BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 158

VOLKER HAAK

Interpretations-Verfahren für die Magnetotellurik unter besonderer Berücksichtigung lateral variierender elektrischer Leitfähigkeit im Erdinnern und eines räumlich inhomogenen induzierenden Magnetfelds

Vorgelegt von Herrn Gustav Angenheister am 3. Juni 1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H.BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Mit 58 Abbildungen im Text

ISSN 0005–6995
ISBN 3 7696 2548 X

© Bayerische Akademie der Wissenschaften, München 1978
Gesamtherstellung: C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung in das Thema – Registrierbeispiele aus Äthiopien und Brasilien – Einheiten und Grundgleichungen 5

2. Einteilung der Interpretationsverfahren 14

2.1 Verallgemeinerte Eindringtiefe für den geschichteten Untergrund 14

2.2 Induktionsraum 16

2.3 Einteilung der Interpretationsmethoden 21

3. Interpretationsverfahren für geschichteten Untergrund 21

3.1 Das induzierende Magnetfeld ist innerhalb des Induktionsraumes homogen (quasi-homogenes Magnetfeld) 21

3.11 Bestimmung des scheinbaren spezifischen Widerstandes für ein gegebenes Modell mit einem graphischen Verfahren 27

3.12 Bestimmung des Modells für eine vorgegebene Kurve des scheinbaren spezifischen Widerstandes (Inversion nach SCHMUCKER) 29

3.2 Das induzierende Magnetfeld ist innerhalb des Induktionsraumes räumlich inhomogen 37

4. Interpretationsverfahren für 2-dimensionale Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit (Methode der Endlichen Differenzen) 42

4.1 Grundgleichungen für die E- und B-Polarisation 44

4.2 Grundgleichungen in Differenzenform 46

4.3 Randbedingungen für die Grenzflächen im Innern des Modells 47

4.4 Anfangswerte für die Feldverteilung bei homogener und inhomogener Induktion im Modell 48

4.5 Iterationsprozeß – Gauß/Seidel-Methode – Sukzessive Überrelaxation 49

4.6 Einfluß der Gitterabstände auf die Lösung 52

4.7 Feste und freie Randwerte 53

4.8 Kontrollen zur Konvergenz der Lösung 56

4.9 Rechenergebnisse für einige ausgewählte Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit und der Geometrie des induzierenden Magnetfelds 57

5. Interpretationsverfahren für besondere 3-dimensionale Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit 71

5.1 Modellrechnung für dünne Schichten 72

5.2 Polarisationsrichtung und Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes und ihre Beziehung zur lateralen Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit 75

5.21 Theorie und Bestimmung der Vorzugsrichtung in 2-dimensionalen Leitfähigkeitsverteilungen 75

5.22 Ergebnisse von Modellrechnungen für die Vorzugsrichtung 81

5.23 Theorie und Bestimmung der Vorzugsrichtungen bei beliebiger lateraler Variation der elektrischen Leitfähigkeit 81

5.3 Bestimmung der Impedanzen für den tieferen Untergrund aus den gemessenen Impedanzen bei lateral variierender Leitfähigkeit der oberen Kilometer . . . 92

5.31 Trennungsverfahren bei beliebig variierender Leitfähigkeit der oberen Kilometer und 1-dimensionaler Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(z)$ des tieferen Untergrundes (LARSEN) 95

5.32 Trennungsverfahren bei 2-dimensionaler Feldverteilung der lokal variierenden Leitfähigkeit der Oberfläche und 2-dimensionaler Leitfähigkeitsverteilung des tieferen Untergrundes 100

6. Literaturverzeichnis 103

1. EINFÜHRUNG IN DAS THEMA

Registrierbeispiele aus Äthiopien und Brasilien – Einheiten und Grundgleichungen

Die zeitlich variierenden Magnetfelder von elektrischen Strömen in der Ionosphäre und Magnetosphäre, die in der elektrisch leitfähigen Erde Wirbelströme induzieren, sind räumlich inhomogene Felder. Aber auch die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit in der Erde ist räumlich inhomogen. Eine Methode, mit der man aus den an der Erdoberfläche gemessenen zeitlichen Variationen dieser natürlichen elektrischen und magnetischen Felder die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit ableiten will, muß deshalb sowohl Inhomogenität der induzierenden Magnetfelder als auch der elektrischen Leitfähigkeit berücksichtigen. Dies ist der Gegenstand dieser Arbeit. Ausgangspunkt der Arbeit waren Messungen der zeitlichen Variationen des elektrischen und magnetischen Feldes in Äthiopien, die 1971 vom *Institut für Allgemeine und Angewandte Geophysik der Ludwig-Maximilians-Universität München* durchgeführt wurden.

Das Meßgebiet, die Afarsenke mit den angrenzenden Hochländern, liegt im Einflußbereich des äquatorialen Elektrojets. Hierunter versteht man allgemein eine lokale, auf den unmittelbaren Bereich des magnetischen Äquators beschränkte Verstärkung des globalen ionosphärischen S_q-Systems. Das inhomogene Magnetfeld dieses auf der Tagesseite existierenden Elektrojets kann man an der Erdoberfläche deutlich beobachten. Außer diesen tages-periodischen zeitlichen Variationen des Magnetfelds können auch alle kurzperiodischen Variationen mit Perioden von wenigen Minuten am magnetischen Äquator inhomogen sein (Forbush & Casaverde 1961, Porath, Dziewonski, Bennett und Gouin 1973) insofern sie sich am Tage bei elektrisch leitfähiger Ionosphäre ereignen.

Die zeitlichen Variationen der horizontalen Komponenten des Magnetfelds sind in der Nähe des magnetischen Äquators außerdem fast ausschließlich NS-polarisiert. Da die Beziehungen zwischen den horizontalen Komponenten der elektrischen Felder im Erdboden und der magnetischen Felder knapp über dem Erdboden bei lateraler Änderung der elektrischen Leitfähigkeit von der Polarisations-Richtung des induzierenden Magnetfelds abhängen, wird die Bestimmung der Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit erschwert. Bevor diese Probleme ausführlicher diskutiert werden, werden einige Registrierbeispiele der zeitlichen Variationen des elektrischen und magnetischen Feldes vorgeführt*.

Ein unbefangener Betrachter der Abbildungen 1.1 bis 1.4 wird sich auf die Frage, welches der vier Registrierbeispiele am klarsten einen Zusammenhang zwischen den zeitlichen Variationen des elektrischen und denen des magnetischen Feldes erkennen läßt, für die Registrierung in Abb. 1.1 entscheiden. Diese deutliche Korrelierbarkeit hat zwei Gründe: nämlich den begrenzten Frequenz-Inhalt und die scharfe Polarisation des Magnetfeldes in nur eine Richtung. Im Gegensatz hierzu ist der Frequenz-Inhalt und die Variation der Polarisations-Richtungen z. B. in der Registrierung in Abb. 1.3 viel größer: Dadurch ist aber die Korrelierbarkeit für das Auge wesentlich geringer. Betrachtet man nun die

*Die Messungen in Brasilien wurden vom *Institut für Geophysik und Meteorologie der Technischen Universität Braunschweig* gemacht.

Registrierungen mit dem Ziel, die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit im Untergrund abzuleiten, so würde man sich für die Registrierung in Abb. 1.3 entscheiden. Denn zerlegt man die vektoriellen Maxwellschen Gleichungen und das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz in ihre Komponenten-Gleichungen, so wären durch die Registrierung in Abb. 1.1 nur einige der Komponenten-Gleichungen durch die Messungen definiert, während die Registrierung in Abb. 1.3 alle Komponenten-Gleichungen durch gemessene Information definieren würde. Da die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit durch die Lösung der Maxwellschen Gleichungen in Verbindung mit dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz

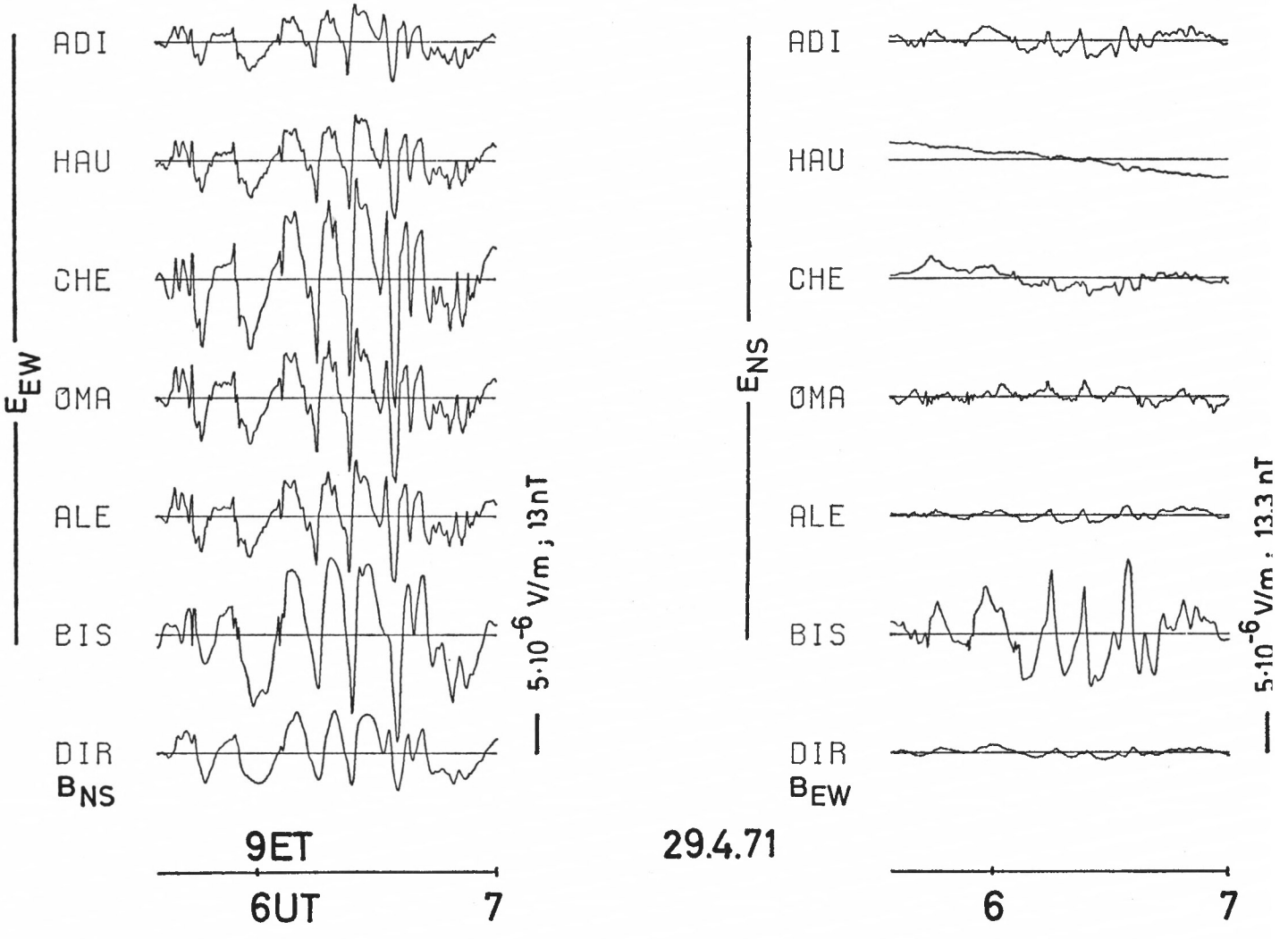


Abb. 1.1: Zeitliche Variationen des erdelektrischen Feldes an mehreren Orten in Äthiopien längs eines NS-Profils (obere 6 Stationen), links die EW-Komponente, rechts die NS-Komponente. Die untere Spur ist die zum elektrischen Feld orthogonale Komponente des Magnetfelds an der Station Dire Dawa, die etwa am magnetischen Äquator liegt. Die geographische Lage der Stationen ist in der Abb. 5.17 angegeben. In der Zeitskala (ganz unten) sind die Stunden in Ortszeit (ET) und in Weltzeit (UT) angegeben. – Die horizontale Komponente des Magnetfelds ist fast streng NS polarisiert. Der Beginn des äquatorialen Elektrojets ist etwa 4.00 ET und zugleich auch der Beginn der lokalen Verstärkung aller ionosphärischen Ströme am magnetischen Äquator. Die erkennbare Variation der Amplituden von Ort zu Ort ist aber mehr durch die Variation der elektrischen Leitfähigkeit des Untergrundes als durch die Inhomogenität des Magnetfelds verursacht.

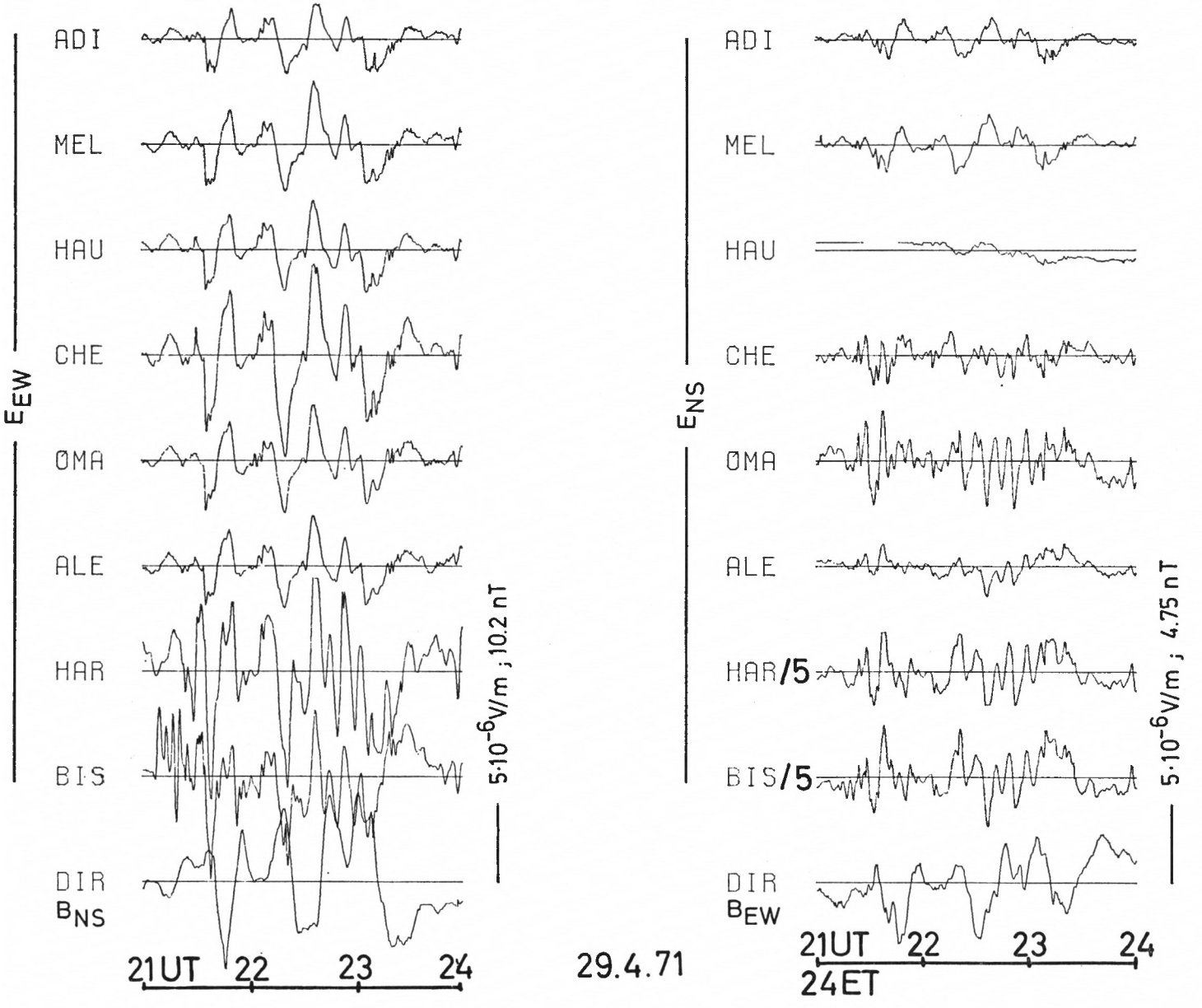


Abb. 1.2: Zeitliche Variationen des erdelektrischen Feldes an 8 Stationen in Äthiopien auf demselben NS-Profil wie in Abb. 1.1, und des magnetischen Feldes an der Station Dire Dawa, die etwa am magnetischen Äquator liegt. Da die Registrierung um 24.00 ET (lokale Zeit) beginnt, ist das induzierende Magnetfeld räumlich homogen und nicht so streng NS-polarisiert wie das Magnetfeld in Abb. 1.1. Wegen der wechselnden Polarisationsrichtung des Magnetfeldes sind die lateralen Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit in den Registrierungen des elektrischen Feldes deutlich zu sehen: An den beiden Stationen Harar (HAR) und Bisidimo (BIS) sind die Amplituden der NS-Komponente des elektrischen Feldes in der Abbildung um den Faktor 1/5 gegenüber der Originalregistrierung verkleinert. Diese sprunghafte Zunahme der Amplituden der NS-Komponente des elektrischen Feldes deutet auf eine sprunghafte Zunahme des spezifischen Widerstandes einer etwa EW-streichenden Anomalie im Bereich dieser Stationen.

