $_7$) $_{5'5'}$
$\frac{a}{a'} 1 \frac{a}{a'}$	8	8	8	"	16'	$\frac{a}{a'} = \frac{2'5}{2'5}$	5 χ 3 (3 VI $_7$) $_{2'2'}$
abc	8	8	9	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 6'6' \quad c = 2'2'$	4 χ 1 (1 χ' VI $_7$)
abc	8	8	10	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 2'2' \quad c = 6'6'$	2 (χ 4) (1 χ' VI $_7$)
abc	8	8	11	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 5'5' \quad c = 2'2'$	2 (χ 2) (1 χ' VI $_7$)
abc	8	8	12	"	11'	$a = 6'6' \quad b = 2'2' \quad c = 5'5'$	14 (χ 1) (1 χ' VI $_7$)
$a \frac{a}{a'} 1 \frac{a}{a'}$	8	8	13	"	11'	$\frac{a}{a'} = \frac{5'5'}{2'2'}$	4 (χ 2) (1 χ' VI $_7$) $_{2'5'}$
$a \frac{a'}{a} b$	8	8	14	"	11'	$\frac{a}{a'} = \frac{5'5'}{6'6'} \quad b = 2'2'$	6 χ 1 (1 χ' VI $_7$) $_{5'6}$
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	15	6 χ VI	11'	$a = 8'8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{4'4'}{5'5'}$	14 (χ 1) (1 χ' VI $_6$) $_{4'5'}$
$\frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	16	"	18'	$a = 4'5' \quad \frac{b}{b'} = \frac{4'5'}{1'8'}$	7 χ 1 (3 VI $_6$) $_{1'4'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	17	"	15	$\frac{b}{b'} = \frac{1'5'}{4'8'}$	2 (χ 6) (3 VI $_6$) $_{1'4'}$
$a \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	18	"	15	$a = 4'8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{1'5'}{4'8'}$	7 χ 1 (3 VI $_6$) $_{1'4'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	19	"	14	$\frac{b}{b'} = \frac{1'4'}{5'8'}$	14 (χ 1) (1 χ' VI $_6$) $_{1'5'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	20	"	14	$\frac{b}{b'} = \frac{5'8'}{5'8'}$	14 (χ 1) (1 χ' VI $_6$) $_{5'5'}$
$1 \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	8	8	21	"	14'	$\frac{b}{b'} = \frac{5'8'}{5'8'}$	2 (χ 6) (3 VI $_6$) $_{5'5'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	1	6 χ VII	16'	$\frac{a}{a'} = \frac{2'5'}{1'6'}$	7 χ 1 (3 VII $_6$) $_{1'2}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	2	"	16'	$\frac{a}{a'} = \frac{2'5'}{2'5'}$	2 (χ 6) (3 VII $_6$) $_{2'2'}$
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	3	"	11'	$\frac{a}{a'} = \frac{2'2'}{5'5'}$	14 (χ 1) (1 χ' VII $_6$) $_{2'5'}$
abb	8	8	4	7 χ VII	15'	$a = 4'8' \quad b = 1'5$	2 (χ 6) (1 π VII $_7$) c
abb	8	8	5	"	15'	$a = 4'8' \quad b = 4'8'$	4 χ 3 (1 π VII $_7$) c
abb	8	8	6	"	15'	$a = 4'8' \quad b = 1'5$	14 (χ 2) (1 π VII $_7$) c
abb	8	8	7	"	15'	$a = 4'8' \quad b = 4'8'$	2 (χ 6) (1 π VII $_7$) c
abb	8	8	8	"	18'	$a = 1'8 \quad b = 4'5$	2 (χ 5) (3 VII $_7$) c
abb	8	8	9	"	14'	$a = 5'8 \quad b = 5'8'$	3 (χ 4) (3 VII $_7$) c
abb	8	8	10	"	18'	$a = 1'8 \quad b = 4'5'$	3 (χ 4) (3 VII $_7$) $^{c'}$
abb	8	8	11	"	18'	$a = 4'5' \quad b = 4'5'$	2 (χ 5) (3 VII $_7$) $^{c'}$
abb	8	8	12	"	14'	$a = 1'4 \quad b = 5'8'$	3 (χ 3) (3 VII $_7$) c
abb	8	8	13	"	18'	$a = 4'5' \quad b = 1'8$	3 (χ 3) (3 VII $_7$) $^{c'}$
abb	8	8	14	"	11'	$a = 8'8' \quad b = 5'5'$	14 (χ 1) (1 χ' VII $_7$) c
abb	8	8	15	"	11'	$a = 8'8' \quad b = 4'4'$	2 (χ 4) (1 χ' VII $_7$) c
abb	8	8	16	"	11'	$a = 4'4' \quad b = 5'5'$	2 (χ 2) (1 χ' VII $_7$) c
abb	8	8	17	"	11'	$a = 4'4' \quad b = 8'8'$	4 χ 1 (1 χ' VII $_7$) c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	18	"	11'	$\frac{a}{a'} = \frac{4'4'}{5'5'} \quad b = 8'8'$	6 χ 1 (1 χ' VII $_7$) $_{4'5'}$
$\frac{a}{a'} 1 1$	8	8	19	"	18'	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5'}{4'5'}$	5 χ 3 (3 VII $_7$) $_{4'4'}$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	20	7 χ VII	18'	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5}{4'5'}$ $b = 1'8$	5 (χ 2) (3 VII ₇) ₄₄ ^c
$\frac{a}{a'} 1 1$	8	8	21	"	11'	$\frac{a}{a'} = \frac{4'4'}{5'5'}$	4 (χ 2) (1 χ' VII ₇) ₄₅
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	22	"	15	$a = 4'8$ $b = 4'8'$	3 (χ 4) (3 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	23	"	15	$a = 4'8$ $b = 1'5'$	2 (χ 5) (3 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	24	"	15	$a = 1'5'$ $b = 4'8'$	3 (χ 3) (3 VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	25	"	14'	$a = 5'8$ $b = 5'8$	3 (χ 3) (3 VII ₇) ^{c''}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	26	"	14'	$a = 5'8$ $b = 1'4'$	3 (χ 3) (3 VII ₇) ^{c'''}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	27	"	14'	$a = 1'4'$ $b = 5'8$	3 (χ 4) (3 VII ₇) ^{c'''}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	28	"	14'	$a = 1'4'$ $b = 5'8'$	3 (χ 4) (3 VII ₇) ^{c'''}
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	29	"	14	$a = 5'8$ $b = 5'8'$	2 (χ 4) (1 χ' VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	30	"	14	$a = 5'8$ $b = 1'4'$	14 (χ 1) (1 χ' VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	31	"	14	$a = 1'4'$ $b = 5'8$	2 (χ 2) (1 χ' VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	32	"	14	$a = 1'4'$ $b = 5'8'$	4 χ 1 (1 χ' VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	33	"	14	$a = 5'8'$ $b = 1'4'$	2 (χ 2) (1 χ' VII ₇) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	34	"	14	$a = 5'8'$ $b = 5'8$	14 (χ 1) (1 χ' VII ₇) ^{c'}
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	35	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{4'8'}$	5 (χ 2) (3 VII ₇) ₁₄ ^{c'}
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	36	"	15	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'}{4'8'}$	5 χ 3 (3 VII ₇) ₁₄ ^s
$\frac{1}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	37	"	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{5'8}{5'8'}$	5 χ 3 (3 VII ₇) ₅₅ ^s
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	38	"	14	$\frac{a}{a'} = \frac{1'4'}{5'8'}$	2 (χ 2) (1 χ' VII ₇) ₁₅ ^c
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	39	"	14	$\frac{a}{a'} = \frac{1'4'}{5'8'}$	4 (χ 2) (1 χ' VII ₇) ₁₅ ^s
$\frac{1}{a'} \frac{a}{a'}$	8	8	40	"	14	$\frac{a}{a'} = \frac{5'8}{5'8'}$	4 (χ 2) (1 χ' VII ₇) ₅₅ ^s
$\frac{a}{a'} b b$	8	8	41	"	18	$\frac{a}{a'} = \frac{4'5}{4'5'}$ $b = 1'8$	6 χ 1 (1 χ' VII ₇) ₄₄ ^c

IV. Tetragonale Syngonie.

$\frac{a}{a'} b c$	9	4	1	9 VI	1	$a = 5$ $b = 7$ $c = 3$	(6) (1 VI)
$\frac{1}{b'} \frac{b}{b'}$	9	4	2	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7}{3}$	(15) (1 VI) _r ^s
$\frac{1}{b'} \frac{b}{b'}$	9	4	3	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{3}{7}$	(16) (1 VI) _l ^s
$\frac{a}{a'} b b$	9	4	1	9 VII	1	$a = 3$ $b = 7$	(6) (1 VII)
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	9	4	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{7}$	(15) (1 VII) _r ^s
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	9	4	3	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{3}$	(16) (1 VII) _l ^s
$\frac{a}{a'} b c$	10	8	1	9 φ VI	18	$a = 4'5$ $b = 6'7$ $c = 2'3$	6 (φ 2) (1 χ' VI)
$\frac{a}{a'} b c$	10	8	2	"	14	$a = 5'8$ $b = 2'7$ $c = 3'6$	6 (φ 3) (1 χ' VI)
$\frac{a}{a'} b b$	10	8	1	9 φ VII	12	$a = 3'4$ $b = 7'8$	6 (φ 2) (1 χ' VII) ^c
$\frac{a}{a'} b b$	10	8	2	"	16	$a = 3'8$ $b = 4'7$	6 (φ 3) (1 χ' VII) ^c
$\frac{a}{a'} b c$	11	4	1	3 π VI	1	$a = 5$ $b = 7'$ $c = 3'$	2 π (1 VI)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	11	4	2	"	1	$a = 5$ $\frac{b}{b'} = \frac{3'}{7'}$	3 π (1 VI) ₃₇ ^c
$\frac{a}{a'} b b$	11	4	1	3 π VII	1	$a = 3'$ $b = 7'$	2 π (1 VII) ^c
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	11	4	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3'}{7'}$	3 π (1 VII) ₃₇ ^c

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
abc	12	8	1	9 χ VI	15'	$a = 1'5' \quad b = 3'7' \quad c = 3'7'$	6 (χ 2) (1 π VI)
abc	12	8	2	"	11'	$a = 5'5' \quad b = 7'7' \quad c = 3'3'$	6 (χ 1) (1 χ' VI)
$b \overline{b}$	12	8	3	"	15	$b = 1'5' \quad \overline{b} = 3'7'$	6 (χ 2) (3 VII) _{1,3} ^s
$b \overline{b'}$	12	8	4	"	15	$a = 3'7' \quad b = 3'7' \quad \overline{b'} = 1'5'$	17 (χ 1) (3 VI) _{1,3}
abb	12	8	1	9 χ VII	15'	$a = 3'7' \quad b = 3'7'$	6 (χ 2) (1 π VII) ^c
abb	12	8	2	"	11'	$a = 3'3' \quad b = 7'7'$	6 (χ 1) (1 χ' VII) ^c
$a'a'a'$	12	8	3	"	15	$a = 1'5' \quad \overline{a'} = 3'7'$	6 (χ 2) (3 VII) _{1,3} ^s
$a'a'a'$	12	8	4	"	15	$a = 1'5' \quad \overline{a'} = 3'7'$	17 (χ 1) (3 VII) _{1,3}
abc	13	8	1	11 VI	18'	$a = 4'5' \quad b = 6'7' \quad c = 2'3'$	(8) (3 VI')
abc	13	8	2	"	14'	$a = 5'8' \quad b = 2'7' \quad c = 3'6'$	(18) (3 VI')
$b \overline{b}$	13	8	3	"	18'	$b = 6'7' \quad \overline{b} = 2'3'$	(19) (3 VI') _r ^s
$b \overline{b'}$	13	8	4	"	18'	$b = 2'3' \quad \overline{b'} = 6'7'$	(20) (3 VI') _i ^s
$b \overline{b}$	13	8	5	"	12'	$b = 7'8' \quad \overline{b} = 3'4'$	(23) (3 VI) _r ^s
$b \overline{b'}$	13	8	6	"	12'	$b = 3'4' \quad \overline{b'} = 7'8'$	(24) (3 VI) _i ^s
$b \overline{b}$	13	8	7	"	15	$b = 2'6' \quad \overline{b} = 4'8'$	(18) (3 VI) _{2,4} ^s
$a \overline{b'}$	13	8	8	"	15	$b = 2'6' \quad \overline{b'} = 3'7' \quad a = 4'8'$	(21) (3 VI) _{2,3}
abb	13	8	1	11 VII	12'	$a = 3'4' \quad b = 7'8'$	(8) (3 VII) ^c
abb	13	8	2	"	16'	$a = 3'8' \quad b = 4'7'$	(18) (3 VII) ^c
$a'a'a'$	13	8	3	"	12'	$a = 3'4' \quad \overline{a'} = 7'8'$	(19) (3 VII) _r ^s
$a'a'a'$	13	8	4	"	12'	$a = 7'8' \quad \overline{a'} = 3'4'$	(20) (3 VII) _i ^s
$a'a'a'$	13	8	5	"	18'	$a = 2'3' \quad \overline{a'} = 6'7'$	(23) (3 VII) _r ^s
$a'a'a'$	13	8	6	"	18'	$a = 6'7' \quad \overline{a'} = 2'3'$	(24) (3 VII) _i ^s
$a'a'a'$	13	8	7	"	15	$a = 4'8' \quad \overline{a'} = 2'6'$	(18) (3 VII) _{2,4} ^s
$a'a'a'$	13	8	8	"	15	$a = 4'8' \quad \overline{a'} = 3'7'$	(21) (3 VII) _{3,4} ^s
$b \overline{b}$	14	8	1	7 δ VI	12'	$a = 5'6' \quad b = 3'8' \quad \overline{b} = 4'7'$	5 (δ 1) (3 VI) _{3,4}
abc	14	8	2	"	14	$a = 5'8' \quad b = 2'7' \quad c = 3'6'$	2 (δ 1) (1 χ' VI')
abc	14	8	3	"	18	$a = 4'5' \quad b = 6'7' \quad c = 2'3'$	4 δ (1 χ' VI')
$a \overline{b'}$	14	8	4	"	14	$a = 5'8' \quad b = 3'6' \quad \overline{b'} = 2'7'$	6 δ (1 χ' VI') _{2,3} ^s
$b \overline{b}$	14	8	5	"	15	$b = 3'7' \quad \overline{b} = 2'6'$	5 δ 1 (3 VI) _{2,3} ^s
abc	14	8	6	6 δ VI	14'	$a = 5'8' \quad b = 2'7' \quad c = 3'6'$	5 δ 3 (3 VI')
abc	14	8	7	"	18'	$a = 4'5' \quad b = 2'3' \quad c = 6'7'$	5 δ 1 (3 VI')
$b \overline{b}$	14	8	8	"	15	$b = 3'7' \quad \overline{b} = 4'8'$	2 (δ 2) (3 VI) _{3,4} ^s
$a'a'a'$	14	8	1	7 δ VII	18'	$a = 6'7' \quad \overline{a'} = 2'3'$	5 (δ 1) (3 VII) _{2,6}

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
abb	14	8	2	7 δ VII	16	$a = 3'8' \quad b = 4'7'$	$2(\delta 1)(1\chi' VII)^c$
abb	14	8	3	"	12	$a = 3'4' \quad b = 7'8'$	$4\delta(1\chi' VII)^c$
aaa	14	8	4	"	12	$a = 7'8'$	$6\delta(1\chi' VII)_{4'8'}$
$a'a'a'$	14	8	5	"	15	$a' = 3'4'$	$5\delta 1(3 VII)_{3'4'}^s$
$a'a'a'$	14	8	6	6 δ VII	16'	$a = 3'8' \quad b = 4'7'$	$5\delta 3(3 VII)^c$
abb	14	8	7	"	12'	$a = 3'4' \quad b = 7'8'$	$5\delta 1(3 VII)^c$
$a'a'a'$	14	8	8	"	15	$a = 2'6'$	$2(\delta 2)(3 VII)_{2'3'}^s$
$a'a'a'$	15	16	1	11 χ VI	12'5'6'	$a = 1'4'5'8' \quad b = 2'3'6'7'$	$18(\chi 2)(3 \chi VI)$
abc	15	16	2	"	12'5'6'	$c = 2'3'6'7'$ $a = 1'4'5'8' \quad b = 2'3'6'7'$	$8(\chi 3)(3 \chi VI)$
abc	15	16	3	"	12'5'6'	$c = 2'3'6'7'$ $a = 2'3'6'7' \quad b = 2'3'6'7'$	$21(\chi 1)(6 VI)_{1'2'}$
$b'b'$	15	16	4	"	1256	$b' = 1'4'5'8'$ $a = 3'4'7'8' \quad b' = 1'2'5'6'$	$21(\chi 2)(3\varphi'' VI)_{1'3'}$
$b'b'$	15	16	5	"	1256	$b' = 3'4'7'8'$ $b' = 1'2'5'6'$	$18(\chi 2)(3\varphi'' VI)_{1'3'}^s$
$b'b'$	15	16	6	"	1458	$b = 2'3'6'7'$ $b' = 1'4'5'8'$	$18(\chi 4)(3\varphi' VI)_{1'2'}^s$
abc	15	16	7	"	11'44'	$a = 5'5'8'8' \quad b = 3'3'6'6'$	$8(\chi 1)(3\varphi' VI)$
abc	15	16	8	"	11'44'	$c = 2'2'7'7'$ $a = 5'5'8'8' \quad b = 2'2'7'7'$	$18(\chi 1)(3\varphi' VI)$
abc	15	16	9	11 χ VI	1357	$c = 3'3'6'6'$ $b = 1'3'5'7'$	$7(\chi 4)(9 VI)_{1'2'}^s$
$b'b'$	15	16	10	"	13'57'	$b' = 2'4'6'8'$ $b = 1'3'5'7'$	$21(\chi 1)(3\pi VI)_{1'2'}^s$
abb	15	16	1	11 χ VII	125'6'	$b' = 2'4'6'8'$ $a = 3'4'7'8' \quad b = 3'4'7'8'$	$18(\chi 2)(3\chi VII)^c$
abb	15	16	2	"	12'5'6'	$a = 3'4'7'8' \quad b = 3'4'7'8'$	$8(\chi 3)(3\chi VII)^c$
aaa	15	16	3	"	12'5'6'	$a = 1'2'5'6'$	$21(\chi 1)(6 VII)_{1'3'}$
$a'a'a'$	15	16	4	"	1458	$a' = 3'4'7'8'$ $a = 1'4'5'8'$	$21(\chi 2)(3\varphi'' VII)_{1'2'}$
$a'a'a'$	15	16	5	"	1458	$a' = 2'3'6'7'$ $a = 1'4'5'8'$	$18(\chi 2)(3\varphi'' VII)_{1'2'}^s$
$a'a'a'$	15	16	6	"	1256	$a' = 2'3'6'7'$ $a = 1'2'5'6'$	$18(\chi 4)(3\varphi' VII)_{1'3'}^s$
abb	15	16	7	"	11'22'	$a' = 3'4'7'8'$ $a = 3'3'4'4' \quad b = 7'7'8'8'$	$8(\chi 1)(3\varphi' VII)^c$
abb	15	16	8	"	11'66'	$a = 3'3'8'8' \quad b = 4'4'7'7'$	$18(\chi 1)(3\varphi' VII)^c$
$a'a'a'$	15	16	9	"	1357	$a = 2'4'6'8'$ $a' = 1'3'5'7'$	$7(\chi 4)(9 VII)_{1'2'}^s$
aaa	15	16	10	"	13'57'	$a = 2'4'6'8'$ $a' = 1'3'5'7'$	$21(\chi 1)(3\pi VII)_{1'2'}$

