

c

Theorie

der

Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen

insbesondere des

Saturnringes

von

H. Seeliger.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVIII. Bd. I. Abth.

München 1893.

Verlag der k. Akademie

in Commission bei G. Franz.

Theorie

Beleuchtung städtischer kosmischer Mission

Sammlung

Verlag E. B.



Die vorliegende Abhandlung stützt sich auf Betrachtungen, die ich vor einigen Jahren in der Arbeit „zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturn“ ¹⁾ angestellt habe. Ich habe in jener Arbeit, die ich im Folgenden der Kürze wegen mit I bezeichnen will, die dort gewonnenen Grundlagen hauptsächlich auf den hellen Saturnring angewendet. Gegenwärtig beabsichtige ich den Gegenstand allgemeiner zu behandeln und hoffe damit die Photometrie der staubförmigen Massen nicht nur von specielleren Voraussetzungen, welche der Natur des behandelten Gegenstandes gemäss noch in I vorkommen, befreit, sondern auch so allgemein, als es wünschenswerth ist, dargestellt zu haben.

Unter einer staubförmigen kosmischen Masse oder kurz gesagt einer Staubwolke werde ein Aggregat von discreten Massentheilchen verstanden, deren gegenseitige Entfernung gross ist im Vergleiche zu ihren Dimensionen. Dieses Verhältniss braucht keineswegs sehr gross zu sein, es ist aber sicher, dass die in I entwickelten Formeln erst dann genügend genau sind, wenn das genannte Verhältniss eine gewisse Grenze übersteigt. Diese Einschränkung liegt in der Natur der Sache und kommt bei den Anwendungen, die ich bisher zu machen Veranlassung hatte und bei der mässigen Genauigkeit, welche bei der mathematischen Verfolgung ähnlicher Vorgänge, wie die zu besprechenden, aus vielerlei Gründen zu erreichen möglich ist, nicht in Frage. Sie wird überdies bei kosmischen Gebilden staubförmiger Natur schon deshalb weniger wichtig sein, als sie hier wahrscheinlich immer von vornherein erlaubt sein wird.

1) Abhandlungen der k. bayer. Akademie d. W. II. Cl. XVI. Band. S. 403—516. München 1887. Insbesondere kommen hier in Betracht Art. 11 ff.

Wenn eine solche kosmische Wolke von der Sonne beleuchtet wird, so wird jedes Massentheilchen andere theilweise beschatten und wird von anderen davor liegenden theilweise verdeckt. Die beschatteten Theile sind im Allgemeinen von den verdeckten verschieden. Nur in dem Falle der genauen Opposition, wenn also der Beobachter genau in derselben Richtung wie die als leuchtender Punkt angenommene Sonne von der Staubwolke aus erscheint, sind beide vollkommen identisch. Hieraus ergibt sich nun, dass eine mehr oder weniger merkbare Lichtzunahme in der Nähe der Opposition stattfinden muss und es folgt weiter, dass diese Lichtzunahme unter Umständen, nämlich dann, wenn die Staubmasse wenig durchsichtig ist, sehr bedeutend werden kann. Die mathematische Aufgabe, welche sich hier darbietet, besteht darin, die Grösse dieser Lichtzunahme zu berechnen. Dieselbe hat, wie man sieht, gar nichts zu thun mit der Untersuchung des Einflusses der Phase auf die Beleuchtung, welche jedes einzelne Massentheilchen darbietet. Im Gegentheil, die Phase spielt, solange man ganz in der Nähe der Opposition bleibt, gar keine Rolle und das ist der Grund, warum die Theorie der Beleuchtung der Staubwolken in diesem wichtigsten Punkte ganz unabhängig ist von dem elementaren Beleuchtungsgesetze. Dies ist schon deshalb nicht unwichtig, weil man über das letztere bisher keine allgemein gültigen Voraussetzungen machen konnte und dahin gerichtete Versuche in der Photometrie des Himmels immer scheitern müssen, wie ich bei verschiedenen Gelegenheiten gezeigt habe. Sobald man sich von der Opposition um grössere Winkelbeträge entfernt, kommt natürlich der gesammte elementare Einfluss der Phase in Frage und sobald dies eintritt, lassen sich die meisten Beleuchtungsphänomene der Planeten und ähnlicher Weltkörper im Allgemeinen nicht mehr auf gesichertem Wege theoretisch verfolgen.

Bei dem Saturnringe liegen nun in dieser Beziehung die Dinge ausserordentlich günstig, indem der Phasenwinkel stets klein ist. Hierdurch kann man den photometrischen Betrachtungen über ihn eine Sicherheit in den Grundlagen geben, die sonst schwer erreichbar ist. Die Untersuchung der Saturnringe in photometrischer Beziehung dürfen deshalb ein besonderes Interesse beanspruchen, ganz abgesehen davon, dass dieselben auch von nicht geringem Gewichte sind bei der Beant-

wortung der Frage nach der Constitution dieser merkwürdigen Gebilde. Dieser Punkt wird im Folgenden näher erörtert werden.

Die folgende Abhandlung ist in 10 Artikel getheilt, deren wesentlichen Inhalt mit wenigen Worten anzugeben zweckmässig sein dürfte.

Art. 1. Zusammenstellung von Formeln, welche für das Folgende unentbehrlich sind und welche sich auf die Beleuchtung von Kugeln und auf den Begriff der Albedo, in der von mir aufgestellten Definition, beziehen.

Art. 2. Die allgemeine Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen.

Art. 3. Anwendung der Formeln auf eine kugelförmige homogene Staubwolke.

Art. 4. Die Beleuchtung mehr oder weniger durchscheinender staubförmiger Massen mit besonderer Rücksicht auf den sogenannten dunklen Saturnring. Die Helligkeitsverhältnisse einer Staubwolke, welche sich scheinbar auf einen anderen Körper projecirt, der durch sie hindurch von der Sonne beleuchtet wird.

Art. 5. Betrachtung der speciellen Verhältnisse, welche die Saturnringe darbieten.

Art. 6. Discussion der Wahrnehmungen, welche an dem dunklen Ringe und bei Gelegenheit des letzten Wiedererscheinens der Saturnringe (i. J. 1891) gemacht worden sind.

Art. 7. Angenäherte Darstellung der Lichtmenge einer undurchsichtigen Staubwolke (heller Saturnring) durch Kramp'sche Integrale.

Art. 8. Die staubförmige Masse wird nicht mehr bestehend gedacht aus Kugeln mit demselben Radius, sondern aus Kugeln von beliebiger Grösse in beliebigem Mischungsverhältniss, wodurch alsdann über die Gestalt der einzelnen Massentheilchen speciellere Voraussetzungen wegfallen.

Art. 9. Umgestaltung der Formeln für den allgemeinen Fall in eine für die numerische Rechnung brauchbare Form.

Art. 10. Detaillirte Behandlung des Falles, in welchem die staubförmige Masse aus Kugeln besteht, deren Radien alle möglichen Werthe zwischen zwei Grenzen haben und zwar alle in gleicher Häufigkeit. — Bemerkungen über den Einfluss einer räumlichen Ausdehnung der Lichtquelle.

Zum Schlusse werden noch einige wenig umfangreiche Zahlentabellen angefügt, welche bei den in dieser Abhandlung vorkommenden Rechnungen Erleichterungen gewähren.

1.

Es sollen zunächst im Anschluss an I einige Festsetzungen gemacht werden. Das Flächenelement ds erhalte unter dem Incidenzwinkel i von einem leuchtenden Punkte die Lichtmenge:

$$L ds \cos i$$

und sende einem sehr kleinen Flächenelemente 1, welches senkrecht auf der Verbindungslinie mit ds steht, in der Entfernung Δ unter dem Emanationswinkel ε die Lichtmenge zu:

$$dQ = \frac{\gamma L ds}{\Delta^2} \varphi(\cos i, \cos \varepsilon)$$

Hierin ist γ eine Constante und φ eine das elementare Beleuchtungsgesetz darstellende, somit im Allgemeinen nicht angebbare Funktion von i und ε . γ hängt mit der Albedo μ zusammen durch die Gleichung¹⁾:

$$\mu = 2 \pi \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i \cdot di \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos i, \cos \varepsilon) \sin \varepsilon d\varepsilon$$

oder kürzer:

$$\mu = 2 \pi \gamma P$$

Eine unter dem Phasenwinkel²⁾ α beleuchtete Kugel mit dem Radius ϱ wird dann dem sehr entfernten Beobachter die Lichtmenge

$$Q(\alpha) = \frac{\mu L}{2 \pi P} \cdot \frac{\varrho^2}{\Delta^2} \cdot \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_{\alpha}^{\pi} \varphi(\sin \vartheta \sin(\omega - \alpha), \sin \vartheta \sin \omega) d\omega$$

zusenden. Für $\alpha = 0$ wird dieser Ausdruck:

1) Vergl. I Art. 5.

2) In der von mir stets gebrauchten Bedeutung: Winkel an der Kugel im Dreiecke Beobachter—Kugel—Lichtquelle.

$$Q(0) = \frac{\mu L}{P} \cdot \frac{\varrho^2}{A^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos i, \cos i) \sin i \, di$$

Legt man das sogenannte Lambert'sche Gesetz zu Grunde, setzt also:

$$\varphi = \cos i \cos \varepsilon$$

so wird

$$P = \frac{1}{2}$$

$$Q_L(\alpha) = \frac{2\mu L \varrho^2}{3A^2 \pi} \left\{ \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha \right\}$$

$$Q_L(0) = \frac{2\mu L \varrho^2}{3A^2}$$

welche Formeln sehr bekannt sind. Für das zweite in I verwendete Gesetz (N) ist

$$\varphi = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

und dann findet sich

$$P = \frac{1}{2}$$

und wenn der Kürze wegen nur der Werth von Q_N für $\alpha = 0$ hingeschrieben wird ¹⁾

$$Q_N(0) = \frac{\mu L \varrho^2}{2A^2}$$

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass, wenn die Lichtquelle eine kleine überall gleich helle Kugel ist, die dem Elemente ds als eine Kreisscheibe mit dem scheinbaren Radius σ erscheint, man bekanntlich hat:

$$L = J \pi \sin^2 \sigma$$

Es ist hier J die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit aussendet. Die nothwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der letzten Formel ist die Gültigkeit des Emanationsgesetzes, welches in vielen Fällen, wie bei glühenden Metallkugeln, als experimentell und theoretisch hinlänglich bestätigt angesehen werden darf.

1) Der Werth $Q_N(\alpha)$ findet sich I S. 427 abgeleitet.

2.

Wir denken uns die staubförmige Masse bestehend aus kleinen Kugeln mit den Radien ϱ , indem die Besprechung der Beschränkung, welche in dieser Annahme liegt, dem Folgenden (Art. 8 ff.) vorbehalten bleiben soll. Läge eine solche Kugel ganz frei im Raume, so würde sie dem Beobachter die Lichtmenge q' zusenden. Setzt man:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{\mu L}{2\pi P} \cdot \frac{1}{\Delta^2} \\ f(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \int_{\alpha}^{\pi} \varphi(\sin \vartheta \sin(\omega - \alpha), \sin \vartheta \sin \omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

so wird nach dem vorigen Artikel:

$$q' = \Gamma f(\alpha) \cdot \varrho^2$$

Thatsächlich wird nun aber die Lichtmenge q' nicht voll zur Geltung kommen, denn die einzelnen Kugeln werden von den davorliegenden theilweise verdeckt und von den zwischen ihnen und der Lichtquelle liegenden zum Theil beschattet. Bei der Ableitung der Lichtmenge, welche ein auf der Gesichtslinie senkrecht stehendes Flächenelement $d\sigma$ dem Beobachter zusendet, kann es sich natürlich nur um Mittelwerthe handeln. In I ist nun ausführlich gezeigt worden, dass in der That nur ein Bruchtheil von q' wirksam bleibt und zwar die Lichtmenge

$$\dot{q} = q' \cdot w \quad (2)$$

Hierbei ist w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der gegebenen Massenvertheilung ein unendlich kleiner Raum im Inneren der Masse weder beschattet noch verdeckt wird. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich näherungsweise, wenn die Kugeln nicht gar zu dicht bei einander stehen, wie a. a. O. in etwas speciellerer Form bewiesen, so berechnen. Man nenne D die Anzahl der Kugeln, welche in der Raumeinheit enthalten sind und V den Kubikinhalte eines ganz innerhalb der Massenvertheilung liegenden Raumes, der begrenzt wird von zwei Kreiscylindern vom Radius ϱ , deren Axen von der betrachteten kleinen Kugel aus nach der Lichtquelle bzw. nach dem Beobachter gerichtet sind. Denkt man

sich demnach die Volumeneinheit dieses aus zwei sich gegenseitig durchsetzenden Cylindern bestehenden Raumes mit der Masse D belegt und berechnet seine Masse: $\int D dv$, wo dv ein Volumenelement bedeutet, so ist

$$w = e^{-\int D dv}$$

D ist im Allgemeinen eine Funktion des Ortes. Man wird sich also, da die Begrenzung des staubförmigen Körpers gegeben sein muss, $\int D dv$ dargestellt denken können als Funktion der Richtungen nach der Lichtquelle und nach dem Beobachter und des Stückes der in der letzteren Richtung gelegenen Geraden, welches zwischen der betrachteten kleinen Kugel und der Begrenzung des Körpers liegt. Ist dx ein Element dieser Strecke, so wird ein kleines Volumenelement, das jedoch als sehr gross gegenüber einer kleinen Kugel zu betrachten ist, von einer Anzahl Kugeln erfüllt sein, welche gegeben ist durch

$$D \cdot dx \cdot d\sigma$$

und da die Lichtmenge, welche jede Kugel der Erde zusendet, durch (2) gegeben ist, erhält man die Lichtmenge aller Kugeln zusammen, welche innerhalb des Körpers liegen und zu der scheinbaren Helligkeit des scheinbaren Flächenelementes $d\sigma$ beitragen

$$q' d\sigma \int_0^x D e^{-\int D dv} \cdot dx$$

wo X die Länge der innerhalb des Körpers gelegenen Strecke der Geraden bedeutet, welche durch $d\sigma$ und den Beobachter hindurchgeht.

Die Flächenhelligkeit J des Elementes $d\sigma$ ist also:

$$J = I f(\alpha) \cdot \varrho^2 \int_0^x D e^{-\int D dv} \cdot dx \quad (3)$$

Die wirkliche Ausrechnung dieses allgemeinen Ausdruckes ist natürlich nur möglich, wenn D bekannt ist. Ich will mich, da zu anderen besonderen Annahmen keine Veranlassung vorliegt, auf den Fall be-

schränken, in welchem eine homogene Massenvertheilung vorliegt. Ist dann R der Inhalt des ganzen Körpers, der aus N Kugeln zusammengesetzt ist, so hat man $D = \frac{N}{R}$ und

$$J = \Gamma f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \int_0^x e^{-\frac{N}{R} V} \cdot dx \quad (4)$$

V hängt offenbar, da gleiches der Fall ist mit der Grösse des gemeinschaftlichen Theiles der beiden in Frage kommenden Cylinder, vom Phasenwinkel α ab und die Aufstellung des allgemeinen Ausdruckes ist etwas verwickelt. In zwei Fällen jedoch gestaltet sich die Berechnung überaus einfach. Der erste Fall tritt ein, wenn α nicht klein ist. Dann ist das gemeinsame Stück der das V bildenden Cylinder sehr klein gegenüber dem Inhalt der anderen und man wird einfach haben

$$V = \varrho^2 \pi (x + x_1)$$

wo x_1 die Strecke der von einer kleinen Kugel der Masse nach der Sonne gezogenen Geraden ist, welche innerhalb des staubförmigen Körpers liegt. Man hätte nun x_1 als Funktion von x auszudrücken, um die Integration in (4) auszuführen. Das ist nun stets möglich, wenn die Form der Begrenzung des Körpers gegeben ist.

Der zweite Fall tritt ein, wenn α genau gleich Null ist. Dann hat man

$$V = \varrho^2 \pi x$$

und

$$J_0 = \frac{\Gamma f(0)}{\pi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{N}{R} \varrho^2 \pi x} \right) \quad (5)$$

Giengen man aber von dem zuerst betrachteten Fall aus und nähme man darauf keine Rücksicht, dass die beiden das V bildenden Cylinder einen gemeinschaftlichen Raum haben, so hätte man für $\alpha = 0$

$$V = 2 \varrho^2 \pi x$$

und

$$J_1 = \frac{\Gamma f(0)}{2\pi} \left\{ 1 - e^{-\frac{N}{R} \cdot 2 \varrho^2 \pi x} \right\} \quad (5a)$$

Diese beiden Werthe J_0 und J_1 weichen sehr wesentlich von einander ab und hierin besteht der grundsätzliche Unterschied zwischen der gewöhnlichen Absorptionstheorie und der Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen. Die letztere ergibt, da sich J (4) bei kleinem α meistens nur sehr wenig ändert, eine unter Umständen sehr bedeutende Zunahme der Helligkeit bei sehr geringer Abnahme von α , eine Thatsache, die durch die gewöhnlichen Formeln für zerstreut reflectirende Substanzen in diesem Betrage absolut nicht zu erklären ist.

Diese Zunahme kann gemessen werden durch

$$\frac{J_0}{J_1} = 2 \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}}$$

wobei der Kürze wegen gesetzt worden ist

$$\lambda = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi X$$

Das Maximum dieses Einflusses tritt ein, wenn der staubförmige Körper fast undurchsichtig erscheint. Dies wird ausgedrückt dadurch, dass man λ sehr gross anzunehmen hat. Dann aber wird

$$\frac{J_0}{J_1} = 2$$

Die Helligkeit (im obigen Sinne gemessen) steigt also etwa auf das Doppelte, wenn α von kleinen Werthen bis zu Null abnimmt.

Ist dagegen der Körper äusserst durchsichtig, so wird λ sehr klein und man nähert sich bei abnehmendem λ dem Grenzwert

$$\frac{J_0}{J_1} = 1$$

wo schliesslich die ganze erwähnte Helligkeitszunahme nicht mehr zum Vorschein kommt. Die Zwischenstufen zwischen diesen beiden extremen Fällen sind es nun, die insofern ein besonderes Interesse darbieten, weil zu ihnen der sogenannte dunkle Ring des Saturn gehört. Ehe ich zu der Betrachtung dieses Gegenstandes übergehe, soll zunächst ein Beispiel zu der in (4) angegebenen Integration besprochen werden.

3.

Es sei eine kugelförmige homogene Staubwolke mit dem Radius a gegeben. Es werde von der im letzten Artikel erwähnten Lichtvariation ganz abgesehen, also nur der Fall betrachtet, wo a nicht sehr klein ist. In der Formel (4) ist dann X die Kugelsehne, welche in der Richtung nach dem sehr entfernten Beobachter verläuft. Ist h das Stück der Sehne X zwischen einem auf ihr liegenden Punkte A und der dem Beobachter zugekehrten Kugeloberfläche und h_1 das Stück einer Sehne, die von jenem Punkte parallel zu der Richtung nach der sehr entfernten Lichtquelle verläuft, und zwar dasjenige, welches zwischen dem Punkte und der der Lichtquelle zugewandten Oberfläche liegt, und bezeichnet weiter s die kürzeste Entfernung der Sehne X vom Centrum der Kugel, so hat man

$$V = \varrho^2 \pi (h + h_1)$$

$$X = 2 \sqrt{a^2 - s^2}$$

und die Formel (4) für die Flächen-Helligkeit wird

$$J = I f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \cdot K$$

$$K = \int_0^X e^{-\lambda(h+h_1)} \cdot dh \quad (1)$$

worin gesetzt worden ist

$$\lambda = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi$$

Legt man in den Mittelpunkt der Kugel als Anfang ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen X Axe die Richtung nach dem Beobachter hat und in deren XZ Ebene die Richtung nach der Lichtquelle liegt, so sind die Coordinaten des Punktes A :

$$\xi = (\sqrt{a^2 - s^2} - h)$$

$$\eta = s \sin \vartheta$$

$$\zeta = s \cos \vartheta$$

Es ist hierin ϑ der Winkel, welchen die Ebene A -Beobachter-Centrum der Kugel mit der XZ Ebene bildet. Ferner sei, wie früher, α die vom Kugelcentrum gesehene scheinbare Entfernung der Lichtquelle vom Beobachter. In Bezug auf ein Coordinatensystem, welches dem soeben benutzten parallel gerichtete Axen hat, dessen Anfang aber in A liegt, ist die Gleichung der Kugel

$$(x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2 = a^2$$

Dreht man nun das Coordinatensystem um seine Y Axe so, dass die neue X' Axe die Richtung nach der Lichtquelle erhält, setzt also:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - z' \sin \alpha \\ z &= x' \sin \alpha + z' \cos \alpha \end{aligned}$$

setzt dies in die Gleichung der Kugel ein und macht hierauf $y = z' = 0$, so wird x' gleich dem gesuchten h_1 . Auf diese Weise ergibt sich:

$$h_1 = -(\xi \cos \alpha + \zeta \sin \alpha) + \sqrt{(\xi \cos \alpha + \zeta \sin \alpha)^2 + 2h \sqrt{a^2 - s^2} - h^2}$$

indem leicht einzusehen ist, dass das positive Wurzelzeichen zu nehmen ist. Eine einfache Substitution der früheren Gleichungen ergibt nun folgendes Resultat: Man setze:

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{a^2 - s^2} \cdot \cos \alpha + s \cos \vartheta \sin \alpha \\ F &= \sqrt{a^2 - s^2} \cdot \sin \alpha - s \cos \vartheta \cos \alpha \\ G^2 &= F^2 + f^2 = a^2 - s^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

dann wird

$$h + h_1 = 2h \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - f + \sqrt{G^2 - (F - h \sin \alpha)^2}$$

und demzufolge:

$$K = \int_0^{2\sqrt{a^2 - s^2}} dh \cdot e^{-\lambda [2h \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - f + \sqrt{G^2 - (F - h \sin \alpha)^2}]} \quad (4)$$

Dieses Integral ist entweder mechanisch oder durch passende Reihenentwicklungen zu berechnen, worauf nicht weiter eingegangen werden soll.