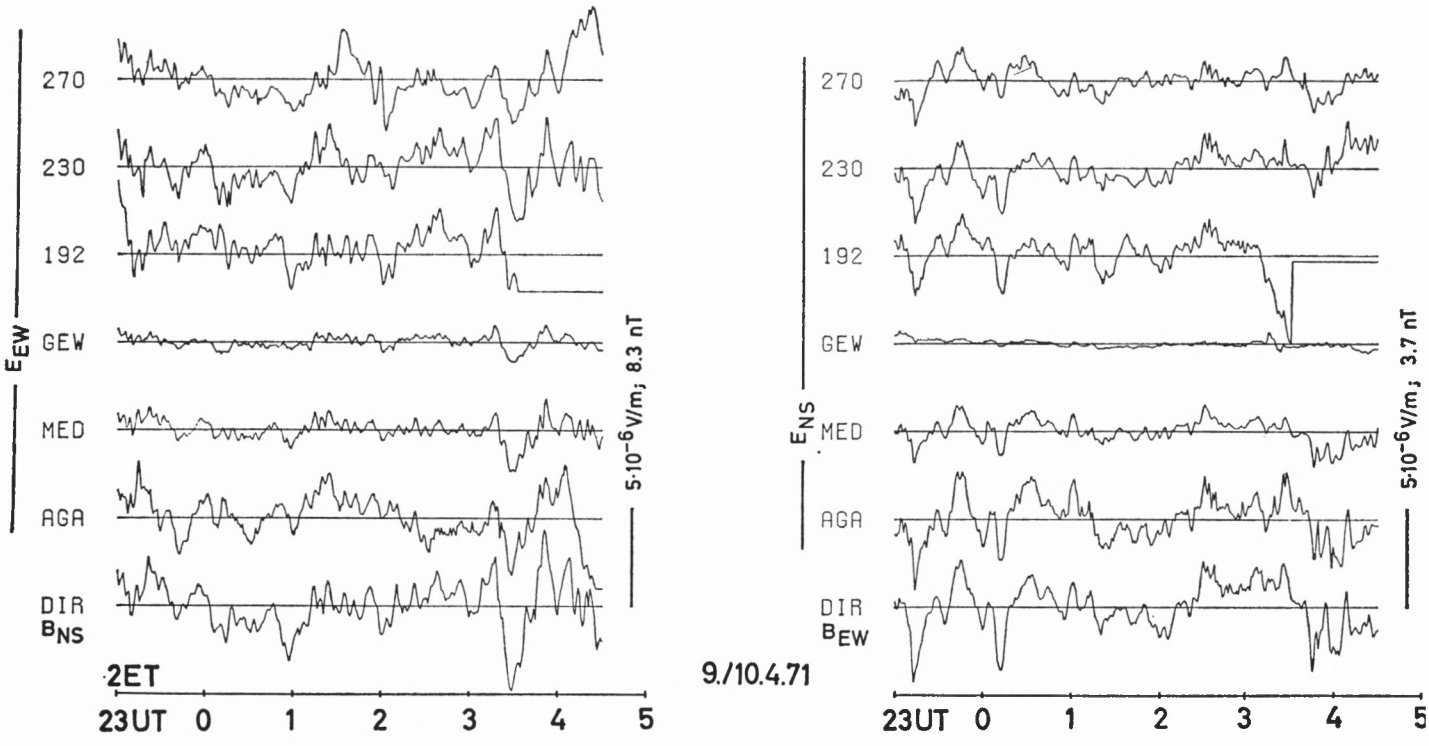


Abb. 1.3: Zeitliche Variationen des erdelektrischen Feldes an 6 Stationen in Äthiopien auf einem NS-Profil und des magnetischen Feldes in Dire Dawa (DIR), Lage der Stationen in Abb. 5.17. Die Variation der Amplituden zeitgleicher Effekte ist vor allem auf die Variation der elektrischen Leitfähigkeit des Untergrundes entlang des Profils zurückzuführen, weniger auf die Induktion durch ein inhomogenes Magnetfeld, da die Registrierzeit teilweise noch vor Beginn des Elektrojets liegt. Beachtenswert sind die großen Amplituden der NS-Komponente des erdelektrischen Feldes (EW-Komponente des Magnetfeldes) zwischen 23.00 UT und 1.30 UT, die im Bereich des magnetischen Äquators nur selten zu beobachten sind. Einige zeitgleiche Effekte sind an den verschiedenen Stationen nicht miteinander korrelierbar, was auf zeitliche Änderungen des Kontakt-Potentials zwischen den $Cu/CuSO_4$-Elektroden und dem Elektrolyten des Bodens zurückzuführen ist.

bestimmt wird, ist also die Registrierung 1.3 hierfür geeignet. Die Registrierung in 1.1 würde dagegen nur beschränkte Information über die Größe und räumliche Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit ergeben. Nun könnte man zunächst hieraus schließen, daß nur eine Interpretationstheorie erfolgreich sein wird, die die Lösung der dreidimensionalen und von der Zeit, bzw. Frequenz abhängigen Maxwell-Gleichungen voll berücksichtigt. Solche praktisch schwer handhabbaren Verfahren sind aber nicht notwendig. Das Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen, daß es möglich ist, eine Folge von Interpretationsverfahren auf diese Registrierungen anzuwenden. Diese Interpretationsverfahren unterscheiden sich jeweils in den Voraussetzungen über die räumliche Geometrie der elektrischen Leitfähigkeit und des induzierenden Magnetfeldes.

Alle Größen werden im S.I.-System (MKSA) angegeben. Um die gewohnten Zahlenwerte für das Magnetfeld beizubehalten ($1\ \gamma = 1$ nT), wird anstelle des Magnetfelds $\vec{H}$ nur die magnetische Induktion $\vec{B}$ verwendet. (Der Gebrauch von $\vec{B}$ hat zudem den Vorteil, ohne besondere Mühe vom S.I.-System zum gewohnten c.g.s.-System und umgekehrt überzuwechseln: Hierzu ersetze man in den „S.I.-Formeln" die μ_0's durch 4π und die $\vec{B}$'s