V. Hexagonale Syngonie.

aaa	20	12	1	16 α VI	11 ₁ 1 ₂	$a = 5'5_1'5_2'$ $a' = 4'4_1'4_2'$	$14\alpha 1(13 VI)_{4'5'}^s$
$a'a'a'$	20	12	2	16 α VII	11 ₁ 1 ₂	$a = 5'5_1'5_2'$ $a' = 4'4_1'4_2'$	$14\alpha 1(13 VII)_{4'5'}^s$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

VI. Kubische Syngonie.

$a a_1 a_2$	28	12	1	21 VI	$1 1_1 1_2$	$a = 2' 5_2 6_1', a_1 = 2_1' 5_1 6_2'$ $a_2 = 2_2' 5_4 6_3'$	(25) (13 VI)
$a a_1 a_2$	28	12	2	"	$1 1_1 1_2$	$a = 2_1' 5_1 6_2', a_1 = 2_2' 5_4 6_3'$ $a_2 = 2' 5_2 6_1'$	19 (13 VI)
$a a_1 a_2$	29	24	1	21 χ VI	$(1 5')_3$	$a = 1_2' 2_1' 2' 5_2 6_1'$ $a_1 = 1' 2_2 2_1' 5_1 6_2'$ $a_2 = 1_1' 2 2_2' 5_4 6_3'$	25 (χ 1) (13 α VI)
$a a_1 a_2$	29	24	2	"	$(1 5')_3$	$a = 1' 2_2 2_1' 5_1 6_2'$ $a_1 = 1_1' 2 2_2' 5_4 6_3'$ $a_2 = 1_2' 2_1' 2' 5_2 6_1'$	19 χ 1 (13 α VI)
$a a_1 a_2$	30	24	1	21 δ VI	$(1 8)_3$	$a = 2_1' 3_1' 4 5 6_2' 7_2'$ $a_1 = 2_2' 3_2' 4_1 5_1 6' 7'$ $a_2 = 2' 3' 4_2 5_2 6_1' 7_1'$	19 δ (13 φ VI)
$a a_1 a_2$	31	24	1	24 VI	$(1 4')_3$	$a = 2_1' 3_2 5_1 6_2' 7_1 8'$ $a_1 = 2_2' 3 5_1 6' 7_2 8_1'$ $a_2 = 2' 3_1 5_2 6_1' 7_2 8_2'$	(9) (16 VI)
$a a_1 a_2$	32	48	1	24 χ VI	$(1 4' 5' 8)_3$	$a = 1' 2_2 2_1' 3_2 3_1' 4 5_1 6_2' 7_1 7_2' 8'$ $a_1 = 1_1' 2 2_2' 3 3_2' 4_1 5_1 6_2' 7_2' 8_1'$ $a_2 = 1_2' 2_1' 2' 3_1' 3' 4_2 5_2 6_1' 7_1 7_2' 8_2'$	9 (χ 2) (16 α VI)

Hexa- und Heptaparalleloëder VI. Ordnung.

$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	19	6	1	16 VI	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{4_1'}$	(26) (1 VI) _r
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	19	6	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{4_2'}$	(27) (1 VI) _l
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	19	6	1	16 VII	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{4_1'}$	(26) (1 VII) _r
$\frac{a}{a'} \frac{a}{a'} \frac{a}{a'}$	19	6	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{4_2'}$	(27) (1 VII) _l

Hexa- und Heptaparalleloëder VIII. Ordnung.

III. Rhombische Syngonie.

$\frac{d}{b} \frac{b}{c} \frac{c}{c'}$	8	8	1	7 χ VI	1	$d = 1' \quad b = 2 \quad c = 6$	7 χ 1 (1 VI) ₇
$\frac{a}{b'} \frac{b}{c'} \frac{c}{c'}$	8	8	2	"	1	$a = 5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{2'}{5'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{6'}{1'}$	2 (χ 5) (1 VI) ₇ 2' 5'
$\frac{a}{b'} \frac{b}{c'} \frac{c}{c'}$	8	8	3	"	1	$a = 5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{6'}{5'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{2'}{1'}$	4 χ 2 (1 VI) ₇ 1' 2'
$\frac{a}{b'} \frac{b}{c'} \frac{c}{c'}$	8	8	4	"	1	$a = 6 \quad \frac{b}{b'} = \frac{6'}{5'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{1'}{2'}$	3 (χ 3) (1 VI) ₇ 1' 2'
$\frac{a}{b'} \frac{b}{c'} \frac{c}{c'}$	8	8	5	"	1	$a = 6 \quad \frac{b}{b'} = \frac{1'}{2'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{6'}{5'}$	14 (χ 2) (1 VI) ₇ 1' 2'
$\frac{a}{b'} \frac{b}{c'} \frac{c}{c'}$	8	8	6	"	1	$a = 2 \quad \frac{b}{b'} = \frac{6'}{2'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{5'}{1'}$	2 (χ 5) (1 VI) ₇ 1' 5'
$\frac{a}{b'} \frac{b}{c'} \frac{c}{c'}$	8	8	7	"	1	$a = 2 \quad \frac{b}{b'} = \frac{5'}{1'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{6'}{2'}$	2 (χ 6) (1 VI) ₇ 1' 5'

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{abc}{ab\bar{b}}$	8	8	1	6 χ VII	1	$a=8 \quad b=8' \quad c=4$	7 χ 1 (1 VI) ₆
$\frac{a'b'b'}{ab\bar{b}}$	8	8	2	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{4'}{5'}$	2 (χ 5) (1 VII) ₆ 1' 8'
$\frac{a'b'b'}{a'b\bar{b}}$	8	8	3	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{4'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{8'}{5'}$	4 χ 2 (1 VII) ₆ 1' 4'
$\frac{a'b'b'}{a'b\bar{b}}$	8	8	4	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{4'}{1'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{8'}{5'}$	3 (χ 3) (1 VII) ₆ 1' 4'
$\frac{a'b'b'}{a'b\bar{b}}$	8	8	5	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{8'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{1'}{4'}$	14 (χ 2) (1 VII) ₆ 1' 4'
$\frac{a'b'b'}{a'b\bar{b}}$	8	8	6	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{5'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{8'}{4'}$	2 (χ 5) (1 VII) ₆ 1' 5'
$\frac{a'b'b'}{a'b\bar{b}}$	8	8	7	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{8'}{4'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{1'}{5'}$	2 (χ 6) (1 VII) ₆ 1' 5'

IV. Tetragonale Syngonie.

$\frac{abc}{b\bar{c}}$	10	8	1	9 φ VI	1	$a=8 \quad b=7 \quad c=6$	17 (φ 2) (1 VI)
$\frac{a'b\bar{c}'}{b\bar{c}}$	10	8	2	"	1	$d=4 \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{6} \quad \frac{c}{c'}=\frac{3}{2}$	6 (φ 4) (1 VI) ₂ 3
$\frac{abc}{a'b\bar{b}'}$	10	8	1	9 φ VII	1	$a=3 \quad b=7 \quad c=4$	17 (φ 2) (1 VII)
$\frac{a'b\bar{b}'}{a'b\bar{b}'}$	10	8	2	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{4} \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{8}$	6 (φ 4) (1 VII) ₃ 4
$\frac{dbc}{b\bar{c}}$	12	8	1	9 χ VI	1	$d=1' \quad b=7' \quad c=3'$	6 (χ 2) (1 VI)
$\frac{d\bar{b}\bar{c}'}{b\bar{c}}$	12	8	2	"	1	$d=5' \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{3}{3'}$	6 (χ 2) (1 VI) ₃ 3'
$\frac{d\bar{b}\bar{c}'}{b\bar{c}}$	12	8	3	"	1	$d=5 \quad \frac{b}{b'}=\frac{7'}{1'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{3'}{5'}$	17 (χ 1) (1 VI) ₁ 7'
$\frac{abc}{a'b\bar{b}'}$	12	8	1	9 χ VII	1	$a=3 \quad b=7 \quad c=3'$	6 (χ 2) (1 VII)
$\frac{a'b\bar{b}'}{a'b\bar{b}'}$	12	8	2	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{3'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{7'}$	6 (χ 2) (1 VII) ₃ 3'
$\frac{a'b\bar{b}'}{a'b\bar{b}'}$	12	8	3	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{5'}{3'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{7'}{1'}$	17 (χ 1) (1 VII) ₁ 7'
$\frac{abc}{a'b\bar{c}'}$	13	8	1	11 VI	1	$d=8' \quad b=3 \quad c=7$	(21) (1 VI)
$\frac{a'b\bar{c}'}{a'b\bar{c}'}$	13	8	2	"	1	$a=5 \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{6'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{3}{2'}$	(18) (1 VI) ₂ 3
$\frac{a'b\bar{c}'}{a'b\bar{c}'}$	13	8	3	"	1	$a=4' \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{6'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{2'}{3}$	(19) (1 VI) _r
$\frac{a'b\bar{c}'}{a'b\bar{c}'}$	13	8	4	"	1	$a=8' \quad \frac{b}{b'}=\frac{3}{6'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{2'}{7}$	(20) (1 VI) _l
$\frac{a'b\bar{c}'}{a'b\bar{c}'}$	13	8	5	"	1	$a=8' \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{2'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{6'}{3}$	(23) (1 VI) _r
$\frac{a'b\bar{c}'}{a'b\bar{c}'}$	13	8	6	"	1	$a=4' \quad \frac{b}{b'}=\frac{3}{2'} \quad \frac{c}{c'}=\frac{6'}{7}$	(24) (1 VI) _l
$\frac{1 \quad b \quad b}{b\bar{b}'}$	13	8	7	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{6'}{8'}$	(23) (1 VI) _r ^s
$\frac{1 \quad b \quad b}{b\bar{b}'}$	13	8	8	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{6'}{4'}$	(24) (1 VI) _l ^s
$\frac{abc}{a'b\bar{b}'}$	13	8	1	11 VII	1	$a=3 \quad b=7 \quad c=8'$	(21) (1 VII)
$\frac{a'b\bar{b}'}{a'b\bar{b}'}$	13	8	2	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{4'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{8'}$	(18) (1 VII) ₃ 4'
$\frac{a'b\bar{b}'}{a'b\bar{b}'}$	13	8	3	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{3}{4'} \quad \frac{b}{b'}=\frac{7}{8'}$	(19) (1 VII) _r

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	13	8	4	11 VII	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{4'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{3}{8'}$	(20) (1 VII) _l
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	13	8	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{8'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{4'}$	(23) (1 VII) _r
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	13	8	6	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7}{8'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{3}{4'}$	(24) (1 VII) _l
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'} \frac{a'}{a'}$	13	8	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{6'}{4'}$	(23) (1 VII) _r ^s
$\frac{a}{a'} \frac{a'}{a'} \frac{a'}{a'}$	13	8	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{6'}{8'}$	(24) (1 VII) _l ^s
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	1	7 δ VI	1	$d = 4 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{2'}$	7 δ 1 (1 VI) _l
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	2	"	1	$d = 4 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{2'}$	5 δ 2 (1 VI) _l _{2 3'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	3	"	1	$d = 5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{2'}$	4 δ 1 (1 VI) _l _{2 3'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	4	"	1	$d = 5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{2'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{6'}$	2 (δ 2) (1 VI) _l _{2 7'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	5	6 δ VI	1	$d = 8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{2'}$	5 (δ 1) (1 VI) ₆
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	6	"	1	$d = 4' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{2'}$	2 (δ 2) (1 VI) ₆ _{2 3'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	14	8	1	7 δ VII	1	$d = 4' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'}{2'}$	7 δ 1 (1 VII) _l
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	14	8	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3'}{4'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$	5 δ 2 (1 VII) _l _{3 4'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	14	8	3	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{3'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$	4 δ 1 (1 VII) _l _{3 4'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	14	8	4	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{8'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{4'}{3'}$	2 (δ 2) (1 VII) _l _{3 4'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	14	8	5	6 δ VII	1	$a = 8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{6'} \quad c = 4$	5 (δ 1) (1 VII) ₆
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	14	8	6	"	1	$a = \frac{3'}{4'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$	2 (δ 2) (1 VII) ₆ _{3 4'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	1	11 χ VI	15'	$a = 4'8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{3'7}{6'6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{2'6}{2'7'}$	21 (χ 1) (1 π VI)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	1	"	18	$a = 4'5 \quad \frac{b}{b'} = \frac{6'7'}{3'6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{2'8'}{2'3'}$	21 (χ 2) (1 χ' VI')
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	1	"	18'	$a = 1'8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{2'3'}{3'6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{2'7}{2'7'}$	21 (χ 1) (3 VI')
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	4	11 χ VI	14'	$a = 5'8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{3'6'}{3'6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{2'7}{2'7'}$	8 (χ 4) (3 VI') _{2 2'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	4	"	11'	$a = 5'5' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'7'}{6'6'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'3'}{2'2'}$	18 (χ 3) (1 χ' VI) _{2 3}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	1	11 χ VII	15'	$a = 3'7' \quad \frac{b}{b'} = \frac{3'7}{4'7'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{4'8'}{3'8'}$	21 (χ 1) (1 π VII)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	2	"	16	$a = 3'8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{4'7}{4'7'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'8'}{3'8'}$	21 (χ 2) (1 χ' VII)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{c}{c'}$	15	16	3	"	16'	$a = 4'7 \quad \frac{b}{b'} = \frac{4'7'}{4'7'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{3'8'}{3'8'}$	21 (χ 1) (3 VII)
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	15	16	4	"	14'	$\frac{a}{a'} = \frac{3'4}{3'4'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'8}{7'8'}$	8 (χ 4) (3 VII) _{3 3'}
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} \frac{b}{b'}$	15	16	5	"	11'	$\frac{a}{a'} = \frac{3'3'}{4'4'} \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'7'}{8'8'}$	18 (χ 3) (1 χ' VII) _{3 4}

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
VI. Kubische Syngonie.							
$d a_1 a_2$	29	24	1	21 χ VI	1 1 ₁ 1 ₂	$d = 1' 2_2 6_1 \quad a_1 = 2_2' 5_1 6'$ $a_2 = 2' 5_2 6_1'$	21 χ 1 (13 VI)
$d a_1 a_2$	30	24	1	21 δ VI	1 1 ₁ 1 ₂	$d = 3_1' 4_2 7_2' \quad a_1 = 2_2' 5_1 6'$ $a_2 = 2' 5_2' 6_1'$	21 δ 1 (13 VI)
$d a_1 a_2$	31	24	1	24 VI	1 1 ₁ 1 ₂	$d = 3_2 7_1 8' \quad a_1 = 2' 5_2 6_1'$ $a_2 = 2' 5_2 6_1'$	(38) (13 VI)
$d a_1 a_2$	32	48	1	24 χ VI	(1 5') ₃	$a = 1' 2_2 2_1' 5_1 6_2'$ $a_1 = 1_1' 2_2 2_1' 5_1 6_2'$	(38) (χ 2) (13 α VI)
$d a_1 a_2$	32	48	2	„	(1 8) ₃	$a_2 = 1_2' 2_1' 2' 5_2 6_1'$ $a = 2_1' 3_1' 4_2 5_2 6_2' 7_2'$ $a_1 = 2_2' 3_2' 4_1 5_1 6' 7'$	(38) (χ 1) (13 φ VI)
$a a_1 a_2$	30	24	1	20 δ VII	1 1 ₁ 1 ₃	$a_2 = 2' 3' 4_2 5_2 6_1' 7_1'$ $a = 3_2' 4_1 7' \quad a_1 = 3' 4_2 7_1'$	22 (δ 1) (13 VII)
$a a_1 a_2$	31	24	1	23 VII	1 1 ₁ 1 ₂	$a_2 = 3_1' 4_2 7_2'$ $a = 3_2 7_2 8_1' \quad a_1 = 3_1' 7_2 8'$	(39) (13 VII)
$a a_1 a_2$	32	48	1	23 χ VII	(1 5') ₃	$a_2 = 3_2 7_1 8'$ $a = 3_2 3_2' 4_1 7_2 7' 8_1'$ $a_1 = 3_1' 3' 4_2 7_2 7_1' 8_2'$ $a_2 = 3_2 3_1' 4_1 7_1 7_2' 8'$	39 (χ 1) (13 α VII)

66. Was die Auffindung der Tetraparalleloëdersysteme betrifft, so ist dieselbe für alle Symmetriearten, ausser den hexagonalen, durch die nahe Analogie mit Triparalleloëdersystemen in äusserstem Grade vereinfacht, so dass diese Auffindung fast als eine Wiederholung zu betrachten wäre. Dieselben Symmetriearten werden aber jetzt durch andere charakteristische Zahlen ausgedrückt, und zwar anstatt 5 muss man jetzt 7, anstatt 5' — 7', anstatt 2 und 6 2 und 8 und anstatt 2' und 6' 2' und 8' setzen. Aus dem Standpunkte der Lehre von der scheinbaren Symmetrie sind aber jetzt die Symmetrieelemente 2' und 8', 2 und 8 absolut von einander zu unterscheiden, und zwar desswegen, weil 8' und 8 senkrecht zu Schichten sind, welche durch 2' und 2 bedingt werden können. Aus diesem Grunde erscheinen die meisten Triparalleloëdersysteme der monoklinen Syngonie und diejenigen des Typus 5 III der rhombischen in Doppelzahl. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn Symmetrieelemente vorhanden sind, durch welche das Zustandekommen beider in gleicher Form (central resp. schneidend) bedingt sind.

Es bleiben also speciell die Systeme der hexagonalen Syngonie zu besprechen.