Man kann sich indessen auch ohne die Ausführung dieser Berechnung einen Ueberblick über die Helligkeitsvertheilung auf der Kreisscheibe, als welche sich die Staubkugel darstellt, verschaffen, bei constant gehaltenem α .

Differentiirt man (4) partiell nach ϑ , so ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\frac{\partial K}{\partial \vartheta} = - \lambda s \sin \vartheta \sin \alpha \int_0^{2\sqrt{a^2-s^2}} \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\sqrt{G^2-(F-h\sin\alpha)^2}} h_1 \cdot dh$$

woraus folgt, dass, da $\alpha < 180^\circ$ ist, $\frac{\partial K}{\partial \vartheta}$ negativ bleibt für Werthe $0 < \vartheta < 180^\circ$ und stets positiv für Werthe $180^\circ < \vartheta < 360^\circ$. Auf dem grössten Kreise Beobachter-Lichtquelle liegen also die grössten Werthe von J bei $\vartheta = 0$. Von da nehmen die J nach beiden Seiten ab und erreichen auf der Fortsetzung des genannten grössten Kreises, welche von der Lichtquelle abgewendet ist, ihre Minimalwerthe.

Auf dem grössten Kreise ($\vartheta = 0$) liegt also auch das absolute Maximum und zwar existirt ein solches zwischen $s = 0$ und $s = a$, d. h. auf der sichtbaren Seite der kugelförmig angeordneten Staubwolke.

Denn es wächst J für $s = 0$ mit zunehmendem s und für $s = a$ ist $J = 0$. Das letztere folgt von selbst aus (4). Um das erstere nachzuweisen, müssen wir $\frac{\partial J}{\partial s}$ bilden. Bezeichnet man $h + h_1 = S(h)$ so wird

$$\frac{\partial K}{\partial s} = e^{-\lambda \cdot S(X)} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} - \lambda \int_0^X e^{-\lambda S(h)} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} dh; \quad X = 2\sqrt{a^2-s^2}$$

Es ergibt sich weiter:

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{G^2-(F-h\sin\alpha)^2}} \cdot \left\{ \frac{-hs}{\sqrt{a^2-s^2}} + h_1 \left[\frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}} \cos \alpha - \cos \vartheta \sin \alpha \right] \right\}$$

$$\frac{\partial X}{\partial s} = - \frac{2s}{\sqrt{a^2-s^2}}$$

für $s = 0$ findet man demnach

$$\frac{\partial K}{\partial s} = + \lambda \int_0^X e^{-\lambda S(h)} \cdot \frac{h_1 \cos \vartheta \sin \alpha}{\sqrt{G^2-(F-h\sin\alpha)^2}} dh$$

welcher Ausdruck einen positiven Werth besitzt.

Der direkte Einfluss der Phase wird sich natürlich nach Massgabe von $f(\alpha)$ zeigen.

Es muss übrigens bemerkt werden, dass $f(\alpha) = \frac{1}{r^2} \cdot \varphi(\alpha)$, wo r die Entfernung der Staubkugel von der Lichtquelle und $\varphi(\alpha)$ eine nur von α abhängige Funktion bedeutet.

Die Gesamtlichtmenge Q , welche die ganze Kugel dem Beobachter zusendet, ergibt sich aus

$$Q = \int J \cdot d\sigma$$

Die Integration ist hierbei auf alle Flächenelemente der sichtbaren Scheibe auszudehnen. Es soll dieser Ausdruck nur für $\alpha = 0$ abgeleitet werden. In diesem Falle ist

$$Q = I f(0) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \cdot \int d\sigma \int_0^x e^{-\lambda h} dh$$

Nennt man x den Winkel, den ein Flächenelement ds mit der Richtung nach dem Beobachter bildet, so ist

$$d\sigma = ds \cdot \cos x$$

daher:

$$d\sigma = a^2 \sin x \cos x \cdot d\vartheta \cdot dx$$

und die Integration ist auszudehnen auf alle Werthe von x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und in Bezug auf ϑ von 0 bis 2π . Es ergibt sich so, da $X = 2a \cos x$

$$Q = 2\pi a^2 \varrho^2 \cdot \frac{N}{\lambda R} \cdot I f(0) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x (1 - e^{-2\lambda a \cos x}) dx$$

oder $2\lambda a = \nu$ gesetzt:

$$Q = \pi a^2 \varrho^2 \frac{N}{\lambda R} \cdot I f(0) \frac{\nu^2 - 2 + 2(1 + \nu)e^{-\nu}}{\nu^2}$$

oder auch

$$Q = I f(0) \cdot a^2 \frac{\nu^2 - 2 + 2(1 + \nu)e^{-\nu}}{\nu^2}$$

Es ist hierin

$$\nu = 2\varrho^2 \pi a \frac{N}{R} = \frac{3}{2} N \left(\frac{\varrho}{a} \right)^2$$

eine absolute Zahl. Wenn die Masse undurchsichtig oder $\nu = \infty$ ist, ist Q demnach übereinstimmend mit der Lichtmenge, die eine jede der kleinen Kugeln aussenden würde, wenn sie denselben Radius wie die Gesamtkugel hat erhielte.

4.

In I habe ich nur eine vollständige Entwicklung für den einen der beiden in Art. 2 erwähnten Grenzfälle gegeben, nämlich, wenn die Staubmasse undurchsichtig ist und diese auf den hellen Saturnring angewandt, welcher allem Anscheine nach in diese Klasse von kosmischen Körpern gehört. Indem ich mich nun zu der Betrachtung des allgemeineren Falles wende, sollen die in I gegebenen Entwicklungen zu Grunde gelegt werden, denn mit ihrer Hülfe ist es leicht die wünschenswerthe Verallgemeinerung zu erlangen. Der Einfachheit wegen soll auch jetzt, wie in I, angenommen werden, dass die Staubmasse durch zwei parallele Ebenen begrenzt ist, welche Annahme übrigens, da nur kleine Winkel α in Betracht gezogen werden, kaum eine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da sie leicht umgangen werden kann.

Nach den Entwicklungen I, S. 494 ff. hat man zu setzen, um die Formel Art. 2, 4 anwenden zu können:

$$\frac{\cos A \sin \delta}{\sin A + \sin A'} \sin \alpha = \operatorname{tg} \mu; \quad h = x \sin A; \quad H = X \sin A$$

$$h_0 = \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\cos \mu \sin \alpha}; \quad \sin \varphi = \frac{h \cos \mu \sin \alpha}{\varrho (\sin A + \sin A')}$$

Dann kann man die Formel Art. 2, 4 schreiben:

$$J = I f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \varrho^2 \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{N}{R} v} \cos \varphi d\varphi + \int_{h_0}^H e^{-\frac{N}{R} v} dh \right\} \quad (1)$$

Hierin bedeuten A und A' die Elevationswinkel der Erde bzw. der Sonne über der Begrenzungsfläche (Ringebene), δ den Winkel zwischen der Ebene Saturncentrum — Erde — Sonne und der durch Saturn und Erde senkrecht auf die Ringebene gelegten Ebene. Ferner ist h die Tiefe der betrachteten Stelle des Ringes unter der oberen Ringebene und H die Dicke des Ringes. Die Formel (1) gilt offenbar nur wenn $H > h_0$. In andern Falle hat man

$$J = I f(\alpha) \cdot \frac{N}{R} \cdot \frac{\varrho^3}{\sin A} \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha \cos \mu} \int_0^{\varphi_1} e^{-\frac{N}{R} v} \cos \varphi d\varphi \quad \left. \begin{array}{l} \\ \sin \varphi_1 = \frac{H \cos \mu \sin \alpha}{\varrho (\sin A + \sin A')} \end{array} \right\} \quad (1 a)$$

Nach I S. 495 hat man weiter

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin \alpha \sin A \sin A'} \cdot \frac{\varrho^3}{\cos \mu} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\} - \frac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \frac{2}{3} \right\}$$

so kann man die letzte Formel auch schreiben:

$$V = \frac{(\sin A + \sin A')^2 \varrho^3}{\sin \alpha \sin A \sin A' \cos \mu} \left\{ \frac{8\pi}{3} \Phi + \frac{2}{3} \right\} - \frac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Wenn man weiter setzt:

$$m = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'}$$

so wird

$$\int_{h_0}^H e^{-\frac{N}{R} V_2} dh = \frac{1}{m} e^{\frac{4N\varrho^3(1+\cos\alpha)}{3R\sin\alpha}} \cdot \left\{ e^{-mh_0} - e^{-mH} \right\}$$

Man führe nun die Bezeichnungen ein:

$$\delta = \frac{32}{3} \cdot \frac{\varrho^3 \pi}{R}; \quad \xi = \frac{N\delta}{\cos \mu \sin \alpha} \cdot \frac{(\sin A + \sin A')^2}{4 \sin A \sin A'}$$

$$\mathfrak{A}(\xi) = \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi \Phi} \cos \varphi d\varphi; \quad \mathfrak{B}(\xi) = \frac{8}{3} e^{-\xi \frac{3\pi-2}{8\pi}}$$

Hierdurch wird

$$mh_0 = \frac{3}{8} \xi; \quad m = \frac{3}{32} \frac{\sin A + \sin A'}{\varrho \sin A \sin A'} N\delta$$

und die Klammergrösse in (1):

$$\frac{\varrho \sin A + \sin A'}{\xi \sin \alpha \cos \mu} \left\{ \mathfrak{A}(\xi) e^{-\frac{\xi}{4\pi} + \frac{1}{8} \frac{N\delta}{\pi} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}} \right\} + \frac{1}{m} e^{\frac{N\delta}{8\pi} \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}} \cdot \left[e^{-\frac{3}{8}\xi} - e^{-mH} \right]$$

Wenn man, was im vorliegenden Falle erlaubt ist, α so klein annimmt, dass seine zweiten Potenzen vernachlässigt werden können, dann ist:

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{4 \sin A \sin A'} = 1; \quad \xi = \frac{N\delta}{\cos \mu \sin \alpha}$$

und die Formel (1) wird:

$$J = \frac{3}{32\pi} \cdot I'f(\alpha) \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \left\{ (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) e^{-\frac{\xi}{2\pi} \sin^2 \frac{1}{2}\mu} - \frac{8}{3} e^{\frac{\xi \cos \mu}{4\pi}} \cdot e^{-\frac{3}{8} \cdot \frac{N\delta}{\sin A + \sin A'} \cdot \frac{H}{\varrho}} \right\} \quad (2)$$

Diese Formel gilt, wie bereits erörtert, nur wenn

$$H > \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\cos \mu \sin \alpha}$$

oder, was dasselbe ist, wenn:

$$\frac{N\delta}{\sin A + \sin A'} \cdot \frac{H}{\varrho} > \xi$$

Im anderen Falle ist Formel (1 a) anzuwenden, die unter denselben Voraussetzungen, unter denen (2) aufgestellt worden ist, sich so schreiben lässt:

$$J = \frac{3}{32\pi} I'f(\alpha) \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \cdot \xi e^{-\frac{\xi \sin^2 \frac{1}{2}\mu}{2\pi}} \cdot \left. \int_0^{\varphi_1} e^{-\xi \Phi} \cos \varphi d\varphi \right\} \quad (2a)$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{H}{\varrho} \cdot \frac{\cos \mu \sin \alpha}{\sin A + \sin A'}$$

Es ist leicht zu sehen, dass (2a) für $\alpha = 0$ in die Formel Art. 2, 5 übergeht. Bei der Anwendung der Formeln (2) und (2a) darf nicht vergessen werden, dass dieselbe nicht mehr mit Sicherheit geschehen kann, wenn A und A' sehr klein sind. Es folgt dies aus den Grundlagen der ganzen Betrachtung.

Man wird ferner, wie auch in I bemerkt worden, im Allgemeinen $\mu = 0$ setzen dürfen. Es soll dies weiterhin geschehen.

Im Folgenden wird es sich darum handeln, den Gang der Lichtcurve für kleine α im Grossen und Ganzen zu verfolgen und ich will, zur Bequemlichkeit, die gar keine Folgen haben kann, einfach den Factor

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} = 2$$

setzen. Da sich $f(\alpha)$ bei sehr kleinen α gewiss nur sehr wenig ändern kann, soll auch noch

$$\frac{I'f(\alpha)}{\pi} = I' \quad (3)$$

als eine Constante betrachtet werden.

Wenn $H = \infty$ gesetzt wird, erhält man aus (2) die Formel, welche in I ausführlich besprochen worden ist. Man führt dann noch ein

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

während den obigen Bemerkungen gemäss

$$\xi = \frac{N\delta}{\sin \alpha}$$

zu setzen ist. Dann wird also

$$J = \frac{3}{16} I' \mathfrak{C}(\xi) \quad (4)$$

welches die Hauptformel I, S. 481 war. Ich möchte nur einige kurze Bemerkungen zu dem a. a. O. Gesagten hinzufügen.

In I ist für verschiedene Werthe ξ die Funktion $\frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(\xi)}$ in Tafel VI gegeben worden. Ich füge diese Tafel, sowie einige andere von selbst verständliche, auch dieser Abhandlung bei, weil dieselben hier an mehreren Stellen gebraucht werden. Ferner wurde in I für einzelne Werthe von $N\delta$ diese Tafel nach dem Argumente α angeordnet (Tafel VII). Aus diesen Zahlen folgt schon, dass die ganze Lichtvariation sich umsomehr in der Nähe von $\alpha = 0$ abspielt, je kleiner $N\delta$ ist. Es geht diese Tatsache noch deutlicher hervor, wenn man die a. a. O. gegebene Tafel durch Hinzuziehung kleinerer Werthe $N\delta$ erweitert. Einige Zahlen mögen dies illustriren:

		log $\mathfrak{C}(\xi)$			
	$N\delta =$	0.1	0.05	0.01	0.005
$\alpha = 0^\circ$		0.727	0.727	0.727	0.727
	0.1	0.686	0.656	0.546	0.501
	0.2	0.656	0.614	0.501	0.469
	0.3	0.633	0.585	0.480	0.456
	0.4	0.614	0.563	0.469	0.449
	0.5	0.598	0.546	0.461	0.445
	1.0	0.546	0.501	0.445	0.436
	2.0	0.501	0.469	0.436	0.431
	3.0	0.480	0.456	0.432	0.429
	4.0	0.469	0.449	0.431	0.428
	5.0	0.461	0.445	0.430	0.428

Die Zahlen jeder Verticalreihe streben dem Grenzwerte 0.426 zu. Man sieht also, dass sich die Helligkeit z. B. für $N\delta = 0.005$ bereits

bei $\alpha = 0^{\circ}.5$ bis auf etwa 4% auf die Hälfte reducirt hat und für grössere α sich fast gar nicht mehr ändert. Nimmt man $N\delta = 0.00017$, so hat sich die ganze bedeutende Lichtvariation zwischen $\alpha = 0^{\circ}$ und $\alpha = 0^{\circ}.1$ bis auf etwa 1% vollständig abgespielt. Da nun $N\delta$ nichts anderes angiebt als die Dichtigkeit, welche die Staubwolke besitzt, so ergiebt sich Folgendes:

Eine staubförmige Masse, die so dick ist, dass sie fast undurchsichtig erscheint, weist eine Flächenhelligkeit auf, die sehr stark mit abnehmendem Phasenwinkel zunimmt. Dieselbe kann für $\alpha = 0$ fast bis zum doppelten Betrage steigen, den sie bei sehr kleinen α besitzt. Diese sehr bedeutende Lichtvariation spielt sich bei um so kleineren α ab, je geringer die Dichtigkeit der staubförmigen Masse ist.

Welche bedeutende Rolle dem geschilderten Verhältnisse bei der Beleuchtung des hellen Saturnringes zukommt, ist in I ausführlich erörtert worden und braucht deshalb an dieser Stelle nicht wiederholt zu werden.

Es ist schon oben bemerkt worden, dass bei durchsichtigen Staubwolken die Variation der Helligkeit in der Nähe der Opposition weniger deutlich auftrat und schliesslich bei grosser Durchsichtigkeit ganz unmerklich wird. Im Uebrigen gilt bei ihnen etwas ähnliches, wie bei fast undurchsichtigen Massen, indem sich die mehr oder weniger deutliche Lichtzunahme bei immer kleineren α abspielt, je dünner die Massenvertheilung ist. Als Maass für die Undurchsichtigkeit einer staubförmigen Masse kann die Grösse

$$\nu = \frac{N\delta}{\sin A + \sin A'} \frac{H}{\varrho}$$

angesehen worden. Wenn man dann die oben (S. 18) angedeuteten Vernachlässigungen zu machen sich erlaubt, so wird die Formel (2)

$$J = \frac{3}{16} I' \left\{ \zeta - \frac{8}{3} e^{-\frac{3\pi\nu - 2\xi}{8\pi}} \right\} \quad (5)$$

Diese Formel gilt nur für $\nu > \xi$. Im andern Falle ist (2a) anzuwenden:

$$J = \frac{3}{16} I' \xi \int_0^{\varphi_1} e^{-\xi\Phi} \cos \varphi d\varphi; \quad \sin \varphi_1 = \frac{\nu}{\xi} \quad (5a)$$

Für $\xi = \nu$ geben (5) und (5 a) dasselbe, nämlich:

$$J = \frac{3}{16} I' \mathfrak{A}(\nu)$$

Setzt man allgemein $\nu = \xi + \sigma$, wo σ eine positive Grösse sein soll, so wird (5):

$$J = \frac{3}{16} I' \left\{ \mathfrak{A}(\xi) + \mathfrak{B}(\xi) \left(1 - e^{-\frac{3}{8}\sigma} \right) \right\} \quad (6)$$

Man sieht hieraus, dass für $\nu > 14$ die Helligkeit sich von der eines undurchsichtigen Körpers nur um 1% unterscheiden kann, denn es ist dann $\mathfrak{A} > 4.05$ und $\mathfrak{B} < 0.04$. Setzt man noch in (5 a) $\alpha = 0$, so wird:

$$J_0 = I' \left\{ 1 - e^{-\frac{3}{16}\nu} \right\}$$

Die Grösse der Lichtvariation bei kleinen α wird wieder durch den Quotienten $\frac{J_0}{J}$ charakterisirt, wo J aus (5) oder (5 a) zu entnehmen ist. Wenn demnach dieser Quotient für ein bestimmtes ν , also einen bestimmten Grad der Durchsichtigkeit, einen bestimmten Betrag annimmt, so wird dies für einen bestimmten Werth von

$$\xi = \frac{N\delta}{\sin \alpha}$$

eintreten, also bei um so kleineren Werthen von α , je kleiner $N\delta$ ist.

Als Maass der Lichtvariation kann man nach Art. 2 den Ausdruck ansehen

$$\frac{J_0}{J_1} = \frac{2(1 - e^{-\lambda})}{1 - e^{-2\lambda}}; \quad \lambda = \frac{3}{16} \nu$$

und für kleine λ

$$\frac{J_0}{J_1} = 1 + \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{24} \lambda^3 \dots$$

Es ergibt sich hieraus, dass schon für mässig grosse Werthe von λ sehr merkbare Lichtvariationen eintreten. Man findet:

λ	$\frac{J}{J_0}$
0.05	1.025
0.10	1.050
0.15	1.075
0.20	1.100
0.5	1.26
1.0	1.44

Die mitgetheilten Formeln enthalten Alles, was zur vollständigen Berechnung der Lichtvariation nöthig ist und die Tafel für $\mathfrak{C}$ wird diese Rechnungen wesentlich erleichtern. Nur das in (5 a) vorkommende Integral wäre noch von Fall zu Fall zu berechnen, was keine grösseren Schwierigkeiten verursachen dürfte.

