BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

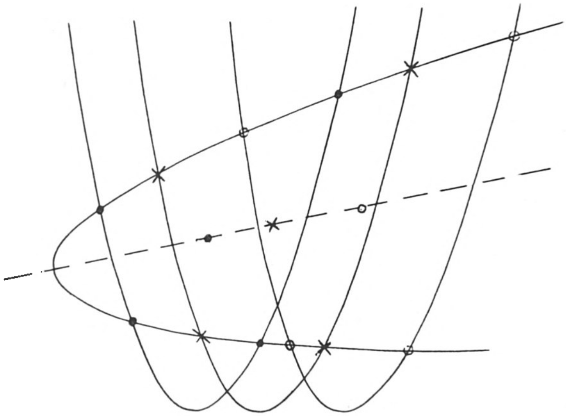
Verallgemeinerung eines Satzes von Newton

Von **Ernst Kunz**

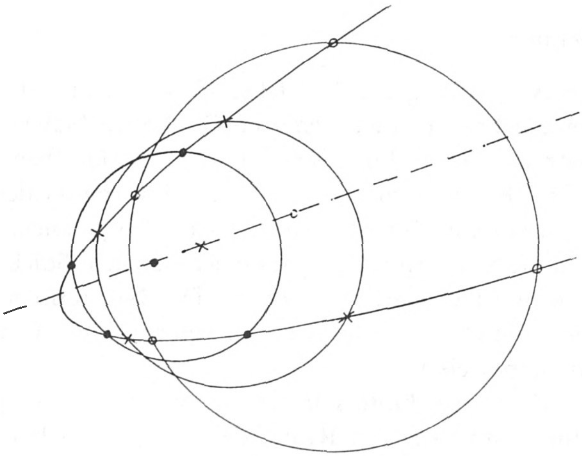
1. Einleitung

In seiner Abhandlung aus dem Jahre 1704 über die Klassifikation der ebenen algebraischen Kurven vom Grad 3 hat Newton den folgenden Satz angegeben: Eine Gerade g schneide eine ebene kubische Kurve C in 3 Punkten und es sei P_g der Schwerpunkt des Systems dieser Schnittpunkte. Durchläuft nun g eine Schar paralleler Geraden, dann liegen die Schwerpunkte P_g auf einer Geraden. Solche Geraden nennt Newton „Durchmesser“ von C. Der Newtonsche Satz gilt entsprechend für ebene algebraische Kurven beliebigen Grades; er ist auch leicht zu beweisen.

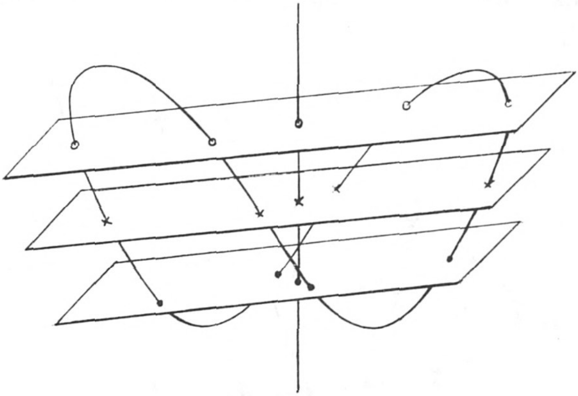
In der vorliegenden Note soll der Satz wie folgt verallgemeinert werden: Im n-dimensionalen Raum seien n (algebraische) Hyperflächen gegeben, die nur endlich viele gemeinsame Schnittpunkte besitzen und keine gemeinsamen unendlich fernen Schnittpunkte. Dann kann man vom Schwerpunkt des Schnittschemas dieser Hyperflächen sprechen. Es werde jetzt eine der Hyperflächen um die Vielfachen eines festen Vektors $v \neq 0$ parallel verschoben. Dann liegen die Schwerpunkte der entsprechenden Schnittschemata auf einer Geraden (Satz 1).



Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man statt paralleler Hyperflächen eine Schar ähnlicher Hyperflächen mit festem Projektionszentrum verwendet (Satz 2).



Wendet man Satz 1 an auf Kurven im n-dimensionalen Raum, die vollständige Durchschnitte von $n-1$ Hyperflächen sind, und auf die Schnitte mit einer Schar paralleler Hyperebenen, so sieht man, daß auch solche Kurven „Durchmesser" besitzen.