Der leitende Hauptsatz bei dieser Auffindung ist der, dass die der singulären Ebene parallelen Schichten entweder I. oder III. Ordnung sein können. Um den Beweis dafür zu erbringen, braucht man nur darauf hinzuweisen, dass den Grenzflächen der singulären Zone ausschliesslich 5 und 9 zukommen und sämtliche andere ausgeschlossen sind. Diese Zahlen weisen auf die peripherisch auftretende 3-zählige Symmetrieaxe hin; die Zahlen 3, 3', 7, 7', 11, 11' würden auf die explicit auftretende 6-zählige Symmetrieaxe oder auf die Axe der zusammengesetzten Symmetrie I. Art hinweisen (was direct aus dem 1. Satze, § 13, I. Theil folgt); die Zahlen 1', 5' und 9' würden auf das explicite Auftreten der 6-zähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie II. Art hinweisen. Was endlich die Symmetrieelemente 2, 2', 4, 4', 6, 6', 8, 8', 10, 10', 12 und 12' betrifft, so kann keines von denselben als peri-

pherisches Verbandsymmetrieelement auftreten, sondern nur entweder als centrales oder als schneidendes, also nicht in der Form von Symmetrieebenen oder Symmetrieebenen, sondern in der Form 2-zähliger Schraubenaxen oder Gleitebenen. Dieselben bedingen aber die Entstehung der Columnen der Reihen I. oder II. Ordnung. Bei der Anwesenheit eines von diesen Verbandsymmetrieelementen müssen also in der singulären Schicht und zwar in jeder derselben angehörenden Colonne oder Reihe die Glieder des aus gleich orientirten Einheiten zusammengesetzten Netzes anwesend sein; somit kann jede Colonne und jede Reihe dieser Schicht mit der anliegenden parallelen Colonne resp. Reihe durch einfache Translation verbunden sein; das resultirende Symmetrieelement der 2-zähligen Schraubenaxe oder Gleitebene mit dieser Translation würde aber den Sätzen § 13, I. Theil gemäss eine 2-zählige Symmetrieaxe resp. Symmetrieebene gewesen sein. Dieselben werden aber, wie eben hingewiesen, als Elemente der Verbandsymmetrie ausgeschlossen.

Auf diesem Satze fussend, schliessen wir, dass sämtliche Systeme II. und IV. Ordnung nothwendig Schichtsysteme sind, welche aber sehr leicht nach der Ordnung der auftretenden Symmetrieelemente erschöpfend aufzufinden sind. Von denselben zeichnen sich diejenigen II. Ordnung durch phanerotopische singuläre Columnen aus, während in den Systemen IV. Ordnung die Gleitebene resp. die nicht polare 6-zählige Schraubenaxe dieser Columnen kryptotopisch auftritt. In den Systemen III. Ordnung tritt die polare 3-zählige Schraubenaxe central auf. In den Systemen VI. Ordnung tritt dieselbe Axe kryptotopisch auf (was auch im Falle der central auftretenden polaren 6-zähligen Schraubenaxe angenommen werden kann). In den Systemen XII. Ordnung tritt nothwendig die polare 6-zählige Schraubenaxe kryptotopisch auf. Schichtsysteme von noch höherer Ordnung kann es natürlich nicht geben, und selbst bei den Systemen XII. Ordnung sind die Elemente der geraden Symmetrie ausgeschlossen, und es bleibt somit allein die 25. Symmetrieart zulässig.

In den Systemen, welche nicht Schichtsysteme sind, tritt die 3-zählige Symmetrieaxe (resp. 6-zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie II. Art) peripherisch auf.

Es bleibt zu erwähnen übrig, dass die 6-zählige Symmetrieaxe gar nicht peripherisch auftreten kann, während die 6-zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie I. Art lediglich peripherisch in Bezug auf die Grenzfläche a (also halbperipherisch) auftritt.

Wegen der anschaulichen Charakteristik der Systeme werden in den Symbolen die Buchstaben s , v , c und h eingeführt, von welchen der erste die horizontalen Schichten, der zweite die verticalen Schichten, der dritte die verticalen Columnen und der vierte die horizontalen Columnen bezeichnet.

VI. Tetraparalleloëder II. und höherer Ordnung.

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

Tetraparalleloëder II. Ordnung.

I. Triklone Syngonie.

$a\ 1\ 1$	2	2	1	$1\pi\ IV$	1	$a = 7'$	$1\pi\ (1\ IV)^s$
$1\ a\ a$	2	2	2	"	1	$a = 7'$	$1\pi\ (1\ IV)^v$
$a\ a\ a$	2	2	3	"	1	$a = 7'$	$1\pi\ (1\ IV)^h$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

II. Monokline Syngonie.

a11	3	2	1	2 IV	1	$a = 7$	(1) (1 IV ₂) ^s
1aa	3	2	2	"	1	$a = 7$	2 (1 IV ₂) ^r
aaa	3	2	3	"	1	$a = 7$	3 (1 IV ₂) ^h
a11	3	2	4	3 IV	1	$a = 2'$	3 (1 IV ₃) ^s
1a1	3	2	5	"	1	$a = 2'$	(1) (1 IV ₃) ^r
aa1	3	2	6	"	1	$a = 2'$	3 (1 IV ₃) ^h
a11	3	2	7	3 IV'	1	$a = 8'$	3 (1 IV ₃ ') ^s
1a1	3	2	8	"	1	$a = 8'$	(1) (1 IV ₃ ') ^r
aa1	3	2	9	"	1	$a = 8'$	3 (1 IV ₃ ') ^h
a11	4	2	1	1 χ IV	1	$a = 1'$	1 χ (1 IV ₂) ^s
1aa	4	2	2	"	1	$a = 1'$	1 χ 1 (1 IV ₂) ^r
aaa	4	2	3	"	1	$a = 1'$	1 χ ' (1 IV ₂) ^h
a11	4	2	4	1 χ ' IV	1	$a = 8$	1 χ 1 (1 IV ₃) ^s
1a1	4	2	5	"	1	$a = 8$	1 χ 1 (1 IV ₃) ^r
aa1	4	2	6	"	1	$a = 8$	1 χ ' 1 (1 IV ₃) ^h
a11	4	2	7	"	1	$a = 2$	1 χ 1 (1 IV ₃ ') ^s
1a1	4	2	8	"	1	$a = 2$	1 χ 1 (1 IV ₃ ') ^r
aa1	4	2	9	"	1	$a = 2$	1 χ ' 1 (1 IV ₃ ') ^h
a11	5	4	1	2 χ IV	17'	$a = 1'7$	1 (χ 1) (1 π IV ₂) ^s
1aa	5	4	2	"	17'	$a = 1'7$	2 χ 1 (1 π IV ₂) ^r
aaa	5	4	3	"	17'	$a = 1'7$	3 χ (1 π IV ₂) ^h
a11	5	4	4	"	17	$a = 1'7'$	2 χ (2 IV ₂) ^s
1aa	5	4	5	"	17	$a = 1'7'$	3 χ 1 (2 IV ₂) ^r
aaa	5	4	6	"	17	$a = 1'7'$	3 χ (2 IV ₂) ^h
a11	5	4	7	"	11'	$a = 7'7'$	1 (χ 1) (1 χ IV ₂) ^s
1aa	5	4	8	"	11'	$a = 7'7'$	2 χ (1 χ IV ₂) ^r
aaa	5	4	9	"	11'	$a = 7'7'$	3 χ (1 χ IV ₂) ^h
a11	5	4	10	3 χ IV	17'	$a = 2'8$	2 χ 1 (1 π IV ₂) ^s
1a1	5	4	11	"	17'	$a = 2'8$	1 (χ 2) (1 π IV ₃) ^r
aa1	5	4	12	"	17'	$a = 2'8$	3 χ 1 (1 π IV ₃) ^h
a11	5	4	13	"	12'	$a = 7'8$	3 χ 1 (3 IV ₃) ^s
1a1	5	4	14	"	12'	$a = 7'8$	2 χ 1 (3 IV ₃) ^r
aa1	5	4	15	"	12'	$a = 7'8$	3 χ 1 (3 IV ₃) ^h
a11	5	4	16	"	18	$a = 2'7'$	3 χ (1 χ ' IV ₃) ^s
1a1	5	4	17	"	18	$a = 2'7'$	1 (χ 1) (1 χ ' IV ₃) ^r
aa1	5	4	18	"	18	$a = 2'7'$	3 χ (1 χ ' IV ₃) ^h
a11	5	4	19	3 χ IV'	17'	$a = 2'8'$	3 χ 1 (1 π IV ₃) ^s
1a1	5	4	20	"	17'	$a = 2'8'$	1 (χ 2) (1 π IV ₃) ^r
aa1	5	4	21	"	17'	$a = 2'8'$	3 χ 1 (1 π IV ₃) ^h
a11	5	4	22	"	18'	$a = 2'7'$	3 χ 1 (3 IV ₃ ') ^s
1a1	5	4	23	"	18'	$a = 2'7'$	2 χ 1 (3 IV ₃ ') ^r
aa1	5	4	24	"	18'	$a = 2'7'$	3 χ 1 (3 IV ₃ ') ^h
a11	5	4	25	"	12	$a = 7'8'$	3 χ (1 χ ' IV ₃ ') ^s
1a1	5	4	26	"	12	$a = 7'8'$	1 (χ 1) (1 χ ' IV ₃ ') ^r
aa1	5	4	27	"	12	$a = 7'8'$	3 χ (1 χ ' IV ₃ ') ^h

III. Rhombische Syngonie.

a11	6	4	1	5 IV	17	$a = 2'8'$	5 (2 IV) ^s
1a1	6	4	2	"	17	$a = 2'8'$	(2) (2 IV) ^r
aa1	6	4	3	"	17	$a = 2'8'$	6 (2 IV) ^h
a11	6	4	4	"	12	$a = 7'8'$	(4) (3 IV) ^s
1a1	6	4	5	"	12'	$a = 7'8'$	(3) (3 IV) ^r
aa1	6	4	6	"	12'	$a = 7'8'$	(5) (3 IV) ^h

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
a11	6	4	7	5 IV	18'	$a = 2'7$	(4) (3 IV') ^s
1a1	6	4	8	"	18'	$a = 2'7$	(3) (3 IV') ^v
aa1	6	4	9	"	18'	$a = 2'7$	(5) (3 IV') ^h
a11	7	4	1	2 φ' IV	17	$a = 28$	2 $\varphi' 1$ (3 IV ₂) ^s
1a1	7	4	2	"	17	$a = 28$	2 $\varphi' 5$ (3 IV ₂) ^v
aa1	7	4	3	"	17	$a = 28$	3 $\varphi' 2$ (3 IV ₂) ^h
a11	7	4	4	"	12	$a = 78$	1 ($\varphi' 5$) (1 χ' IV ₂) ^s
1a1	7	4	5	"	12	$a = 78$	2 $\varphi' 2$ (1 χ' IV ₂) ^v
aa1	7	4	6	"	12	$a = 78$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₂) ^h
a11	7	4	7	"	18	$a = 27$	1 ($\varphi' 5$) (1 χ' IV ₂) ^s
1a1	7	4	8	"	18	$a = 27$	2 $\varphi' 2$ (1 χ' IV ₂) ^v
aa1	7	4	9	"	18	$a = 27$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₂) ^h
a11	7	4	10	3 φ IV	18'	$a = 1'8$	3 $\varphi' 2$ (3 IV ₃) ^s
1a1	7	4	11	"	18'	$a = 1'8$	2 $\varphi' 3$ (3 IV ₃) ^v
aa1	7	4	12	"	18'	$a = 1'8$	3 $\varphi' 1$ (3 IV ₃) ^h
a11	7	4	13	"	11'	$a = 88'$	3 $\varphi' 2$ (1 χ' IV ₃) ^s
1a1	7	4	14	"	11'	$a = 88'$	1 ($\varphi' 1$) (1 χ' IV ₃) ^v
aa1	7	4	15	"	11'	$a = 88'$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₃) ^h
a11	7	4	16	"	18	$a = 1'8'$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₃) ^s
1a1	7	4	17	"	18	$a = 1'8'$	1 ($\varphi' 2$) (1 χ' IV ₃) ^v
aa1	7	4	18	"	18	$a = 1'8'$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₃) ^h
a11	7	4	19	3 φ IV'	12'	$a = 1'2$	3 $\varphi' 2$ (3 IV ₃) ^s
1a1	7	4	20	"	12'	$a = 1'2$	2 $\varphi' 3$ (3 IV ₃) ^v
aa1	7	4	21	"	12'	$a = 1'2$	3 $\varphi' 1$ (3 IV ₃) ^h
a11	7	4	22	"	11'	$a = 22'$	3 $\varphi' 2$ (1 χ' IV ₃) ^s
1a1	7	4	23	"	11'	$a = 22'$	1 ($\varphi' 1$) (1 χ' IV ₃) ^v
aa1	7	4	24	"	11'	$a = 22'$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₃) ^h
a11	7	4	25	"	12	$a = 1'2'$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₃) ^s
1a1	7	4	26	"	12	$a = 1'2'$	1 ($\varphi' 2$) (1 χ' IV ₃) ^v
aa1	7	4	27	"	12	$a = 1'2'$	3 $\varphi' 1$ (1 χ' IV ₃) ^h
a11	8	8	1	5 χ IV	11'77'	$a = 22'88'$	5 $\chi' 1$ (2 χ' IV) ^s
1a1	8	8	2	"	11'77'	$a = 22'88'$	2 ($\chi' 1$) (2 χ' IV) ^v
aa1	8	8	3	"	11'77'	$a = 22'88'$	6 $\chi' 1$ (2 χ' IV) ^h
a11	8	8	4	"	12'7'8	$a = 1'278'$	4 ($\chi' 1$) (3 χ' IV) ^s
1a1	8	8	5	"	12'7'8	$a = 1'278'$	3 ($\chi' 2$) (3 χ' IV) ^v
aa1	8	8	6	"	12'7'8	$a = 1'278'$	5 ($\chi' 1$) (3 χ' IV) ^h
a11	8	8	7	"	12'7'8'	$a = 1'2'78$	4 ($\chi' 1$) (3 χ' IV) ^s
1a1	8	8	8	"	12'7'8'	$a = 1'2'78$	3 ($\chi' 2$) (3 χ' IV) ^v
aa1	8	8	9	"	12'7'8'	$a = 1'2'78$	5 ($\chi' 1$) (3 χ' IV) ^h
a11	8	8	10	"	12'78'	$a = 1'27'8$	5 $\chi' 1$ (5 IV) ^s
1a1	8	8	11	"	12'78'	$a = 1'27'8$	4 $\chi' 2$ (5 IV) ^v
aa1	8	8	12	"	12'78'	$a = 1'27'8$	6 $\chi' 1$ (5 IV) ^h
a11	8	8	13	"	1278	$a = 1'2'7'8'$	5 $\chi' 1$ (3 φ' IV) ^s
1a1	8	8	14	"	1278	$a = 1'2'7'8'$	2 ($\chi' 3$) (3 φ' IV) ^v
aa1	8	8	15	"	1278	$a = 1'2'7'8'$	6 $\chi' 1$ (3 φ' IV) ^h
a11	8	8	16	"	11'22'	$a = 77'88'$	4 ($\chi' 1$) (3 φ' IV) ^s
1a1	8	8	17	"	11'22'	$a = 77'88'$	3 ($\chi' 1$) (3 φ' IV) ^v
aa1	8	8	18	"	11'22'	$a = 77'88'$	5 ($\chi' 1$) (3 φ' IV) ^h
a11	8	8	19	"	11'88'	$a = 22'77'$	4 ($\chi' 1$) (3 φ' IV) ^s
1a1	8	8	20	"	11'88'	$a = 22'77'$	3 ($\chi' 1$) (3 φ' IV) ^v
aa1	8	8	21	"	11'88'	$a = 22'77'$	5 ($\chi' 1$) (3 φ' IV) ^h

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	

V. Hexagonale Syngonie.

a 11	17	6	1	12 φ IV	159	$a = 4812$	12 φ 1 (12 IV) ^s
a 11	17	6	2	12 φ' IV	159	$a = 2610$	12 φ' 1 (12 IV) ^s
a 11	18	6	1	12 α IV	159	$a = 3'7'11'$	12 α (12 IV) ^s
a 11	19	6	1	14 IV	159	$a = 2'6'10'$	14 (12 IV) ^s
a 11	19	6	2	15 IV	159	$a = 4'8'12'$	15 (12 IV) ^s
a 11	20	12	1	14 α IV	1458912	$a = 2'3'6'7'10'11'$	14 α (12 φ IV) ^s
a 11	20	12	2	"	13'57'911'	$a = 2'4'6'8'10'12'$	14 α 1 (12 α IV) ^s
a 11	20	12	3	"	12'56'910'	$a = 3'4'7'8'11'12'$	14 α 1 (14 IV) ^s
a 11	20	12	4	15 α IV	1256910	$a = 3'4'7'8'11'12'$	15 α (12 φ IV) ^s
a 11	20	12	5	"	13'57'911'	$a = 2'4'6'8'10'12'$	15 α 1 (12 α IV) ^s
a 11	20	12	6	"	14'58'912'	$a = 2'3'6'7'10'11'$	15 α 1 (15 IV) ^s
a 11	21	6	1	17 IV	159	$a = 3711$	(28) (12 IV) ^s
a 11	22	12	1	17 φ IV	1357911	$a = 24681012$	17 φ 1 (17 IV) ^s
a 11	22	12	2	"	1458912	$a = 23671011$	28(φ 1) (12 φ IV) ^s
a 11	22	12	3	"	1256910	$a = 34781112$	28(φ 2) (12 φ' IV) ^s
a 11	23	6	1	12 π IV	159	$a = 1'5'9'$	12 π (12 IV) ^s
a 11	24	12	1	17 χ IV	13'57'911'	$a = 1'3'5'7'9'11'$	28(χ 1) (12 α IV) ^s
a 11	24	12	2	"	1357911	$a = 1'3'5'7'9'11'$	17 χ (17 IV) ^s
a 11	24	12	3	"	11'55'99'	$a = 33'77'11'11'$	28(χ 1) (12 π IV) ^s
a 11	25	12	1	18 IV	12'56'910'	$a = 34'78'11'12'$	(33) (14 IV) ^s
a 11	25	12	2	"	14'58'912'	$a = 2'3'6'7'10'11'$	(33) 15 IV) ^s
a 11	25	12	3	"	1357911	$a = 2'4'6'8'10'12'$	18 (17 IV) ^s
a 11	26	12	1	14 π IV	12'56'910'	$a = 1'2'5'6'9'10'$	14 π 1 (14 IV) ^s
a 11	26	12	2	"	1256910	$a = 1'2'5'6'9'10'$	14 π (12 φ' IV) ^s
a 11	26	12	3	"	11'55'99'	$a = 22'66'1010'$	14 π 1 (12 π IV) ^s
a 11	26	12	4	15 π IV	14'58'912'	$a = 1'4'5'8'9'12'$	15 π 1 (15 IV) ^s
a 11	26	12	5	"	1458912	$a = 1'4'5'8'9'12'$	15 π (12 φ IV) ^s
a 11	26	12	6	"	11'55'99'	$a = 44'88'1212'$	15 π (12 π IV) ^s
a 11	27	24	1	18 χ IV	12'3'4'5'6'7'	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'9'10'$	33(χ 1) (14 α IV) ^s
					8910'11'12'	11 12'	
a 11	27	24	2	"	123'4'5'6'7'8'	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'9'10'$	33(χ 2) (15 α IV) ^s
					91011'12'	11 12	
a 11	27	24	3	"	12345678	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'9'$	18 χ (17 φ IV) ^s
					9101112	10'11'12'	
a 11	27	24	4	"	11'33'55'77'	$a = 22'4'4'6'6'8'8'1010'$	18 χ 1 (17 χ IV) ^s
					99'1111'	12 12'	
a 11	27	24	5	"	12'34'56'78'	$a = 1'2'3'4'5'6'7'8'9'10'$	18 χ 1 (18 IV) ^s
					910'11	11'12	
a 11	27	24	6	"	11'22'55'66'	$a = 33'4'4'7'7'8'8'1111'$	33(χ 2) (14 π IV) ^s
					99'1010'	12 12'	
a 11	27	24	7	"	11'44'55'88'	$a = 22'3'3'6'6'7'7'1010'$	33(χ 1) (15 π IV) ^s
					99'1212'	11 11'	

Tetraparalleloëdersysteme III. Ordnung.