Wenn wir nun noch im Speciellen hervorheben, welche Folgen die Annahme, dass der Staubkörper, wie der Saturnring, durch zwei parallele Ebenen begrenzt ist, nach sich zieht, so ist zunächst zu bemerken, dass die Flächenhelligkeit überall gleich und zwar J ist. Für einen undurchsichtigen Körper ist für $\alpha = 0$

$$J_0 = \frac{\Gamma}{\pi} f(0) \quad (7)$$

dagegen für einen durchsichtigen

$$J_0 = \frac{\Gamma}{\pi} f(0) \left\{ 1 - e^{-\frac{3}{32} \frac{N \delta H}{\varrho \sin A}} \right\} \quad (7 a)$$

Im letzteren Fall ist also die Helligkeit wesentlich von A abhängig. Für äusserst durchsichtige Körper ändert sich dann J_0 umgekehrt proportional mit $\sin A$, denn es ist

$$J_0 = \frac{3}{32} \frac{\Gamma}{\pi} f(0) \frac{N \delta H}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sin A}$$

Bei einer undurchsichtigen Masse kann man die Albedo μ jeder einzelnen Kugel bestimmen aus der Kenntniss von J_0 . Denn wenn man (7) vergleicht mit Formel Art. 2, 1, so ergibt sich

$$\mu = \frac{2\pi^2 P A^2}{f(0) L} \cdot J_0$$

Nehmen wir z. B. an, dass sich μ auf den hellen Saturnring beziehe und vergleichen wir hiermit die Mitte der Saturnscheibe in der Opposition. Die entsprechenden Grössen für letztere sollen mit einem Strich bezeichnet werden. Nach Artikel 1 ist dann, da $i = \varepsilon = 0$

$$\mu' = \frac{2\pi P' A'^2}{\varphi(0,0) L} J_0'$$

und demzufolge:

$$\frac{\mu}{\mu'} = \pi \frac{P}{P'} \cdot \frac{\varphi(0,0)}{f(0)} \cdot \frac{J_0}{J_0'}$$

Um diesen Ausdruck reduciren zu können, muss eine Annahme über das elementare Beleuchtungsgesetz gemacht werden. Ich will, was ich schon bei früheren Gelegenheiten als zweckmässig bezeichnet habe, das Lambert'sche Gesetz und das zweite (N) in Art. 1 erwähnte in Betracht ziehen, und die zu dem einen oder andern gehörigen Ausdrücke mit dem Index L bzw. N versehen. Zunächst ist für beide Fälle $P = P' = \frac{1}{2}$. Ferner:

$$\varphi_L(0,0) = 1; \quad \varphi_N(0,0) = \frac{1}{2}; \quad f_L(0) = \frac{2\pi}{3}; \quad f_N(0) = \frac{\pi}{2}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} \mu_L = \mu'_L \cdot \frac{3}{2} \frac{J_0}{J_0'} & \mu_N = \mu'_L \cdot 2 \frac{J_0}{J_0'} \\ \mu_L = \mu'_N \cdot \frac{3}{4} \frac{J_0}{J_0'} & \mu_N = \mu'_N \frac{J_0}{J_0'} \end{array}$$

Wenn wir gleich eine Anwendung dieser Formeln auf die thatsächlichen Verhältnisse beim hellen Saturnring machen wollen, so ist zu bemerken, dass die hellsten Theile des hellen Ringes heller sind als die Saturnmitte.

Wir haben da hiefür $\frac{J_0}{J_0'} > 1$ anzusetzen.

Nach den Beobachtungen von Zöllner ist $\mu'_L = 0.498$, woraus sich ergibt $\mu'_N = 0.664$. Es wäre also:

$$\mu_L > 0.747 \text{ oder } \mu_L > 0.498$$

je nachdem für die Saturnscheibe L oder N angenommen wird. Ebenso ergibt sich in beiden Fällen:

$$\mu_N > 0.996 \text{ oder } \mu_N > 0.664$$

Man wird nun wohl kaum behaupten dürfen, dass die den μ'_L entsprechenden Werthe besonders wahrscheinlich sind, denn sie geben ganz ausserordentlich grosse Albedowerthe.

Es scheint mir dieser Umstand mit einiger Wahrscheinlichkeit den Schluss zuzulassen, dass die Oberfläche des Saturn dem Lambert'schen Gesetze nicht folgt.

Die Grösse ν , welche die Durchsichtigkeit der Staubmasse definirt, kann dadurch bestimmt werden, dass man beobachtet, wieviel das Licht

einer Lichtquelle, z. B. eines Fixsternes geschwächt wird, wenn dasselbe den genannten Körper passiert. Das Licht eines Fixsterns von der Helligkeit J_0 wird nach dem Passiren der Staubwolke von der Dicke $\frac{H}{\sin A}$ — in der Richtung des Lichtstrahles gemessen — die Helligkeit

$$J = J_0 e^{-\lambda}$$

haben, wo

$$\lambda = \frac{3}{16} \nu = \frac{3}{32} \cdot \frac{N\delta}{\varrho} \cdot \frac{H}{\sin A}$$

Man hat also:

$$\lambda = - \frac{1}{\log e} \log \left(\frac{J}{J_0} \right)$$

Ist die Schwächung des Lichtes in Sterngrößen angegeben, so muss man sich erinnern, dass nach der gewöhnlichen Annahme zwischen den Intensitäten J, J_0 und den entsprechenden Sterngrößen m, m_0 die Gleichung besteht

$$m - m_0 = - 2.512 \log \frac{J}{J_0}$$

womit man erhält:

$$\lambda = 0.917 \cdot (m - m_0) \quad (8)$$

Es soll nun noch die Beleuchtung studirt werden, welche ein Flächenelement darbietet, das durch eine Staubmasse hindurch von der Sonne beleuchtet und durch dieselbe von der Erde aus betrachtet wird.

Ein Element ds bekomme bei ganz freier Lage die Lichtmenge $ds L \cos i$ von der Sonne. Dann wird es thatsächlich die Lichtmenge

$$ds L \cos i \cdot e^{-\lambda'}; \quad \lambda' = \frac{3}{32} \frac{N\delta}{\varrho} \cdot \frac{H'}{\sin A'}$$

erhalten, wo $\frac{H'}{\sin A'}$ das Stück der in der Richtung nach der Sonne gezogenen Geraden ist, welches innerhalb der Staubmasse liegt. Hiernach würde die Erde, falls diese, vom Elemente ds aus gesehen, ganz freistünde, die Lichtmenge erhalten

$$\gamma \cdot ds \frac{L}{A^2} e^{-\lambda'} \varphi(i, \epsilon); \quad \gamma = \frac{\mu'}{2\pi P'}$$

wenn die Bezeichnungen der Artikel 1 und 2 beibehalten werden. In Wirklichkeit wird demnach die der Erde zugesendete Lichtmenge sein:

$$dQ = \gamma ds \frac{L}{A^2} \varphi(i, \varepsilon) \cdot e^{-(\lambda+\lambda')} ; \quad \lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{N\delta}{\varrho} \frac{H}{\sin A}$$

wo dann $\frac{H}{\sin A}$ die Dicke der Staubmasse in der Richtung ds — Erde ist. Die scheinbare Helligkeit findet sich hieraus:

$$\frac{dQ}{ds \cos \varepsilon} = \gamma \cdot \frac{L}{A^2} \cdot \frac{\varphi(i, \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \cdot e^{-(\lambda+\lambda')}$$

Hierzu kommt noch das Licht, welches die scheinbar vor ds gelagerten kleinen Kugeln der Erde zusenden. Die hierdurch erzeugte Helligkeit ist durch eine der beiden Formeln (2) oder (2 a) gegeben. Die Gesamthelligkeit I des Flächenelementes ds wird demnach:

$$I = \gamma \frac{L}{A^2} \frac{\varphi(i, \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \cdot e^{-(\lambda+\lambda')} + J \quad (9)$$

Zur Discussion dieser allgemeinen Formel nehmen wir, wie oben, an, dass der Phasenwinkel sehr klein sei und nehmen für J entweder J_0 oder J_1 , setzen also entweder in (2 a) direct $\alpha = 0$ oder gehen von der für nicht kleine α geltenden Formel aus und setzen in ihr nachträglich $\alpha = 0$.

Nach Art. 2, (5) und (5 a) ist aber:

$$J_0 = \frac{f(0)}{2\pi^2} \cdot \frac{\mu L}{P A^2} \left\{ 1 - e^{-\lambda} \right\}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \frac{f(0)}{2\pi^2} \cdot \frac{\mu L}{P A^2} \left\{ 1 - e^{-2\lambda} \right\}$$

Erlauben wir uns in (9) noch $i = \varepsilon$ und $\lambda = \lambda'$ zu setzen, was bei den späteren Anwendungen dieser Formel gewiss gestattet ist, so wird in den beiden Fällen:

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{L}{2\pi A^2} \left\{ \frac{\mu'}{P'} \cdot \frac{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)}{\cos \varepsilon} e^{-\lambda} + \frac{\mu}{\pi P} f(0) (1 - e^{-\lambda}) \right\} \\ \text{oder} \quad I &= \frac{L}{2\pi A^2} \left\{ \frac{\mu'}{P'} \cdot \frac{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)}{\cos \varepsilon} e^{-2\lambda} + \frac{\mu}{2\pi P} f(0) (1 - e^{-2\lambda}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Denn es muss in der ersten Formel berücksichtigt werden, dass, wenn α genau $= 0$ ist, statt $\lambda + \lambda'$ einfach λ zu setzen ist, weil die beschattenden Kugeln mit den verdeckenden vollkommen identisch sind. Diese Coincidenz findet aber, wenn, wie beim dunklen Saturnring, die Entfernung des Flächenelementes ds von der unteren Seite der Staubmasse gross ist im Vergleich zu deren Dicke nur für ausserordentlich kleine Werthe von α statt. Wir können also sagen, dass die erste Formel (10) nur für α genau $= 0$ gilt; wenn α sehr klein ist, wird im ersten Gliede dieser Formel 2λ an Stelle von λ zu setzen sein.

Nennt man I_0 die Flächenhelligkeit von ds , wenn es ganz freiläge, also:

$$I_0 = \frac{\mu'}{2\pi P'} \frac{L}{A^2} \cdot \frac{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$$

und setzt ferner:

$$c = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{P' \cos \varepsilon f(0)}{P \pi \varphi(\varepsilon, \varepsilon)}$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{I}{I_0}\right)_1 &= e^{-2\lambda} + c(1 - e^{-\lambda}) \\ \left(\frac{I}{I_0}\right)_2 &= e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}c(1 - e^{-2\lambda}) \\ \left(\frac{I}{I_0}\right)_3 &= e^{-\lambda} + c(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und es entspricht kurz ausgedrückt 1) dem Fall: α sehr klein, 2) α nicht sehr klein und 3) α direct gleich Null. Zur besseren Uebersicht habe ich einige Werthe von (11) für $c = 1$ berechnet. Hier ist $\left(\frac{I}{I_0}\right)_3$ stets $= 1$.

λ	$\left(\frac{I}{I_0}\right)_1$	$\left(\frac{I}{I_0}\right)_2$
0.0	1.00	1.00
0.1	0.91	0.91
0.2	0.85	0.84
0.3	0.81	0.77
0.4	0.78	0.72
0.5	0.76	0.68
0.6	0.75	0.65
0.7	0.75	0.62
0.8	0.75	0.60
0.9	0.76	0.58
1.0	0.77	0.57

Man sieht hieraus, dass auch für nicht grosse λ eine recht merkliche, bis zu 25 % steigende Zunahme der Helligkeit bei ganz kleinen Werthen des Winkels α stattfinden kann. Diese kann fast plötzlich auftreten, wenn die Entfernung des Flächenelementes von der Staubwolke im Vergleich zu ihrer Dicke gross ist. Auf diesen Punkt wird bei dem dunklen Saturnring, von dem der nächste Artikel etwas eingehender handeln soll, näher einzugehen sein.

5.

Die Beleuchtungsverhältnisse, welche der Saturnring aufweist, sind, wie ich bei verschiedenen Gelegenheiten auseinander gesetzt habe, nur dann vollständig zu erklären, wenn man die Ansicht, welche schon von J. Cassini angedeutet, in neuerer Zeit besonders eingehend von Maxwell und Hirn besprochen worden ist, acceptirt, nach welcher dieses Gebilde aus discreten Massentheilchen besteht, die nach Art eines dichten Schwarmes von Trabanten um den Saturnkörper kreisen. Nur diese Annahme ist im Stande, alle Erscheinungen und zwar ohne Ausnahme zu erklären, die der Saturnring sowohl dem betrachtenden Fernrohr als auch dem messenden Photometer darbietet.

Ich habe in I fast ausschliesslich nur den hellen Ring (die beiden nach O. Struve's Vorschlag mit A und B bezeichneten Ringtheile) ausführlich behandelt und diese Betrachtung hat dazu geführt, die an sich höchst merkwürdigen und sehr bedeutenden Lichtvariationen vollständig zu erklären, welche dieses Gebilde nach den Beobachtungen des Herrn G. Müller aufweist.

Ich werde nun auch den Ring C , d. i. den sogenannten dunklen Ring, einer Untersuchung in ähnlicher Richtung, soweit dies die Beobachtungen gestatten, unterziehen und auch diese scheint mir zu ganz befriedigenden Resultaten zu führen. Mir scheinen nun diese photometrischen Betrachtungen so unzweifelhaft für die Richtigkeit der obigen Annahmen über die Constitution des Saturnringes zu sprechen, dass ich in ihnen vielleicht den stärksten directen Beweis, der für diese spricht, erblicken möchte. Denn die von mir aufgestellte Formel enthält fast gar nichts Hypothetisches oder wenigstens nur solches, das ganz gleichgültig

für die Resultate ist. Der Grund für diese Möglichkeit liegt in dem Umstande, dass der Phasenwinkel bei Saturn stets sehr klein (im Max. $6^{\circ} 3'$) ist und der directe Einfluss desselben auf das bei zerstreut reflectirenden Substanzen anzunehmende und als völlig unbekannt anzusehende photometrische Elementargesetz ohne Frage nur sehr unbedeutend sein kann. Man darf also behaupten, dass die Theorie der Beleuchtung des Saturnringes fast ganz unabhängig ist von der Unsicherheit, welche den photometrischen Betrachtungen der Planeten sonst anhaften muss, und dass diese Theorie einen der wenigen Fälle darstellt, wo sich diese Unabhängigkeit erzielen und den erlangten Resultaten eine zuverlässige Beweiskraft ertheilen lässt.

Dass auch in mechanischer Beziehung die Cassini'sche Ansicht zu keinen Widersprüchen führt, ist mit grosser Sicherheit zu behaupten, wenngleich einwandfreie Untersuchungen in dieser Richtung nicht vorliegen. Ich muss dabei, da dieser Umstand meistens ausser Acht gelassen wird, besonders hervorheben, dass die Gründe, welche Maxwell für die Richtigkeit der genannten Annahme und besonders die, welche er für die Unhaltbarkeit anderer anführt, nicht als stichhaltig angesehen werden können, wenigstens nicht in der von Maxwell gegebenen Gestalt. Bei anderer Gelegenheit¹⁾ habe ich mich über diesen Punkt geäussert und hoffe demnächst darauf zurückkommen zu können. Indessen scheint es mir angemessen, das Wesentliche dessen, was ich a. a. O. vorgebracht habe, zum Theil mit denselben Worten hier zu wiederholen.

Maxwell hat ausführlich, ebenso wie Laplace, die Möglichkeit eines festen Aggregatzustandes der Ringe untersucht. In astronomischer Beziehung ist aber diesen Untersuchungen lediglich nur ein historisches Interesse zuzuerkennen und zwar deshalb, weil sie geeignet waren, die Ueberzeugung zu befestigen, dass die Saturnringe keine festen Gebilde sein können und so zu der Wiederaufnahme der Cassini'schen Ansicht hindrängten. Denn die flüssige Natur des Ringes ist, obwohl zu wiederholten Malen untersucht, wohl niemals als besonders wahrscheinlich betrachtet worden.

¹⁾ Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft XXV, S. 295 ff.

Bekanntlich nahm Laplace schliesslich an, der Saturnring bestehe aus sehr vielen concentrischen, äusserst dünnen Ringen. Da aber von einem solchen System unter gewissen Annahmen leicht gezeigt werden kann, dass es so lange instabil ist, als die Ringe homogen sind, indem die kleinste störende Wirkung von Aussen ein Herabfallen der Ringe auf den Saturnkörper bewirken muss, so sprach Laplace die Meinung aus, die Ringe enthielten sehr ungleichförmig vertheilte Massen. Dass hierdurch ein stabiler Zustand ermöglicht werde, ist indessen von Laplace nicht bewiesen worden. Es tritt ein solcher auch ganz gewiss im Allgemeinen nicht ein und wenn überhaupt, nur unter gewissen Bedingungen. Die Bewegung eines nicht homogenen sehr dünnen Ringes um einen innerhalb desselben gelegenen Centralpunkt ist übrigens auch gegenwärtig noch nicht bekannt. Selbst in sehr einfachen Specialfällen ist bisher die Integration noch nicht gelungen. Maxwell hat nur den Fall in Betracht gezogen, in dem ein homogener, unendlich dünner, an einem Punkte mit Masse beschwerter Kreisring sich um einen in seiner Ebene gelegenen anziehenden Punkt bewegt und die Bewegung sich in derselben Ebene abspielt. Wählt man dann den Anfangszustand des Systemes so, dass der anziehende Punkt sich in der Nähe des Mittelpunktes des Ringes befindet und sich von hier aus sehr langsam entfernt, und entwickelt man dann alles nach Potenzen der Variablen, deren Werthe sehr klein sind, so lange der genannte Zustand bestehen bleibt und lässt die höheren Potenzen fort, so reduciren sich die ursprünglichen Differentialgleichungen auf lineare, deren Integration durch Exponentialfunctionen möglich ist. Enthalten die Exponenten, welche lineare Functionen der Zeit sind, in gewisser Weise imaginäre Coefficienten, so werden Sinus- und Cosinusfunctionen der Zeit die untersuchte Bewegung darstellen. Die Bedingungen für dieses Vorkommniss betrachtet Maxwell als nothwendig und hinreichend für die Stabilität des Systemes. Es unterliegt aber wohl kaum einem Zweifel, dass dieses Verfahren gar keinen Beitrag zur Frage nach der Stabilität des Saturnsystemes liefern kann. Die Beweiskraft eines solchen ist genau so wenig stark, wie die der alten Betrachtungen über die Stabilität des Sonnensystems. Hier wie dort wird die Kleinheit gewisser Grössen vorausgesetzt und dann hierdurch die Beständigkeit dieser Kleinheit bewiesen. Wie sich die Lösungen der Differentialgleichungen

gestalten, wenn z. B. in ihnen die nächst höheren Glieder mitgenommen werden, ist in dem vorliegenden Falle gänzlich unbekannt. Noch viel weniger aber kann man behaupten, dass periodische Lösungen der vereinfachten Gleichungen dieselbe Eigenschaft in dem ganz allgemeinen Falle behalten.

Eine Behandlung des mechanischen Systemes, welches der Cassini'schen Ansicht entspricht, liegt, wie schon erwähnt, bisher nicht vor. Allgemeinere Untersuchungen in dieser Richtung hat Maxwell nicht angestellt, er hat aber eine an sich interessante Annahme verfolgt. Diese besteht darin, dass eine Zahl von kleinen Massen im Anfange der Bewegung sich in den Ecken eines regelmässigen Polygons befinden und die Tendenz haben, sich von dieser Configuration ein wenig zu entfernen. Durch Weglassung der zweiten und höheren Potenzen der Glieder, welche die kleinen Abweichungen von dieser regelmässigen Anordnung ausdrücken, führt das Problem auf lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, deren Integration durch Exponentialfunctionen gelingt. Diese letzteren stellen Sinus- und Cosinusfunctionen der Zeit dar, wenn die Gesamtmasse der kleinen Körper einen kleinen Bruchwerth der Saturnmasse nicht überschreitet. Die Frage aber nach der Stabilität eines solchen Systemes kann auf diesem Wege ebenso wenig entschieden werden, wie die analoge, oben erörterte, nach der Stabilität der Bewegung fester Ringe. Auch haben die thatsächlichen Verhältnisse beim Saturnring nicht einmal eine oberflächliche Aehnlichkeit in mechanischer Beziehung mit diesem Maxwell'schen Problem.