Wie so viele Aussagen der Schnitt-Theorie (vgl. z. B. B. Segre [6], Griffiths-Harris [1], Chap. V und [2]) ergeben sich auch diese Tatsachen aus der höherdimensionalen Residuentheorie und dem Residuensatz. Wir stützen uns hier auf den von Scheja und Storch ([4],[5]) elementar und rein algebraisch begründeten Residuenkalkül und die in [2] und [3] angegebenen Ergänzungen. Die angestrebten Aussagen haben für Hyperflächen über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einen Sinn und sie werden auch so bewiesen. Wir beginnen mit einer Zusammenstellung der relevanten Tatsachen der Residuentheorie.

2. Residuenkalkül

Im Polynomring $K[X] := K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K seien n Polynome $f_1, \ldots, f_n$ gegeben, die eine quasireguläre Folge bilden, d. h. für jedes maximale Ideal P von $K[X]$ mit $(f_1, \ldots, f_n) \subset P$ ist $f := \{f_1, \ldots, f_n\}$ eine reguläre Folge des lokalen Rings $K[X]_P$. Äquivalent mit dieser Bedingung ist bekanntlich jede der beiden folgenden:

a) Die Hyperflächen $f_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ haben nur endlich viele Punkte gemeinsam.

b) Die K-Algebra

(1) $\quad A = K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_n)$

ist endlich-dimensional.

Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann zerfällt A nach dem chinesischen Restsatz in das direkte Produkt der Lokalisationen nach den maximalen Idealen von A:

(2) $\quad A = A_{P_1} \times \ldots \times A_{P_h}$

wenn $P_1, \ldots, P_h$ die (f) umfassenden maximalen Ideale von $K[X]$ sind. Dabei ist

(3) $\quad A_P = K[X]_P/(f)K[X]_P \qquad (P \in \{P_1, \ldots, P_h\})$

und natürlich ist auch A_P eine endlich-dimensionale K-Algebra.

Der kanonische Modul $\omega_{A/K} := \mathrm{Hom}_K(A, K)$ von A/K ist ein freier A-Modul vom Rang 1. Ein von der Präsentation (1) abhängiges Basiselement (eine „Spur" von A/K) wird wie folgt konstruiert (Scheja-Storch [4], § 4, vgl. auch [3], Anhang F): Es bezeichne x_i die Restklasse von X_i in A $(i = 1, \ldots, n)$. Ferner sei $A^e := A \otimes_K A$ und I sei der Kern der Abbildung $A^e \to A$ $(a \otimes b \mapsto ab)$. Dann ist $\mathrm{Ann}_{A^e} I$ in kanonischer Weise ein A-Modul und es existiert ein kanonischer Isomorphismus von A-Moduln

$$\phi\colon \mathrm{Ann}_{A^e} I \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\omega_{A/K}, A)$$

mit $\phi(\Sigma\, a_i \otimes b_i)(l) = \Sigma l(a_i) b_i$ für alle $\Sigma\, a_i \otimes b_i \in \mathrm{Ann}_{A^e} I$ und alle $l \in \omega_{A/K}$. In $A[X_1, \ldots, X_n] =: A[X]$ hat man Gleichungen

$$(4) \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (X_j - x_j) \qquad (a_{ij} \in A[X],\ i = 1, \ldots, n)$$

Bezeichnet Δ_x^f das Bild von $\det(a_{ij})$ in $A^e = A[X]/(f)A[X]$, dann ist $\mathrm{Ann}_{A^e} I = A \cdot \Delta_x^f$. Die Spur $\tau_f^x : A \to K$ ist nun definiert als das (eindeutige) Element von $\omega_{A/K}$ mit

$$(5) \quad \phi(\Delta_x^f)(\tau_f^x) = 1$$

Mit der Standardspur (kanonischen Spur) $\sigma_{A/K}$ der Algebra A/K hängt τ_f^x durch die folgende Formel zusammen ([4], 4.2 und [3], F.23): Bezeichnet $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ das Bild der Jacobi-Determinante $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(X_1, \ldots, X_n)}$ in A, so ist

$$(6) \quad \sigma_{A/K} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \tau_f^x$$