$\frac{a}{a'}11$	16	3	1	12 IV	1	$\frac{a}{a'} = \frac{9}{5}$	(10) (1 IV) _r
$\frac{a}{a'}11$	16	3	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{9}$	(11) (1 IV) _i ^s
$1\frac{b}{b'}$	16	3	3	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{9}$	12 (1 IV) ^s
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	4	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{9}{5}$	13 (1 IV) _r
$\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}\frac{a}{a'}$	16	3	5	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{9}$	13 (1 IV) _i

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	17	6	1	12 φ IV	18	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{4} \frac{12}{9}$	12 φ' (1 χ' IV) ^c
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	19	6	1	15 IV	18'	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{4'} \frac{12'}{9}$	14 (4 IV) ^c
$\frac{a}{a'} 1 1$	21	6	1	17 IV	17	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{5} \frac{9}{11}$	(29) (3 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 1 1$	21	6	2	17 IV	17	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{3} \frac{11}{9}$	(30) (3 IV) _i ^s
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	23	6	1	12 π IV	11'	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{9} \frac{5'}{9'}$	12 π (1 χ IV) ₅₉ ^c
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	24	12	1	17 χ IV	11'77'	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{3} \frac{5'}{3'} \frac{11}{9} \frac{11'}{9'}$	28 (χ 1) (2 χ IV) ₃₅ ^c
$\frac{a}{a'} 1 1$	25	12	1	18 IV	12'78'	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{5} \frac{4'}{6'} \frac{9}{11} \frac{10'}{12'}$	(34) (5 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 1 1$	25	12	2	18 IV	12'78'	$\frac{a}{a'} = \frac{5}{3} \frac{6'}{4'} \frac{11}{9} \frac{12'}{10'}$	(35) (5 IV) _i ^s
$1 \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	26	12	1	15 π IV	11'88'	$\frac{b}{b'} = \frac{5}{4} \frac{5'}{4'} \frac{12}{9} \frac{12'}{9'}$	14 π (3 φ IV) ₄₅ ^c

Tetraparalleloëder IV. Ordnung.

II. Monokline Syngonie.

$ab1$	5	4	1	2 χ IV	1	$a=7'$ $b=7$	2 χ 1 (1 IV ₂) ^h
$ab1$	5	4	2	"	1	$a=7'$ $b=1'$	1 (χ 2) (1 IV ₂) ^h
$ab1$	5	4	3	"	1	$a=7$ $b=7'$	1 (χ 2) (1 IV ₂) ^{h'}
$ab1$	5	4	4	"	1	$a=7$ $b=1'$	1 (χ 2) (1 IV ₂) ^{h''}
$ab1$	5	4	5	"	1	$a=1'$ $b=7'$	1 (χ 1) (1 IV ₂) ^h
$ab1$	5	4	6	"	1	$a=1'$ $b=7$	2 χ 1 (1 IV ₂) ^h
$1bc$	5	4	7	"	1	$b=7'$ $c=7$	2 χ 1 (1 IV ₂) ^c
abc	5	4	8	"	1	$a=7'$ $b=7'$ $c=7$	3 χ 1 (1 IV ₂)
abc	5	4	9	"	1	$a=7$ $b=1'$ $c=7$	3 χ 1 (1 IV ₂) [']
abc	5	4	10	"	1	$a=1'$ $b=1'$ $c=7$	3 χ (1 IV ₂)
$\frac{a}{a'} 1 1$	5	4	11	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{1'}$	1 (χ 1) (1 IV ₂) ^s
$\frac{a}{a'} b 1$	5	4	12	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{1'}$ $b=7$	3 χ (1 IV ₂) ^h
$1 \frac{b}{b'} 1$	5	4	13	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{7}$	2 χ 1 (1 IV ₂) ^v
$\frac{b}{b'} 1$	5	4	14	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{7}$ $a=1'$	3 χ (1 IV ₂) ^{h'}
$1 \frac{b}{b'} c$	5	4	15	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{7}$ $c=1'$	2 χ 1 (1 IV ₂) ^{c'}
$\frac{b}{b'} a$	5	4	16	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{7}$ $a=1'$	3 χ (1 IV ₂)
$ab1$	5	4	17	3 χ IV	1	$a=7'$ $b=2'$	1 (χ 2) (1 IV ₃) ^h
$ab1$	5	4	18	"	1	$a=7'$ $b=8$	1 (χ 2) (1 IV ₃) ^{h'}
$ab1$	5	4	19	"	1	$a=2'$ $b=7'$	2 χ 1 (1 IV ₃) ^h
$ab1$	5	4	20	"	1	$a=2'$ $b=8$	2 χ 1 (1 IV ₃) ^{h'}
$ab1$	5	4	21	"	1	$a=8$ $b=7'$	1 (χ 2) (1 IV ₃) ^{h''}
$ab1$	5	4	22	"	1	$a=8$ $b=2'$	1 (χ 2) (1 IV ₃) ^{h'''}
$\frac{a}{a'} 1 1$	5	4	23	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{2'}$	3 χ 1 (1 IV ₃) _{27'} ^s

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b 1$	5	4	24	3 χ IV	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{2'}$ $b = 8$	3 χ 1 (1 IV) ₃ ^h _{2'7'}
$1 \frac{b}{b'} 1$	5	4	25	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{8}$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^v _{7'8}
$\frac{a}{b'} 1$	5	4	26	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{8}$ $a = 2'$	3 χ 1 (1 IV) ₃ ^h _{7'8}
$1 \frac{b}{b'} 1$	5	4	27	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{2'}$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^v _{2'7'}
$\frac{a}{b'} 1$	5	4	28	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{2'}$ $a = 8$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^h _{2'7'}
$\frac{a}{b'} 1$	5	4	29	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{2'}$ $a = 2'$	3 χ 1 (1 IV) ₃ ^h _{2'7'}
$a b 1$	5	4	30	3 χ IV'	1	$a = 7'$ $b = 8'$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^h
$a b 1$	5	4	31	"	1	$a = 7'$ $b = 2$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^{h'}
$a b 1$	5	4	32	"	1	$a = 8'$ $b = 7'$	2 χ 1 (1 IV) ₃ ^h
$a b 1$	5	4	33	"	1	$a = 8'$ $b = 2$	2 χ 1 (1 IV) ₃ ^{h'}
$a b 1$	5	4	34	"	1	$a = 2$ $b = 7'$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^{h''}
$a b 1$	5	4	35	"	1	$a = 2$ $b = 8'$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^{h'''}
$\frac{a}{a'} 1 1$	5	4	36	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{8'}$	3 χ 1 (1 IV) ₃ ^s _{7'8'}
$\frac{a}{a'} b 1$	5	4	37	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{7'}{8'}$ $b = 2$	3 χ 1 (1 IV) ₃ ^h _{7'8'}
$1 \frac{b}{b'} 1$	5	4	38	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{2}$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^v _{2'7'}
$\frac{a}{b'} 1$	5	4	39	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{2}$ $a = 8'$	3 χ 1 (1 IV) ₃ ^h _{2'7'}
$1 \frac{b}{b'} 1$	5	4	40	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^v _{7'8'}
$\frac{a}{b'} 1$	5	4	41	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$ $a = 2$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^h _{7'8'}
$\frac{a}{b'} 1$	5	4	42	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$ $a = 7'$	1 (χ 2) (1 IV) ₃ ^{h'} _{7'8'}

III. Rhombische Syngonie.

$a b 1$	6	4	1	5 IV	1	$a = 7$ $b = 2'$	(14) (1 IV) ₂ ^h
$a b 1$	6	4	2	"	1	$a = 7$ $b = 8'$	(14) (1 IV) ₂ ^{h'}
$a b 1$	6	4	3	"	1	$a = 2'$ $b = 7$	(3) (1 IV) ₂ ^h
$a b 1$	6	4	4	"	1	$a = 8'$ $b = 7$	(3) (1 IV) ₂ ^{h'}
$a b 1$	6	4	5	"	1	$a = 2'$ $b = 8'$	(2) (1 IV) ₂ ^h
$a b 1$	6	4	6	"	1	$a = 8'$ $b = 2'$	(2) (1 IV) ₂ ^{h'}
$\frac{a}{a'} 1 1$	6	4	7	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{8'}$	(4) (1 IV) ₂ ^s _{8'}
$\frac{a}{a'} b 1$	6	4	8	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{8'}$ $b = 7$	(5) (1 IV) ₂ ^h _{8'}
$1 \frac{b}{b'} 1$	6	4	9	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{2'}{7}$	(2) (1 IV) ₂ ^v ₇
$1 \frac{b}{b'} 1$	6	4	10	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{8'}{7}$	(2) (1 IV) ₂ ^v _{8'}
$\frac{a}{b'} 1$	6	4	11	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{8'}{7}$ $a = 2'$	(4) (1 IV) ₂ ^h _{18'}
$\frac{a}{b'} 1$	6	4	12	"	1	$\frac{b}{b'} = \frac{2'}{7}$ $a = 8'$	(4) (1 IV) ₂ ^h _{2'7}

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$ab1$	7	4	1	$2\varphi' IV$	1	$a=7$ $b=2$	$1(\varphi 4)(1IV_2)^h$
$ab1$	7	4	2	"	1	$a=7$ $b=8$	$1(\varphi 4)(1IV_2)^{h'}$
$ab1$	7	4	3	"	1	$a=2$ $b=7$	$2\varphi 3(1IV_2)^h$
$ab1$	7	4	4	"	1	$a=8$ $b=7$	$2\varphi 3(1IV_2)^{h'}$
$ab1$	7	4	5	"	1	$a=2$ $b=8$	$1(\varphi 3)(1IV_2)^h$
$ab1$	7	4	6	"	1	$a=8$ $b=2$	$1(\varphi 3)(1IV_2)^{h'}$
$\frac{b}{b'}1$	7	4	7	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{7}$	$2\varphi 5(1IV_2)^{h'}_{27}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	8	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7}{8}$	$2\varphi 5(1IV_2)^{h'}_{78}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	9	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{7}{8}$ $a=2$	$3\varphi 3(1IV_2)^h_{78}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	10	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{7}$ $a=8$	$3\varphi 3(1IV_2)^h_{27}$
$ab1$	7	4	11	$3\varphi IV$	1	$a=8'$ $b=1'$	$2\varphi 4(1IV_3)^h$
$ab1$	7	4	12	"	1	$a=8'$ $b=8$	$2\varphi 3(1IV_3)^h$
$ab1$	7	4	13	"	1	$a=1'$ $b=8'$	$1(\varphi 2)(1IV_3)^h$
$ab1$	7	4	14	"	1	$a=1'$ $b=8$	$1(\varphi 1)(1IV_3)^h$
$ab1$	7	4	15	"	1	$a=8$ $b=1'$	$1(\varphi 4)(1IV_3)^h$
$ab1$	7	4	16	"	1	$a=8$ $b=8'$	$1(\varphi 4)(1IV_3)^{h'}$
$\frac{a'}{a}11$	7	4	17	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'}$	$3\varphi 2(1IV_3)^s_{1'8'}$
$\frac{a'}{a}b1$	7	4	18	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{8'}$ $b=8$	$3\varphi'1(1IV_3)^h_{1'8'}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	19	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$	$1(\varphi 3)(1IV_3)^{h'}_{88'}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	20	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{8}{8'}$ $a=1'$	$1(\varphi 5)(1IV_3)^h_{88'}$
$ab1$	7	4	21	$3\varphi IV'$	1	$a=2'$ $b=1'$	$2\varphi 4(1IV_3')^h$
$ab1$	7	4	22	"	1	$a=2'$ $b=2$	$2\varphi 3(1IV_3')^h$
$ab1$	7	4	23	"	1	$a=1'$ $b=2'$	$1(\varphi 2)(1IV_3')^h$
$ab1$	7	4	24	"	1	$a=1'$ $b=2$	$1(\varphi 1)(1IV_3')^h$
$ab1$	7	4	25	"	1	$a=2$ $b=1'$	$1(\varphi 4)(1IV_3')^h$
$ab1$	7	4	26	"	1	$a=2$ $b=2'$	$1(\varphi 4)(1IV_3')^{h'}$
$\frac{a}{a'}11$	7	4	27	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$	$3\varphi 2(1IV_3')^s_{1'2'}$
$\frac{a}{a'}b1$	7	4	28	"	1	$\frac{a}{a'}=\frac{1'}{2'}$ $b=2$	$3\varphi'1(1IV_3')^h_{1'2'}$
$1\frac{b}{b'}1$	7	4	29	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{2'}$	$1(\varphi 3)(1IV_3')^{h'}_{22'}$
$a\frac{b}{b'}1$	7	4	30	"	1	$\frac{b}{b'}=\frac{2}{2'}$ $a=1'$	$1(\varphi 5)(1IV_3')^h_{22'}$
$ab1$	8	8	1	$5\chi IV$	$17'$	$a=1'7$ $b=2'8$	$14(\chi 1)(1\pi IV)^h$
$ab1$	8	8	2	"	$17'$	$a=1'7$ $b=2'8'$	$14(\chi 1)(1\pi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	3	"	$17'$	$a=2'8$ $b=1'7$	$3(\chi 4)(1\pi IV)^h$
$ab1$	8	8	4	"	$17'$	$a=2'8'$ $b=1'7$	$3(\chi 4)(1\pi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	5	"	$17'$	$a=2'8$ $b=2'8'$	$2(\chi 5)(1\pi IV)^h$
$ab1$	8	8	6	"	$17'$	$a=2'8'$ $b=2'8$	$2(\chi 5)(1\pi IV)^{h'}$
$ab1$	8	8	7	"	17	$a=1'7'$ $b=2'8'$	$2(\chi 4)(2IV)^h$
$ab1$	8	8	8	"	17	$a=1'7'$ $b=28$	$2(\chi 1)(2IV)^h$
$ab1$	8	8	9	"	17	$a=2'8'$ $b=1'7'$	$4\chi 3(2IV)^h$
$ab1$	8	8	10	"	17	$a=2'8'$ $b=28$	$4\chi 2(2IV)^h$
$ab1$	8	8	11	"	17	$a=28$ $b=1'7'$	$2(\chi 5)(2IV)^h$
$ab1$	8	8	12	"	17	$a=28$ $b=2'8'$	$2(\chi 6)(2IV)^h$
$\frac{a}{a'}11$	8	8	13	"	17	$\frac{a}{a'}=\frac{1'7'}{2'8'}$	$5\chi 1(2IV)^s_{1'2'}$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	14	5Z IV	17	$a = \frac{1'7'}{2'8'}$ $b = 28$	$4 \chi 2 (2 IV)_{1'2'}$
$ab 1$	8	8	15	"	12'	$a = 1'2$ $b = 7'8'$	$3 (\chi 2) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	16	"	12'	$a = 1'2$ $b = 7'8$	$2 (\chi 2) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	17	"	12'	$a = 7'8'$ $b = 1'2$	$3 (\chi 4) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	18	"	12'	$a = 7'8'$ $b = 7'8$	$3 (\chi 4) (3 IV)^{h'}$
$ab 1$	8	8	19	"	12'	$a = 7'8$ $b = 1'2$	$14 (\chi 2) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	20	"	12'	$a = 7'8$ $b = 7'8'$	$3 (\chi 4) (3 IV)^{h''}$
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	21	"	12'	$b = 7'8$ $\frac{b'}{b} = \frac{7'8'}{7'8}$	$3 (\chi 3) (3 IV)_{7'7'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} 1$	8	8	22	"	12'	$\frac{b'}{b} = \frac{7'8'}{7'8}$ $a = 1'2$	$4 (\chi 2) (3 IV)_{7'7'}$
$ab 1$	8	8	23	"	18'	$a = 1'8$ $b = 2'7$	$3 (\chi 2) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	24	"	18'	$a = 1'8$ $b = 2'7'$	$2 (\chi 2) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	25	"	18'	$a = 2'7$ $b = 1'8$	$3 (\chi 4) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	26	"	18'	$a = 2'7$ $b = 2'7'$	$3 (\chi 4) (3 IV)^{h'}$
$ab 1$	8	8	27	"	18'	$a = 2'7'$ $b = 1'8$	$14 (\chi 2) (3 IV)^h$
$ab 1$	8	8	28	"	18'	$a = 2'7'$ $b = 2'7$	$3 (\chi 4) (3 IV)^{h''}$
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	29	"	18'	$b = 2'7'$ $\frac{b'}{b} = \frac{2'7'}{2'7}$	$3 (\chi 3) (3 IV)_{2'2'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} 1$	8	8	30	"	18'	$\frac{b'}{b} = \frac{2'7'}{2'7}$ $a = 1'8$	$4 (\chi 2) (3 IV)_{2'2'}$
$ab 1$	8	8	31	"	11'	$a = 7'7'$ $b = 2'2'$	$14 (\chi 1) (1 \chi IV)^h$
$ab 1$	8	8	32	"	11'	$a = 7'7'$ $b = 8'8'$	$14 (\chi 1) (1 \chi IV)^{h'}$
$ab 1$	8	8	33	"	11'	$a = 2'2'$ $b = 7'7'$	$3 (\chi 2) (1 \chi IV)^h$
$ab 1$	8	8	34	"	11'	$a = 8'8'$ $b = 7'7'$	$3 (\chi 2) (1 \chi IV)^{h'}$
$ab 1$	8	8	35	"	11'	$a = 2'2'$ $b = 8'8'$	$2 (\chi 2) (1 \chi IV)^h$
$ab 1$	8	8	36	"	11'	$a = 8'8'$ $b = 2'2'$	$2 (\chi 2) (1 \chi IV)^{h'}$
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	37	"	11'	$b = 2'2'$ $\frac{b'}{b} = \frac{2'2'}{2'2}$	$2 (\chi 1) (1 \chi IV)_{2'7}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} 1$	8	8	38	"	11'	$\frac{b'}{b} = \frac{8'8'}{7'7'}$	$2 (\chi 1) (1 \chi IV)_{7'8}$
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	39	"	11'	$b = 2'2'$ $\frac{b'}{b} = \frac{2'2'}{7'7'}$ $a = 8'8'$	$3 (\chi 2) (1 \chi IV)_{2'7}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} 1$	8	8	40	"	11'	$b = 8'8'$ $\frac{b'}{b} = \frac{8'8'}{7'7'}$ $a = 2'2'$	$3 (\chi 2) (1 \chi IV)_{7'8}$
$ab 1$	8	8	41	"	18	$a = 2'7'$ $b = 2'7$	$3 (\chi 2) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	42	"	18	$a = 2'7'$ $b = 1'8'$	$2 (\chi 4) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	43	"	18	$a = 2'7$ $b = 2'7'$	$14 (\chi 1) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	44	"	18	$a = 2'7$ $b = 1'8'$	$14 (\chi 1) (1 \chi' IV)^{h'}$
$ab 1$	8	8	45	"	18	$a = 1'8'$ $b = 2'7'$	$2 (\chi 3) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	46	"	18	$a = 1'8'$ $b = 2'7$	$3 (\chi 1) (1 \chi' IV)^h$
$\frac{a}{a'} 11$	8	8	47	"	18	$a = 2'7'$ $\frac{a'}{a} = \frac{2'7'}{1'8'}$	$4 (\chi 1) (1 \chi' IV)_{1'2'}$
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	48	"	18	$a = 2'7'$ $\frac{a'}{a} = \frac{2'7'}{1'8'}$ $b = 2'7$	$5 (\chi 1) (1 \chi' IV)_{1'2'}$
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	49	"	18	$b = 2'7$ $\frac{b'}{b} = \frac{2'7'}{2'7'}$	$2 (\chi 2) (1 \chi' IV)_{2'2'}$
$\frac{a}{a'} \frac{b}{b'} 1$	8	8	50	"	18	$b = 2'7$ $\frac{b'}{b} = \frac{2'7'}{2'7'}$ $a = 1'8'$	$4 (\chi 1) (1 \chi' IV)_{2'2'}$
$ab 1$	8	8	51	"	12	$a = 7'8'$ $b = 7'8$	$3 (\chi 2) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	52	"	12	$a = 7'8'$ $b = 1'2'$	$2 (\chi 4) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	53	"	12	$a = 7'8$ $b = 7'8'$	$14 (\chi 1) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	54	"	12	$a = 7'8$ $b = 1'2'$	$14 (\chi 1) (1 \chi' IV)^{h'}$
$ab 1$	8	8	55	"	12	$a = 1'2'$ $b = 7'8'$	$2 (\chi 3) (1 \chi' IV)^h$
$ab 1$	8	8	56	"	12	$a = 1'2'$ $b = 7'8$	$3 (\chi 1) (1 \chi' IV)^h$