Dass der dunkle Ring aus discreten Massentheilen besteht, dürfte schon der Anblick desselben ergeben. Wir haben bei diesem Gebilde, soweit der äussere Anblick in Frage kommt, zwei Theile zu unterscheiden. Der erste Theil liegt ausserhalb der Saturnscheibe und projecirt sich auf den freien Himmelsgrund. Der zweite projecirt sich auf die dahinter gelegene Saturnscheibe und erscheint als feiner Schleier, wobei natürlich ganz von den Fällen abgesehen werden soll, wo sich der vom hellen Saturnringe auf den Saturnkörper geworfene Schatten mit dem Schleier vermischt. Wir wollen im Folgenden der Kürze wegen den ersten Theil des dunklen Ringes den freien Theil, den zweiten den Schleier nennen. Wenn man nun den Rand der Planetenscheibe ausserhalb des Schleiers

und seine Fortsetzung in ihm verfolgt, so ist auch nicht der geringste Einfluss einer Lichtbrechung zu bemerken, eine Erscheinung, die, seit jeher bekannt, mit einer continuirlichen Massenvertheilung wohl nicht zu vereinigen ist.

Nach dem Früheren ist es sehr leicht, die Flächenhelligkeiten des freien Theiles des dunklen Ringes (f), des Schleiers (s) und des hellen Ringes (h) zu berechnen. Es mögen diese Flächenhelligkeiten, dividirt durch die Helligkeit eines Elementes der Saturnscheibe, am besten der Mitte dieser, bezeichnet werden der Reihe nach mit J_f , J_s und J_h . Dann ist nach Art. 4, (11):

$$\begin{aligned} J_s &= e^{-2\lambda} + c_d (1 - e^{-\lambda}) && \text{wenn } \alpha \text{ äusserst klein} \\ &= e^{-2\lambda} + \frac{1}{2} c_d (1 - e^{-2\lambda}) && \text{wenn } \alpha \text{ nicht sehr klein} \\ &= e^{-\lambda} + c_d (1 - e^{-\lambda}) && \text{wenn } \alpha = 0 \end{aligned}$$

und nach Art. 2 (5 a) und Art. 4 (7 a)

$$\begin{aligned} J_f &= \frac{c_d}{2} (1 - e^{-2\lambda}) && \text{wenn } \alpha \text{ nicht sehr klein} \\ &= c_d (1 - e^{-\lambda}) && \text{wenn } \alpha = 0 \end{aligned}$$

Hierin ist dem vorigen Artikel entsprechend

$$c_d = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{P'}{\pi P} \cdot \frac{f(0)}{\varphi(\varepsilon, \varepsilon)} \cos \varepsilon$$

wenn die ungestrichenen Buchstaben und f dem dunklen Saturnringe und die gestrichenen und φ der Scheibenmitte entsprechen. Ferner hat man dem Früheren gemäss noch

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\sin A}; \quad \lambda_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{N\delta}{\varrho} H$$

Für den hellen Ring hat man einfach:

$$\begin{aligned} J_h &= \frac{c_h}{2} \text{ für nicht sehr kleine } \alpha \\ J_h &= c_h \text{ für } \alpha = 0 \end{aligned}$$

wobei c_h die dem c_d analoge Grösse für den hellen Ring bedeutet.

Zunächst ist nun darauf aufmerksam zu machen, dass, wie der Augenschein lehrt, c_h durchaus nicht denselben Werth für alle Theile des hellen Ringes hat. Denn der Ring A , also der äusserste bis zur Cassini'schen Linie, ist offenbar merklich weniger hell als B , ist aber dabei so gut

wie vollkommen undurchsichtig bei allen Elevationswinkeln. Daraus folgt nothwendig, dass die Oberflächen der den Ring *A* bildenden Theilchen physikalisch verschieden sein müssen von denen, welche den Ring *B* bilden. Daraus folgt aber weiter die Berechtigung, im Bedarfsfalle c_d verschieden von c_h annehmen zu dürfen. Es stände also nichts im Wege c_d bedeutend kleiner als c_h anzunehmen, wodurch der Schleier dann sich als ein auffälligeres Object darstellen müsste. Aber auch, wenn man c_d etwa $= 1$ annimmt, was also bedeuten würde, dass der dunkle Ring, falls er so dick wäre, dass er undurchsichtig erschiene, eine gleiche Flächenhelligkeit wie das zum Vergleich herangezogene Element der Saturnscheibe hätte, kommt man zu keinen Widersprüchen, wie sich aus den Zahlen am Ende des vorigen Artikels ergibt. Diese Zahlen zeigen, dass in allen jenen Fällen der Schleier als leicht und deutlich sichtbares Object sich darstellen muss, in denen λ ein nicht gar zu kleiner Bruch ist, und man sieht leicht, dass diese Erscheinung mit abnehmendem c an Deutlichkeit gewinnt. Die Erklärung also der Erscheinung, welche der Schleier zeigt, bietet gar keine Schwierigkeiten dar.

Es muss aber noch auf einen Punkt besonders hingewiesen werden. Der dritte Werth von J_s ($\alpha = 0$) ist gewissermassen ein Ausnahmefall, der nur selten eintritt, während der Werth für kleine Werthe von α fast stets der Wirklichkeit entspricht. Er fängt bei äusserst kleinen Werthen von α überzugehen an in den dritten Werth nach Massgabe des gemeinschaftlichen Theiles, den die beiden Kreiscylinder mit dem Radius ρ und mit den Axen parallel den Richtungen zur Sonne und zur Erde haben. Es ist leicht die strenge Formel für diesen Uebergang darzustellen; dies soll aber nicht ausgeführt werden, denn die beiden genannten Cylinder schneiden sich innerhalb des dunklen Ringes erst bei ganz minimalen Werthen von α , die auch nur in Ausnahmefällen stattfinden können, so dass der dritte Werth von J_s in der That ganz aus dem Spiele bleiben kann. Bezeichnet man mit d die Entfernung des betrachteten Flächenelementes der Saturnoberfläche von der unteren Begrenzung des Ringes, gemessen in der Richtung nach der Sonne, so kann offenbar der genannte Ausnahmefall nur stattfinden, wenn

$$\alpha < \frac{2\rho}{d}$$

Nun ist offenbar $d > D$, wo D die kürzeste Entfernung des inneren Randes des dunklen Ringes von der Saturnoberfläche bedeutet, und da D rund zu 15 000 Kilometer angenommen werden darf, folgt

$$\alpha < 28'' \cdot \rho$$

wo ρ in Kilometern ausgedrückt gewiss keine grosse Zahl sein kann.

Also bei Werthen von α , die grösser sind als vielleicht einige Zehner von Bogensekunden, kommt nur der erste und zweite Werth von J_s in Betracht. Sobald aber α unter die genannte Grenze herabsinkt, tritt sofort eine merkliche Aufhellung des Schleiers und zwar ziemlich plötzlich auf, und diese Aufhellung wird um so merkbarer sein, je grösser c_d ist. Ist diese Grösse $= 1$, so wird der Schleier ganz verschwinden. Diese merkwürdige Erscheinung dauert nur ganz kurze Zeit und verschwindet sofort wieder, wenn α aus dem genannten Bereiche sich entfernt. Es ist klar, dass dieselbe nur auftreten kann, wenn die Opposition sich zur Zeit ereignet, zu welcher sich Saturn im Knoten seiner Bahn befindet. Es ist aus diesen Gründen sehr wenig wahrscheinlich, dass diese eigenthümliche Lichtvariation jemals wird constatirt werden können. Auch wird hierbei nicht zu übersehen sein, dass das Augenfällige der Erscheinung etwas verwischt werden muss durch den Umstand, dass die Sonne kein leuchtender Punkt ist, sondern auf dem Saturn als eine Scheibe vom Durchmesser $3\frac{1}{2}'$ erscheint. Am Schlusse dieser Abhandlung wird ganz kurz auf diesen Punkt eingegangen werden.

Zur Bestimmung der in den obigen Formeln vorkommenden Grösse λ werden in einwurfsfreier Weise fast nur die seltenen Phänomene dienen können, wo der Trabant Japetus durch den Schatten des Saturnsystemes hindurchzieht. Bis jetzt liegt in dieser Richtung nur eine einzige Beobachtung vor, welche am Lick-Observatory von dem ausgezeichneten Beobachter Herrn Barnard¹⁾ gemacht worden ist. Herr A. Marth²⁾ hatte darauf aufmerksam gemacht, dass 1889 November 1—2, das genannte Phänomen stattfinden werde. Wie es scheint ist ausser Herrn Barnard

1) Monthly Notices L, S. 107 ff.

2) Monthly Notices IXL, S. 427 ff.

Niemandem sonst eine Beobachtung geglückt. Die Resultate, welche Herr Barnard gewonnen, müssen als der directeste Beweis für die Durchsichtigkeit des dunklen Ringes betrachtet werden. Dieselben scheinen, obwohl sie nur auf Helligkeitsschätzungen, nämlich auf Vergleichen der Helligkeit des Japetus mit Encelaudus und Tethys beruhen, doch einen bedeutenden Grad von Genauigkeit zu besitzen, und eine eingehendere Bearbeitung derselben wäre eine dankenswerthe Arbeit. Es müsste hierbei auf die Wirkung des Halbschattens, welche sich beim Austritt von Japetus aus dem Schatten des Saturnkörpers und bei seinem Eintritt in den Schatten des hellen Ringes deutlich zu zeigen scheint, Rücksicht genommen werden. Für die vorliegenden Zwecke genügt es hervorzuheben, dass aus den Beobachtungen des Herrn Barnard und bei Festhaltung der von ihm angenommenen Helligkeitsscala folgt, dass der dunkle Ring in seinen dem Planeten am nächsten liegenden Theilen fast alles Licht durchlässt und seine Undurchsichtigkeit mit der Annäherung an den hellen Ring successive zunimmt. Die photometrische Lichtabnahme wird ziemlich nahe durch eine gerade Linie dargestellt und die Schwächung des Lichtes beträgt in der Nähe des hellen Ringes ungefähr 0.7 Grössenklassen. Der Elevationswinkel der Sonne war zu jener Zeit — $11^{\circ}18'$. Nehmen wir der Mitte des dunklen Ringes entsprechend eine Schwächung des Lichtes um 0.35 Grössenklassen an, so wird nach Art. 4, (8)

$$\lambda = 0.32; \quad \lambda_1 = 0.0627.$$

Hiermit ergeben sich die folgenden Zahlen:

A	$e^{-2\lambda}$	$(1 - e^{-\lambda})$	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda})$	$e^{-\lambda}$
1°	0.00	0.97	0.50	0.03
2	0.03	0.83	0.49	0.17
3	0.09	0.70	0.45	0.30
4	0.17	0.59	0.42	0.41
5	0.24	0.51	0.38	0.49
10	0.49	0.30	0.26	0.70
15	0.62	0.21	0.19	0.79
20	0.70	0.17	0.15	0.83
25	0.74	0.14	0.13	0.86
30	0.78	0.12	0.11	0.88

$c_d = 1$						$c_d = \frac{1}{2}$					
A	J_s			J_f	$J_f(\alpha=0)$	A	J_s			J_f	$J_f(\alpha=0)$
	1	2	3				1	2	3		
1°	0.97	0.50	1.0	0.50	0.97		0.49	0.25	0.52	0.25	0.49
2	0.86	0.52	1.0	0.49	0.83		0.45	0.28	0.59	0.24	0.42
3	0.79	0.54	1.0	0.45	0.70		0.44	0.33	0.65	0.23	0.35
4	0.76	0.59	1.0	0.42	0.59		0.47	0.38	0.71	0.21	0.30
5	0.75	0.62	1.0	0.38	0.51		0.50	0.43	0.75	0.19	0.26
10	0.79	0.75	1.0	0.26	0.30		0.64	0.62	0.85	0.13	0.15
15	0.83	0.81	1.0	0.19	0.21		0.73	0.72	0.90	0.10	0.11
20	0.87	0.85	1.0	0.15	0.17		0.78	0.78	0.91	0.08	0.08
25	0.88	0.87	1.0	0.13	0.14		0.81	0.81	0.93	0.06	0.07
30	0.90	0.89	1.0	0.11	0.12		0.84	0.84	0.94	0.05	0.06

Man sieht hieraus, dass der Schleier bei kleinen A sehr erhebliche Lichtvariationen zeigt, auch wenn man von der oben erwähnten plötzlichen Zunahme der Helligkeit absieht. Der freie Theil des Ringes zeigt ebenfalls sehr beträchtliche Lichtvariationen bei kleinen A , dieselben nehmen aber bald mit wachsendem A ab. Man darf indessen hierbei nicht ausser Acht lassen, dass für kleine A die obige Theorie ungenau wird und zum Mindesten dann die abgekürzten Formeln dadurch zu ergänzen sind, dass man nicht $A = A'$ annimmt. Indessen werden doch jedenfalls die mitgetheilten Zahlen hinreichen, um ein deutliches Bild von den Verhältnissen, die sich abspielen müssen, zu geben.

Die Zahlen J_f deuten darauf hin, dass man wohl der Albedo der Theilchen, welche den dunklen Ring bilden, einen Werth zuertheilen wird müssen, der beträchtlich kleiner als c_h ist. Etwas Sicheres lässt sich, wie schon erwähnt, darüber nicht sagen; es scheint aber nicht, dass in dieser Beziehung für die Theorie irgend welche Schwierigkeiten entstehen könnten.

Auf der andern Seite bietet die Geschichte der Wahrnehmungen des dunklen Ringes doch, wie mir scheint, einige Merkwürdigkeiten dar. Es soll deshalb zum Schluss dieser Auseinandersetzungen ein flüchtiger Blick auf diese geworfen werden.

6.

Es darf als festgestellt gelten, dass der dunkle Ring zuerst auf der Berliner Sternwarte in den Jahren 1838 und 1839 gesehen worden ist. Encke¹⁾ hat darüber folgende Aufzeichnungen veröffentlicht:

„1838 Mai 25. Der dunkle Raum zwischen Saturn und seinem Ringe schien Herrn Galle zur Hälfte aus dem allmählichen Uebergange des inneren Randes des Ringes zur Dunkelheit zu bestehen, so dass die Verwaschenheit dieses inneren Randes des inneren Ringes eine bedeutende Breite haben würde.

Juni 10. Die inneren Ränder des ersten Ringes verwaschen sich allmählig in den dunklen Zwischenraum zwischen Ring und Kugel. Es schien, wenn keine Täuschung obwaltet, der Ring von dem Anfang der Verdunkelung an gerechnet fast die Hälfte des Raumes bis zur Saturnkugel einzunehmen.“

Dieser sehr reservirten Wiedergabe des von Herrn Galle Gesehenen ist es zuzuschreiben, dass die Berliner Beobachtung unbeachtet blieb, dass der dunkle Ring von W. C. Bond im Herbst 1850 wie ein ganz neues Object beschrieben worden ist und diese Neuentdeckung erst die allgemeinere Aufmerksamkeit auf dieses Object gelenkt hat. Es ist zu bedauern, dass sich Herr Galle²⁾ erst hierdurch veranlasst sah, seine in den Jahren 1838 und 1839 ausgeführten zahlreichen Messungen zu veröffentlichen, welche doch die Dimensionen des dunklen Ringes vollkommen exact wiedergeben, und es bleibt räthselhaft, warum Encke in der seiner angeführten Abhandlung beigegebenen Abbildung jeden Hinweis auf den dunklen Ring vernieden hat. Es ist dies um so merkwürdiger, als der dunkle Ring, der im November 1850 ganz unabhängig von Bond auch von Dawes mit einem $6\frac{1}{2}$ zölligen Refractor bemerkt worden ist, gegenwärtig wenigstens ein sehr auffälliges Object ist, das schon in mässig grossen Fernrohren leicht sichtbar ist und auch dem, der nicht besonders darauf achtet, kaum entgehen kann. Ich habe in den letzten Jahren, als der Ring noch weit geöffnet war, öfters den Versuch gemacht, von

1) Ueber den Ring des Saturn. Abhandlungen der Berliner Akademie. 1838.

2) Astronomische Nachrichten Nro. 756.

Laien, die durch das Münchener $10\frac{1}{2}$ zöllige Fernrohr den Saturn ansahen, zu erfahren, ob sie den dunklen Ring von selbst, also ohne darauf aufmerksam gemacht zu werden, gesehen haben, und in den allermeisten Fällen eine bejahende Antwort darauf bekommen.

Während also wohl in der That der dunkle freie Ring als ein leicht sichtbares Object bezeichnet werden muss, wird man dies von dem Schleier nicht behaupten können, und es wird immerhin als verwunderlich bezeichnet werden können, dass auf der Encke'schen Zeichnung dieser Schleier ganz deutlich hervortritt, während von dem freien Theil des Ringes keine Spur angedeutet ist.

Noch merkwürdiger ist, dass sich vor der Galle'schen Wahrnehmung nirgends eine Bemerkung über den dunklen Ring vorfindet, obwohl die Saturnringe genug oft von ausgezeichneten Beobachtern betrachtet und sogar ausgemessen worden sind.

Herr O. Struve¹⁾ hat in Bezug auf diesen Punkt die ältere astronomische Literatur genau durchforscht und ist dabei auf folgende Umstände aufmerksam geworden:

W. Herschel spricht an 4 Stellen, die über Beobachtungen am Saturn in den Jahren 1791 und 1805 handeln, ausdrücklich von dem gleichförmigen Aussehen, das der Zwischenraum zwischen dem Saturnkörper und dem hellen Ring darbot und vergleicht ihn mit dem freien Himmelsgrunde. Herr O. Struve neigt aber der Ansicht zu, dass trotzdem die Aufmerksamkeit Herschel's auf diesen Punkt nicht besonders gerichtet war, er vielmehr nur nebenbei den innersten Theil des Saturnsystemes gewissermassen als Vergleichsobject anführt. Dem gegenüber bleibt aber doch die Schwierigkeit bestehen, auch die Richtigkeit der Auffassung O. Struve's vorausgesetzt, dass ein so deutlich sichtbares Object, wie der dunkle Saturnring jetzt ist, der Aufmerksamkeit Herschel's nicht nur einmal, sondern zu wiederholten Malen hat entgehen können.

Dagegen weist Herr O. Struve, wie mir scheint, ganz überzeugend nach, dass der Schleier mehrere Mal und zwar von verschiedenen Beobachtern gesehen und beschrieben worden ist. Man darf hierbei aber

1) Sur les dimensions des anneaux de Saturne. Mémoires de l'Académie de St. Petersburg 1852.

nicht übersehen, dass bei diesen Wahrnehmungen die Mitwirkung von Contrastphänomenen nicht ausgeschlossen ist. Der sehr helle Ring *B* grenzt zum Theil an weniger helle Partien der Saturnscheibe. Dann aber erscheint bekanntlich an der Grenze und zwar in der weniger hellen Fläche meistens ein mehr oder weniger auffälliges trübes Band, das ganz wie ein matter Schleier aussieht. Es wird schwer sein zu entscheiden, in wie weit diese Contrastwirkung auf die beschriebenen Phänomene beim Saturn passt, und es soll keineswegs behauptet werden, dass hierdurch Alles bei den älteren Wahrnehmungen, so z. B. die Andeutungen auf der erwähnten Zeichnung von Encke, vollständig erklärt werden kann, aber man wird doch auf die genannten Contrastphänomene Rücksicht zu nehmen haben bei einer endgültigen Interpretation der beschriebenen Erscheinungen.

Auf den Untersuchungen O. Struve's fussend, darf man folgende Sätze als wohl begründet hinstellen:

- 1) Der dunkle Ring ist vor dem Jahre 1838 nicht gesehen worden, obwohl nachweisbar Saturn mit grösseren, den mittleren Fernrohren der Gegenwart in der hier in Frage kommenden Richtung wohl ebenbürtigen Teleskopen eingehend betrachtet worden ist.
- 2) Der den hellen Ring von der Saturnscheibe trennende Schleier ist öfters und von verschiedenen Beobachtern bemerkt worden.
- 3) Gegenwärtig ist der freie Theil des dunklen Ringes ein leicht sichtbares Object, das den Beobachtern weniger leicht entgehen wird, als der Schleier.