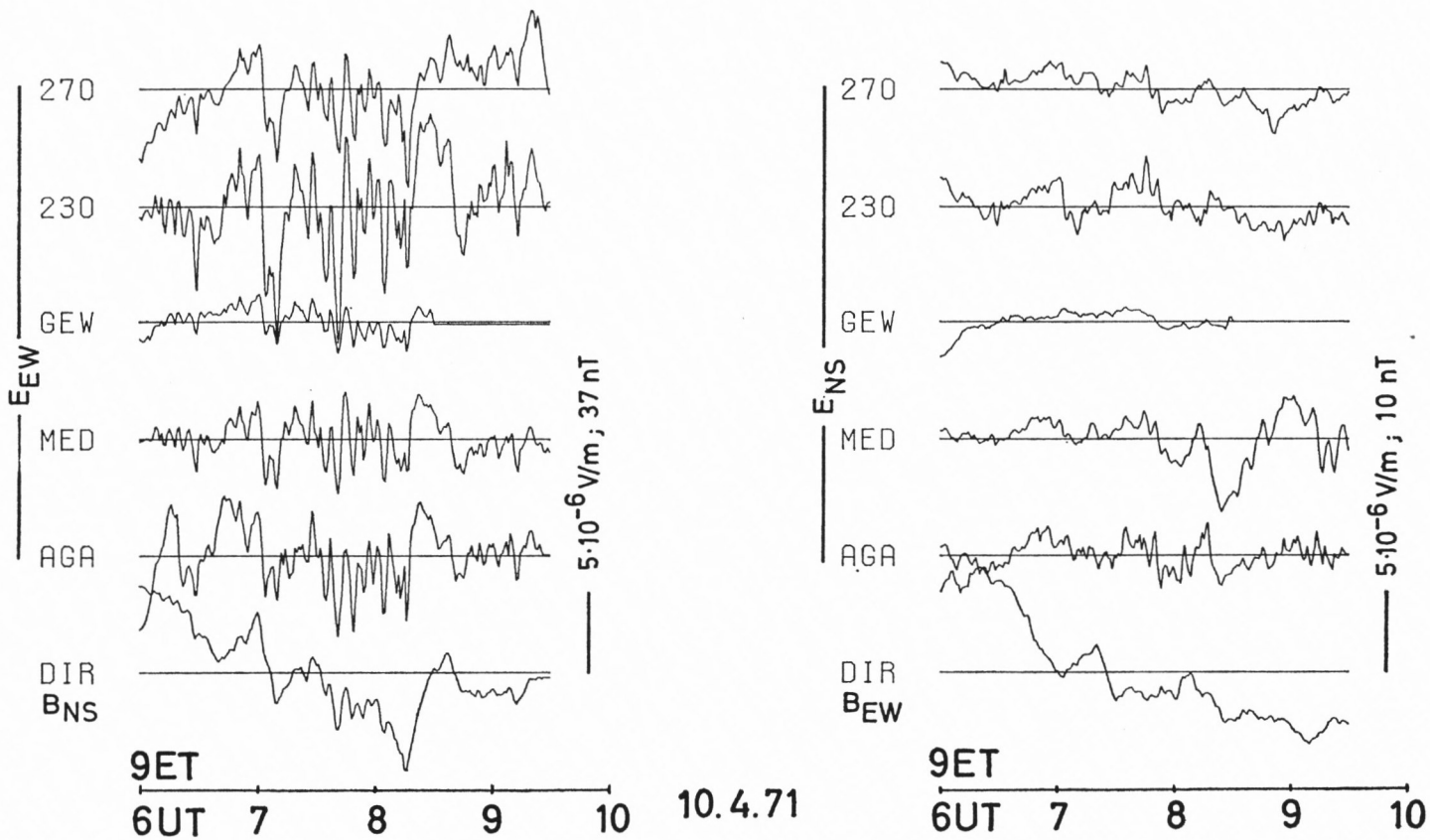


Abb. 1.4: Zeitliche Variationen des erdelektrischen Feldes an 5 Stationen in Äthiopien entlang eines NS-Profils (siehe Abb. 5.17) und des magnetischen Feldes in Dire Dawa (DIR), das etwa am magnetischen Äquator liegt. Der starke Gang des Magnetfelds wird durch Tagesvariation des Elektrojets verursacht (Beginn des Elektrojets etwa 4.00 ET). Zeitgleich mit dem Elektrojet ist die starke Polarisation des Magnetfelds in NS-Richtung, bzw. starke Polarisation des erdelektrischen Feldes in EW-Richtung.

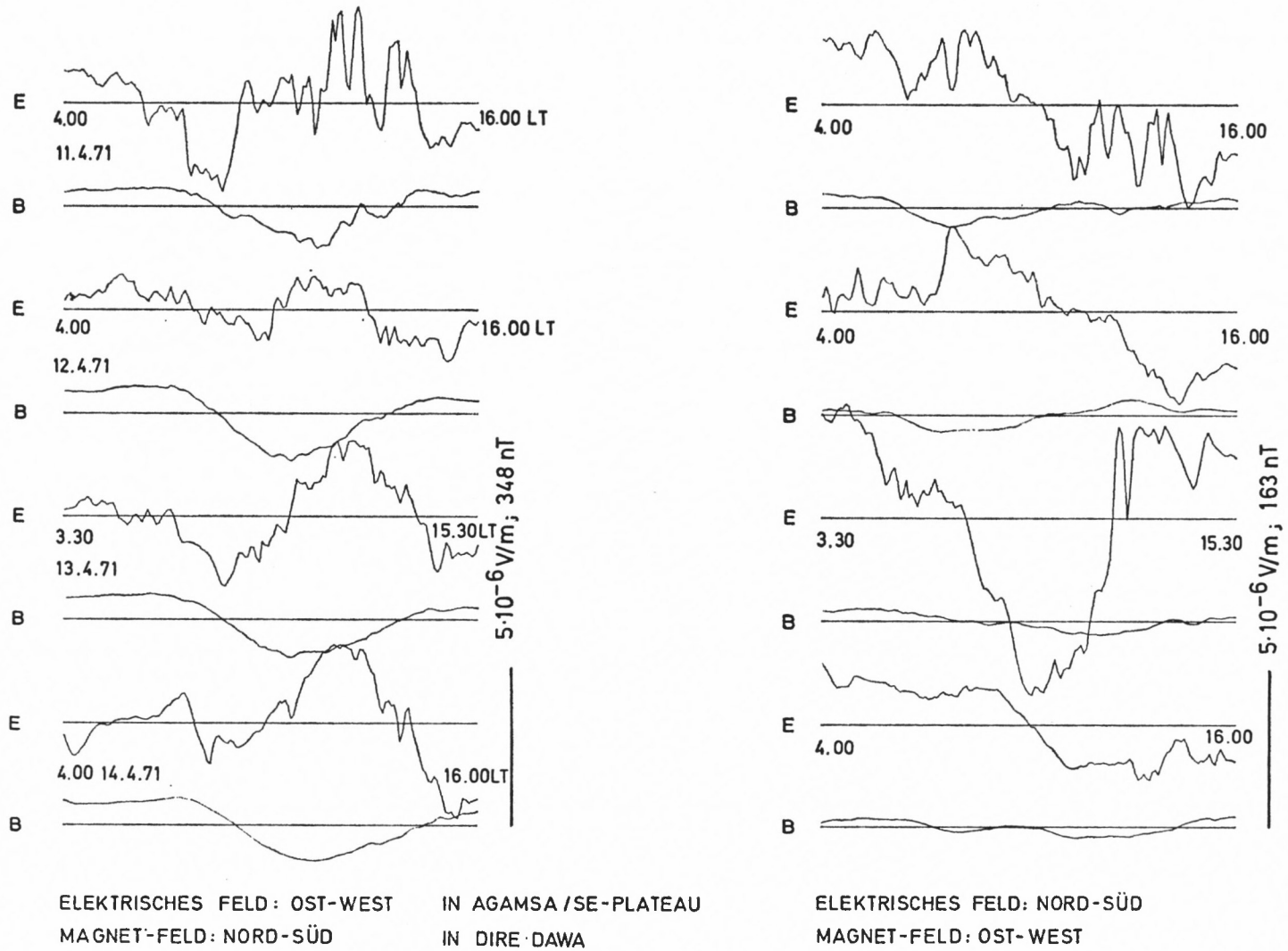


Abb. 1.5: Zeitliche Variationen des erdelektrischen Feldes an der Station Agamsa Bordoda auf dem SE-Escarpment und des magnetischen Feldes in Dire Dawa in Äthiopien. Der Beginn der Registrierungen an den 4 aufeinanderfolgenden Tagen 11./12./14. April 1971 ist 4.00 ET (am 13. bereits 3.30) und endet jeweils 12 Stunden später. Beide Stationen liegen etwa am magnetischen Äquator. Im Magnetfeld ist das zeitliche An- und Abschwellen des Elektrojets mit dem Maximum um 12.00 ET zu erkennen, allerdings nur in der NS-Komponente (linker Teil der Abbildung). Diese langperiodische Variation des Elektrojets ist im induzierten erdelektrischen Feld schwerer zu erkennen, da die Variationen kürzerer Periode auf Grund des Induktionsgesetzes gegenüber den Variationen längerer Periode verstärkt werden. Die Registrierung von Variationen des erdelektrischen Feldes von so langen Perioden (hier bis zu 12 h) ist schwierig, da auch das Kontaktpotential der Elektrode mit dem Elektrolyten des Bodens zeitlich variiert. Hierauf ist z. B. die starke Variation des elektrischen Feldes in der NS-Komponente am 13. 4. zurückzuführen.