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explizite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} 11$	8	8	57	5 χ IV	12	$\frac{a}{a'} = \frac{1'2'}{7'8'}$	4 ($\chi 1$) ($1\chi' IV$) _{1'7'} ^s
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	58	„	12	$\frac{a}{a'} = \frac{1'2'}{7'8'}$ $b = 78$	5 ($\chi 1$) ($1\chi' IV$) _{1'7'} ^h
$1 \frac{b}{b'} 1$	8	8	59	„	12	$\frac{b}{b'} = \frac{78}{7'8'}$	2 ($\chi 2$) ($1\chi' IV$) _{7'7'} ^v
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	60	„	12	$\frac{b}{b'} = \frac{78}{7'8'}$ $a = 1'2'$	4 ($\chi 1$) ($1\chi' IV$) _{7'7'} ^h

V. Hexagonale Syngonie.

$\frac{a}{a'} 11$	20	12	1	14 α IV	159	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'10'}{3'7'11'}$	14 $\alpha 1$ (12 IV) _{2'3'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	20	12	2	15 α IV	159	$\frac{a}{a'} = \frac{4'8'12'}{3'7'11'}$	15 $\alpha 1$ (12 IV) _{3'4'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	24	12	1	17 χ IV	159	$\frac{a}{a'} = \frac{1'5'9'}{3'7'11'}$	28 ($\chi 1$) (12 IV) _{1'3'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	25	12	1	18 IV	159	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'10'}{4'8'12'}$	(33) (12 IV) _{2'4'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	26	12	1	14 π IV	159	$\frac{a}{a'} = \frac{2'6'10'}{1'5'9'}$	14 $\pi 1$ (12 IV) _{1'2'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	26	12	2	15 π IV	159	$\frac{a}{a'} = \frac{4'8'12'}{1'5'9'}$	15 $\pi 1$ (12 IV) _{1'4'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	27	24	1	18 χ IV	1256910	$\frac{a}{a'} = \frac{1'2'5'6'9'10'}{3'4'7'8'11'12'}$	33 ($\chi 2$) (12 φ IV) _{1'3'} ^s
$\frac{a}{a'} 11$	27	24	2	„	1458912	$\frac{a}{a'} = \frac{1'4'5'8'9'12'}{2'3'6'7'10'11'}$	33 ($\chi 1$) (12 φ IV) _{1'2'} ^s

Tetraparalleloëdersysteme VI. Ordnung.

$\frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	17	6	1	12 φ IV	1	$a = 8$ $\frac{b}{b'} = \frac{5}{9}$	12 $\varphi' 1$ (1 IV)
$\frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	19	6	1	15 IV	1	$a = 8'$ $\frac{b}{b'} = \frac{5}{9}$	14 (1 IV)
$\frac{a}{a'} 11$	19	6	2	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{12'}$	(26) (1 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 11$	19	6	3	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{12'}{4'}$	(27) (1 IV) _l ^s
$\frac{a}{a'} 11$	19	6	4	14 IV	1	$\frac{a}{a'} = \frac{6'}{2'}$	(12) (1 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 11$	19	6	5	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{6'}$	(13) (1 IV) _l ^s
$\frac{a}{a'} 11$	21	6	1	17 IV	1	$\frac{a}{a'} = \frac{11}{3}$	(31) (1 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 11$	21	6	2	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{3}{11}$	(32) (1 IV) _l ^s
$a \frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	23	6	1	12 π IV	1	$a = 1'$ $\frac{b}{b'} = \frac{5}{9}$	12 π (1 IV)

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$\frac{a}{a'} 11$	25	12	1	14 IV	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{3 \ 4'}{11 \ 12'}$	(36) (3 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 11$	25	12	2	„	12'	$\frac{a}{a'} = \frac{11 \ 12'}{3 \ 4'}$	(37) (3 IV) _l ^s
$\frac{a}{a'} 11$	25	12	3	15 IV	18'	$\frac{a}{a'} = \frac{3 \ 10'}{6' \ 11}$	(36) (3 IV) _r ^s
$\frac{a}{a'} 11$	25	12	4	„	18'	$\frac{a}{a'} = \frac{6' \ 11}{3 \ 10'}$	(37) (3 IV) _l ^s
$\frac{b}{b'} \frac{b'}{b}$	26	12	1	15a IV	18'	$a = 1'8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{5 \ 6'}{9 \ 10'}$	14π1 (3 IV)

Tetraparalleloëdersysteme VIII. Ordnung.

$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	1	5χ IV	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{8'} \quad b = 2$	3 (χ 4) (1 IV) _{2'8'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	2	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{8'} \quad b = 8$	3 (χ 4) (1 IV) _{2'8'} ^{h'}
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	3	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{7'} \quad b = 2$	14 (χ 1) (1 IV) _{1'7'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	4	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{7'} \quad b = 8$	14 (χ 1) (1 IV) _{1'7'} ^{h'}
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	5	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{7'} \quad b = 7$	3 (χ 4) (1 IV) _{2'7'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	6	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{8'}{7'} \quad b = 7$	3 (χ 4) (1 IV) _{7'8'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	7	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{7'} \quad b = 7'$	2 (χ 5) (1 IV) _{2'7'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	8	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{8'}{7'} \quad b = 7'$	2 (χ 5) (1 IV) _{7'8'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	9	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'} \quad b = 7$	3 (χ 2) (1 IV) _{1'2'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	10	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{8'} \quad b = 7$	3 (χ 2) (1 IV) _{1'8'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	11	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{2'} \quad b = 8$	2 (χ 2) (1 IV) _{1'2'} ^h
$\frac{a}{a'} b 1$	8	8	12	„	1	$\frac{a}{a'} = \frac{1'}{8'} \quad b = 2$	2 (χ 2) (1 IV) _{1'8'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	13	„	1	$a = 1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{2'}{7'}$	2 (χ 4) (1 IV) _{2'7'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	14	„	1	$a = 1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{8'}{7'}$	2 (χ 4) (1 IV) _{7'8'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	15	„	1	$a = 2 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{8'}$	2 (χ 5) (1 IV) _{7'8'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	16	„	1	$a = 8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{2'}$	2 (χ 5) (1 IV) _{2'7'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	17	„	1	$a = 1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{2}{7'}$	14 (χ 1) (1 IV) _{2'7'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	18	„	1	$a = 1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{8}{7'}$	14 (χ 1) (1 IV) _{7'8'} ^h
$\frac{b}{b'} 1$	8	8	19	„	1	$a = 2 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{8}$	14 (χ 2) (1 IV) _{7'8'} ^h

Ab- leitungs- form	Sym- metrie- art	Sym- metrie- grösse	Nr.	Typus I. Ordnung	Charakteristische Zahlen		Symbol des Systems
					Explicite Symmetrie	Verbandsymmetrie	
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	20	5 χ IV	1	$a=8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{2}$	14 (χ 2) (1 IV) $_{2,7}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	21	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{2'}{7'}$	14 (χ 1) (1 IV) $_{2,7'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	22	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{8'}{7'}$	14 (χ 1) (1 IV) $_{7',8'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	23	"	1	$a=2' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{8'}$	2 (χ 6) (1 IV) $_{7',8'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	24	"	1	$a=8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7'}{2'}$	2 (χ 6) (1 IV) $_{2,7'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	25	"	1	$a=2 \quad \frac{b}{b'} = \frac{8}{8'}$	14 (χ 2) (1 IV) $_{8,8'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	26	"	1	$a=8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{2}{2'}$	14 (χ 2) (1 IV) $_{2,2'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	27	"	1	$a=2' \quad \frac{b}{b'} = \frac{8}{8'}$	2 (χ 5) (1 IV) $_{8,8'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	28	"	1	$a=8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{2}{2'}$	2 (χ 5) (1 IV) $_{2,2'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	29	"	1	$a=2 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{7'}$	2 (χ 5) (1 IV) $_{7,7'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	30	"	1	$a=8 \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{7'}$	2 (χ 5) (1 IV) $_{7,7'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	31	"	1	$a=2' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{7'}$	3 (χ 3) (1 IV) $_{7,7'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	32	"	1	$a=8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{7'}$	3 (χ 3) (1 IV) $_{7,7'}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	33	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{2}{7}$	2 (χ 1) (1 IV) $_{2,7}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	34	"	1	$a=1' \quad \frac{b}{b'} = \frac{8}{7}$	2 (χ 1) (1 IV) $_{7,8}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	35	"	1	$a=2' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{8}$	3 (χ 3) (1 IV) $_{7,8}^h$
$a \frac{b}{b'} 1$	8	8	36	"	1	$a=8' \quad \frac{b}{b'} = \frac{7}{2}$	3 (χ 3) (1 IV) $_{2,7}^h$

Tetraparalleloëdersysteme XII. Ordnung.

$\frac{a}{a'} 1 1$	25	12	1	18 IV	1	$\frac{a}{a'} = \frac{2'}{4'}$	(36) (1 IV) $_r^s$
$\frac{a}{a'} 1 1$	25	12	2	"	1	$\frac{a}{a'} = \frac{4'}{2'}$	(37) (1 IV) $_i^s$

VII. Die Gleichungen der regelmässigen Punktsysteme im Raume.

Symbol des Systems	Symmetrische Systeme	Symbol des Systems	Hemisymmetrische Systeme	Symbol des Systems	Asymmetrische Systeme	Zu- sammen
--------------------------	----------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------	---------------

I. Triklone Syngonie.

1. Hemipinakoïdale Symmetrieart ($y = b; z = c; v = d$).

1. $+ \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	keine	keine	1
--	-------	-------	---

2. Pinakoïdale Symmetrieart ($y = n^x b; z = n^x c; v = n^x d$).

$1x. + \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	keine	keine	1
2	—	—	2

II. Monokline Syngonie.

3. Hemiprismatisch-axiale (sphenoidische) Symmetrieart ($y = b; z = n^v c; v = n^v d$).

2. $+ \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	keine	(1). $+ v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$	3
3. $+ F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$			

4. Hemiprismatisch-axenlose (domatische) Symmetrieart ($y = n^x b; z = c; v = d$).

$1x. + \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	$1x1. + \lambda, + \lambda_0, + x \frac{\lambda_1}{2}$	keine	4
$1x'. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	$1x'1. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + x \frac{\lambda_1}{2}$		

5. Rhomboprismatische Symmetrieart ($y = n^x b; z = n^v c; v = n^v d$).

$2x. + \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	$2x1. + \lambda, + \lambda_0, + x \frac{\lambda_1}{2}$	$1(x1). + v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$	6
$3x. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	$3x1. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + x \frac{\lambda_1}{2}$	$1(x2). + v \frac{\lambda}{2}, + x \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	
6	4	3	13

III. Rhombische Syngonie.

6. Sphenoëdrische Symmetrieart ($y = n^h b; z = n^v c; v = n^{v+h} d$).

4. $+ \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	keine	(2). $+ \lambda, + h \frac{\lambda_0}{2}, + h \frac{\lambda_1}{2}$	
5. $+ \lambda, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$		(3). $+ v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$	
6. $+ F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$		(4). $+ v \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	
7. $+ F \frac{\lambda}{2}, + (F+G) \frac{\lambda_0}{2},$ $+ G \frac{\lambda_1}{2}$		(5). $+ (F+v) \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	
		(14). $+ v \frac{\lambda}{2}, + (h+v) \frac{\lambda_0}{2}, + v \frac{\lambda_1}{2}$	9

Symbol des Systems	Symmorphie Systeme	Symbol des Systems	Hemisymmorphie Systeme	Symbol des Systems	Asymmorphie Systeme	Zu- sammen
--------------------------	--------------------	--------------------------	------------------------	--------------------------	---------------------	---------------

7. Rhombopyramidale Symmetrieart ($y = b$; $z = n^v c$; $v = n^v + \varphi d$).

$2\varphi. + \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	$2\varphi 1. + \varphi \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$	$1(\varphi 1). + v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$
	$2\varphi 2. + \lambda, + \varphi \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	$1(\varphi 2). + v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \varphi \frac{\lambda_1}{2}$
	$2\varphi 3. + \varphi \frac{\lambda}{2}, + \varphi \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	$1(\varphi 3). + v \frac{\lambda}{2}, + \varphi \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$
	$2\varphi 4. + \varphi \frac{\lambda}{2}, + \varphi \frac{\lambda_0}{2}, + \varphi \frac{\lambda_1}{2}$	$1(\varphi 4). + v \frac{\lambda}{2}, + \varphi \frac{\lambda_0}{2}, + \varphi \frac{\lambda_1}{2}$
	$2\varphi 5. + \lambda, + \varphi \frac{\lambda_0}{2}, + \varphi \frac{\lambda_1}{2}$	$1(\varphi 5). + v \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$
$2\varphi'. + \lambda, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$2\varphi' 1. + \varphi \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	
$3\varphi. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	$3\varphi 1. + F \frac{\lambda}{2}, + (F + \varphi) \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$	
	$3\varphi 2. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + \varphi \frac{\lambda_1}{2}$	
$3\varphi'. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$3\varphi' 1. + F \frac{\lambda}{2}, + (F + \varphi) \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	
	$3\varphi' 2. + (F + \varphi) \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	
$3\varphi''. + F \frac{\lambda}{2}, + (F + G) \frac{\lambda_0}{2}, + G \frac{\lambda_1}{2}$	$3\varphi'' 1. + (2F + \varphi) \frac{\lambda}{4}, + (2F + 2G + \varphi) \frac{\lambda_0}{4}, + (2G + \varphi) \frac{\lambda_1}{4}$	

22

8. Rhombobipyramidale Symmetrieart ($y = n^h + z b$; $z = n^v c$; $v = n^v + h d$).

$4\chi. + \lambda, + \lambda_0, + \lambda_1$	$4\chi 1. + \chi \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$	$2(\chi 1). + \lambda, + h \frac{\lambda_0}{2}, + h \frac{\lambda_1}{2}$
	$4\chi 2. + \lambda, + \chi \frac{\lambda_0}{2}, + \chi \frac{\lambda_1}{2}$	$2(\chi 2). + \lambda, + h \frac{\lambda_0}{2}, + (h + \chi) \frac{\lambda_1}{2}$
	$4\chi 3. + \chi \frac{\lambda}{2}, + \chi \frac{\lambda_0}{2}, + \chi \frac{\lambda_1}{2}$	$2(\chi 3). + \lambda, + (h + \chi) \frac{\lambda_0}{2}, + (h + \chi) \frac{\lambda_1}{2}$
$5\chi. + \lambda, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$5\chi 1. + \chi \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$2(\chi 4). + \chi \frac{\lambda}{2}, + h \frac{\lambda_0}{2}, + h \frac{\lambda_1}{2}$
	$5\chi 2. + \lambda, + (F + \chi) \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$2(\chi 5). + \chi \frac{\lambda}{2}, + (h + \chi) \frac{\lambda_0}{2}, + h \frac{\lambda_1}{2}$
	$5\chi 3. + \chi \frac{\lambda}{2}, + (F + \chi) \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$2(\chi 6). + \chi \frac{\lambda}{2}, + (h + \chi) \frac{\lambda_0}{2}, + (h + \chi) \frac{\lambda_1}{2}$
$6\chi. + F \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$6\chi 1. + (F + \chi) \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$	$3(\chi 1). + v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \lambda_1$
$7\chi. + F \frac{\lambda}{2}, + (F + G) \frac{\lambda_0}{2}, + G \frac{\lambda_1}{2}$	$7\chi 1. + (2F + \chi) \frac{\lambda}{4}, + (2F + 2G + \chi) \frac{\lambda_0}{2}, + (2G + \chi) \frac{\lambda_1}{4}$	$3(\chi 2). + v \frac{\lambda}{2}, + \lambda_0, + \chi \frac{\lambda_1}{2}$
		$3(\chi 3). + v \frac{\lambda}{2}, + \chi \frac{\lambda_0}{2}, + \lambda_1$
		$3(\chi 4). + v \frac{\lambda}{2}, + \chi \frac{\lambda_0}{2}, + \chi \frac{\lambda_1}{2}$
		$4(\chi 1). + v \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + F \frac{\lambda_1}{2}$
		$4(\chi 2). + v \frac{\lambda}{2}, + F \frac{\lambda_0}{2}, + (F + \chi) \frac{\lambda_1}{2}$