Die erste und dritte Thatsache sind schwer mit einander zu vereinigen, wenn man nicht annehmen will, dass im dunklen Ringe bedeutende Veränderungen vor sich gegangen sind. Die zweite Thatsache dagegen mag vielleicht in Nebenumständen, wenn auch nicht ihre Entstehung, so doch eine Verstärkung gefunden haben. Wichtig wäre es, wenn Saturn durch die älteren Fernrohre, natürlich auch mit den alten Ocularen, eingehend betrachtet werden möchte, um einen Vergleich mit den älteren Beschreibungen zu ermöglichen. Die Möglichkeit hierzu ist gegenwärtig noch vorhanden, indem sich einige der älteren Fernrohre noch in gebrauchsfähigem Zustande befinden.

Jedenfalls sind die angedeuteten Verhältnisse sehr merkwürdig und bedürfen der Aufklärung. Stünde es fest, dass der genannte Schleier in früherer Zeit mehr in die Augen fiel, so könnte man diese Thatsache in Verbindung mit der kaum bezweifelbaren Wahrnehmung, dass der freie Theil des dunklen Ringes jetzt heller ist, nur durch die Annahme erklären, dass die Albedo der den dunklen Ring bildenden Theilchen sich vergrößert hätte. Man könnte dann diese Veränderungen mit ähnlichen Processen, wie Vereisungen etc. in Verbindung bringen, eine Hypothese, die an sich zwar nichts Unangemessenes enthält, aber gegenwärtig doch so viel Unsicheres und Gewagtes darbietet, dass nicht näher darauf eingegangen werden soll.

Nicht unerwähnt mögen noch die Erscheinungen bleiben, welche beim Wiedererscheinen des unsichtbar gewordenen Saturnringes im Jahre 1891 beobachtet worden sind.

Der Ring war nach Herrn Barnard¹⁾ Ende October 1891 selbst in den mächtigsten Fernrohren der Lick Sternwarte vollkommen unsichtbar. Zum ersten Male wurde er dort 1891 October 30, 1^h 7^m m. Z. Gr. gesehen. Da nun Herr Oudemans²⁾ October 29, 17^h 9^m m. Z. Gr. nichts von dem Ringe sehen konnte, so fällt sein Wiedererscheinen innerhalb des durch diese beiden Angaben eng begrenzten Zeitintervalles. Die Erde besass zu jener Zeit einen Elevationswinkel von 1° 56'. Herr Oudemans hat weiter an jenem Tage bemerkt: „eine feine dunkle Linie läuft über den Aequator“ und dieselbe als die Projection des dunklen Ringes auf die Saturnscheibe erklärt, weil sie auch noch sichtbar blieb, nachdem die Sonne sich ein wenig über die Ebene des Ringes erhoben hatte. Gegen diese Erklärung ist principiell nichts einzuwenden, nur könnte vielleicht bemerkt werden, dass man hierbei ganz gut auch die Mitwirkung eines Theiles des hellen Ringes hinzuziehen kann. Denn es liegen gewiss nicht die den Ring bildenden Theilchen genau zwischen zwei Ebenen und können immerhin einige Partien sich in dem Schatten der davor liegenden Theilchen befinden, auch nachdem die Sonne ein wenig über die Ringebene emporgestiegen war. Man erhält hierdurch

1) Monthly Notices LII, S. 419 ff.

2) Astronomische Nachrichten Nr. 3074.

den Vorthail, eine etwas grössere Breite der dunklen Linie erklären zu können, und dies ist wünschenswerth, weil die innersten Theile des dunklen Ringes, wie oben erwähnt, noch fast vollständig durchsichtig sind und also die dahinterliegende Saturnscheibe hindurchscheinen lassen und selbst nicht ganz dunkel erscheinen. In der Mitte des dunklen Ringes, was dem obigen Werthe von λ als entsprechend angenommen wurde, ist ($A = 1^{\circ} 56'$) $\log \lambda = 0.266$ und demnach lässt hier der Ring immerhin noch 16 % des Lichtes der dahinter liegenden Saturnscheibe hindurch.

Ehe der Ring anfang sichtbar zu werden, musste derselbe sich auf der Saturnscheibe als schwarzes Band darstellen. Dasselbe wurde in der That von Herrn Barnard beobachtet und gezeichnet. Derselbe fand am 22. October für die Breite dieses schwarzen Bandes $0''.51$ und seine Mitte war vom nördlichen Rande $7''.40$, vom südlichen $6''.56$ entfernt. Herr Barnard giebt an, dass die gemessene Breite vollkommen übereinstimmt mit den Daten der Ephemeriden. Ich finde nun aber für einen Elevationswinkel A der Erde von $1^{\circ} 41'$ für diese Breite $0''.16$ bzw. $0''.24$, je nachdem der helle Ring allein oder der dunkle Ring mitgenommen wird. Dagegen finde ich mit den Beobachtungen sehr gut übereinstimmend aus den weiter unten folgenden Daten für den Abstand der Mitte des dunklen Bandes vom nördlichen bzw. südlichen Scheibenrand $7''.64$ und $6''.72$, wenn nur der helle Ring, und $7''.60$ und $6''.76$, wenn der dunkle Ring mitgemessen wird. Die vorhin erwähnte Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung scheint einer Aufklärung bedürftig, da Herr Barnard auch am 29. October eine gleich grosse Breite des schwarzen Bandes ($0''.65$) findet.

Von den vielen interessanten Notizen des Herrn Barnard über das Aussehen des eben sichtbar gewordenen Saturnringes am 29. October 1891 verdienen besonders die folgenden einer Hervorhebung. Der Ring konnte erst in einiger Entfernung (etwa $2''$) vom Rande der Scheibe wahrgenommen werden, weiter waren die beiden Hälften des Ringes zu beiden Seiten des Planeten durchaus nicht von gleichem Aussehen, und schliesslich bemerkte Herr Barnard auf der östlichen Ringhälfte zwei hellere Lichtknoten. Das erste Factum kann, wenn man will, durch die Nähe der hellen Planetenscheibe vollständig erklärt werden, aber es wirkt, wie gleich gezeigt werden wird, noch ein zweiter Umstand mit. Die zweite

Thatsache bedarf wohl kaum einer weiteren Erörterung, während zur Erklärung der dritten Herr Barnard annimmt, dass er zwei der inneren Saturntrabanten gesehen habe. Nun könnte aber nur Mimas in Frage kommen und es möchte Schwierigkeiten bereiten beide Lichtknoten auf diese Weise zu erklären. Doch bedarf es in dieser Beziehung keiner weitläufigen Erörterungen, denn mir scheint es überaus wahrscheinlich, dass hier eine ganz andere Erscheinung vorliegt. Schon Schroeter hat solche Lichtknoten an dem äusserst schmalen Saturnringe gesehen und Olbers¹⁾ hat diese Erscheinung vollständig erklärt. Wenn die Erde nahe in der Ebene des Saturnringes steht, so werden die Helligkeiten der einzelnen Punkte der Lichtlinie, als welche sich dann der Ring darstellt, keineswegs gleich sein. Sie ist proportional der Anzahl der Theilchen, welche sich scheinbar in dem betrachteten Punkte der Lichtlinie vereinigen. Man hat also senkrecht auf die Ringebene Ebenen parallel zur Richtung nach der Erde zu legen und die Anzahl der Theilchen, welche in jeder Ebene liegen, giebt die dort stattfindende Helligkeit an. Man sieht nun leicht ein, dass die Helligkeit der Lichtlinie von der Planetenscheibe aus zuerst zunimmt und dort, wo die innere Anse des dunklen Ringes sich projicirt, ein erstes Maximum eintritt. Ein zweites Maximum tritt dort ein, wo die innere Anse des nächsten hellen Ringes (*B*), und ein drittes dort, wo die innere Anse des äusseren hellen Ringes (*A*) sich projicirt. Ein Minimum ergiebt sich am äusseren Ende des hellen Ringes *B*. Das gilt natürlich in Strenge nur, wenn alle Ringtheile gleich hell wären, was bekanntlich nicht der Fall ist. Namentlich wird das erste Maximum nicht oder nicht in auffälliger Weise zu Stande kommen.

Nach den sorgfältigen Zusammenstellungen des Herrn Oudemans²⁾ ist in der mittleren Entfernung des Saturn (9.539)

Radius des äusseren Randes des Ringes <i>A</i>	19.75
„ „ inneren „ „ „ <i>A</i>	17.60
„ „ äusseren „ „ „ <i>B</i>	17.10
„ „ inneren „ „ „ <i>B</i>	13.75
„ „ inneren „ „ „ <i>C</i>	10.90
Aequatorial-Radius des Saturn	8.65
Polarer Radius „ „	7.70

1) Astronomische Nachrichten Nr. 241.

2) Kaiser, de Sterrenhemel, 2. Auflage von Oudemans, Band II. S. 701.

In der mittleren Entfernung müssten also zunächst die ausgesprochenen Maxima der Helligkeit stattfinden in den Entfernungen vom Saturncentrum:

1. Maximum 13"75

2. Maximum 17.60

Näheres über die Art, wie sich diese Maxima herausheben, findet sich bei Olbers a. a. O. Herr Barnard hat die Lage der von ihm bemerkten beiden Lichtknoten nicht gemessen, er giebt aber in einer leider sehr kleinen Zeichnung diese Lage an. Ich habe aus diesem Diagramme mit einer in der Natur der Sache liegenden, voraussichtlich sehr geringen, Genauigkeit mit einem Maassstabe folgende Dimensionen in Millimetern entnommen:

		Rechnung
Aequator. Saturnradius	6.3	6.1
Radius des äussersten Ringes	14.0	14.0
Entfernung des ersten Lichtknotens vom Saturncentrum	10.0	9.7
Entfernung des zweiten Lichtknotens	12.2	12.1

Die daneben stehenden Zahlen geben die auf denselben Maassstab bezogenen Zahlen, wie sie aus den obigen Darlegungen für die beiden Maxima und den angeführten Dimensionen des Saturnsystemes folgen. Die Uebereinstimmung ist eine so vollkommene, dass man kaum zweifeln wird, dass die gegebene Interpretation der von Herrn Barnard gesehenen Lichtknoten zutreffend ist.

Da nun nach dem Obigen auch der Ring von dem Scheibenrande aus an Helligkeit zunimmt, so wird dieser Umstand jedenfalls dazu mitwirken, dass erst in einiger Entfernung vom Rande die Lichtlinie bemerkt werden wird, und es ist kein Zufall, dass Herr Barnard die ersten Spuren derselben in einer Entfernung (2") gesehen hat, welche fast genau mit der Stelle zusammenfällt, wo sich die innere Anse des dunklen Ringes projicirt, wo also das erste Maximum der Helligkeit in der Lichtlinie auftritt.

7.

Aus den vorstehenden Untersuchungen geht hervor, dass es keine Schwierigkeiten macht, sich einen Ueberblick über die Grösse der Lichtschwankungen zu verschaffen, welche staubförmige kosmische Massen in der Nähe der Opposition zeigen. Die detaillirte Darstellung der Lichtvariation ist dagegen ziemlich verwickelt. Sie ist aber in dem Vor-

stehenden und insbesondere für undurchsichtige Staubmassen in meiner früheren Abhandlung I vollständig durchgeführt. Man wird sich indessen gegenwärtig halten müssen, dass schon zufolge der Praemissen, auf denen die ganze Theorie beruht, und auch aus practischen Gründen eine rigorose Genauigkeit in den Formeln ganz zwecklos wäre. Deshalb erscheint es als nicht unwichtig, dass sich die Formeln näherungsweise einfacher gestalten und auf bequemer zu handhabende Ausdrücke bringen lassen. Das soll in diesem Artikel geschehen, während in den weiteren Artikeln gezeigt werden wird, wie man sich auch von jenen Annahmen in der Theorie unabhängig machen kann, welche auf noch nicht ganz allgemeinen Voraussetzungen beruhen. Ich werde mich der Kürze wegen dabei ausschliesslich auf undurchsichtige Körper staubförmiger Structur, die wie der Saturnring von zwei parallelen Ebenen begrenzt sind, beschränken. Der allgemeinere Fall lässt sich auf genau dieselbe Weise erledigen. Die in Frage kommenden Formeln für eine undurchsichtige Staubmasse waren (I. S. 481)

$$Q = I' \cdot (\sin A + \sin A') \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\Phi} \cos \varphi d\varphi; \quad \mathfrak{B} = \frac{8}{3} e^{-x \frac{3\pi-2}{8\pi}}$$

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \frac{2}{3} \right\}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass man $\mathfrak{C}$ bis auf geringfügige etwa $\frac{1}{2}\%$ nicht übersteigende Fehler genau erhält, wenn man Φ nach Potenzen von $\sin \varphi$ entwickelt und nur die zweiten Potenzen von $\sin \varphi$ mitnimmt. Es kommt dies einer Vernachlässigung von Gliedern gleich, welche innerhalb der Klammer mit $\frac{1}{12} \sin^4 \varphi$ beginnen.

Macht man diese Entwicklung, so wird

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin \varphi \right)$$

und es wird, wenn man $\sin \varphi = z$ setzt:

$$\mathfrak{A} = x \int_0^1 dz \cdot e^{-\frac{3}{8} \frac{x}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} z + z^2 \right)}$$

Das kann man aber in die Form eines Kramp'schen Integrales bringen:

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{8\pi x}{3}} \cdot e^{T^2} \int_T^{T'} e^{-\xi^2} \cdot d\xi$$

wenn man setzt:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi x}{128}}; \quad T' = T \left(\frac{\pi + 4}{\pi} \right)$$

Für die numerische Rechnung führt man zunächst für nicht grosse T und T' das Integral

$$\Theta(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^T e^{-\xi^2} d\xi$$

ein und hat dann

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= [0.40910] \sqrt{x} \cdot e^{T^2} \{ \Theta(T') - \Theta(T) \} \\ T &= [9.43353] \sqrt{x}; \quad T' = [9.79018] \sqrt{x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierin bedeuten die in Klammern gesetzten Zahlen Logarithmen. Für kleinere T ist $\Theta(T)$ den bekannten älteren Tafeln zu entnehmen oder die Function

$$\Psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-\xi^2} d\xi$$

den sehr bequemen Tafeln, welche Herr Radau¹⁾ berechnet hat. Wo diese nicht ausreichen, also für grosse T , wird man nach Herrn Schlömilch so verfahren:

Man hat

$$\left. \int_T^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2T} e^{-T^2} \times \left\{ 1 - \frac{a_1}{T^2 + 1} + \frac{a_2}{(T^2 + 1)(T^2 + 2)} - \frac{a_3}{(T^2 + 1)(T^2 + 2)(T^2 + 3)} + \dots \right\} \right\}$$

wo

$$a_1 = 0.5; \quad a_2 = 0.25; \quad a_3 = 0.625; \quad a_4 = 0.5625 \quad \dots$$

1) Tables de l'intégrale $\Psi(Z)$. Mémoires der Pariser Sternwarte XVIII.

Setzt man also

$$f(T) = 1 - \frac{a_1}{T^2 + 1} + \frac{a_2}{(T^2 + 1)(T^2 + 2)} - \dots$$

so wird

$$\Theta(T) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-T^2}}{T} f(T)$$

und schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= [0.72700] \left\{ f(T) - \frac{T}{T'} e^{T^2 - T'^2} \cdot f(T') \right\} \\ \log \frac{T}{T'} &= 9.64335; \quad T'^2 - T^2 = [9.48696] \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Mit Hülfe dieser Formeln habe ich nun $\mathfrak{C}$ berechnet. In der folgenden Tabelle ist unter s der frühere in I und auch am Schlusse dieser Abhandlung gegebene Werth von $\log \frac{\mathfrak{C}(\infty)}{\mathfrak{C}(x)}$ und daneben der Näherungswerth n gegeben. Es genügt bis $x = 300$ zu gehen, da von hier ab die beiden Werthe bis auf 4 Stellen übereinstimmen.

	s	n	Fehler
$x = 1$	0.2700	0.2702	— 2
2	0.2445	0.2453	— 8
3	0.2233	0.2247	— 14
4	0.2055	0.2072	— 17
5	0.1902	0.1924	— 22
6	0.1771	0.1795	— 24
7	0.1657	0.1682	— 25
8	0.1556	0.1582	— 26
9	0.1468	0.1493	— 25
10	0.1389	0.1414	— 25
12	0.1255	0.1279	— 24
14	0.1145	0.1167	— 22
16	0.1054	0.1072	— 18
18	0.0977	0.0993	— 16
20	0.0910	0.0924	— 14
25	0.0780	0.0789	— 9
30	0.0683	0.0690	— 7
40	0.0549	0.0553	— 4
50	0.0460	0.0462	— 2
100	0.0256	0.0256	0
150	0.0178	0.0178	0
300	0.0093	0.0093	0

Durch diese Zahlen ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen, denn die auftretenden Differenzen sind vollständig zu vernachlässigen. Es seien noch zur Uebersicht einige Näherungswerthe Φ_1 von Φ :

$$\Phi_1 = \frac{3}{8\pi} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin \varphi \right)$$

den strengen Werthen von Φ gegenübergestellt. Letztere sind in engeren Intervallen am Schlusse dieser Abhandlung angeführt.

φ	$\log \Phi_1$	$\log \Phi$
0°	— ∞	— ∞
10	8.5582	8.5581
20	8.8926	8.8918
30	9.0920	9.0897
40	9.2302	9.2255
50	9.3298	9.3222
60	9.4012	9.3905
70	9.4498	9.4360
80	9.4777	9.4620
90	9.4870	9.4704

8.

Es sollen nun die am Anfange des vorigen Artikels in zweiter Linie genannten Untersuchungen in Angriff genommen werden. Die zwei etwas specielleren Annahmen, auf welchen die in den früheren Artikeln und in I entwickelten Formeln beruhen und die zu einer Verallgemeinerung auffordern, waren: 1) wurde vorausgesetzt, dass sich die Staubwolke aus lauter Kugeln von demselben Radius ϱ zusammensetzt, 2) wurde die Lichtquelle punktförmig angenommen. Zuerst soll nunmehr die erste Voraussetzung fallen gelassen werden. Der ganze mit Staubmasse erfüllte Raum R enthalte vielmehr in nahezu gleichförmiger Vertheilung $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ Kugeln und zwar N_1 Kugeln mit dem Radius ϱ_1 , N_2 solche mit dem Radius ϱ_2 u. s. f. bis N_n Kugeln mit dem Radius ϱ_n . Wenn dann die früheren Bezeichnungen in jeder Richtung beibehalten werden und

$$q' = I' f(\alpha) \cdot \varrho^2$$

die Lichtmenge einer Kugel mit dem Radius ϱ wäre, wenn diese frei läge, so wird dieselbe in Wirklichkeit sein:

$$q = q' w = I' f(\alpha) \cdot \varrho^2 w$$

wo w die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass keine der N Kugeln ein betrachtetes Element im Innern der Masse weder beschatte noch verdecke. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies mit den Kugeln N_m vom Radius ϱ_m geschehe, sei w_m ; dann ist

$$w = w_1 w_2 \dots w_n$$

und da allgemein

$$w_m = e^{-\frac{N_m}{R} V_m}$$

war, wo V_m das Volumen des aus den oft genannten beiden Kreiscylindern zusammengesetzten Körpers ist, so hat man

$$w = e^{-\frac{N_1 V_1 + N_2 V_2 + \dots + N_n V_n}{R}}$$

Dieses w ist dasselbe für alle Kugeln, welche in der Tiefe h liegen. In einer sehr dünnen Schicht liegen aber $\frac{N_m}{H} dh$ Kugeln vom Radius ϱ_m . Die Lichtmenge aller dieser Kugeln zusammen ist

$$\frac{N_m}{H} dh \cdot I' f(\alpha) \cdot \varrho_m^2 w$$

und wenn man in Bezug auf alle m summirt, ergibt sich für die Lichtmenge der ganzen Schicht von der Dicke dh :

$$dQ = I' f(\alpha) \left(\frac{N_1 \varrho_1^2 + N_2 \varrho_2^2 + \dots + N_n \varrho_n^2}{H} \right) \cdot e^{-\sum \frac{N V}{R}} \cdot dh$$

Nennt man $M(x)$ den Mittelwerth aller Werthe, die x annehmen kann, so kann man die letzte Formel auch schreiben

$$dQ = I' f(\alpha) \frac{N}{H} \cdot M(\varrho^2) \cdot e^{-\frac{N}{R} M(V)} dh \quad (1)$$

Für nicht zu kleine Phasenwinkel α ist

$$V = \varrho^2 \pi \frac{h (\sin A + \sin A')}{\sin A \sin A'}$$

also, da die Staubwolke undurchsichtig sein soll, die gesammte Lichtmenge:

$$Q = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{H} M(\varrho^2) \int_0^\infty dh \cdot e^{-h\pi \frac{N}{R} M(\varrho^2) \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'}}$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$Q = \frac{\Gamma f(\alpha)}{\pi} \frac{R}{H} \cdot \frac{\sin A \sin A'}{\sin A + \sin A'}$$

Für $\alpha = 0$ ergibt sich hieraus

$$Q(0) = \frac{\Gamma f(0)}{2\pi} \cdot \frac{R}{H} \sin A \quad (1a)$$

Wenn man aber von vornherein $\alpha = 0$ setzt, so reducirt sich V auf die Hälfte und man findet

$$Q_0(0) = \frac{\Gamma f(0)}{\pi} \cdot \frac{R}{H} \sin A \quad (1b)$$

Diese Formeln zeigen, wie zu erwarten, dass die Lichtmengen $Q(0)$ ganz unabhängig von der Grösse der Kugeln und dem Mischungsverhältniss der verschieden grossen Kugeln ist. Da nun die Formeln (1a) und (1b) die Grösse der ganzen Lichtzunahme in der Nähe der Opposition angeben, so ist die Grösse dieser Lichtvariation auch ganz unabhängig von der speciellen Annahme, dass etwa nur Kugeln von gleichen Radien in der Masse vorkommen. Man sieht aber auch, dass nunmehr in dieser Richtung auch die Voraussetzung nicht mehr erforderlich ist, dass die kleinen Körperchen überhaupt noch die Kugelform haben, denn auch dann müssen die Formeln (1a) und (1b) gelten mit der einzigen ganz belanglosen Aenderung, dass rechts ein anderer Factor auftritt, welcher von der Form dieser Körperchen abhängt, da dies mit der Function $f(\alpha)$ der Fall ist.