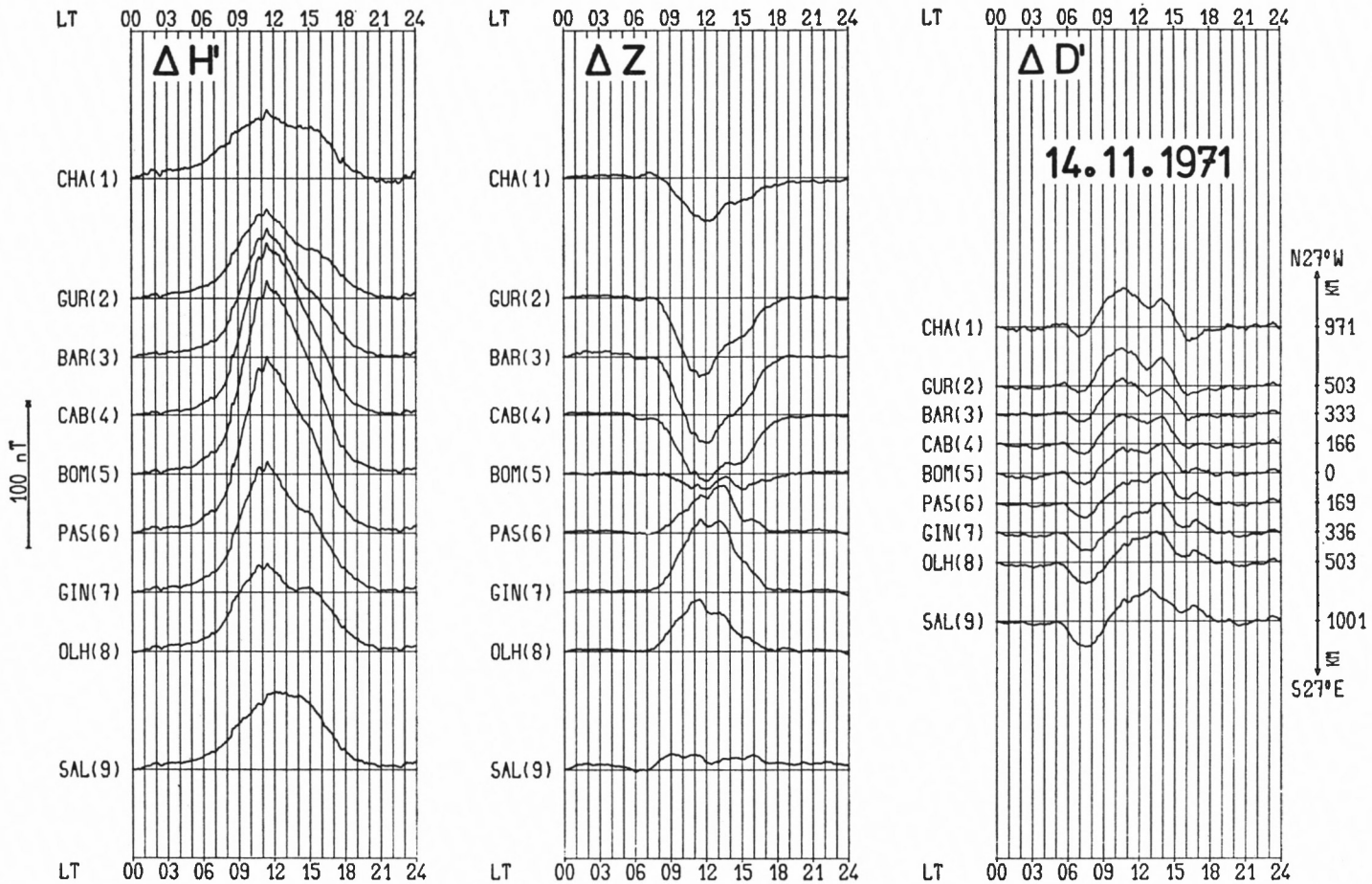


Abb. 1.6: Die zeitliche Variation des Magnetfeldes an 9 Stationen auf einem Profil über den magnetischen Äquator in Brasilien (Registrierung von D. Hesse, der diese Montage zur Verfügung gestellt hat). $\Delta H'$ ist die horizontale Komponente des Magnetfelds senkrecht zum Äquator, also senkrecht zum äquatorialen Elektrojet; ΔZ ist die vertikale Komponente des Magnetfelds; $\Delta D'$ ist die horizontale Komponente desMagnetfelds parallel zum magnetischen Äquator. Dem Magnetfeld des S_q-Stromsystems (erkennbar an den Stationen CHA(1) und SAL(9)) überlagert sich das Magnetfeld des äquatorialen Elektrojets. Der Elektrojet beginnt an diesem Tag um etwa 8.00 LT nach Osten zu fließen, erreicht um etwa 12.00 seine maximale Intensität und klingt gegen 18.00 LT langsam ab. Das Zentrum des Elektrojets ist an der Station BOM(5), wo die Amplitude der horizontalen Komponente $\Delta H'$ am größten ist und die Amplitude der vertikalen Komponente ΔZ verschwindet.

Die Station CHA(1) ist 971 km vom magnetischen Äquator entfernt, die Station SAL (9) im SE ist 1001 km vom magnetischen Äquator (an der Sattion BOM(5)) entfernt.

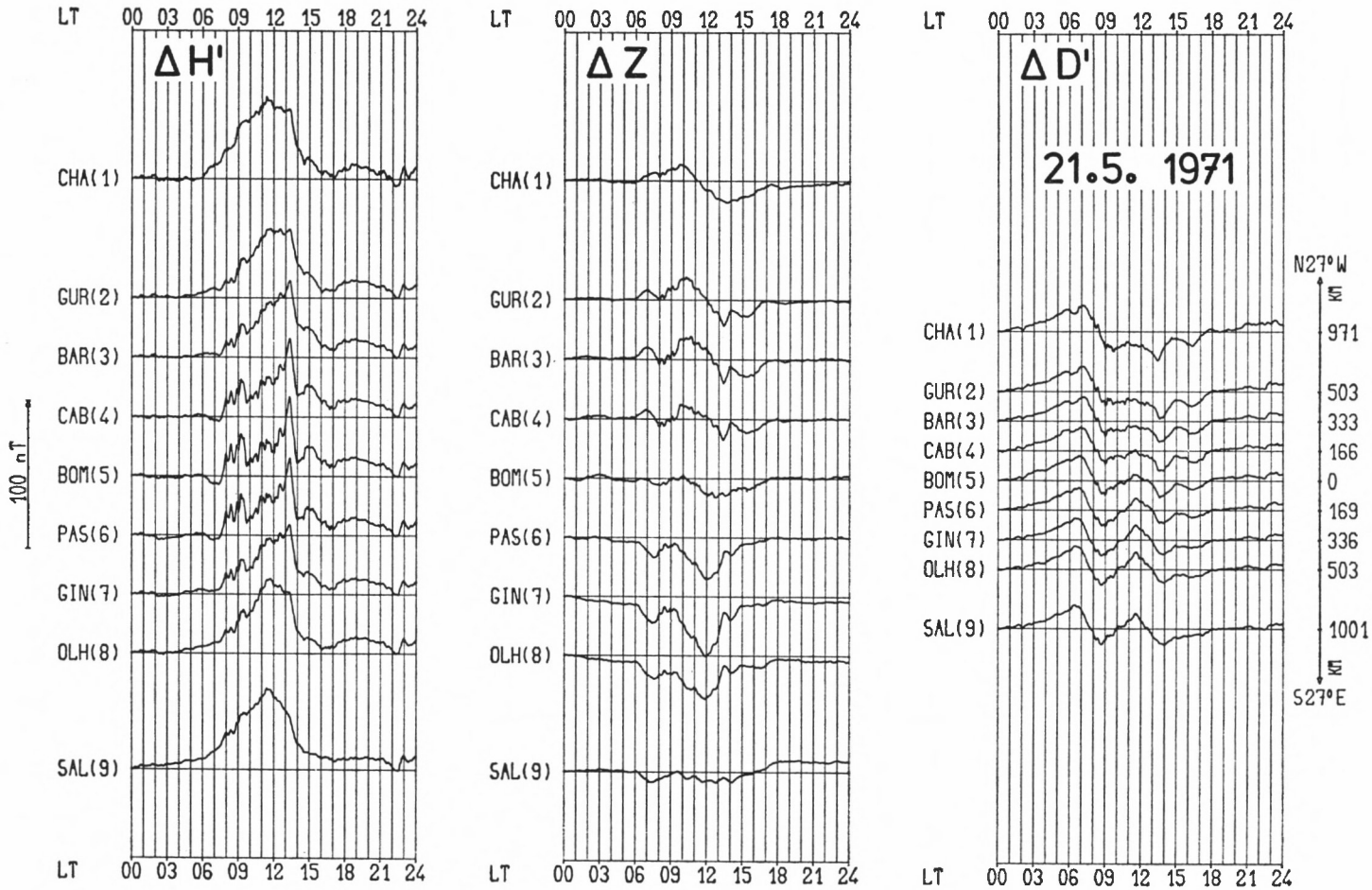


Abb. 1.7: Die zeitliche Variation des Magnetfelds an 9 Stationen auf einem Profil über den magnetischen Äquator in Brasilien (Registrierung von D. Hesse, der diese Montage zur Verfügung gestellt hat). Dem relativ homogenen Magnetfeld des S_q-Stromsystems (erkennbar an den Stationen CHA(1) und SAL(9)) überlagern sich am magnetischen Äquator die Magnetfelder komplizierterer Stromsysteme kurzer Periode in der Ionsphäre. Man erkennt, daß auch die Magnetfelder kurzer Periode am magnetischen Äquator lokal verstärkt sind. – Die kurz-periodische Variation des Magnetfelds kurz vor Mitternacht (23.00 LT) hat dagegen die gleiche Amplitude in der $\Delta H'$-Komponente. In der vertikalen Komponente ist die Amplitude Null. Das zugehörige Stromsystem, vermutlich in der Magnetosphäre, ist deshalb sehr homogen.