Symbol des Systems	Symmorphe Systeme	Symbol des Systems	Hemisymorphe Systeme	Symbol des Systems	Asymmorphe Systeme	Zu- sammen
				5(χ 1). $+(F+v)\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_1}{2}$		
				5(χ 2). $+(F+v)\frac{\lambda}{2}, +(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_1}{2}$		
				14(χ 1). $+v\frac{\lambda}{2}, +(h+v)\frac{\lambda_0}{2}, +v\frac{\lambda_1}{2}$		
				14(χ 2). $+v\frac{\lambda}{2}, +(h+v)\frac{\lambda_0}{2},$ $+ (v+\chi)\frac{\lambda_1}{2}$		28
13		20		26		59

IV. Tetragonale Syngonie.

9. Tetragonal-pyramidale Symmetrieart ($y = b; y_0 = b_v^4; y_1 = b_{v+1}^4$).

8. $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	keine	(6). $+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
9. $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{2}$		(15). $-v\frac{\lambda}{4}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
		(16). $+v\frac{\lambda}{4}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
		(17). $(2F+v)\frac{\lambda}{4}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	6

10. Ditetragonal-pyramidale Symmetrieart ($y = b; y_0 = b_v^4; y_1 = b_{v+n\varphi}^4$).

8 φ 1. $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$	8 φ 1. $+\varphi\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	6(φ 1). $+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
	8 φ 2. $+\lambda, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$	6(φ 2). $+(v+\varphi)\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
9 φ 1. $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	8 φ 3. $+\varphi\frac{\lambda}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$	6(φ 3). $+(v+\varphi)\frac{\lambda}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$	
	9 φ 1. $+(F+\varphi)\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	6(φ 4). $+v\frac{\lambda}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}, +\varphi\frac{\lambda_0}{2}$	
		17(φ 1). $+(2F+v)\frac{\lambda}{4}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +(F+\varphi)\frac{\lambda_0}{2}$	
		17(φ 2). $+(2F+2\varphi+v)\frac{\lambda}{4}, +F\frac{\lambda_0}{2},$ $+ (F+\varphi)\frac{\lambda_0}{2}$	12

11. Tetragonal-sphenoëdrische Symmetrieart ($y = n^\pi b; y_0 = b_\pi^4; y_1 = b_{\pi+1}^4$).

2 π . $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	keine	keine	
3 π . $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$			2

Symbol des Systems	Symmorphe Systeme	Symbol des Systems	Hemisymmorphe Systeme	Symbol des Systems	Asymmorphe Systeme	Zu- sammen
--------------------------	-------------------	--------------------------	-----------------------	--------------------------	--------------------	---------------

12. Tetragonal-bipyramidale Symmetrieart ($y = n^z b$; $y_0 = b_v^4$; $y_1 = b_{v+1}^4$).

8 χ .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	8 χ 1.	$+\lambda, +\chi \frac{\lambda_0}{2}, +\chi \frac{\lambda_0}{2}$	6(χ 1).	$+v \frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
9 χ .	$+F \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$			6(χ 2).	$+v \frac{\lambda}{2}, +\chi \frac{\lambda_0}{2}, +\chi \frac{\lambda_0}{2}$	
				17(χ 1).	$+(2F+v) \frac{\lambda}{4}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +(F+\chi) \frac{\lambda_0}{2}$	6

13. Tetragonal-trapezoëdrische Symmetrieart ($y = n^h b$; $y_0 = b_v^4$; $y_1 = b_{v+n^h}^4$).

10.	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	keine		(7).	$+\lambda, +h \frac{\lambda_0}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}$	
11.	$+F \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$			(8).	$+v \frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				(18).	$+(h+v) \frac{\lambda}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}$	
				(19) u. (20).	$\pm v \frac{\lambda}{4}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				(21).	$+(2F+v) \frac{\lambda}{4}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$	
				(23) u. (24).	$\pm v \frac{\lambda}{4}, +h \frac{\lambda_0}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}$	10

14. Tetragonal-skalenoëdrische Symmetrieart ($y = n^x b$; $y_0 = b_x^4$; $y_1 = b_{x+n^x}^4$).

4 δ .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	4 δ 1.	$+\delta \frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	2(δ 1).	$+\lambda, +\delta \frac{\lambda_0}{2}, +\delta \frac{\lambda_0}{2}$	
5 δ .	$+\lambda, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$	5 δ 1.	$+\delta \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$	2(δ 2).	$+\delta \frac{\lambda}{2}, +\delta \frac{\lambda_0}{2}, +\delta \frac{\lambda_0}{2}$	
		5 δ 2.	$+\lambda, +(F+\delta) \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$	5(δ 1).	$+\delta \frac{\lambda}{4}, +\lambda_0, +\delta \frac{\lambda_0}{2}$	
		5 δ 3.	$+\delta \frac{\lambda}{2}, +(F+\delta) \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$			
6 δ .	$+F \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$					
7 δ .	$+F \frac{\lambda}{2}, +(F+G) \frac{\lambda_0}{2}, +G \frac{\lambda_0}{2}$	7 δ 1.	$+(F+\delta) \frac{\lambda}{2}, +(F+G) \frac{\lambda_0}{2}, +G \frac{\lambda_0}{2}$			12

15. Ditetragonal-bipyramidale Symmetrieart ($y = n^{n+z} b$; $y_0 = b_v^4$; $y_1 = b_{v+n^4}^4$).

10 χ .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	10 χ 1.	$+\chi \frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	7(χ 1).	$+\lambda, +h \frac{\lambda_0}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}$	
		10 χ 2.	$+\lambda, +\chi \frac{\lambda_0}{2}, +\chi \frac{\lambda_0}{2}$	7(χ 2).	$+\lambda, +(h+\chi) \frac{\lambda_0}{2}, +(h+\chi) \frac{\lambda_0}{2}$	
11 χ .	$+F \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$	10 χ 3.	$+\chi \frac{\lambda}{2}, +\chi \frac{\lambda_0}{2}, +\chi \frac{\lambda_0}{2}$	7(χ 3).	$+\chi \frac{\lambda}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}, +h \frac{\lambda_0}{2}$	
		11 χ 1.	$+(F+\chi) \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}, +F \frac{\lambda_0}{2}$	7(χ 4).	$+\chi \frac{\lambda}{2}, +(h+\chi) \frac{\lambda_0}{2}, +(h+\chi) \frac{\lambda_0}{2}$	
				8(χ 1).	$+v \frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	

Symbol des Systems	Symmorphie Systeme	Symbol des Systems	Hemisymmorphie Systeme	Symbol des Systems	Asymmorphie Systeme	Zu- sammen
				8(χ 2).	$+(v+\chi)\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				8(χ 3).	$+(v+\chi)\frac{\lambda}{2}, +\chi\frac{\lambda_0}{2}, +\chi\frac{\lambda_0}{2}$	
				8(χ 4).	$+v\frac{\lambda}{2}, +\chi\frac{\lambda_0}{2}, +\chi\frac{\lambda_0}{2}$	
				18(χ 1).	$+(v+h)\frac{\lambda}{2}, +h\frac{\lambda_0}{2}, +h\frac{\lambda_0}{2}$	
				18(χ 2).	$+(v+h)\frac{\lambda}{2}, +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}, +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	
				18(χ 3).	$+(v+h+\chi)\frac{\lambda}{2}, +h\frac{\lambda_0}{2}, +h\frac{\lambda_0}{2}$	
				18(χ 4).	$+(v+h+\chi)\frac{\lambda}{2}, +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}, +(h+\chi)\frac{\lambda_0}{2}$	
				21(χ 1).	$+v\frac{\lambda}{4}, (F+\chi)\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	
				21(χ 2).	$+(2\chi+v)\frac{\lambda}{4}, +(F+\chi)\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$	20
	16		14		38	68

V. Hexagonale Syngonie.

16. Trigonal-pyramidale Symmetrieart ($y=b$; $y_0=b_v^3$; $y_1=b_{v+1}^3$).

12. $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	keine	(10) u. (11).	$\pm\frac{\lambda}{3}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
13. $+F\frac{\lambda}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$				4

17. Ditrigonal-pyramidale Symmetrieart ($y=b$; $y_0=b_v^3$; $y_1=b_{v+n}^3$).

12 φ . $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	12 φ 1. $+\varphi\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	keine		
12 φ' . $+\lambda, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	12 φ' 1. $+\varphi\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$			
13 φ . $+F\frac{\lambda}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	13 φ 1. $+F\frac{\lambda}{3}+\varphi\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$			6

18. Rhomboëdrische Symmetrieart ($y=n^a b$; $y_0=n^a b_v^3$; $y_1=n^a b_{v+1}^3$).

12 a . $+\lambda, +\frac{\lambda_0}{2}, +\frac{\lambda_0}{2}$	keine	keine		
13 a . $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}, +F\frac{\lambda_0}{2}$				2

19. Trigonal-trapezoëdrische Symmetrieart ($y=n^h b$; $y_0=b_v^3$; $y_1=b_{v+n}^3$).

14. $+\lambda, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	keine	(12) u. (13).	$\pm v\frac{\lambda}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	
15. $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$		(26) u. (27).	$\pm v\frac{\lambda}{3}, \lambda_0, \lambda_0$	
16. $+F\frac{\lambda}{3}, (F+G)\frac{\lambda_0}{3}, +G\frac{\lambda_0}{3}$				7

Symbol des Systems	Symmetrische Systeme	Symbol des Systems	Hemisymmetrische Systeme	Symbol des Systems	Asymmetrische Systeme	Zu- sammen
20. Hexagonal-skalenoëdrische Symmetrieart ($y = n^{a+h} b$; $y_0 = n^a b_v$; $y_1 = n^a b_{v+n^h}$).						
14a.	$+\lambda, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	14a1.	$+a\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$		keine	
15a.	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	15a1.	$+a\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$			
16a.	$+F\frac{\lambda}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	16a1.	$+F\frac{\lambda}{3} + a\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$			6
21. Hexagonal-pyramidale Symmetrieart ($y = b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+1}$).						
17.	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$		keine	(28).	$+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				(29) u. (30).	$\pm v\frac{\lambda}{3}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				(31) u. (32).	$\pm v\frac{\lambda}{6}, +\lambda_0, +\lambda_0$	6
22. Dihexagonal-pyramidale Symmetrieart ($y = b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+n\varphi}$).						
17 φ .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	17 φ 1.	$+\varphi\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	28(φ 1).	$+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, \lambda_0$	
				28(φ 2).	$+(v+\varphi)\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	4
23. Trigonal-bipyramidale Symmetrieart ($y = n^a b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+1}$).						
12 π .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$		keine		keine	1
24. Hexagonal-bipyramidale Symmetrieart ($y = n^a b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+1}$).						
17 χ .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$		keine	28(χ 1).	$+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	2
25. Hexagonal-trapezoëdrische Symmetrieart ($y = n^h b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+n^h}$).						
18.	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$		keine	(33).	$+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				(34) u. (35).	$\pm v\frac{\lambda}{3}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				(36) u. (37).	$\pm v\frac{\lambda}{6}, +\lambda_0, +\lambda_0$	6
26. Ditrigonal-bipyramidale Symmetrieart ($y = n^{a+h} b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+n^h}$).						
14 π .	$+\lambda, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$	14 π 1.	$+\pi\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda_0}{3}, +F\frac{\lambda_0}{3}$		keine	
15 π .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	15 π 1.	$+\pi\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$			4
27. Dihexagonal-bipyramidale Symmetrieart ($y = n^{h+z} b$; $y_0 = b_v$; $y_1 = b_{v+n^h}$).						
18 χ .	$+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$	18 χ 1.	$+\chi\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	33(χ 1).	$+v\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	
				33(χ 2).	$+(v+\chi)\frac{\lambda}{2}, +\lambda_0, +\lambda_0$	4
21		10		21		52

Symbol des Systems	Symmorphe Systeme	Symbol des Systems	Hemisymorphe Systeme	Symbol des Systems	Asymmorphe Systeme	Zu- sammen
--------------------------	-------------------	--------------------------	----------------------	--------------------------	--------------------	---------------

VI. Kubische Syngonie.

28. Tetartoëdrische Symmetrieart ($x_0 = n^{\frac{1}{2}} a_0^3$; $x_1 = n^v a_{0+1}^3$; $x_2 = n^{v+\frac{1}{2}} a_{0+2}^3$).

19. $+\lambda, +\lambda, +\lambda$

keine

(22). $+(F+h+v)\frac{\lambda}{2}, +(F+h)\frac{\lambda}{2},$
 $+(F+h)\frac{\lambda}{2}$

20. $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}$

21. $+F\frac{\lambda}{2}, +(F+G)\frac{\lambda}{2}, +G\frac{\lambda}{2}$

(22). $+(h+v)\frac{\lambda}{2}, +h\frac{\lambda}{2}, +h\frac{\lambda}{2}$

5

29. Dodekaëdrische Symmetrieart ($x_0 = n^{k+\lambda} a_0^3$; $x_1 = n^v a_{0+1}^3$; $x_2 = n^{v+\frac{1}{2}} a_{0+2}^3$).

19 λ . $+\lambda, +\lambda, +\lambda$

19 λ 1. $+\lambda\frac{\lambda}{2}, +\lambda\frac{\lambda}{2}, +\lambda\frac{\lambda}{2}$

22(λ 1). $+(F+h+v)\frac{\lambda}{2}, +(F+h+\lambda)\frac{\lambda}{2},$
 $+(F+v)\frac{\lambda}{2}$

20 λ . $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}$

21 λ . $+F\frac{\lambda}{2}, +(F+G)\frac{\lambda}{2}, +G\frac{\lambda}{2}$

21 λ 1. $+(F+\lambda)\frac{\lambda}{2}, +(F+G)\frac{\lambda}{2}, +G\frac{\lambda}{2}$

25(λ 1). $+(h+v)\frac{\lambda}{2}, +(h+\lambda)\frac{\lambda}{2}, +v\frac{\lambda}{2}$

7

30. Tetraëdrische Symmetrieart ($x_0 = n^{\frac{1}{2}} a_0^3$; $x_1 = n^v a_{0+n^{\frac{1}{2}}}^3$; $x_2 = n^{v+\frac{1}{2}} a_{0+2n^{\frac{1}{2}}}^3$).

19 δ . $+\lambda, +\lambda, +\lambda$

19 δ 1. $+\delta\frac{\lambda}{2}, +\delta\frac{\lambda}{2}, +\delta\frac{\lambda}{2}$

22(δ 1). $+(F+h+v)\frac{\lambda}{2} + \delta\frac{\lambda}{4},$

20 δ . $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}$

$+(F+h)\frac{\lambda}{2} + \delta\frac{\lambda}{4}, +(F+v)\frac{\lambda}{2} + \delta\frac{\lambda}{4}$

21 δ . $+F\frac{\lambda}{2}, +(F+G)\frac{\lambda}{2}, +G\frac{\lambda}{2}$

21 δ 1. $+(F+\delta)\frac{\lambda}{2}, +(F+G)\frac{\lambda}{2}, +G\frac{\lambda}{2}$

6

31. Gyroëdrische Symmetrieart ($x_0 = n^{k+d} a_0^3$; $x_1 = n^{v+d} a_{0+n^d}^3$; $x_2 = n^{v+\frac{1}{2}} a_{0+2n^d}^3$).

22. $+\lambda, +\lambda, +\lambda$

keine

(9). $+d\frac{\lambda}{2}, +d\frac{\lambda}{2}, +d\frac{\lambda}{2}$

23. $+F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}, +F\frac{\lambda}{2}$

(38). $+(2F-d)\frac{\lambda}{4}, +(2F+2G-d)\frac{\lambda}{4},$

24. $+F\frac{\lambda}{2}, +(F+G)\frac{\lambda}{2},$

$+(2G-d)\frac{\lambda}{4}$

$+G\frac{\lambda}{2}$

(39). $+(2F+2h-d)\frac{\lambda}{4}, +(2F-d)\frac{\lambda}{4},$

$+(2F+2v-d)\frac{\lambda}{4}$

(40). $+(2v-d)\frac{\lambda}{4}, +(2v+2h-d)\frac{\lambda}{4},$

$+(2h-d)\frac{\lambda}{4}$

(41). $+(2v+2h-d)\frac{\lambda}{4}, +(2h-d)\frac{\lambda}{4},$

$+(2v-d)\frac{\lambda}{4}$

8

Symbol des Systems	Symmorphie Systeme	Symbol des Systems	Hemisymmorphie Systeme	Symbol des Systems	Asymmorphie Systeme	Zu- sammen
32. Oktaëdrische Symmetrieart ($x_0 = n^{h+d+z} a_0^3$; $x_1 = n^{v+d} a_{0+n^d}^3$; $x_2 = n^{d+h+v} a_{0+2n^d}^3$).						
22 χ .	$+\lambda, +\lambda, +\lambda$	22 χ 1.	$+\chi \frac{\lambda}{2}, +\chi \frac{\lambda}{2}, +\chi \frac{\lambda}{2}$	9(χ 1).	$+d \frac{\lambda}{2}, +d \frac{\lambda}{2}, +d \frac{\lambda}{2}$	
23 χ .	$+F \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda}{2}, +F \frac{\lambda}{2}$			9(χ 2).	$+(d+\chi) \frac{\lambda}{2}, +(d+\chi) \frac{\lambda}{2},$ $+(d+\chi) \frac{\lambda}{2}$	
24 χ .	$+F \frac{\lambda}{2}, +(F+G) \frac{\lambda}{2},$ $+G \frac{\lambda}{2}$	24 χ 1.	$+(F+\chi) \frac{\lambda}{2}, +(F+G) \frac{\lambda}{2},$ $+G \frac{\lambda}{2}$	38(χ 1).	$+(2F-d+\chi) \frac{\lambda}{4},$ $+(2F+2G-d+\chi) \frac{\lambda}{4},$ $+(2G-d+\chi) \frac{\lambda}{4},$	
				38(χ 2).	$+(2F-d-\chi) \frac{\lambda}{4},$ $+(2F+2G-d+\chi) \frac{\lambda}{4},$ $+(2G-d+\chi) \frac{\lambda}{4},$	
				39(χ 1).	$+(2F+2h-d) \frac{\lambda}{4},$ $+(2F+2\chi-d) \frac{\lambda}{4},$ $+(2F+2v-d) \frac{\lambda}{4}$	10
	15		6		15	36
	73		54		103	230

67. Vergleichen wir die jetzt insgesamt erhaltenen Resultate, welche alle, Hauptpunkte besitzenden, regelmässigen Punktsysteme umfassen müssen, mit den früher aufgestellten Punktsystemen (in der Anzahl 230), so finden wir, dass jetzt alle diese Systeme vertreten sind mit Ausnahme der als (40) und (41) bezeichneten Systeme, welche beide der gyroëdrischen Symmetrieart entsprechen (deren Symmetriegrösse also 24 ist). Der Beweis dafür, dass diese Systeme wirklich keine Hauptpunkte besitzen, ist in dem vorhergehenden Ableitungsgange enthalten. Würden diese Systeme Hauptpunkte enthalten, so entsprächen ihnen somit etwaige reguläre Paralleloëdersysteme, und hätten wir daraus das Vorhandensein anderer Systeme, und zwar der tetragonalen Syngonie (13. Symmetrieart) bewiesen, welche von jenen durch die Abwesenheit der 3-zähligen Symmetrie- und Schraubenachsen und natürlich auch einer Anzahl resultirender Symmetrieelemente unterschieden werden. Solche Paralleloëdersysteme würden höchstens VIII. Ordnung gewesen sein und die Einführung der 3-zähligen Symmetrieelemente zugelassen haben. Da aber unter den Systemen der 13. Symmetrieart solche Systeme nicht vorhanden sind, so entsprechen auch den Systemen (40) und (41) keine Paralleloëdersysteme.