Hiernach ist in der Hauptsache die Theorie der Beleuchtung staubförmiger Körper unabhängig von der ersten beschränkenden Voraussetzung. Nun fragt sich aber, wie der Uebergang von (1a) zu (1b) sich im allgemeinen Fall gestaltet, wie sich also die Lichtvariation im Einzelnen vollzieht.

Um diesen Punkt zu untersuchen, müssen wir auf die Entwicklungen in I (Art. 12) zurückgreifen. Es sollen hierbei der Einfachheit wegen die Glieder, welche von den zweiten und höheren Potenzen von α abhängen, fortgelassen werden, also

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{4 \sin A \sin A'} = 1; \quad \cos \alpha = 1$$

gesetzt werden. Dann haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden

$$h \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} h_1 = \varrho \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha}$$

Für den ersten Fall ist (I, S. 479)

$$V = V_0 + V_1 - G + \Sigma \quad (2)$$

und für den zweiten Fall

$$V = V_0 + V_1 - G$$

und es war

$$V_0 + V_1 - G = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a \varrho^2 - \frac{2}{3\pi} \varrho^3 \right\}$$

$$\Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin \alpha} \left\{ \sqrt{1 - \frac{a^2}{\varrho^2}} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi a}{2\varrho} + \frac{a}{\varrho} \arcsin \frac{a}{\varrho} \right\}$$

wobei gesetzt worden ist

$$a = \frac{h \sin \alpha}{\sin A + \sin A'}$$

Um nun nach (1) Q wirklich zu bilden, werde $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 \dots < \varrho_n$ angenommen.

Bei der Integration von

$$dQ = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{H} M(\varrho^2) e^{-\frac{N}{R} M(V)} \cdot \frac{\sin A + \sin A'}{\sin \alpha} \cdot da \quad (3)$$

in Bezug auf a zwischen den Grenzen 0 und ∞ muss man nun offenbar das Integrationsintervall zerlegen.

Es ist zu nehmen

$$\text{für } 0 < a < \varrho_1 \quad M_1(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + \frac{M(\Sigma)}{\varrho_1}$$

$$, \quad \varrho_1 < a < \varrho_2 \quad M_2(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + \frac{M(\Sigma)}{\varrho_2}$$

.

$$\text{für } \varrho_{n-1} < a < \varrho_n \quad M_n(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + \frac{M(\Sigma)}{\varrho_n}$$

$$, \quad \varrho_n < a \quad M_{n+1}(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\}$$

und dann hat man

$$Q = \Gamma f(\alpha) \frac{N(\sin A + \sin A') M(\varrho^2)}{H \sin \alpha} \times \left\{ \int_0^{\varrho_1} e^{-\frac{N}{R} M_1(V)} da + \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} e^{-\frac{N}{R} M_2(V)} da + \dots + \int_{\varrho_n}^{\infty} e^{-\frac{N}{R} M_{n+1}(V)} da \right\} \quad (4)$$

Hierin bedeutet M das Mittel aus allen den einzelnen ϱ entsprechenden Werthen von Σ ; M denselben Ausdruck, wenn in ihm der Werth Σ für $\varrho = \varrho_1$ gleich Null gesetzt wird, M wenn Σ für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ gleich Null gesetzt wird etc.

Die Gleichung (4) löst die gestellte Aufgabe ganz allgemein und man hätte nur noch Hilfsmittel aufzusuchen, um die wirkliche Berechnung von (4) zu erleichtern. Es wird dies unten unter gewissen Voraussetzungen weiter ausgeführt werden.

Zuerst soll (4) auf den einfachen Fall angewendet werden, in welchem die Masse nur aus zweierlei Kugeln besteht, nämlich aus solchen vom Radius ϱ_1 und solchen vom Radius ϱ_2 . Es werde dann, wie in I, die Function eingeführt:

$$\Phi(\varphi) = \frac{3}{8\pi} \left\{ \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - \frac{2}{3} \right\}$$

Setzt man dann im ersten Integrale in (4) $a = \varrho_1 \sin \varphi_1$ und im zweiten $a = \varrho_2 \sin \varphi_2$ so wird:

$$\Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{8\pi}{3} \Phi(\varphi) + \frac{2}{3} - \pi \sin \varphi \right\}$$

Wenn nun weiter die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\delta_1 = \frac{32}{3} \frac{\varrho_1^3 \pi}{R}, \quad \delta_2 = \frac{32}{3} \frac{\varrho_2^3 \pi}{R}$$

$$x_1 = \frac{N_1 \delta_1}{\sin \alpha}, \quad x_2 = \frac{N_2 \delta_2}{\sin \alpha}$$

so ergibt sich für die 3 hier auftretenden Mittelwerthe von V :

$$(1) = \frac{N}{R} M_1(V) = x_1 \Phi(\varphi_1) + x_2 \Phi(\varphi_2)$$

$$(2) = \frac{N}{R} M_2(V) = x_2 \Phi(\varphi_2) + \frac{3}{8} x_1 \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \sin \varphi_2 - \frac{x_1}{4\pi}$$

$$(3) = \frac{N}{R} M_3(V) = \frac{3}{8} \left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} \right) a - \frac{1}{4\pi} (x_1 + x_2)$$

und die Formel (4) gestaltet sich so:

$$Q = I' f(\alpha) \cdot \frac{(\sin A + \sin A') (N_1 \varrho_1^2 + N_2 \varrho_2^2)}{H \sin \alpha} \times \left\{ \varrho_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1)} \cdot \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \varrho_2 \int_{\frac{\varrho_1}{\sin \varphi_2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(2)} \cos \varphi_2 d\varphi_2 + \int_{\varrho_2}^{\infty} e^{-(3)} da \right\}$$

Das letzte Integral kann natürlich sofort ausgeführt werden. Dasselbe ist

$$\frac{8}{3 \left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} \right)} e^{-\frac{3}{8\pi} \left[x_1 \left(\frac{\pi \varrho_2}{\varrho_1} - \frac{2}{3} \right) + x_2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right) \right]}$$

Eine wesentliche weitere Reduction der Ausdrücke ist im Allgemeinen nicht möglich. Man wird hierin aber, gemäss den Auseinandersetzungen in Art. 7, an Stelle des strengen Werthes von Φ den Näherungswerth:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin \varphi \right)$$

einsetzen dürfen. Dann kann man die beiden ersten Integrale als Kramp'sche darstellen, was natürlich für ihre Auswerthung von grossem Nutzen ist. Das Resultat dieser sehr leicht auszuführenden Reduction ist folgendes: Setzt man:

$$\frac{q_2}{q_1} = \lambda; \quad \frac{x_2}{x_1} = \lambda^3 \cdot \frac{N_2}{N_1} = \mu; \quad x_1 = x$$

so wird:

$$Q = \Gamma f(\alpha) (\sin A + \sin A') \cdot \frac{3}{32\pi} \cdot \frac{R}{H} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \cdot I$$

$$I = x \left\{ \frac{e^{T^2}}{\sqrt{b_1}} \int_T^{T'} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{e^A}{\sqrt{b_2}} \int_{T_1}^{T_1'} e^{-\xi^2} d\xi \right\} + \frac{8}{3} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-\frac{3}{8}\frac{x}{\pi} \left\{ \pi(\lambda + \mu) - \frac{2}{3}(1 + \mu) \right\}} \quad (5)$$

und die hier vorkommenden Buchstaben haben folgende Bedeutung:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = \frac{3}{16} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda} x & T = \frac{a_1}{2\sqrt{b_1}} = (\lambda + \mu) \sqrt{\frac{3\pi x}{128(\lambda^2 + \mu)}} \\ b_1 = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\lambda^2 + \mu}{\lambda^2} x & T' = \frac{a_1}{2\sqrt{b_1}} + \sqrt{b_1} = T + \sqrt{\frac{3(\lambda^2 + \mu)x}{8\pi\lambda^2}} \\ a_2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{2\lambda + \mu}{\lambda} x & T_1 = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} + \sqrt{b_2} = (2\lambda + \mu) \sqrt{\frac{3\pi x}{128\mu}} + \sqrt{\frac{3\mu x}{8\pi\lambda^2}} \\ b_2 = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{\lambda^2} x & T_1' = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} + \lambda\sqrt{b_2} = (2\lambda + \mu) \sqrt{\frac{3\pi x}{128\mu}} + \sqrt{\frac{3\mu x}{8\pi}} \\ & A = \frac{x}{4\pi} + \frac{a_2^2}{4b_2} = x \left[\frac{1}{4\pi} + \frac{3\pi(2\lambda + \mu)^2}{128\mu} \right] \end{array}$$

Mit Hülfe der vorhandenen Tafeln für die Kramp'schen Integrale und, wo diese nicht ausreichen, mit Hülfe der in Art. 7 erwähnten Reihen kann nunmehr (5) leicht berechnet werden. Beispielsweise sei $\lambda = 2$; $\mu = 1$. Setzt man dann:

$$x = \frac{3\pi - 2}{9\pi - 4} \cdot y$$

$$v^2 = \frac{24}{5} \cdot \frac{3\pi - 2}{9\pi - 4} \cdot \pi$$

so wird

$$\frac{3}{2} I = v \sqrt{y} \left\{ e^{T^2} \int_T^{T'} e^{-\xi^2} d\xi + e^A \sqrt{5} \int_{T_1}^{T_1'} e^{-\xi^2} d\xi \right\} + \frac{8}{3} e^{-y \frac{3\pi - 2}{8\pi}}$$

Um einen Ausdruck zu bekommen, der mit $\frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)}$ in der Abhandlung I direct vergleichbar ist, muss gebildet werden

$$\zeta_1 = \frac{32}{9I}$$

Es ergab sich nun für

		R
$y = 2$	$\log \zeta_1 = 0.265$	0.267
5	0.226	0.227
10	0.182	0.182
15	0.153	0.152
100	0.043	0.042

Geht man aber mit dem Argumente $0.56 y$ in die Tafel für $\log \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)}$ ein, so ergeben sich die Werthe R . Diese wenigen Werthe reichen aus, um die Ueberzeugung zu verschaffen, dass bis auf völlig unmerkliche Abweichungen die alte Tafel die Lichtvariationen in ihrem ganzen Umfange für den soeben betrachteten Fall wiederzugeben im Stande ist, wenn das Argument mit dem constanten Factor 0.56 multiplicirt wird. Ganz ähnliches findet noch bei sehr vielen andern Werthen von λ und μ statt. So z. B. bekommt man einen vollständigen Anschluss an die wahre Lichtvariation für den Fall $\mu = 9$, $\lambda = 2$, wenn man mit dem Argumente $9.5 \cdot x$ statt x in die alte Tafel eingeht. Es ist nun um so wichtiger zu zeigen, dass in diesem Vorkommniss nicht etwa ein Satz von allgemeinerer Geltung zum Vorscheine kommt, als wir etwas ganz ähnliches weiter unten bei einer ganzen Classe von Vertheilungen der Kugeln verschiedener Grössen finden werden. Um dies auszuführen und zugleich den Grund des bemerkten Vorkommnisses besser zu erkennen, wollen wir im Gegentheile solche Werthe von λ und μ aufsuchen, bei denen die Lichtmenge Q nicht durch die alte Tafel für $\log \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)}$ näherungsweise dargestellt werden kann dadurch, dass man das Argument dieser Tafel mit einem constanten Factor multiplicirt. Der Ausdruck $I \frac{\lambda + \mu}{\lambda}$ in (5) kann selbstverständlich für specielle Werthe der beiderseitigen Argumente x und z dem früheren $\zeta(z)$ d. i.

$$\zeta = \sqrt{\frac{8\pi z}{3}} e^{\frac{z}{T_0}} \int_{T_0}^{T_0'} e^{-\xi^2} d\xi + \frac{8}{3} e^{-z \cdot \frac{3\pi-2}{8\pi}}; \quad T_0 = \sqrt{\frac{3\pi z}{128}}; \quad T_0' = T_0 \left(\frac{\pi+4}{\pi} \right)$$

gleichgemacht werden. Für äusserst kleine x und z findet sich nun:

$$I \frac{\lambda + \mu}{\lambda} = \frac{8}{3} + \frac{2x}{3\pi} (1 + \mu)$$

$$\zeta = \frac{8}{3} + \frac{2z}{3\pi}$$

Es müsste also sein:

$$x = \frac{z}{1 + \mu}$$

Für äusserst grosse x und z andererseits ist, wenn $f(T)$ dieselbe Bedeutung wie in Art. 7 hat:

$$I \frac{\lambda + \mu}{\lambda} = \frac{16}{3} f(T)$$

$$\zeta = \frac{16}{3} f(T_0)$$

Es müsste also sein:

$$T = T_0$$

oder

$$x = \frac{\lambda^2 + \mu}{(\lambda + \mu)^2} \cdot z$$

Man wird demnach im Allgemeinen nur dann eine nahe Darstellung des Ausdruckes I durch ζ im ganzen Umfange erwarten dürfen, wenn die beiden Factoren

$$\frac{1}{\mu + 1} \text{ und } \frac{\lambda^2 + \mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

nicht sehr verschieden von einander sind. In den beiden angeführten Beispielen $\lambda = 2$, $\mu = 1$, und $\lambda = 2$, $\mu = 9$ findet aber etwas ähnliches thatsächlich statt, denn die beiden Factoren sind

$$\frac{1}{2} \text{ und } \frac{5}{9} \text{ bzw. } \frac{1}{10} \text{ und } \frac{13}{121}$$

Um also ein Beispiel zu erhalten, in welchem die neue Lichtcurve nicht dadurch näherungsweise bestimmt wird, dass man mit dem mit einem constanten Factor multiplicirten Argumente in die Tafel für $\frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)}$ eingeht, muss man suchen, für jene beiden Factoren wesentlich verschiedene

Werthe zu erhalten. Setzt man z. B. $\mu = \lambda = 100$, so werden diese Factoren $\frac{1}{101}$ und $\frac{101}{400}$. In der That findet man in diesem Falle

	$\log \mathfrak{E}_1$
$x = \frac{1}{2}$	0.166
1	0.150
2	0.126
3	0.110

und wenn man aus der mehrerwähnten Tafel die Werthe von z herausucht, welche obige Tafelwerthe ergeben, findet man:

$$z = 7.0, 8.6, 12.0, 15.0$$

woraus sich ergibt

$$\frac{z}{x} = 14.0, 8.6, 6.0, 5.0$$

die also sehr wesentlich von einander abweichen.

9.

Ich gehe nun dazu über, die allgemeinen Formeln (4) des letzten Artikels in eine für die numerische Rechnung brauchbare Form zu bringen.

Wenn die im Früheren wiederholt benutzte Function Φ eingeführt wird, so ist:

$$\Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{8}{3} \pi \Phi(\varphi) + \frac{2}{3} - \pi \sin \varphi \right\}$$

Setzt man:

$$x_1 = \frac{32}{3} \varrho_1^3 \pi \cdot \frac{N_1}{R \sin \alpha}$$

$$x_2 = \frac{32}{3} \varrho_2^3 \pi \cdot \frac{N_2}{R \sin \alpha}$$

$$\dots$$

$$a = \varrho_1 \sin \varphi_1 = \varrho_2 \sin \varphi_2 = \dots = \varrho_n \sin \varphi_n$$

so wird, wenn unter $\Sigma(\varrho_1)$ der Werth von Σ für $\varrho = \varrho_1$ verstanden wird:

$$\frac{N_1}{R} \Sigma(\varrho_1) = x_1 \Phi(\varphi_1) + \frac{x_1}{4\pi} - \frac{3}{8} x_1 \sin \varphi_1$$

$$\frac{N_2}{R} \Sigma(\varrho_2) = x_2 \Phi(\varphi_2) + \frac{x_2}{4\pi} - \frac{3}{8} x_2 \sin \varphi_2$$

$$\dots$$

Weiter hat man

$$\frac{4\pi N}{R \sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} \\ = \frac{3}{8} (x_1 \sin \varphi_1 + x_2 \sin \varphi_2 + \dots + x_n \sin \varphi_n) - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{4\pi}$$

Bei der Bildung von (4) hat man noch zu berücksichtigen, dass

$$M_{\varrho_1}(\Sigma) = \frac{N_1 \Sigma(\varrho_1) + N_2 \Sigma(\varrho_2) + \dots + N_n \Sigma(\varrho_n)}{N_1 + N_2 + \dots + N_n}$$

$$M_{\varrho_1}(\Sigma) = \frac{N_2 \Sigma(\varrho_2) + \dots + N_n \Sigma(\varrho_n)}{N_1 + N_2 + \dots + N_n} \text{ u. s. f.}$$

Die einzelnen Integrale, aus denen sich (4) zusammensetzt, lauten also in expliciter Form:

$$\int_0^{\varrho_1} e^{-\frac{N}{R} M_1(V)} da = \varrho_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_1 d\varphi_1 e^{-[x_1 \Phi(\varphi_1) + x_2 \Phi(\varphi_2) + \dots + x_n \Phi(\varphi_n)]} \\ \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} e^{-\frac{N}{R} M_2(V)} da = \varrho_2 \int_{\arcsin \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_2 d\varphi_2 e^{-[x_2 \Phi(\varphi_2) + \dots + x_n \Phi(\varphi_n) - \frac{x_1}{4\pi} + \frac{3}{8} x_1 \sin \varphi_1]} \\ \dots \dots \dots \int_{\varrho_{n-1}}^{\varrho_n} e^{-\frac{N}{R} M_n(V)} da = \varrho_n \int_{\arcsin \frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_n}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_n d\varphi_n e^{-[x_n \Phi(\varphi_n) - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{4\pi} + \frac{3}{8} (x_1 \sin \varphi_1 + \dots + x_{n-1} \sin \varphi_{n-1})]} \\ \int_{\varrho_n}^{\infty} e^{-\frac{N}{R} M_{n+1}(V)} da = \frac{8}{3 \left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \dots + \frac{x_n}{\varrho_n} \right)} e^{+\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{4\pi}} \cdot e^{-\frac{3}{8} \left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \dots + \frac{x_n}{\varrho_n} \right) \varrho_n}$$

Dies sind die allgemeinen Formeln, nach denen die numerische Rechnung stets ausführbar ist. Begnügt man sich, was wohl stets erlaubt sein wird, den Näherungswerth anzusetzen:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \sin \varphi \right)$$

so reduciren sich selbstverständlich die obigen Integrale wieder auf die Kramp'sche Form. Bezeichnet man allgemein

$$J_m = \int_{\varrho_{m-1}}^{\varrho_m} e^{-\frac{N}{R} M_m(V)} d\varrho$$

und setzt man noch

$$x_1 = x; \quad x_m = \mu_m x_1; \quad \varrho_m = \lambda_m \varrho_1$$

$$a_m = \frac{3}{16} x \left\{ \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right) + \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\mu_{m-1}}{\lambda_{m-1}} \right) \right\}$$

$$b_m = \frac{3}{8\pi} x \left\{ \frac{\mu_m}{\lambda_m^2} + \frac{\mu_{m+1}}{\lambda_{m+1}^2} + \dots + \frac{\mu_n}{\lambda_n^2} \right\}$$

so wird

$$J_m = \frac{\varrho_1}{V b_m} e^{\frac{x}{4\pi} [1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_{m-1}]} \cdot e^{\frac{a_m^2}{4 b_m}} \int_{T_m}^{T'_m} e^{-\xi^2} d\xi$$

worin:

$$T_m = \frac{a_m}{2 V b_m} + \lambda_{m-1} \cdot V b_m$$

$$T'_m = \frac{a_m}{2 V b_m} + \lambda_m \cdot V b_m$$

Anzumerken wäre vielleicht noch

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0; \quad \lambda_1 = \mu_1 = 1$$

Ferner kann gesetzt werden

$$\frac{N M(\varrho^2)}{H \sin \alpha} = \frac{3}{32\pi} \frac{R}{H} \frac{x}{\varrho_1} \left[1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right]$$

Dann ist schliesslich

$$Q = \Gamma f(\alpha) (\sin A + \sin A') \frac{3}{32\pi} \frac{R}{H} \cdot \frac{x}{\varrho_1} \left[1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right] \cdot I \quad (1)$$

$$I = \sum_{m=1}^{m=n} J_m + \frac{8}{3} \frac{\varrho_1}{x \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right)} e^{-\frac{3}{8} \frac{x}{\pi} \left[\pi \lambda_n \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \right) - \frac{2}{3} (1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \right]}$$

Setzt man hierin $n = 2$, so gelangt man, wie es sein muss, genau zu dem Ausdruck (5) des vorigen Artikels.