Die Station CHA(1) im NW ist 971 km vom magnetischen Äquator (der Station BOM(5)) entfernt. Die Station SAL(9) ist 1001 km vom magnetischen Äquator entfernt.

durch $\vec{H}$'s, und umgekehrt. Nach dieser Transformation haben sich allerdings die Zahlenwerte z. T. erheblich geändert, was aber bei Formeln nicht auffällt.)

Einheiten: $\vec{B}$ in nT $\qquad \vec{j}$ in A/m²

$\vec{E}$ in V/m

Grundgleichungen und gebräuchliche Definitionen lauten im S. I.-System:

1.1 $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 j$

1.2 $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

1.3 $\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}$

1.4 $\operatorname{div} \vec{D} = \eta$

wobei die Zeit- und Ortsabhängigkeit der Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{D}$ definiert sei durch (z. B. für $\vec{B}$):

$$\vec{B} = \vec{B}(x,y,z,t) = \text{Realteil}\,(\vec{B}_0(x,y,z)\, e^{i\omega t})$$
$$= \vec{B}_{0,r}(x,y,z) \cdot \cos \omega t - \vec{B}_{0,i}(x,y,z) \sin \omega t$$

(Maxwellgleichungen in quasi-stationärer Näherung ohne Verschiebungsstrom)

1.5 $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (Vs)/(Am)

1.6 $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ (Ohm'sches Gesetz)

1.7 Impedanz:
$z_{ij} = E_i/B_j$ i und j orthogonale Feldkomponenten

1.8 Übertragungsfunktion:
$C_i = E_i/(i \cdot \omega \cdot B_j) = z_{ij}/(i\omega)$

1.9 Scheinbarer spezifischer Widerstand
$\rho_{s,i} = \mu_0 \cdot \omega \cdot |C_i|^2 = \frac{\mu_0}{\omega} \cdot |z_{ij}|^2 = \frac{\mu_0 \cdot T}{2\pi} \left|\frac{E_i}{B_j}\right|^2$

1.10 Eindringtiefe in den Halbraum mit der homogenen Leitfähigkeit σ: Die elektrischen Felder in der Tiefe z haben gegenüber den elektrischen Feldern an der Erdoberfläche veränderte Amplituden und Phase:

$$E_x(z) = E_x(z=0) \cdot \exp(-z\sqrt{\mu_0 i \omega \sigma}) = E_x(0) \cdot \exp\left(-(1+i) \cdot \frac{z}{p}\right)$$

Eindringtiefe $= p = \sqrt{2/(\mu_0 \omega \sigma)} = 10^3/(2\pi)\sqrt{10\,\rho T}$

Für p in km: $p_{km} = 1/(2\pi)\sqrt{10 \cdot \rho \cdot T}$

Koordinatensystem: Es wird stets ein rechtshändiges Koordinatensystem verwendet, siehe Abb. 1.8.

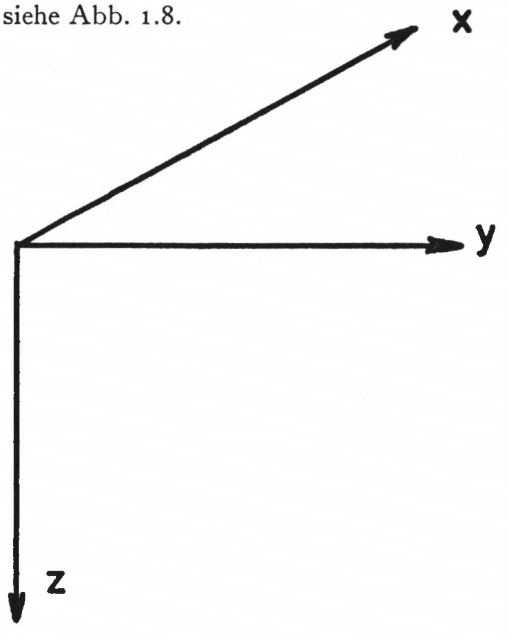


Abb. 1.8: z zählt positiv nach unten, x zählt positiv in die Blattebene hinein (vom Leser weg). Die Streichrichtungen von 2-dimensionalen Anomalien der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(y,z)$ sind stets parallel zur x-Achse.

2. EINTEILUNG DER INTERPRETATIONSMETHODEN

2.1 *Verallgemeinerte Eindringtiefe in den geschichteten Halbraum (Schwerpunkttiefe des induzierten Stromsystems,* WEIDELT (1972); *Tiefe eines unendlich gutleitenden Halbraums,* SCHMUCKER (1969))

Für die Diskussion von Induktions-Vorgängen ist es oft präziser, die Eigenschaft des Untergrundes anstatt durch die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit alleine zusätzlich noch durch die Frequenz der induzierenden Magnetfelder in Form der Eindringtiefe (1.10) zu beschreiben. Normiert man sämtliche Entfernungen auf diese „Eindringtiefen", so existiert eine ganze Klasse von induktiv äquivalenten Modellen. Anstelle des falsche Vorstellungen erzeugenden Wortes „Eindringtiefe" wird deshalb auch für die gleiche Größe (1.10) das Wort „Skalen-Wert (scale-length)" verwendet. Eine hierzu analoge Größe für den geschichteten Halbraum ist die verallgemeinerte Eindringtiefe. Es existiert auch hier eine ganze Klasse von Modellen eines geschichteten Halbraums, die alle durch die gleiche verallgemeinerte Eindringtiefe charakterisiert werden. Auch hier ist das Wort „Eindringtiefe" die Quelle falscher Vorstellungen. Das Wort „inductive scale-length" zielt auf die Anwendung dieser Größe bei der Normierung von Modellgrößen. Von der Herkunft ist es eindeutig durch „Schwerpunktstiefe des induzierten Stromsystems" anzugeben, was im folgenden abgeleitet wird.

Die Stromdichte sei nur Funktion von Tiefe z und Frequenz ω

$$j_x = j_x(z, \omega). \tag{2.1}$$

Für eine feste Frequenz ω ist die Stromdichte nur noch eine Funktion der Tiefe. Man könnte sie deshalb in Analogie z. B. zu der Gesteinsdichte als eine mit der Tiefe variierende Eigenschaft des Untergrundes auffassen und für sie eine Schwerpunktstiefe definieren

$$z_s(\omega) = \mathrm{RE}\left\{\frac{\int_0^{Z_M} z\, j_x(z,\omega)\, dz}{\int_0^{Z_M} j_x(z,\omega)\, dz}\right\} \tag{2.2}$$

Diese Schwerpunktstiefe ist gleich dem Realteil der Übertragungsfunktion, die man aus den Registrierungen des elektrischen und magnetischen Feldes an der Erdoberfläche bestimmen kann, also:

$$z_s(\omega) = \mathrm{RE}\left\{\frac{-E_x(z=0,\omega)}{i\,\omega\, B_y\,(z=0,\omega)}\right\} \tag{2.3}$$

Diese Behauptung soll jetzt bewiesen werden.

Man kann sicher sein, daß alle Feldgrößen ($\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{j}$) in irgendeiner Tiefe sehr klein werden, wenn nur die Leitfähigkeit $\sigma(z)$ endlich ist, was im relativ gut leitenden, tieferen Erdinnern sicher der Fall ist. Diese Tiefe sei mit z_{max} bezeichnet. Hier soll dann gelten

$$\begin{aligned} E_x(z_{max}, \omega) &= 0 \\ B_y(z_{max}, \omega) &= 0 \\ j_x(z_{max}, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Gleichungen (2.2) und (2.3) identisch sind, muß man (2.2) mit Hilfe der Maxwellgleichungen umformen und dann von der Erdoberfläche bis z_{max} integrieren.

Von den Maxwellgleichungen werden die Beziehungen gebraucht:

$$j_x(z, \omega) = \frac{-1}{\mu_0} \frac{\partial B_y(z,\omega)}{\partial z} \tag{2.4}$$

und

$$B_y(z, \omega) = + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_x(z, \omega)}{\partial z}$$

Der Nenner von (2.2) kann sofort berechnet werden:

$$\text{Nenner} = \int_0^{z_{max}} j_x(z, \omega)\, dz = \frac{-1}{\mu_0} \left(B_y(z_{max}, \omega) - B_y(z = 0, \omega)\right) = + \frac{1}{\mu_0} B_y(0, \omega) \tag{2.5}$$

Der Zähler von (2.2) wird partiell integriert: Zähler =

$$\begin{aligned}
\int_0^{z_{max}} z \cdot j_x(z)\, dz &= \left[z \cdot \int_0^{z} j_x(z)\, dz\right]_0^{z_{max}} - \int_0^{z_{max}} \left[\int_0^{z} j_x(z)\, dz\right] dz \\
&= \frac{-1}{\mu_0} \left[z \cdot \{B_y(z) - B_y(0)\} \Big|_0^{z_{max}} + \int_0^{z_{max}} [B_y(z) - B_y(0)]\, dz\right] \\
&= \frac{-1}{\mu_0} \left[z_{max} \left(- B_y(0)\right)\right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\int_0^{z_{max}} B_y(z)\, dz - \int_0^{z_{max}} B_y(0)\, dz\right] \\
&= + \frac{1}{\mu_0} z_{max} \cdot B_y(0) + \frac{1}{\mu_0 i\omega} \int_0^{z_{max}} \frac{dE_x(z)}{dz} dz - \frac{1}{\mu_0} z_{max} B_y(0) \\
&= \frac{1}{\mu_0 i\omega} \left[E_x(z_{max}) - E_x(0)\right] = - \frac{E_x(z = 0)}{\mu_0 i\omega}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Teilt man Zähler durch Nenner, so ergibt sich die Gleichung (2.3): Der Realteil der an der Erdoberfläche meßbaren Übertragungsfunktion ist gleich der Schwerpunktstiefe des induzierten Stromsystems.