Kraft der in § 19 entwickelten Betrachtungen müssen wir nun die hierzu gehörenden regulären Raumtheilungen als aus einer Anzahl Paralleloëder bestehend auffassen. Diese Frage muss besonders besprochen werden.

Jene beiden Systeme können als ein einziger Fall besprochen werden, da dieselben im Grunde genommen gleichartig sind, und eines davon durch Spiegelung aus dem anderen sich ableiten lässt.

Aus den Gleichungen dieser Systeme lässt sich der Beweis erbringen, dass in denselben die 3-zähligen Symmetrieaxen mit den 2-zähligen Symmetrieaxen z zum Schnitt kommen. Ein solcher Schnittpunkt für das System (40) lässt sich z. B. durch die Coordinatengrößen

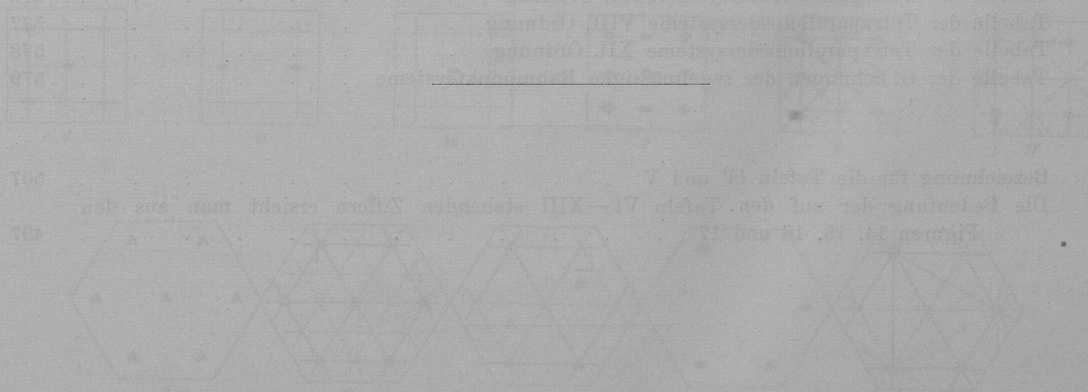
$$x_0 = -\frac{\lambda}{8}, x_1 = -\frac{\lambda}{8}, x_2 = -\frac{\lambda}{8} \text{ bestimmen. Führen wir diese Coordinatengrößen in die}$$

betreffenden Gleichungen ein, so reducirt sich eine Gesamtheit von 24 Punkten verschiedener Lage in eine Gesamtheit von nur 4 Punkten. Dasselbe geht noch ersichtlicher aus dem entsprechenden Diagramm hervor. Diese Punkte sind also die trigonaltrapezoëdrischen Symmetriecentra, d. h. Punkte, in welchen eine 3-zählige Symmetrieaxe sich mit drei dazu senkrechten 2-zähligen Symmetrieaxen schneidet. Nun ist bewiesen worden, dass unter allen Paralleloëderarten solche Symmetriecentra nur in Heptaparalleloëdern halbperipherisch auftreten (d. h. von der Gesamtheit der diesem Centrum angehörenden Symmetrieelemente nur ein einziges explicit auftritt).

Zu demselben Resultate kommen wir aber durch den Vergleich dieser beiden Systeme mit dem System (39). Das letzte, wie dies direct aus dessen Gleichungen zu ersehen ist, kann als eine Gesamtheit von zwei Systemen (40) resp. (41) angesehen werden. Diesem System entspricht aber eine einzige Lösung, und zwar das Paralleloëdersystem (39) (13 VII) VIII. Ordnung. Daraus kann direct gefolgert werden, dass den Systemen (40) und (41) ebenfalls Raumtheilungen entsprechen, deren Einheiten als aus zwei benachbarten Heptaparalleloëdern bestehend zu betrachten sind.

Die ausführlichere Behandlung dieses Falles würde viel Platz gefordert haben, ohne durch besonderes Interesse desselben belohnt zu werden.

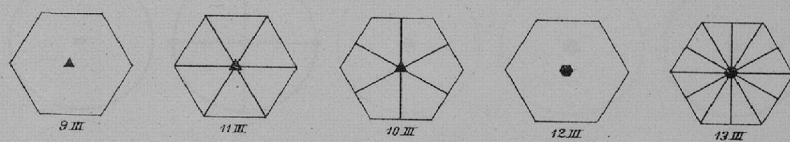
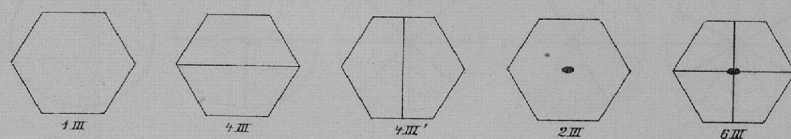
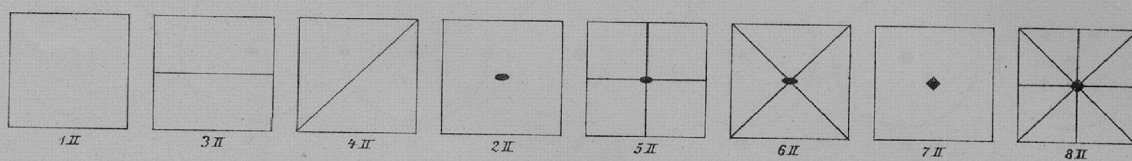
Jedenfalls ist durch das Vorhergehende die gestellte Aufgabe der Aufsuchung der regulären Plan- und Raumtheilungen vollständig aufgelöst. Keine anderen Typen als die aufgestellten sind möglich.



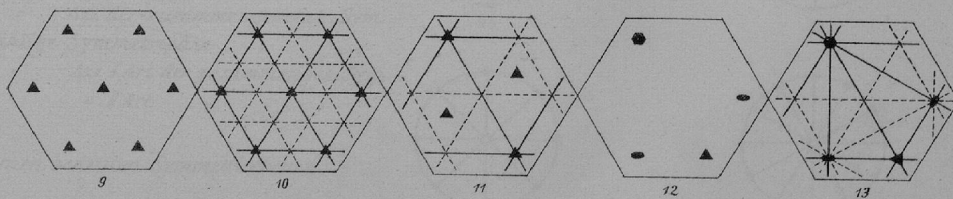
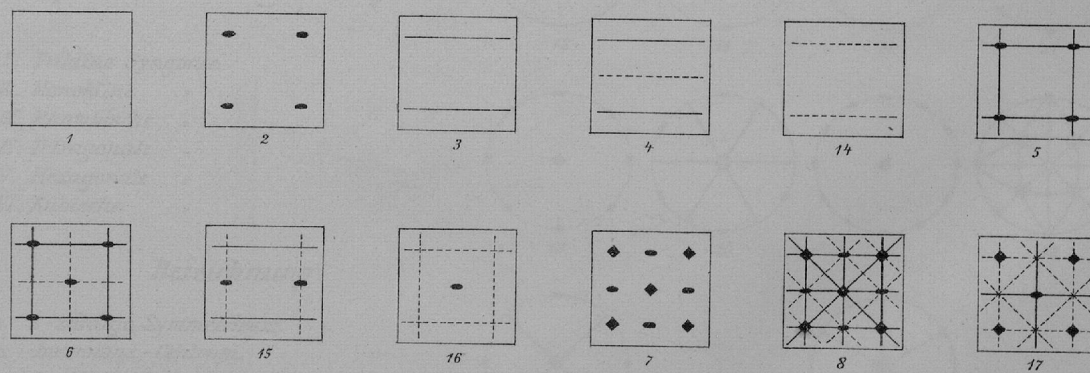
Inhalt.

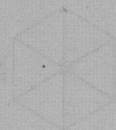
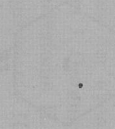
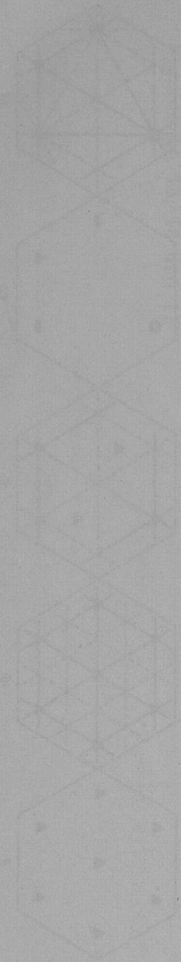
	Seite
Einleitung	467
I. Theil. Reguläre Plantheilung	467
Tabelle der Symmetriearten der ebenen Systeme	471
Tabelle der Plantheilungen I. Ordnung	475
Tabelle der Diparallelogonsysteme II., IV., VIII. Ordnung	488
Tabelle der Triparallelogonsysteme II., III., IV. Ordnung	489
Tabelle der Gleichungen der regelmässigen ebenen Punktsysteme	489
Zusammenstellung der regelmässigen ebenen Punktsysteme und der ihnen zugeordneten regulären Plantheilungen	491
II. Theil. Reguläre Raumtheilung	492
Tabelle der Symmetriearten der Raumsysteme	499
Tabelle der Raumtheilungen I. Ordnung	502
Tabelle der Triparalleloëdersysteme II. Ordnung	524
Tabelle der Triparalleloëdersysteme III. Ordnung	528
Tabelle der Triparalleloëdersysteme IV. Ordnung	528
Tabelle der Triparalleloëdersysteme VI. Ordnung	536
Tabelle der Triparalleloëdersysteme VIII. Ordnung	536
Tabelle der Triparalleloëdersysteme XVI. Ordnung	543
Tabelle der Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme II. Ordnung	553
Tabelle der Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme III. Ordnung	557
Tabelle der Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme IV. Ordnung	557
Tabelle der Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme VI. Ordnung	564
Tabelle der Hexa- und Heptaparalleloëdersysteme VIII. Ordnung	564
Tabelle der Tetraparalleloëdersysteme II. Ordnung	568
Tabelle der Tetraparalleloëdersysteme III. Ordnung	571
Tabelle der Tetraparalleloëdersysteme IV. Ordnung	572
Tabelle der Tetraparalleloëdersysteme VI. Ordnung	576
Tabelle der Tetraparalleloëdersysteme VIII. Ordnung	577
Tabelle der Tetraparalleloëdersysteme XII. Ordnung	578
Tabelle der Gleichungen der regelmässigen Raumpunktsysteme	579
Bezeichnung für die Tafeln IV und V	507
Die Bedeutung der auf den Tafeln VI—XIII stehenden Ziffern ersieht man aus den Figuren 14, 15, 16 und 17	497

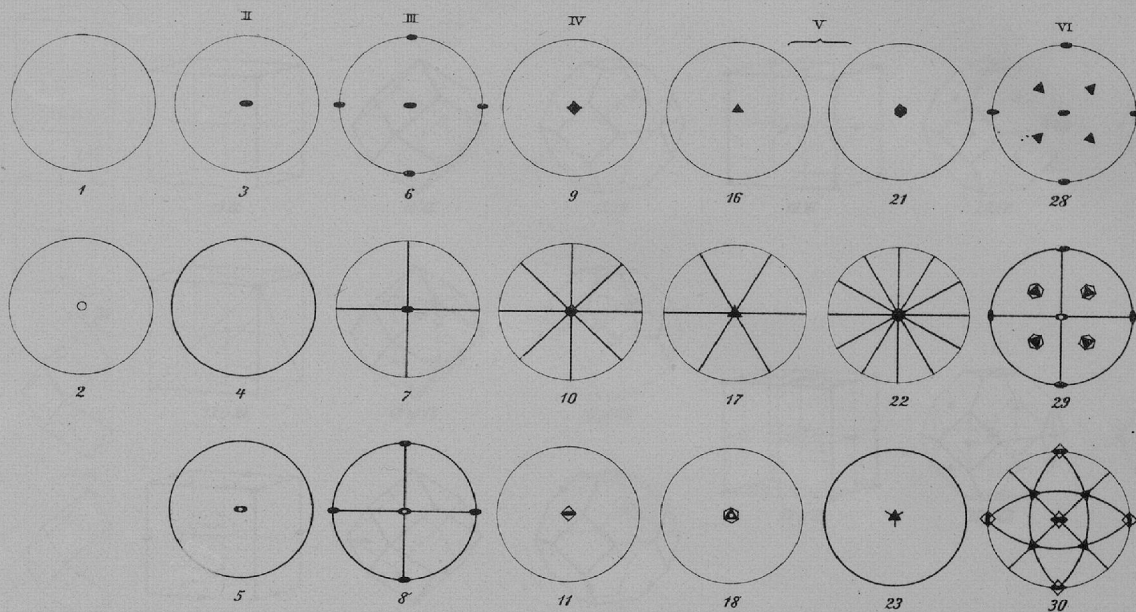
Parallelelogone I. Ordnung.



Regelmässige ebene Punktsysteme.







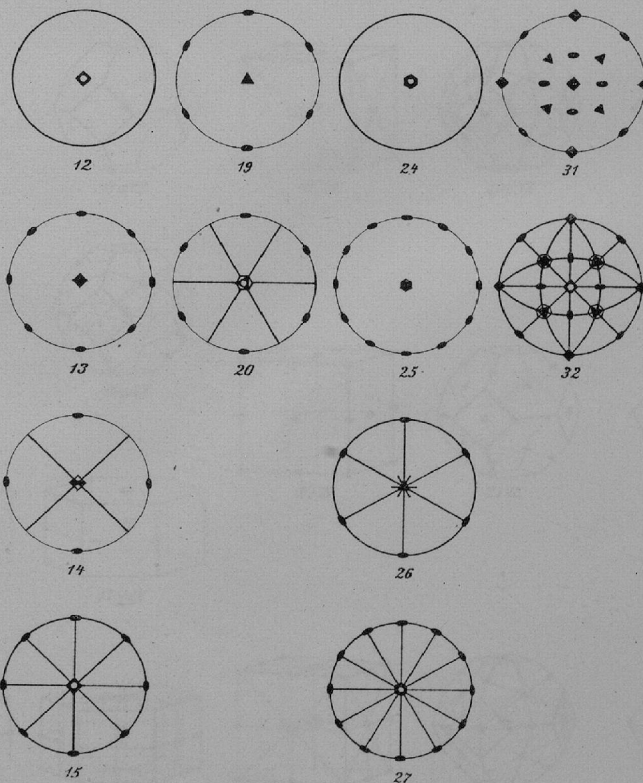
*Symmetriearten
der
regul. Raumtheilungen.*

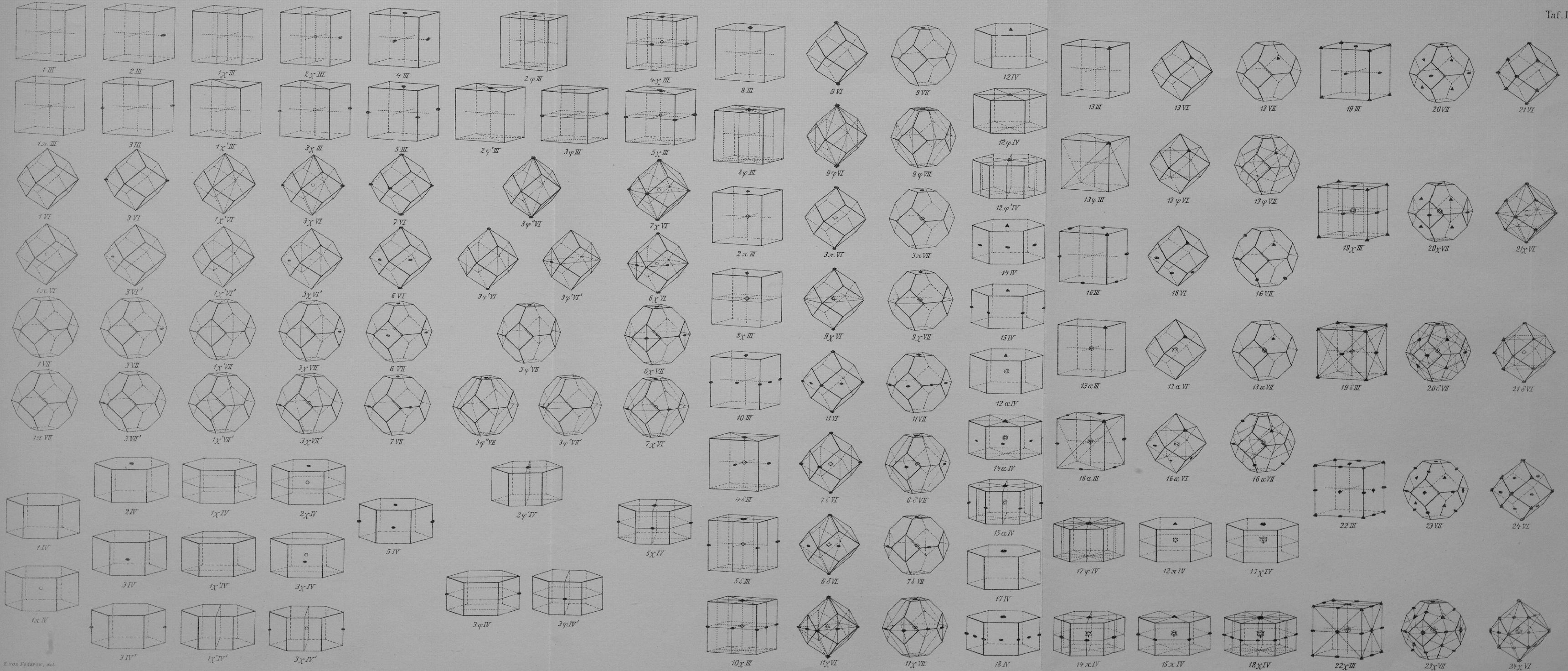
- I. Triklone Syngonie
- II. Monokline "
- III. Rhombische "
- IV. Tetragonale "
- V. Hexagonale "
- VI. Kubische "