Als Beispiel einer stetigen Vertheilung der Kugeln in Bezug auf ihre Grösse soll der Fall betrachtet werden, dass ϱ alle möglichen Werthe zwischen 0 und ϱ haben möge und zwar alle Werthe mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die letzte einschränkende Bedingung könnte selbstverständlich auch fort bleiben, ohne das Wesen der nachfolgenden Betrachtungen zu treffen, nur lassen sich dann natürlich die Formeln nicht bis zur numerischen Verwendung zurecht legen, ohne speciellere Annahmen zu machen. Es ist von selbst klar, dass man auch jetzt die allgemeinen Formeln (1) des vorigen Artikels verwenden kann, es soll aber ein ganz directer Weg eingeschlagen werden. Für den vorliegenden Fall wird man in Formel (4) des Art. (8) nur das erste und letzte Integral beibehalten dürfen, wenn man im ersten Integrale setzt:

$$M_a(V) = M(V_0 + V_1 - G) + M_a(\Sigma)$$

und es ist offenbar

$$M_a(\Sigma) = \frac{1}{\varrho} \int_a^{\varrho} \Sigma \cdot d\varrho; \quad M(V_0 + V_1 - G) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ \frac{a}{3} \varrho^2 - \frac{1}{6\pi} \varrho^3 \right\}$$

Mit Hülfe der Integralformeln

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \varrho^2 \sqrt{\varrho^2 - a^2} - \frac{1}{3} (V\varrho^2 - a^2)^3 \right\} d\varrho \\ &= \frac{1}{6} \varrho (V\varrho^2 - a^2)^3 + \frac{a^2}{4} \varrho \sqrt{\varrho^2 - a^2} - \frac{a^4}{4} \log(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - a^2}) \\ & \quad \int \varrho^2 \arcsin \frac{a}{\varrho} d\varrho \\ &= \frac{a^3}{3} \left\{ \frac{\varrho^3}{a^3} \arcsin \frac{a}{\varrho} + \frac{\varrho}{2a^2} \sqrt{\varrho^2 - a^2} + \frac{1}{2} \log(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - a^2}) \right\} \end{aligned}$$

und wenn man setzt: $a = \varrho \sin \varphi$, erhält man leicht:

$$M(V) = \frac{\varrho^3}{\sin \alpha} \times \left\{ \frac{5}{3} \cos \varphi - \cos^3 \varphi + \frac{4}{3} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sin^4 \varphi \log \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right\}$$

Dies ist in das erste Integral in (4) Art. 8 einzusetzen. In das letzte, wo also $\varrho < a$, hat man dagegen zu substituieren:

$$M(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{a\varrho^2}{3} - \frac{1}{6\pi} \varrho^3 \right\}$$

Setzt man nun:

$$\delta = \frac{32}{3} \cdot \frac{\varrho^3 \pi}{R}; \quad \frac{N\delta}{\sin \alpha} = x$$

$$\Phi_1 = \frac{3}{32\pi} \left\{ \frac{5}{3} \cos \varphi - \cos^3 \varphi + \frac{4}{3} \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sin^4 \varphi \log \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right\} \quad (1)$$

$$I' = \frac{3 \Gamma f(\alpha) \varrho M(\varrho^2)}{H \delta}$$

so wird

$$Q = I' (\sin A + \sin A') \left\{ \frac{1}{3} x \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \Phi_1} \cos \varphi d\varphi + \frac{8}{3} e^{-x \frac{2\pi-1}{16\pi}} \right\}$$

Es werde nun noch gesetzt:

$$x = 2y \cdot \frac{3\pi-2}{2\pi-1}$$

$$\Psi = 2 \cdot \frac{3\pi-2}{2\pi-1} \cdot \Phi_1$$

Dann kann man schliesslich schreiben:

$$Q = I' (\sin A + \sin A') \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{3\pi-2}{2\pi-1} y \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-y \Psi} \cos \varphi d\varphi + \frac{8}{3} e^{-y \frac{3\pi-2}{8\pi}} \right\} \quad (2)$$

Die Klammergrösse, welche $\mathfrak{C}'(y)$ heissen möge, habe ich nun unter wesentlicher Beihülfe des Herrn Dr. Anding nach der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadraturen berechnet. Für grosse Werthe von y , wo man sich nach einer anderen Methode umsehen muss, und eine ähnliche halbconvergente Reihe, wie in I für $\mathfrak{A}$ abgeleitet worden ist, nur für sehr grosse y brauchbar ist, wurde wieder durch Weglassen der höheren Potenzen von $\sin \varphi$ in Ψ die Reduction auf die Kramp'sche Form durchgeführt.

Ich lasse zunächst zur Uebersicht einige Werthe von Ψ folgen, welche bei den mechanischen Quadraturen von Nutzen sind.

φ	$\log \Psi$	Ψ	φ	$\log \Psi$	Ψ	φ	$\log \Psi$	Ψ
0°	— ∞	0	30°	9.0986	0.1255 ⁹⁴	60°	9.3952	0.2484 ⁶⁰
2	7.8014	0.0063 ⁶³	32	9.1301	0.1349 ⁹⁴	62	9.4054	0.2544 ⁵⁵
4	8.1162	0.0131 ⁶⁸	34	9.1593	0.1443 ⁹³	64	9.4148	0.2599 ⁵²
6	8.3050	0.0202 ⁷¹	36	9.1863	0.1536 ⁹¹	66	9.4234	0.2651 ⁴⁸
8	8.4419	0.0277 ⁷⁵	38	9.2115	0.1627 ⁹¹	68	9.4311	0.2699 ⁴⁴
10	8.5499	0.0355 ⁷⁸	40	9.2349	0.1718 ⁸⁸	70	9.4381	0.2743 ⁴⁰
12	8.6395	0.0436 ⁸¹	42	9.2567	0.1806 ⁸⁶	72	9.4444	0.2783 ³⁵
14	8.7161	0.0520 ⁸⁴	44	9.2769	0.1892 ⁸⁴	74	9.4500	0.2818 ³²
16	8.7830	0.0607 ⁸⁷	46	9.2958	0.1976 ⁸²	76	9.4549	0.2850 ²⁷
18	8.8423	0.0696 ⁸⁹	48	9.3133	0.2058 ⁷⁹	78	9.4590	0.2877 ²⁴
20	8.8955	0.0786 ⁹⁰	50	9.3297	0.2137 ⁷⁶	80	9.4625	0.2901 ¹⁹
22	8.9437	0.0878 ⁹²	52	9.3449	0.2213 ⁷²	82	9.4654	0.2920 ¹⁵
24	8.9875	0.0972 ⁹⁴	54	9.3590	0.2285 ⁷⁰	84	9.4676	0.2935 ¹¹
26	9.0277	0.1066 ⁹⁴	56	9.3720	0.2355 ⁶⁷	86	9.4692	0.2946 ⁶
28	9.0646	0.1160 ⁹⁵	58	9.3841	0.2422 ⁶²	88	9.4701	0.2952 ²
30	9.0986	0.1255	60	9.3952	0.2484	90	9.4705	0.2954

Die Grösse $\log \frac{\mathfrak{E}'(\infty)}{\mathfrak{E}'(y)}$, auf 3 Decimalstellen abgekürzt, ergibt die folgende Zusammenstellung:

y	R	y	R
1	0.279	40	0.077
2	0.259	45	0.071
3	0.243	50	0.065
4	0.228	55	0.061
5	0.215	60	0.057
6	0.204	65	0.054
7	0.194	70	0.051
8	0.184	75	0.048
9	0.176	80	0.046
10	0.169	85	0.043
12	0.155	90	0.042
14	0.144	95	0.040
16	0.135	100	0.038
18	0.126	150	0.027
20	0.119	200	0.021
25	0.104	300	0.015
30	0.093	400	0.011
35	0.084	500	0.009
40	0.077		

In dieser Tabelle sind unter R Zahlen angeführt, die folgendermassen entstanden sind. In die Tafel für $\log \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)}$ wurde mit dem Argumente $x = 0.65 \cdot y$ eingegangen und wurden aus ihr die zugehörigen Werthe entnommen. Diese stimmen mit den direct berechneten Werthen, wie man sieht, für practische Zwecke vollkommen überein. Es ist dies ein ganz ähnliches Vorkommniss, wie das, welches schon oben bemerkt worden ist. Wenn man also $N\delta$ nur aus dem Verlaufe der Lichtvariation bestimmen will, so wird dies, wenn man nur die Abhängigkeit von α in Betracht zieht, nicht möglich sein, da man die wahre Lichtcurve aus der Tafel für $\log \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(x)}$ erhält, indem man nur das Argument x in einem anderen Maassstabe angiebt, also die Grösse $N\delta$ mit einem constanten Factor zu multipliciren hat.

Auch die Betrachtung des nächst allgemeineren Falles, in dem ϱ alle Werthe zwischen ϱ_0 und ϱ_1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit besitzt, lässt sich verhältnissmässig einfach durchführen. Es soll dies im Folgenden geschehen. Setzt man in der Formel (4) Art. 8

$$I' = I f(\alpha) \frac{N M(\varrho^2)}{H} (\sin A + \sin A')$$

so wird

$$Q = \frac{I'}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \int_0^{\varrho_0} e^{-\frac{N}{R} M_1(V)} da + \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} e^{-\frac{N}{R} M_2(V)} da + \int_{\varrho_1}^{\infty} e^{-\frac{N}{R} M_3(V)} da \right\}$$

und hierin ist

$$M_1(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + M(\Sigma)$$

$$M_2(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\} + M_a(\Sigma)$$

$$M_3(V) = \frac{4\pi}{\sin \alpha} \left\{ a M(\varrho^2) - \frac{2}{3\pi} M(\varrho^3) \right\}$$

und im vorliegenden Falle:

$$M(\Sigma) = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_0} \cdot \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \Sigma d\varrho; \quad M_a(\Sigma) = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_0} \cdot \int_a^{\varrho_1} \Sigma d\varrho$$

Durch Einführung der oben benutzten Function Φ_1 und wenn man setzt

$$a = \varrho_0 \sin \varphi_0 = \varrho_1 \sin \varphi$$

hat man

$$\int_a^{\varrho_1} \Sigma d\varrho = \frac{\varrho_1^4}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{32\pi}{3} \Phi_1(\varphi) - \frac{4\pi}{3} \sin \varphi + \frac{2}{3} \right\}$$

$$\int_a^{\varrho_0} \Sigma d\varrho = \frac{\varrho_0^4}{\sin \alpha} \cdot \left\{ \frac{32\pi}{3} \Phi_1(\varphi_0) - \frac{4\pi}{3} \sin \varphi_0 + \frac{2}{3} \right\}$$

Setzt man nun noch

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \lambda$$

$$\delta = \frac{32\pi}{3R} \frac{\varrho_1^3}{1-\lambda}; \quad \frac{N\delta}{\sin \alpha} = x$$

so findet man

$$Q = \frac{\Gamma' \varrho_1}{N\delta} \left\{ x \int_0^{\sin \varphi = \lambda} \cos \varphi d\varphi e^{-x[\Phi_1(\varphi) - \lambda^4 \Phi_1(\varphi_0)]} + x \int_{\sin \varphi = \lambda}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi e^{-x[\Phi_1(\varphi) - \frac{1}{8}\lambda^3 \sin \varphi + \frac{1}{16\pi}\lambda^4]} + \frac{8}{1-\lambda^3} e^{-\frac{x}{16\pi}[2\pi(1-\lambda^3) - (1-\lambda^4)]} \right\} \quad (3)$$

Eine an sich belanglose, aber für die numerische Rechnung zu empfehlende Umgestaltung erhält man, wenn man setzt

$$\mu = \frac{2\pi - 1}{2\pi(1-\lambda^3) - (1-\lambda^4)}; \quad \nu = \frac{6\pi - 4}{6\pi - 3} \cdot (1 - \lambda^3); \quad x = \frac{3\mu\nu}{1-\lambda^3} y$$

$$\psi = 2 \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1} \cdot \Phi_1 = \frac{3\nu\Phi_1}{1-\lambda^3}; \quad \text{also } \mu y \psi = x \Phi_1$$

Dann wird

$$Q = \frac{3\Gamma'\varrho_1}{(1-\lambda^3)N\delta} \left\{ y\mu\nu[I + II] + \frac{8}{3} e^{-y\frac{3\pi-2}{8\pi}} \right\} \quad (4)$$

worin:

$$I = \int_0^{\sin \varphi = \lambda} \cos \varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu [\Psi(\varphi) - \lambda^4 \Psi(\varphi_0)]}$$

$$II = \int_{\sin \varphi = \lambda}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu \left[\Psi(\varphi) - \frac{3\lambda^3}{16\pi(1-\lambda^3)} (2\pi \sin \varphi - \lambda) \right]}$$

Man kann schliesslich schreiben:

$$I = \int_0^{\sin \varphi = \lambda} \cos \varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu X}$$

$$II = \int_{\sin \varphi = \lambda}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \cdot e^{-y\mu Y}$$

$$X = \Psi(\varphi) - \lambda^4 \Psi(\varphi_0); \quad Y = \Psi(\varphi) - \frac{\lambda^3(3\pi - 2)}{4(2\pi - 1)} \left[\sin \varphi - \frac{\lambda}{2\pi} \right]$$

Man kann auch die obigen Integrale auf die Kramp'sche Form zurückführen, wenn man in Ψ die höheren als die dritten Potenzen von $\sin \varphi$ vernachlässigt. Doch habe ich, um den abzuleitenden Satz in aller Strenge aufstellen zu können, von dieser Reduction nur bei dem Integrale I und zwar für sehr grosse y Gebrauch gemacht, da hier irgend welche Bedenken über die allgemeine Zulässigkeit derselben nicht entstehen können. Eine einfache Rechnung ergibt nun:

$$X = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{3\pi - 2}{2\pi - 1} \left\{ \frac{\pi}{3} (1 - \lambda^3) \sin \varphi + (1 - \lambda^2) \sin^2 \varphi \right\}$$

und hiermit

$$y\mu\nu I = \frac{32}{3} T e^{T^2} \cdot \int_T^{T'} e^{-\xi^2} d\xi$$

wobei:

$$\beta = \frac{3}{\pi} \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^3}; \quad T = \sqrt{\frac{3\mu\nu y}{64\beta}}; \quad T' = T(1 + 2\beta\lambda) \quad (5)$$

Die strengen Werthe (4) wurden nun auf mechanischem Wege und zwar wieder nach der Gauss'schen Methode mit Rücksicht auf die in der Abhandlung I ausführlicher erörterten Vorsichtsmaassregeln berechnet. Diese zum Theil nicht einfachen Rechnungen hat grösstentheils Herr Dr. Anding ausgeführt. Man nenne $\mathfrak{E}(y)$ die in (4) vorkommende Klammergrösse, und es möge im Folgenden, wie früher, die Grösse $\log \frac{\mathfrak{E}(\infty)}{\mathfrak{E}(y)} = \log \mathfrak{E}_1$ eingeführt werden. Für λ wurden die 3 Werthe angenommen:

$$1) \lambda = \sin 24^\circ; \quad 2) \lambda = \sin 38^\circ; \quad 3) \lambda = \sin 54^\circ$$

Hiermit ergab sich

	1)	2)	3)
$\log \mu$	0.03378	0.12514	0.34550
$\log \nu$	9.94145	9.85629	9.64424

Von den weiteren Rechnungen theile ich nur einen Auszug der auf 4 Stellen abgekürzten Tafeln der Grössen ψ , X und Y mit.

ψ		ψ		ψ		ψ		ψ	
φ	ψ	φ	ψ	φ	ψ	φ	ψ	φ	ψ
0°	0.0000 ₆₃	20°	0.0786 ₉₂	40°	0.1718 ₈₈	60°	0.2484 ₅₉	80°	0.2901 ₁₉
2	0.0063 ₆₈	22	0.0878 ₉₄	42	0.1806 ₈₆	62	0.2543 ₅₆	82	0.2920 ₁₅
4	0.0131 ₇₁	24	0.0972 ₉₄	44	0.1892 ₈₄	64	0.2599 ₅₂	84	0.2935 ₁₁
6	0.0202 ₇₅	26	0.1066 ₉₄	46	0.1976 ₈₂	66	0.2651 ₄₈	86	0.2946 ₆
8	0.0277 ₇₈	28	0.1160 ₉₅	48	0.2058 ₇₉	68	0.2699 ₄₄	88	0.2952 ₂
10	0.0355 ₈₁	30	0.1255 ₉₄	50	0.2137 ₇₆	70	0.2743 ₄₀	90	0.2954
12	0.0436 ₈₄	32	0.1349 ₉₄	52	0.2213 ₇₂	72	0.2783 ₃₅		
14	0.0520 ₈₇	34	0.1443 ₉₃	54	0.2285 ₇₀	74	0.2818 ₃₂		
16	0.0607 ₈₉	36	0.1536 ₉₁	56	0.2355 ₆₇	76	0.2850 ₂₇		
18	0.0696 ₉₀	38	0.1627 ₉₁	58	0.2422 ₆₂	78	0.2877 ₂₄		
20	0.0786	40	0.1718	60	0.2484	80	0.2901		

$$\lambda = \sin 24^\circ$$

φ	X	φ	X	φ	Y	φ	Y	φ	Y	φ	Y
0°	0.0000 ⁵⁹	12°	0.0401 ⁷⁶	24°	0.0891 ⁸⁶	44°	0.1743 ⁷⁸	64°	0.2402 ⁴⁸	84°	0.2715 ¹¹
2	0.0059 ⁶²	14	0.0477 ⁸⁰	26	0.0977 ⁸⁸	46	0.1821 ⁷⁶	66	0.2450 ⁴⁵	86	0.2726 ⁵
4	0.0121 ⁶⁶	16	0.0557 ⁸¹	28	0.1065 ⁸⁷	48	0.1897 ⁷⁴	68	0.2495 ⁴¹	88	0.2731 ²
6	0.0187 ⁶⁸	18	0.0638 ⁸³	30	0.1152 ⁸⁷	50	0.1971 ⁷¹	70	0.2536 ³⁷	90	0.2733
8	0.0255 ⁷²	20	0.0721 ⁸⁴	32	0.1239 ⁸⁷	52	0.2042 ⁶⁸	72	0.2573 ³³		
10	0.0327 ⁷⁴	22	0.0805 ⁸⁶	34	0.1326 ⁸⁶	54	0.2110 ⁶⁴	74	0.2606 ³⁰		
12	0.0401	24	0.0891	36	0.1412 ⁸⁵	56	0.2174 ⁶²	76	0.2636 ²⁶		
				38	0.1497 ⁸⁴	58	0.2236 ⁵⁹	78	0.2662 ²²		
				40	0.1581 ⁸²	60	0.2295 ⁵⁵	80	0.2684 ¹⁷		
				42	0.1663 ⁸⁰	62	0.2350 ⁵²	82	0.2701 ¹⁴		
				44	0.1743	64	0.2402	84	0.2715		