Vergleich von Schwerpunktstiefe und Eindringtiefe:

Im homogen leitfähigen Halbraum nimmt das elektrische Feld mit wachsender Tiefe exponentiell ab:

$$E_x(z, \omega) = E(z = 0, \omega) \cdot \exp\left(- z \frac{1 + i}{p}\right) \tag{2.7}$$

p ist die Eindringtiefe, also jene Tiefe, in der die Amplitude des Feldes auf 1/e abgenommen hat. Berechnet man nun von dieser exponentiellen, nach unten sich zuspitzenden Fläche, die Schwerpunktstiefe, so ergibt sich

$$z_s = \mathrm{RE}\left(\frac{p}{1 + i}\right) = \frac{p}{2} \tag{2.8}$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man auch folgendermaßen: Da

$$B_y(z, \omega) = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, \omega) = \frac{-1}{i\omega} \frac{1 + i}{p} E_x(z, \omega), \tag{2.9}$$

folgt für den Realteil der Übertragungsfunktion, also für die Schwerpunktstiefe:

$$z_s = \mathrm{RE}\left(\frac{-E_x(z, \omega)}{i\omega B_y(z, \omega)}\right) = \frac{p}{2} \tag{2.10}$$

Die Frage ist: welche Bedeutung hat der Imaginärteil einer Übertragungsfunktion. Zunächst kann man sich in Analogie zur Gravimetrie, bei der man sich die gesamte Masse eines Körpers im Schwerpunkt konzentriert denken kann, ein Modell vorstellen, bei dem in der Tiefe z_s die Leitfähigkeit unendlich groß ist, während sie für den Bereich $z < z_s$ Null ist. In diesem Modell ist die gesamte induzierte Stromdichte in der Tiefe z_s konzentriert. Eine Messung an der Oberfläche $z = 0$ würde eine Übertragungsfunktion ergeben, die

nur einen Realteil hat, der gleich z_s ist, aber keinen Imaginärteil. Nun kann man das Modell etwas verändern (siehe Abb. 2.1):

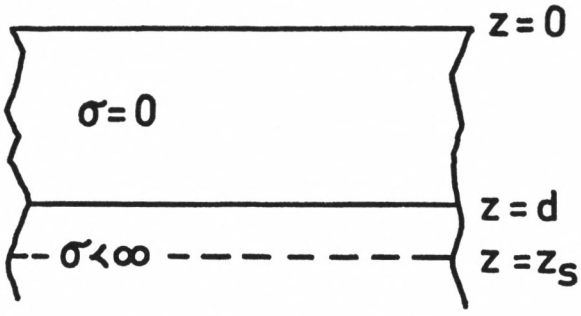


Abb. 2.1

Da die Leitfähigkeit des Halbraums $z > d$ einen endlichen Wert $\sigma < \infty$ hat, nehmen die Feldamplituden in diesem unteren Halbraum mit wachsender Tiefe ab nach Gleichung (2.7) für $z > d$. Die an der Oberfläche gemessene Übertragungsfunktion hat deshalb den Wert (WEAVER, 1973)

$$C(z = 0, \omega) = d + \frac{p}{1+i} = \left(d + \frac{p}{2}\right) - i \cdot \frac{p}{2} \tag{2.11}$$
$$= z_s - i \cdot \frac{p}{2} = RE(C) + i \cdot IM(C)$$

Für dieses Modell kann man aus dem Imaginärteil der Übertragungsfunktion die Leitfähigkeit des unteren Halbraums exakt berechnen:

$$p = \sqrt{2/(\mu_0 \omega \sigma)} \qquad \sigma = 2/(p^2 \mu_0 \omega) = \frac{1}{2\,\mu_0\,\omega\,IM(C)^2} \tag{2.12}$$

Für dieses Modell ergibt der Realteil der Übertragungsfunktion eine Tiefe z_s, in der die aus dem Imaginärteil der Übertragungsfunktion berechenbare Leitfähigkeit σ existiert. SCHMUCKER (1970) verallgemeinert diese Erkenntnis zu einem einfachen Inversionsverfahren, dem $\rho^*(z^*)$-Verfahren:

$$C(z = 0, \omega) = z^* - i\,\frac{p^*}{2} \tag{2.13}$$

sodaß für ein geschichtetes Medium in erster Näherung gilt

$$\rho^*(z^*) = 2 \cdot \mu_0 \cdot \omega \cdot IM(C)^2 \text{ mit } z^* = RE(C) \tag{2.14}$$

Zusammenfassend erkennt man, daß für die gleiche Schwerpunktstiefe, also für den gleichen Realteil der Übertragungsfunktion, beliebig viele Leitfähigkeits-Tiefenfunktionen $\sigma(z)$ existieren. Insbesondere kann man anstatt eines N-Schichten-Modells stets ein 2-Schichten-Modell in Rechnung setzen, das die gleiche Schwerpunktstiefe hat, wobei die obere Schicht die Leitfähigkeit Null und die Mächtigkeit z_s hat. Die Mächtigkeit der so berechneten Schicht ist von der Frequenz abhängig, sie wächst mit abnehmender Frequenz, und zwar wächst sie nur langsam, wenn die Leitfähigkeit in der Tiefe $z_s \pm \Delta z_s$ hoch ist, dagegen schnell, wenn die Leitfähigkeit gering ist. Dieser idealisierte 2-Schichtenfall wird der Diskussion des Induktionsraumes zugrunde gelegt.

2.2 *Induktionsraum*

Schon die Erfahrung lehrt, daß sehr entfernt liegende leitfähige Körper wenig Einfluß auf das an einem Meßort beobachtete induzierte elektrische und magnetische Feld haben. Man könnte sich ein Experiment vorstellen, bei dem man von weit her gut leitende Körper in einer leitfähigen Umgebung an den Meßort heranschiebt, und am Meßort beob-

achtet, in welcher Entfernung R diese gutleitenden Körper die induzierten Felder am Meßort meßbar verändern. Dieser somit definierte Kreis mit dem Radius R um den Beobachtungspunkt schließt die Leitfähigkeitsverteilung ein, die im wesentlichen die Größe der beobachteten induzierten Felder am Meßort bestimmt. Würde man dieses Experiment in verschiedenen Tiefen wiederholen, so ergäbe sich schließlich ein nach außen begrenzter Raum, der Induktionsraum genannt wird, der die Leitfähigkeitsverteilung enthält, die die Größe der am Meßort beobachteten induzierten Felder bestimmt. Die Tiefe dieses Raumes wäre dann die Eindringtiefe der Felder, bzw. die Schwerpunktstiefe.

Anstatt nun dieses Experiment zu realisieren, wird die Existenz dieses Induktionsraumes, und zwar dessen laterale Erstreckung, an einigen Formeln abgeleitet.

Es wird ein Halbraum mit Schichten verschiedener Leitfähigkeit betrachtet. Die Frequenz sei festgehalten: Dieses Vielschichtenmodell soll nun durch ein 2-Schichtenmodell ersetzt werden, in dem die obere Schicht die Leitfähigkeit Null und die Mächtigkeit z_s (Schwerpunktstiefe) hat, der darunter liegende Halbraum die Leitfähigkeit Unendlich.* Bei dieser Transformation des Vielschichtenmodells in ein 2-Schichtenmodell wird also der Imaginärteil der Übertragungsfunktion nicht berücksichtigt. Doch wird durch diese Vernachlässigung die mathematische Formulierung einfacher und übersichtlicher, wobei die Allgemeingültigkeit der Schlußfolgerungen nicht beeinträchtigt wird.

Die Übertragungsfunktion für dieses spezielle 2-Schichtenmodell lautet

$$C(z, \omega, k_y)_{z=0} = \frac{1}{k_y} \cdot \tan h(k_y z_s) \tag{2.15}$$

wobei $k_y = 2\pi/L_y$ die Wellenzahl für eine Fourierzerlegung des räumlich in y-Richtung variierenden E- und B-Feldes ist.