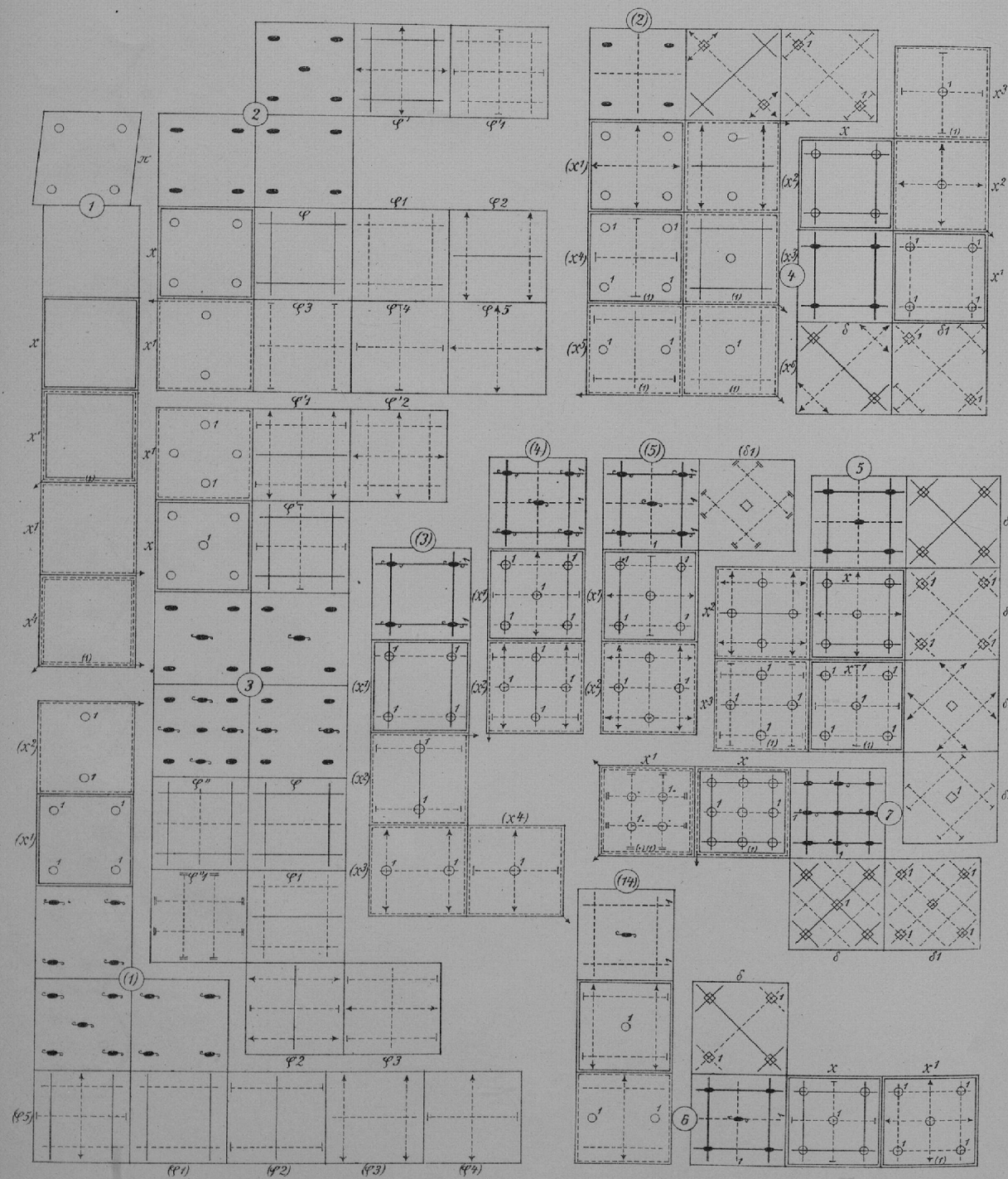
Bezeichnung:

- 2-zählige Symmetrieaxe
- Inversions-Centrum
- ▲ 3-zählige Symmetrieaxe
- ◆ 4-zählige "
- ◆ " " Axe der zusammengesetzt. Sym.
- 6-zählige Symmetrieaxe
- " " Axe I. Art der zusammenges. Sym.
- * " " II. Art " "

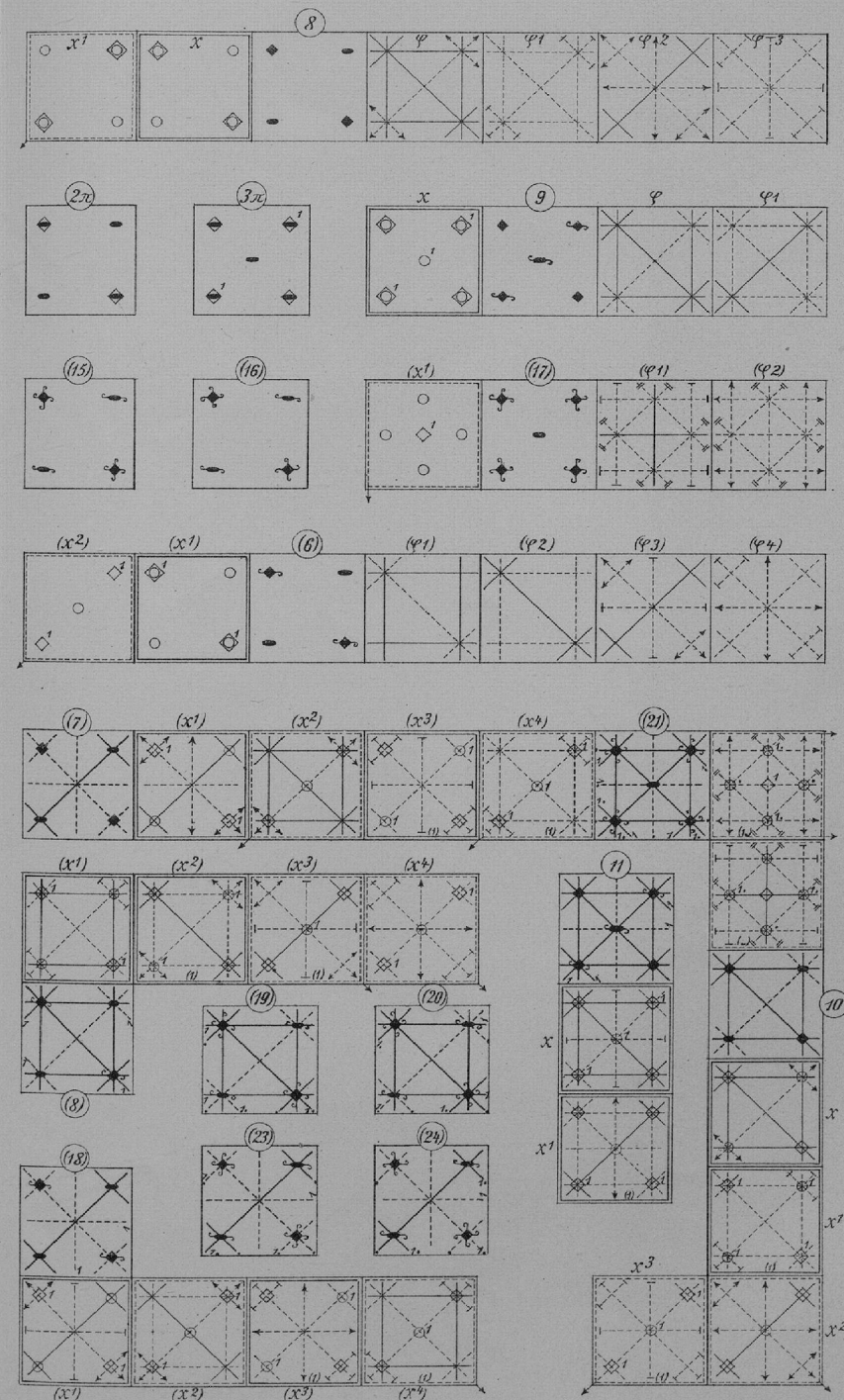
Fette Linien bedeuten Symmetrieebenen.



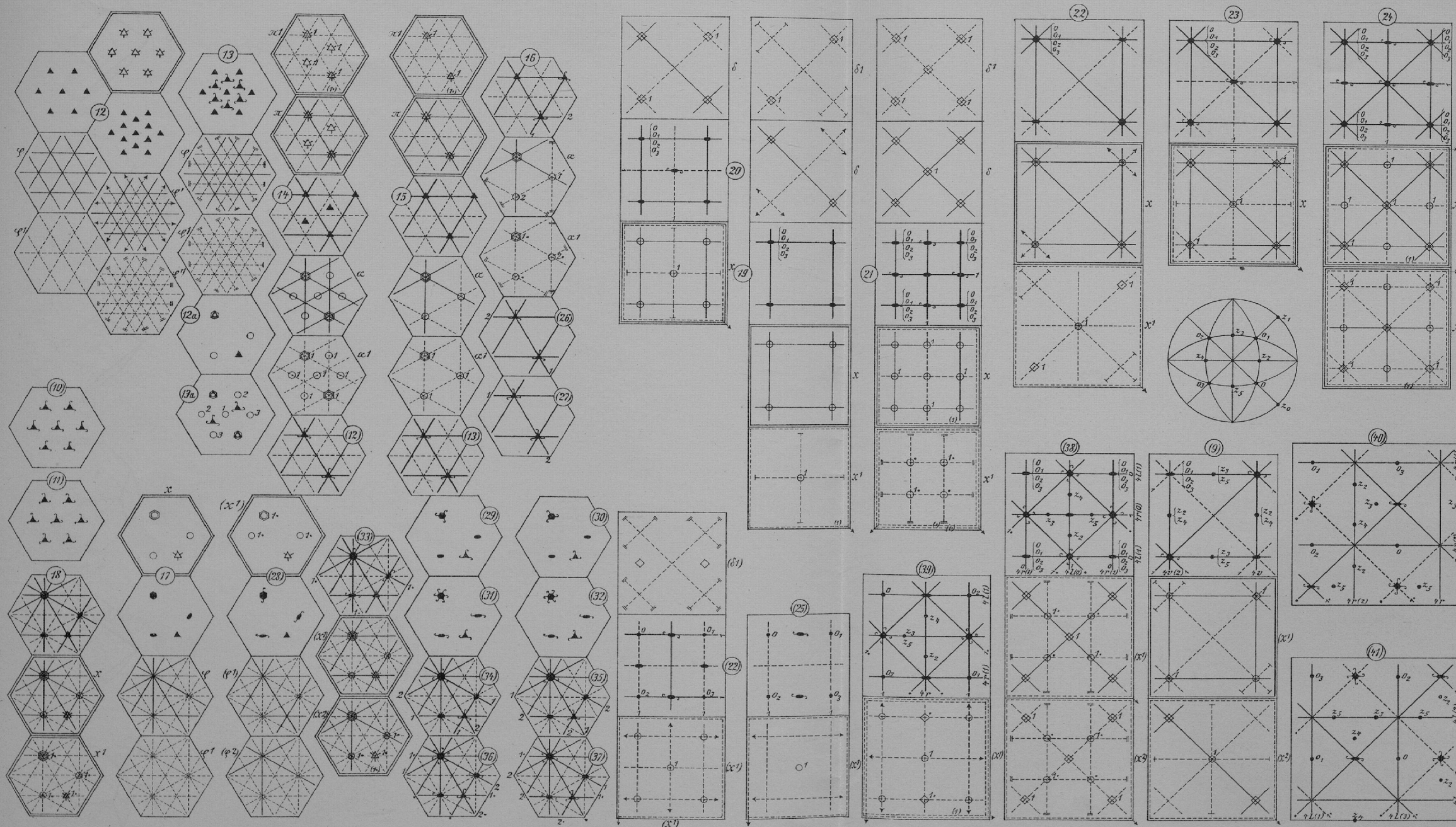


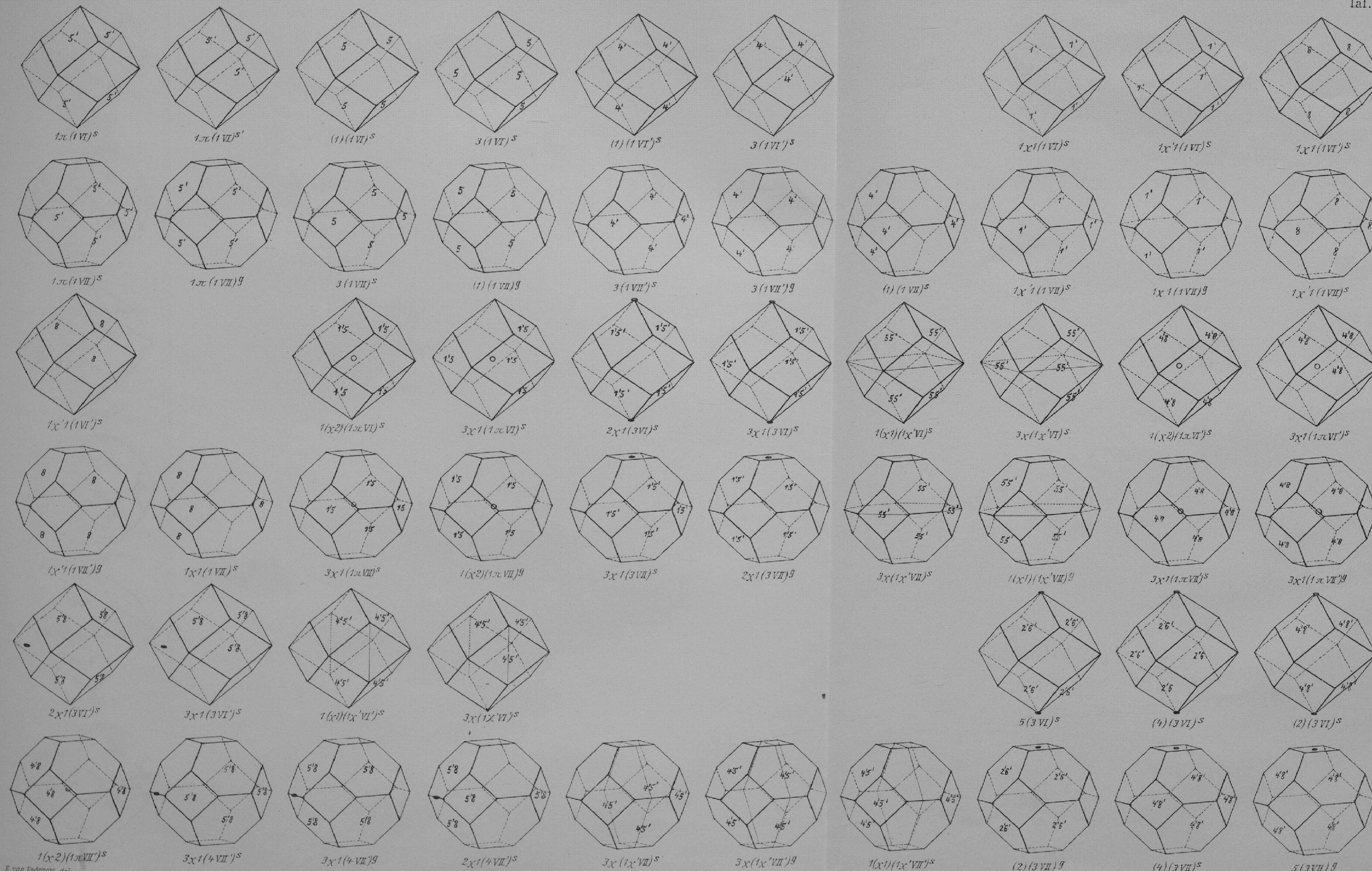


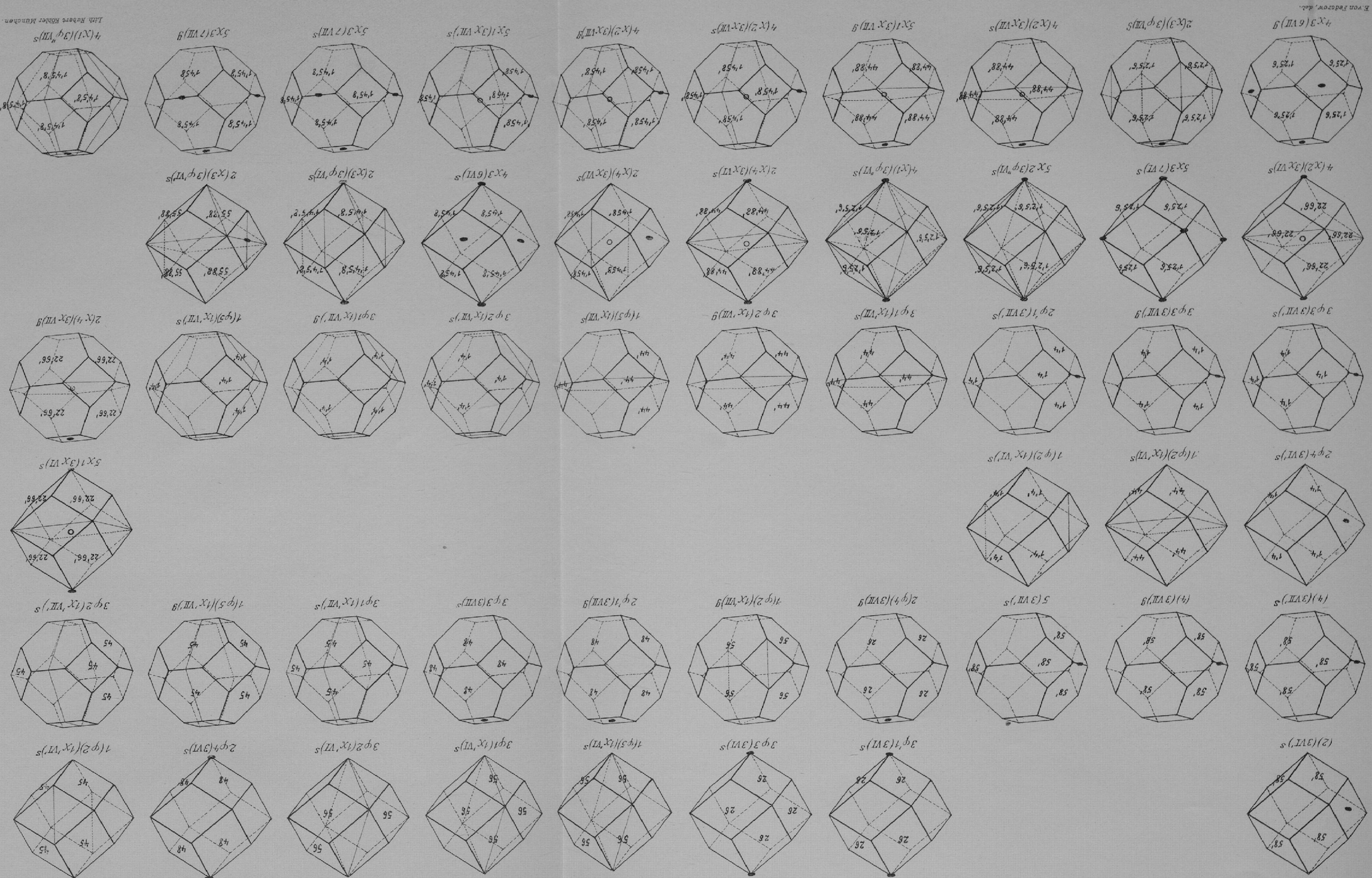
E. von Fedorow, del.



Lith. Robert Köhler München.







Lith. Robert Koenig-München.