Auf die gleiche Weise wie τ_f^x kann auch ausgehend von der Präsentation (3) unter Verwendung der in $A_P[X]$ zu lesenden Gleichungen (4) eine Spur von A_P/K konstruiert werden, die wir mit $(\tau_f^x)_P$ bezeichnen:

$$(\tau_f^x)_P : A_P \to K,\ \omega_{A_P/K} = A_P \cdot (\tau_f^x)_P$$

Man hat auch hier den zu (6) analogen Zusammenhang mit der Standardspur von A_P/K

$$(6^\star) \quad \sigma_{A_P/K} = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot (\tau_f^x)_P$$

wobei $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$ das Bild der Jacobi-Determinante in A_P ist. Man sieht auch leicht, daß $(\tau_f^x)_P$ gerade die Beschränkung von τ_f^x auf den direkten Faktor A_P von A ist. Für jedes $a \in A$ mit $a = (a_1, \ldots, a_h)$, $a_i \in A_{P_i}$ gilt daher

(7) $\tau_f^x(a) = \sum_{i=1}^{h} (\tau_f^x)_{P_i}(a_i)$

Es sei nun eine Differentialform $\omega = h \cdot dX_1 \ldots dX_n \in \Omega^n_{K[X]/K}$ gegeben ($h \in K[X]$), es bezeichne η das Bild von h in A und η_P das Bild von h in A_P.

Definition: $\int \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} := \tau_f^x(\eta)$ heißt **Integral** von ω bzgl. f und

$\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} := (\tau_f^x)_P(\eta_P)$ heißt **Residuum** von ω bzgl. f an der Stelle P.

Dabei wird $\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = 0$ gesetzt, wenn das maximale Ideal P aus $K[X]$ das Ideal (f) nicht umfaßt.

Man zeigt leicht, daß Integral und Residuum von ω und f, jedoch nicht von der Wahl der „Koordinaten" $X_1, \ldots, X_n$ abhängen ([5], 1.5). Ferner ist nach der Definition unmittelbar klar, daß Integral und Residuum in ω K-linear sind. Aus der Regel (7) ergibt sich

(8) $$\int \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = \sum_{P \in \mathrm{Max}\, K[X]} \mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix}$$

Weiterhin folgt aus der Definition, daß

(9) $$\int \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = 0 \text{ für alle } \omega = h dX \text{ mit } h \in (f)$$

und

(9*) $$\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix} = 0 \text{ für alle } \omega = h dX \text{ mit } h \in (f)\, K[X]_P$$

Über die Abhängigkeit des Integrals und des Residuums von f gibt [5], 1.1 Auskunft (vgl. auch [3], F.26). Diese an und für sich sehr wichtige Formel wird hier nur in dem trivialen Spezialfall benutzt werden, daß alle f_i mit Konstanten $\kappa_i \neq 0$ aus K multipliziert werden:

(10) $$\int \begin{bmatrix} \omega \\ \kappa_1 f_1, \ldots, \kappa_n f_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_1 \cdot \ldots \cdot \kappa_n} \int \begin{bmatrix} \omega \\ f \end{bmatrix}$$

Entsprechendes gilt für das Residuum. Wesentlich ist jedoch die nächste, als ein höherdimensionaler Residuensatz zu betrachtende Tatsache:

Es bezeichne Gf_i die Gradform von f_i, d. h. die homogene Form höchsten Grades, die in f_i auftritt. Es wird vorausgesetzt, daß $Gf := \{Gf_1, \ldots, Gf_n\}$ eine reguläre Folge in $K[X]$ ist, was damit äquivalent ist, daß die Hyperflächen $f_i = 0$ keine gemeinsamen unendlich fernen Punkte besitzen. Schließlich sei $d_i := \deg f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $h \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $\leq (\sum_{i=1}^{n} d_i) - n$. Dann gilt (vgl. [2], 4.6)

$$(11) \qquad \int \begin{bmatrix} hdX \\ f \end{bmatrix} = \sum_P \operatorname{Res}_P \begin{bmatrix} hdX \\ f \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_O \begin{bmatrix} GdhX \\ Gf \end{bmatrix}$$

Hierbei ist das Residuum auf der rechten Seite in dem mit O bezeichneten maximalen Ideal $(X_1, \ldots, X_n)$ von $K[X]$ zu bilden, also im Ursprung des affinen Koordinatensystems. Nach [2],4.6 verschwindet dieses Residuum, sobald $\deg h < (\sum d_i) - n$.