$$\lambda = \sin 38^\circ$$

φ	X	φ	X	φ	Y	φ	Y	φ	Y
0°	0.0000 ⁴⁸	18°	0.0514 ⁶⁷	38°	0.1203 ⁶⁸	58°	0.1807 ⁴⁸	78°	0.2156 ¹⁸
2	0.0048 ⁵¹	20	0.0581 ⁶⁷	40	0.1271 ⁶⁷	60	0.1855 ⁴⁵	80	0.2174 ¹⁴
4	0.0099 ⁵³	22	0.0648 ⁶⁸	42	0.1338 ⁶⁵	62	0.1900 ⁴²	82	0.2188 ¹²
6	0.0152 ⁵⁶	24	0.0716 ⁶⁹	44	0.1403 ⁶⁴	64	0.1942 ⁴⁰	84	0.2200 ⁸
8	0.0208 ⁵⁷	26	0.0785 ⁷⁰	46	0.1467 ⁶²	66	0.1982 ³⁷	86	0.2208 ⁵
10	0.0265 ⁶⁰	28	0.0855 ⁷⁰	48	0.1529 ⁶⁰	68	0.2019 ³³	88	0.2213 ²
12	0.0325 ⁶¹	30	0.0925 ⁷⁰	50	0.1589 ⁵⁸	70	0.2052 ³¹	90	0.2215
14	0.0386 ⁶³	32	0.0995 ⁷⁰	52	0.1647 ⁵⁵	72	0.2083 ²⁷		
16	0.0449 ⁶⁵	34	0.1065 ⁶⁹	54	0.1702 ⁵⁴	74	0.2110 ²⁵		
18	0.0514	36	0.1134 ⁶⁹	56	0.1756 ⁵¹	76	0.2135 ²¹		
		38	0.1203	58	0.1807	78	0.2156		

$$\lambda = 54^\circ$$

φ	X	φ	X	φ	X	φ	Y	φ	Y
0°	0.0000 ³⁰	20°	0.0350 ⁴⁰	40°	0.0760 ⁴⁰	54°	0.1020 ³²	72°	0.1253 ¹⁶
2	0.0030 ³¹	22	0.0390 ⁴⁰	42	0.0800 ³⁹	56	0.1052 ³¹	74	0.1269 ¹⁵
4	0.0061 ³²	24	0.0430 ⁴¹	44	0.0839 ³⁸	58	0.1083 ³⁰	76	0.1284 ¹³
6	0.0093 ³³	26	0.0471 ⁴²	46	0.0877 ³⁷	60	0.1113 ²⁷	78	0.1297 ¹¹
8	0.0126 ³⁵	28	0.0513 ⁴²	48	0.0914 ³⁷	62	0.1140 ²⁶	80	0.1308 ⁹
10	0.0161 ³⁶	30	0.0555 ⁴¹	50	0.0951 ³⁵	64	0.1166 ²⁵	82	0.1317 ⁷
12	0.0197 ³⁷	32	0.0596 ⁴²	52	0.0986 ³⁴	66	0.1191 ²²	84	0.1324 ⁵
14	0.0234 ³⁷	34	0.0638 ⁴¹	54	0.1020	68	0.1213 ²¹	86	0.1329 ³
16	0.0271 ³⁹	36	0.0679 ⁴¹			70	0.1234 ¹⁹	88	0.1332 ¹
18	0.0310 ⁴⁰	38	0.0720 ⁴⁰			72	0.1253	90	0.1333
20	0.0350	40	0.0760						

Die mechanische Quadratur ergab nun für $\log \mathfrak{E}_1$

y	$\lambda = \sin 24^\circ$		$\lambda = \sin 38^\circ$		$\lambda = \sin 54^\circ$	
	$\log \mathfrak{E}_1$	R	$\log \mathfrak{E}_1$	R	$\log \mathfrak{E}_1$	R
1	0.278	0.279	0.276	0.276	0.273	0.273
2	0.257	0.259	0.254	0.255	0.250	0.250
5	0.213	0.214	0.206	0.206	0.198	0.198
10	0.164	0.165	0.156	0.156	0.148	0.148
15	0.134	0.135	0.126	0.126	0.118	0.118
20	0.113	0.114	0.106	0.106	0.099	0.098
30	0.087	0.088	0.081	0.081	0.074	0.074
40	0.071	0.072	0.066	0.066	0.060	0.061
50	0.061	0.061	0.056	0.056	0.050	0.050
60	0.052	0.052	0.048	0.048	0.043	0.044
80	0.042	0.042	0.038	0.038	0.034	0.034
100	0.035	0.035	0.032	0.031	0.029	0.028

Neben den $\log \mathfrak{E}_1$ stehen unter R die Werthe von $\log \frac{\mathfrak{E}(\infty)}{\mathfrak{E}(z)}$ welche aus der früheren in I mitgetheilten Tafel entnommen sind mit dem Argumente z :

$$\begin{aligned} \text{für } \lambda = \sin 24^\circ & \dots z = 0.704 \cdot y \\ & = \sin 38^\circ \dots = 0.79 \cdot y \\ & = \sin 54^\circ \dots = 0.89 \cdot y \end{aligned}$$

Wie man sieht ist die Uebereinstimmung eine vollkommene. Wenn noch die 4. Stelle berücksichtigt wird, so sind die Differenzen zwar, wie zu erwarten, von systematischem Character, aber für practische Zwecke völlig belanglos. Dem ist noch hinzuzufügen, dass nach dem früheren (S. 61) etwas ganz ähnliches für $\lambda = 0$ gefunden worden ist. Man hatte dort nur zu setzen:

$$z = 0.65 \cdot y$$

und für $\lambda = 1$ ist dasselbe selbstverständlich der Fall, wenn man $z = y$ nimmt. Man erhält diese Quotienten $\frac{z}{y}$ sehr nahe, wenn die betreffenden Ausdrücke für $\mathfrak{E}_1$ und $\frac{\mathfrak{E}(\infty)}{\mathfrak{E}(z)}$ für sehr grosse Werthe von z und y mit Hülfe der Kramp'schen Form berechnet und den Quotienten der beiderseitigen Argumente so bestimmt, dass man dieselben Werthe für die ge-

nannten Grössen erhält. Es ergibt sich so, fast vollkommen übereinstimmend mit den obigen Werthen

$$\begin{aligned} \text{für } \lambda &= 0 & \dots & z = 0.63 \cdot y \\ \lambda &= \sin 24^\circ & \dots & = 0.70 \cdot y \\ \lambda &= \sin 38^\circ & \dots & = 0.78 \cdot y \\ \lambda &= \sin 54^\circ & \dots & = 0.87 \cdot y \\ \lambda &= .1 & \dots & = 1.00 \cdot y \end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Rechnungen geht der Satz hervor:

Wenn die Radien ϱ der Kugeln, welche die staubförmige Masse bilden, alle möglichen Werthe zwischen ϱ_0 und ϱ_1 haben und zwar alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit, so wird die Lichtvariation in der Nähe der Opposition vollständig durch die alte Tafel dargestellt, wenn man in sie mit einem Argumente z eingeht, welches sich von dem früheren nur durch einen constanten Factor unterscheidet.

Wenn man nun die Lichtvariation mit Hülfe der alten Tafel für $\frac{\xi(\infty)}{\xi(z)}$ berechnet, hierauf $z = \frac{N_0 \delta_0}{\sin \alpha}$ setzt und hieraus aus den Vergleichen mit den Beobachtungen $N_0 \delta_0$ berechnet, so hängt dieses $N_0 \delta_0$ mit dem obigen $N \delta$ auf folgende Weise zusammen. Da näherungsweise nach (5) dieses und (2) des Artikels 7, nämlich für sehr grosse z und x , der Zusammenhang besteht

$$z = \frac{2}{9} \frac{(1 - \lambda^3)^2}{1 - \lambda^2} \cdot x \quad (6)$$

so ist also, da $\frac{N \delta}{\sin \alpha} = x$ gesetzt worden ist,

$$N_0 \delta_0 = \frac{2}{9} \frac{(1 - \lambda^3)^2}{1 - \lambda^2} \cdot N \delta; \quad \delta = \frac{32 \pi}{3 R} \frac{\varrho_1^3}{1 - \lambda}$$

Berechnet man aber δ_1 nach derselben Formel, welche in dem Falle, wo alle Kugeln denselben mittleren Radius ϱ_m haben, gilt, nämlich:

$$\delta_1 = \frac{32 \pi}{3 R} \cdot \varrho_m^3$$

so hat man zunächst zu berücksichtigen, dass:

$$\varrho_m^3 = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_0} \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varrho_1^3 (1 - \lambda^4)}{1 - \lambda}$$

und demzufolge

$$\delta_1 = \frac{1}{4} \delta (1 - \lambda^4)$$

und es ergibt sich also:

$$N_0 \delta_0 = \frac{8}{9} \frac{(1 - \lambda^3)^2}{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^4)} \cdot N \delta_1$$

Der Factor von $N \delta_1$ liegt nun, wie gleich gezeigt werden soll, zwischen 1 und $\frac{8}{9}$ und man hätte demgemäss, innerhalb dieser Genauigkeit, in roher Annäherung:

$$N_0 \delta_0 = N \delta_1$$

Um das eben Gesagte zu beweisen, differentiirt man die Function

$$\varphi(\lambda) = \frac{(1 - \lambda^3)^2}{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^4)}$$

nach λ . So ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda(1 - \lambda^3)(1 - \lambda)^3}{(1 - \lambda^2)(1 - \lambda^4)^2}$$

Da nun $\lambda < 1$, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ stets positiv, d. h. φ wächst fortwährend, wenn sich λ von 0 bis 1 ändert. Nun ist für $\lambda = 0$, $\varphi = 1$ und für $\lambda = 1$, $\varphi = \frac{9}{8}$, also liegt der Werth des genannten Factors in der That zwischen $\frac{8}{9}$ und 1.

Zum Schlusse habe ich noch auf den zweiten Punkt zurückzukommen, der nach den Bemerkungen am Anfange des Art. 8 einer kurzen Darlegung bedürftig ist. Es ist also noch der Einfluss, den eine nicht punctförmige Gestalt der Lichtquelle ausübt, einer Betrachtung zu unterziehen. Es ist sehr leicht, die Modificationen anzugeben, welche die im Vorstehenden entwickelten Formeln erfordern, wenn eine ausgedehnte Lichtquelle vorliegt, wenngleich die vollkommene Durchführung derselben auch Verwicklungen mit sich führt, die indessen hier zu entwickeln keine Ver-

anlassung vorliegt. Es möge die Lichtquelle eine gleichmässig helle Kreisscheibe sein, die der beleuchteten Substanz unter dem scheinbaren Radius r erscheint. Ist dann Q die nach den im Vorstehenden aufgestellten Formeln berechnete Lichtmenge, die also einer punctförmigen Lichtquelle entspricht, so wird man für die wirklich beobachtete Lichtmenge haben

$$Q_1 = \frac{1}{\pi \sin^2 r} \cdot \int Q ds$$

Hierbei ist die Integration auszudehnen auf alle Elemente ds der leuchtenden Scheibe. Sind α_0 und α die Winkel zwischen den Richtungen nach dem Beobachter und dem Mittelpunkte der Scheibe beziehungsweise nach einem Elemente ds derselben, und φ der Winkel, den die beiden Ebenen, in denen α beziehungsweise α_0 liegt, mit einander bilden, so ist

$$ds = \sin \alpha d\alpha \cdot d\varphi$$

Ferner ist nach dem Früheren Q näherungsweise dargestellt worden in der Form

$$Q = (\sin A + \sin A') \cdot F(\alpha)$$

wo F eine bekannte Function von α ist. Es ist also

$$Q = \frac{1}{\pi \sin^2 r} \cdot \iint (\sin A + \sin A') F(\alpha) \cdot \sin \alpha d\alpha d\varphi$$

Wenn nun der Einfachheit wegen wieder die Verhältnisse des Saturnringes festgehalten werden und wenn (wie in I) δ den Winkel bezeichnet, den die Ebene Saturn — Erde — Sonnenelement mit der auf dem Saturnringe senkrechten Ebene bildet, in welcher die Erde liegt und δ_0 dasselbe für den Mittelpunkt der Sonne, so ist

$$\delta = \delta_0 + \varphi$$

und

$$(\sin A + \sin A') = 2 \sin A \cos^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos A \sin \alpha \cos (\delta_0 + \varphi)$$

Die vollständige Integration auszuführen, wäre complicirt. Es ist dies aber nicht nöthig, um zu erkennen, dass bei Saturn die Lichtcurve nur wenig geändert werden kann. Vom Saturn aus gesehen erscheint der Sonnenradius unter einem Winkel von 1.7. Es kann sich demnach

die Lichtcurve nur um kleinere Beträge ändern als entstehen, wenn man in den nach dem Argumente α geordneten Tabellen das α um 1.7 ändert. Es werden sich dann nur diejenigen Theile der Curve etwas ändern, für welche α sehr klein ist, und dies auch nur dann, wenn $N\delta$ klein ist, die Masse also dünn vertheilt ist. In diesem Falle, was beim dunklen Saturnring eintreten kann, wird die Ausdehnung der Sonne eine merkbare Wirkung auf die berechnete Lichtvariation ausüben. Diese Wirkung ist ausgleichender Natur, indem die schnellen Uebergänge gemildert werden. Bemerkbar wird dies sein bei der eigenthümlichen fast plötzlich eintretenden Lichtzunahme, die in Art. 5 (S. 33) besprochen worden ist.

Druckfehler:

Seite 16 in Formel (1) im Factor vor der Klammer
lies $\sin A$ statt $\sin \alpha$.

T a b e l l e n.

I.

φ	Φ	φ	Φ	φ	Φ
0°	0.00000 ³³¹	30°	0.12296 ⁴⁵⁶	60°	0.24576 ³¹⁴
1	331 ³³⁸	31	12752 ⁴⁵⁵	61	24890 ³⁰⁵
2	669 ³⁴⁵	32	13207 ⁴⁵⁵	62	25195 ²⁹⁶
3	1014 ³⁵²	33	13662 ⁴⁵⁵	63	25491 ²⁸⁶
4	1366 ³⁵⁹	34	14117 ⁴⁵³	64	25777 ²⁷⁶
5	1725 ³⁶⁵	35	14570 ⁴⁵²	65	26053 ²⁶⁷
6	2090 ³⁷²	36	15022 ⁴⁵⁰	66	26320 ²⁵⁸
7	2462 ³⁷⁸	37	15472 ⁴⁴⁷	67	26578 ²⁴⁷
8	2840 ³⁸⁵	38	15919 ⁴⁴⁵	68	26825 ²³⁸
9	3225 ³⁹⁰	39	16364 ⁴⁴³	69	27063 ²²⁷
10	3615 ³⁹⁶	40	16807 ⁴³⁹	70	27290 ²¹⁶
11	4011 ⁴⁰¹	41	17246 ⁴³⁵	71	27506 ²⁰⁶
12	4412 ⁴⁰⁷	42	17681 ⁴³²	72	27712 ¹⁹⁵
13	4819 ⁴¹²	43	18113 ⁴²⁷	73	27907 ¹⁸⁵
14	5231 ⁴¹⁷	44	18540 ⁴²³	74	28092 ¹⁷⁵
15	5648 ⁴²¹	45	18963 ⁴¹⁹	75	28267 ¹⁶³
16	6069 ⁴²⁶	46	19382 ⁴¹³	76	28430 ¹⁵²
17	6495 ⁴³⁰	47	19795 ⁴⁰⁸	77	28582 ¹⁴¹
18	6925 ⁴³³	48	20203 ⁴⁰²	78	28723 ¹³¹
19	7358 ⁴³⁷	49	20605 ³⁹⁶	79	28854 ¹¹⁹
20	7795 ⁴⁴⁰	50	21001 ³⁹⁰	80	28973 ¹⁰⁸
21	8235 ⁴⁴⁴	51	21391 ³⁸³	81	29081 ⁹⁶
22	8679 ⁴⁴⁶	52	21774 ³⁷⁷	82	29177 ⁸⁵
23	9125 ⁴⁴⁸	53	22151 ³⁶⁹	83	29262 ⁷⁴
24	9573 ⁴⁵¹	54	22520 ³⁶²	84	29336 ⁶³
25	10024 ⁴⁵²	55	22882 ³⁵⁵	85	29399 ⁵¹
26	10476 ⁴⁵³	56	23237 ³⁴⁷	86	29450 ⁴⁰
27	10929 ⁴⁵⁵	57	23584 ³³⁹	87	29490 ²⁹
28	11384 ⁴⁵⁶	58	23923 ³³¹	88	29519 ¹⁷
29	11840 ⁴⁵⁶	59	24254 ³²²	89	29536 ⁶
30	12296	60	24576	90	29542

II.

x	$\mathfrak{A}(x)$	$\mathfrak{B}(x)$	x	$\mathfrak{A}(x)$	$\mathfrak{B}(x)$
0.0	0.0000	2.6667	10	3.7345	0.1390
0.5	0.4684	2.3005	12	3.9178	0.0770
1.0	0.8796	1.9846	14	4.0547	0.0426
2	1.5604	1.4770	16	4.1605	0.0236
3	2.0902	1.0992	18	4.2458	0.0131
4	2.5048	0.8180	20	4.3179	0.0072
5	2.8332	0.6088	22	4.3783	0.0040
6	3.0942	0.4531	24	4.4308	0.0022
7	3.3045	0.3372	26	4.4780	0.0012
8	3.4764	0.2509	28	4.5189	0.0007
9	3.6168	0.1868	30	4.5568	0.0004
10	3.7345	0.1390			

III.

$$M = \frac{\zeta(\infty)}{\zeta(z)}$$

z	$\log M$	z	$\log M$	z	$\log M$	z	$\log M$	z	$\log M$
0.0	0.3010 ₁₆₃	10.0	0.1389 ₃₇	20	0.0910 ₂₉	80	0.0311 ₁₆	200	0.0136 ₄₃
0.5	0.2847 ₁₄₇	10.5	0.1352 ₃₅	21	0.0881 ₂₈	85	0.0295 ₁₅	300	0.0093 ₂₂
1.0	0.2700 ₁₃₄	11.0	0.1317 ₃₂	22	0.0853 ₂₅	90	0.0280 ₁₃	400	0.0071 ₁₄
1.5	0.2566 ₁₂₁	11.5	0.1285 ₃₀	23	0.0828 ₂₅	95	0.0267 ₁₁	500	0.0057 ₉
2.0	0.2445 ₁₁₁	12.0	0.1255 ₂₉	24	0.0803 ₂₃	100	0.0256 ₂₀	600	0.0048 ₇
2.5	0.2334 ₁₀₁	12.5	0.1226 ₂₈	25	0.0780 ₂₂	110	0.0236 ₁₈	700	0.0041 ₅
3.0	0.2233 ₉₃	13.0	0.1198 ₂₇	26	0.0758 ₂₀	120	0.0218 ₁₅	800	0.0036 ₄
3.5	0.2140 ₈₅	13.5	0.1171 ₂₆	27	0.0738 ₁₉	130	0.0203 ₁₃	900	0.0032 ₃
4.0	0.2055 ₇₉	14.0	0.1145 ₂₄	28	0.0719 ₁₉	140	0.0190 ₁₂	1000	0.0029 ₁₄
4.5	0.1976 ₇₄	14.5	0.1121 ₂₃	29	0.0700 ₁₇	150	0.0178 ₁₀	2000	0.0015 ₈
5.0	0.1902 ₆₈	15.0	0.1098 ₂₂	30	0.0683 ₇₄	160	0.0168 ₈	4000	0.0007 ₂
5.5	0.1834 ₆₃	15.5	0.1076 ₂₂	35	0.0609 ₆₀	170	0.0160 ₈	6000	0.0005 ₁
6.0	0.1771 ₅₉	16.0	0.1054 ₂₁	40	0.0549 ₄₉	180	0.0152 ₈	8000	0.0004 ₁
6.5	0.1712 ₅₅	16.5	0.1033 ₁₉	45	0.0500 ₄₀	190	0.0144 ₈	10000	0.0003
7.0	0.1657 ₅₂	17.0	0.1014 ₁₉	50	0.0460 ₃₄	200	0.0136		
7.5	0.1605 ₄₉	17.5	0.0995 ₁₈	55	0.0426 ₃₀				
8.0	0.1556 ₄₅	18.0	0.0977 ₁₇	60	0.0396 ₂₅				
8.5	0.1511 ₄₃	18.5	0.0960 ₁₇	65	0.0371 ₂₂				
9.0	0.1468 ₄₀	19.0	0.0943 ₁₇	70	0.0349 ₂₀				
9.5	0.1428 ₃₉	19.5	0.0926 ₁₆	75	0.0329 ₁₈				
10.0	0.1389	20.0	0.0910	80	0.0311				