3. Der Schwerpunkt

Wir bezeichnen jetzt die Hyperfläche $f_i = 0$ im affinen Raum $\mathbb{A}^n(K)$ selbst mit f_i $(i = 1, \ldots, n)$ und identifizieren die (abgeschlossenen) Punkte von $\mathbb{A}^n(K)$ mit den maximalen Idealen P aus $K[X]$. Es sei $f_1 \cap \ldots \cap f_n$ das Schnittschema von $f_1, \ldots, f_n$, d. h. die Menge der Schnittpunkte P versehen mit den jeweiligen lokalen Ringen A_P. Es ist dann $\mu_P(f) := \mu_P(f_1, \ldots, f_n) := \dim_K A_P$ die Schnittmultiplizität von $f_1, \ldots, f_n$ im Punkte P. Schließlich sei $d_i := \deg f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und es werde vorausgesetzt, daß die f_i keine gemeinsamen unendlich fernen Punkte besitzen.

Definition: $\Sigma(f_1, \ldots, f_n) := \sum_P \mu_P(f) \cdot P$ heißt der **Schwerpunkt** von $f_1 \cap \ldots \cap f_n$.

Hierbei ist die Summe als die Vektorsumme in K^n zu betrachten (und nicht etwa als der Schnittzyklus).

Um im Reellen, wenn alle Schnittpunkte reelle Koordinaten haben, den Schwerpunkt im physikalischen Sinn zu erhalten, müßte man noch durch die Gesamtzahl $\prod_{i=1}^{n} d_i$ der Schnittpunkte dividieren. Wenn die Charakteristik von K diese Zahl teilt, dann ist diese Division natürlich unmöglich, und wir haben gleich ganz auf sie verzichtet. Die zu beweisenden Aussagen für $\Sigma(f_1, \ldots, f_n)$ sind bei beliebiger Charakteristik gültig, und die Division durch $\Pi\, d_i$, wenn möglich, ändert nichts Wesentliches mehr. Allerdings ist $\frac{1}{d_1 \ldots d_n}\, \Sigma\, (f_1, \ldots, f_n)$ invariant gegenüber beliebigen affinen Koordinatentransformationen, während $\Sigma\,(f_1, \ldots, f_n)$ nur invariant ist unter affinen Koordinatentransformationen, die den Ursprung festlassen.

Lemma 1.

$$\Sigma\,(f_1, \ldots, f_n) = \int \left(\begin{bmatrix} X_1 df \\ f \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} X_n df \\ f \end{bmatrix} \right)$$

Hier ist $df = \frac{\partial f}{\partial X}\, dX$, und das Integral wird auf das n-tupel gliedweise angewandt.

Beweis: Sei $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$. Wegen der Linearität des Residuums gilt

$$\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} X_i df \\ f \end{bmatrix} = a_i \cdot \mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} df \\ f \end{bmatrix} + \mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} (X_i - a_i)\, df \\ f \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von (6*) findet man

$$\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} df \\ f \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} dX \\ f \end{bmatrix} = (\tau_f^x)_P\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right) = \sigma_{A_P/K}(1) =$$

$$= (\dim_K A_P) \cdot 1_K = \mu_P(f) \cdot 1_K$$

und

$$\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} (X_i - a_i)\, df \\ f \end{bmatrix} = \sigma_{A_P/K}(x_i - a_i)$$

Nun ist aber $x_i - a_i \in A_P$ ein nilpotentes Element, daher verschwindet seine Spur. Es ist jetzt gezeigt, daß

$$\left(\mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} X_1 df \\ f \end{bmatrix}, \ldots, \mathrm{Res}_P \begin{bmatrix} X_n df \\ f \end{bmatrix} \right) = \mu_P(f) \cdot (a_1, \ldots, a_n) = \mu_P(f) \cdot P$$

ist, woraus mittels (8) die behauptete Formel folgt.

Im nächsten Lemma wird diese Formel mit Hilfe des Residuensatzes (11) umgeformt. Sei $f_i = \sum_{k=0}^{d_i} f_{ik}$ die Zerlegung von f_i in homogene

Komponenten f_{ik} vom Grad k. Insbesondere ist $Gf_i = f_{id_i}$ ($i = 1, \ldots, n$). Im folgenden werde der Einfachheit halber g_{X_i} für die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial X_i}$ eines Polynoms geschrieben. Die Eulersche Formel für homogene Polynome liefert

$$(12) \quad \sum_{j=1}^{n} X_j(f_i)_{X_j} = d_i f_i - \sum_{k=0}^{d_i-1} (d_i - k) f_{ik} = d_i f_i - f_{id_i-1} + \varphi_i$$

mit einem Polynom φ_i vom Grad $\leq d_i - 2$. Wir können $X_j \frac{\partial f}{\partial X}$ berechnen, indem wir zunächst die j-te Spalte von $\frac{\partial f}{\partial X} = \det((f_i)_{X_k})$ mit X_j multiplizieren und anschließend nach (12) diese Spalte ersetzen durch die Spalte $(d_i f_i - f_{id_i-1} + \varphi_i)_{i=1, \ldots, n}$. Es ist dann

$$(13) \quad X_j \frac{\partial f}{\partial X} \equiv \Delta_j \operatorname{mod}(f_1, \ldots, f_n)$$

wobei Δ_j aus $\det((f_i)_{X_k})$ hervorgeht, indem man die j-te Spalte durch $(\varphi_i - f_{id_i-1})_{i=1, \ldots, n}$ ersetzt. Da $\deg \varphi_i \leq d_i - 2$ ist, ergibt sich für die Gradform von Δ_j:

$$G\Delta_j = \begin{vmatrix} (Gf_1)_{X_1} & \cdots & -f_{1d_1-1} & \cdots & (Gf_1)_{X_n} \\ (Gf_2)_{X_1} & \cdots & -f_{2d_2-1} & \cdots & (Gf_2)_{X_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (Gf_n)_{X_1} & \cdots & -f_{nd_n-1} & \cdots & (Gf_n)_{X_n} \end{vmatrix}, \ \deg G\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) - n$$

oder diese Determinante verschwindet und die Gradform von Δ_j besitzt einen Grad $< \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) - n$. Wir setzen noch

$$D_{ij} := (-1)^{i+j-1} \cdot \det((Gf_k)_{X_l})_{\substack{k \neq i \\ l \neq j}} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

und betrachten die $n \times n$-Matrix

$$\Delta(Gf, X) := (D_{ij})_{i,j=1, \ldots, n}$$

Durch Entwicklung der $G\Delta_j$ nach der j-ten Spalte erhält man die Matrizengleichung

$$(G\Delta_1, \ldots, G\Delta_n) = (f_{1d_1-1}, \ldots, f_{nd_n-1}) \cdot \Delta(Gf, X)$$

Nun folgt aus (13) in Verbindung mit (9), aus Lemma 1 und Formel (11):

Lemma 2.

$$\Sigma(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{Res}_O \begin{bmatrix} \\ Gf \end{bmatrix} \left(((f_{1d_1-1}, \ldots, f_{nd_n-1}) \cdot \Delta(Gf, X)) \cdot dX \right)$$

Auch hier wird das Residuum auf einen Vektor komponentenweise angewandt.

Das Lemma zeigt, daß der Schwerpunkt nur von den Gradformen und den Formen zweithöchsten Grades der f_i abhängt.

4. Wie wirken sich Veränderungen des Schnittschemas auf den Schwerpunkt aus?

Diese Frage läßt sich jetzt in zwei Fällen leicht beantworten. Wir unterwerfen zunächst jede der Hyperflächen f_i einer Parallelverschiebung um einen Vektor

$h^{(i)} = (h_1^{(i)}, \ldots, h_n^{(i)}) \in K^n$. Die neue Hyperfläche wird dann durch das Polynom F_i mit

$$F_i(X_1, \ldots, X_n) = f_i(X_1 + h_1^{(i)}, \ldots, X_n + h_n^{(i)})$$

gegeben. Offensichtlich ist

$$F_{id_i} = f_{id_i} \quad \text{und} \quad F_{id_i-1} = f_{id_i-1} + \langle \text{Grad } Gf_i, h^{(i)} \rangle$$

wenn Grad Gf_i den „Gradienten" $((Gf_i)_{X_1}, \ldots, (Gf_i)_{X_n})$ bezeichnet, und $<, >$ das Standard-Skalarprodukt. Auf Grund der Linearität des Residuums liefert Lemma 2:

Satz 1. $\Sigma(F_1, \ldots, F_n) - \Sigma(f_1, \ldots, f_n) =$

$$\mathrm{Res}_O \begin{bmatrix} \\ Gf \end{bmatrix} \left(((\langle \text{Grad } Gf_1, h^{(1)} \rangle, \ldots, \langle \text{Grad } Gf_n, h^{(n)} \rangle)) \cdot \Delta(Gf, X)) \cdot dX \right)$$

Ist hierbei etwa $h^{(2)} = \cdots = h^{(n)} = 0$ und ist $f_1^{(\lambda)}$ für $\lambda \in K$ durch $f_1^{(\lambda)}(X_1, \ldots, X_n) := f_1(X_1 + \lambda h_1^{(1)}, \ldots, X_n + \lambda h_n^{(1)})$ gegeben, so durchläuft $\Sigma(f_1^{(\lambda)}, f_2, \ldots, f_n) - \Sigma(f_1, \ldots, f_n)$ alle λ-fachen eines Vektors, der nur von den Gf_i abhängt, d. h. die Schwerpunkte $\Sigma(f_1^{(\lambda)}, f_2, \ldots, f_n)$ liegen auf einer Geraden. Dies ist die angekündigte Verallgemeinerung des Satzes von Newton.

Wir unterwerfen jetzt die Hyperflächen f_i gewissen Ähnlichkeitsabbildungen: f_i wird ersetzt durch die Hyperfläche F_i mit

$$F_i(X_1, \dots, X_n) = f_i(\lambda_i X_1, \dots, \lambda_i X_n) \qquad (\lambda_i \in K^\star)$$

Es ist dann

$$F_{id_i} = \lambda_i^{d_i} f_{id_i} \quad \text{und} \quad F_{id_i-1} = \lambda_i^{d_i-1} f_{id_i-1}$$

Lemma 2 und die Transformationsformel (10) ergeben hier

Satz 2. $\Sigma(F_1, \dots, F_n) - \Sigma(f_1, \dots, f_n) =$

$$\operatorname{Res}_O \begin{bmatrix} \\ Gf \end{bmatrix} \left(\left(\left(\left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right) f_{1d_1-1}, \dots, \left(\frac{1}{\lambda_n} - 1\right) f_{nd_n-1}\right) \cdot \Delta(Gf, X)\right) \cdot dX \right)$$

Ist hierbei $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ und $\lambda_1 = \lambda$ beliebig, so ist für $f_1^{(\lambda)}$ mit $f_1^{(\lambda)}(X_1, \dots, X_n) := f_1(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n)$ die Differenz $\Sigma(f_1^{(\lambda)}, f_2, \dots, f_n) - \Sigma(f_1, \dots, f_n)$ das $(\frac{1}{\lambda} - 1)$-fache eines Vektors, der nur von den f_i abhängt, und die Schwerpunkte $\Sigma(f_1^{(\lambda)}, f_2, \dots, f_n)$ liegen für variables λ erneut auf einer Geraden.

Literatur

[1] P. Griffiths u. J. Harris. Principles of Algebraic Geometry. John Wiley and Sons, New York 1978

[2] M. Kreuzer u. E. Kunz. Traces in Strict Frobenius Algebras and Strict Complete Intersections. J. reine u. angew. Math. 381 (1987), 181–204

[3] E. Kunz. Kähler Differentials. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg, Braunschweig 1986

[4] G. Scheja u. U. Storch. Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten. J. reine u. angew. Math. 278/279 (1975), 174–190

[5] –. Residuen bei vollständigen Durchschnitten. Math. Nachr. 91 (1979), 157–170

[6] B. Segre. Sui teoremi di Bézout, Jacobi e Reiss. Ann. di Mat. (4) 26 (1947), 1–16