Ableitung dieser Übertragungsfunktion:

Man mache für die räumliche Variation des elektrischen Feldes folgenden Ansatz

$$E_{x,n}(z, \omega, k_y) = A_n \cdot \exp(-z K_n) + B_n \cdot \exp(+z K_n) \tag{2.16}$$

n = Nummer der Schicht, für den dieser Ansatz gemacht wird

$$K_n = \sqrt{\mu_0 i \omega \sigma_n + k_y^2}$$

Aus diesem Ansatz folgt dann für das Magnetfeld

$$B_{y,n}(z, \omega, k_y) = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} E_{x,n}(z, \omega, k_y) = \tag{2.17}$$
$$= K_n \cdot (A_n \cdot \exp(-z K_n) - B_n \cdot \exp(+z K_n))$$

Die Übertragungsfunktion lautet also

$$C_n(z, \omega, k_y) = \frac{1}{K_n} \cdot \frac{A_n \exp(-z K_n) + B_n \exp(+z K_n)}{A_n \exp(-z K_n) - B_n \exp(+z K_n)} \tag{2.18}$$

Für das betrachtete Modell (vergl. Abb. 2.1) folgt für die 1. Schicht $n = 1$, für die Tiefe $z = 0$ und $z = z_s - \delta$ (dies soll bedeuten, daß dieser Ort noch innerhalb der 1. Schicht mit der Leitfähigkeit $\sigma_1 = 0$ ist.)

$$C_1(z = 0, \omega, k_y) = \frac{1}{k_y} \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} \tag{2.19}$$

$$C_1(z_s, \omega, k_y) = \frac{1}{k_y} \frac{A_1 \exp(-z_s k_y) + B_1 \exp(+z_s k_y)}{A_1 \exp(-z_s k_y) - B_1 \exp(+z_s k_y)} = 0. \tag{2.20}$$

*Der äquivalente Strom ist also in der Oberfläche des unendlich gutleitenden Halbraums in der Tiefe z_s konzentriert.

Eliminiert man nun die unbekannten A_1 und B_1 aus den Gleichungen (2.20) und (2.19), so erhält man die gesuchte Übertragungsfunktion (2.15) (die Übertragungsfunktion (2.20) ist Null, da die Felder in den unteren Halbraum wegen seiner unendlich hohen Leitfähigkeit nicht eindringen können).

Transformiert man nun die Beziehung

$$E_x(z, \omega, k_y) = i\omega C(z, \omega, k_y) \cdot B_y(z, \omega, k_y) \tag{2.21}$$

in den y-Ortsbereich, so erhält man ein Faltungsintegral:

$$E_x(z, \omega, y) = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} N(z, \omega, \eta) \cdot B_y(z, \omega, \eta - y) \cdot d\eta \tag{2.22}$$

wobei $N(z, \omega, \eta)$ die Fouriertransformierte der Übertragungsfunktion ist

$$\begin{aligned} N(z, \omega, \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(z, \omega, k_y) \exp(-ik_y \cdot \eta)\, dk_y \\ &= \frac{1}{\pi} \ln\left(\cot h\left(\frac{|\eta|}{4\pi z_s}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

(SCHMUCKER, 1970)

Die Funktion $N(z, \omega, \eta)$ ist einem Regenschirm vergleichbar, der ein eigenes Koordinatensystem η parallel zur y-Achse hat, und über das Profil mit den Koordinaten y getragen wird. Dabei wird das in y-Richtung inhomogene Magnetfeld geglättet. Jede Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(z)$ hat eine eigene Kernfunktion $N(\eta)$, die im allgemeinen komplexwertig und kompliziert ist. Die reelle Kernfunktion in diesem Beispiel gilt nur für das betrachtete 2-Schichten-Modell. Es gilt aber allgemein, daß die Wirksamkeit dieses „Regenschirms" nach außen hin abnimmt:

Der Beobachtungsort sei am Punkt $y = y_0$, die Gewichtsfunktion $N(\eta)$ reicht dann von $\eta = -\eta_0$ bis $\eta = +\eta_0$, wobei $-\eta_0$ und η_0 große Entfernungen – vom Meßort aus gerechnet – seien. Aus den Eigenschaften einer cos h-Funktion folgt dann ganz allgemein, daß die Gewichtsfunktion mit wachsenden $-\eta_0$ und $+\eta_0$ gegen Null strebt, und zwar exponentiell für größere Entfernungen vom Meßort:

$$\begin{aligned} N(\eta) &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{e^{+r} + e^{-r}}{e^{+r} - e^{-r}} \text{ mit } r = \frac{\eta}{4\pi z_s} \\ &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + e^{-2r}}{1 - e^{-2r}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{artan} h\, e^{-2r} \approx \frac{2}{\pi} e^{-2r} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Es soll nun abgeschätzt werden, wie groß der Beitrag der Leitfähigkeitsverteilung außerhalb eines bestimmten Kreises um den Beobachtungsort zum elektrischen Feld am Beobachtungsort ist. Zum Vergleich wird zunächst das elektrische Feld am Beobachtungsort berechnet, für das die gesamte Leitfähigkeit berücksichtigt wird:

$$E_x(\omega, y, o) = i\omega B_y(\omega, y, o) \int_{-\infty}^{+\infty} N(\eta)\, d\eta \tag{2.25}$$

wobei angenommen wird, daß das Magnetfeld über große laterale Entfernungen, in denen $N(\eta)$ noch groß ist, homogen ist und damit als Konstante vor das Integral gezogen werden kann (außerhalb der Gewichtsfunktion $N(\eta)$ kann B_y inhomogen sein, was auf die Bezeichnung quasi-homogenes Magnetfeld führt).

Ersetzt man in (2.25) die Ortsfunktion $N(\eta)$ durch ihre Fouriertransformierte, der Wellenzahl-Funktion $C(k_y)$, dann ergibt sich:

$$E_x(\omega, y, o) = i\omega B_y(\omega, y, o) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_y)\, e^{-ik_y\eta} \cdot dk_y\, d\eta \tag{2.26}$$

Vertauscht man nun die Reihenfolge der Integration, erhält man

$$= i\omega B_y(\omega,y,0) \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_y) \underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_y \cdot \eta} d\eta\right\}}_{\delta\text{-Funktion}} dk_y$$

$$= i\omega B_y(\omega,y,0) \int_{+\infty}^{+\infty} C(k_y) \cdot \delta(k_y) \cdot dk_y$$

$$= i\omega B_y(\omega,y,0) \cdot C(k_y)_{k_y=0} = i\omega B_y(\omega,y,0) \cdot \lim_{k_y \to 0} \frac{\tan h(k_y z_s)}{k_y}$$

wobei also die Beziehung (2.15) eingesetzt wurde,
(Anwendung der Regel von L'Hospital liefert):

$$= i\omega B_y(\omega,y,0) \lim_{k_y \to 0} \frac{z_s}{\cos h^2(k_y z_s)} = i\omega B_y(\omega,y,0) \cdot z_s$$

Also:

$$E_x(\omega,y,0) = i\omega B_y(\omega,y,0) \cdot z_s \tag{2.27}$$

Dieses Ergebnis ist nicht neu: Für das zugrunde gelegte Modell sollte als Übertragungsfunktion die Schwerpunktstiefe = Mächtigkeit der ersten Schicht herauskommen. Diese soeben erneut abgeleitete Erkenntnis ist unabhängig von der früheren Ableitung (Kapitel 2.1): Jetzt ergab sich durch Integration über die unendlich ausgedehnte Meßebene die vertikale Strecke der Schwerpunktstiefe.

Es soll jetzt ein Kreis mit dem Radius R um den Meßort gelegt werden und der induktive Beitrag der *außerhalb* dieses Kreises existierenden Leitfähigkeit zum elektrischen Feld am Beobachtungsort für ein quasi-homogenes Magnetfeld abgeschätzt werden.

$$E_x(z=0,\omega,y) = i\omega B_y(z=0,\omega,y) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} N(\eta) \cdot d\eta \tag{2.28}$$

$= 2\, i\omega B_y(0,\omega,y) \int_0^{\infty} N(\eta)\, d\eta$ da N immer, also auch für andere $\sigma(z)$-Verteilungen eine gerade Funktion ist.

$$= 2\, i\omega B_y(0,\omega,y) \left\{\int_0^R N(\eta) \cdot d\eta + \int_R^{\infty} N(\eta) \cdot d\eta\right\}$$

$$= E(\text{innen}) + E(\text{außen})$$

Das erste Integral gibt den induktiven Anteil der Leitfähigkeitsverteilung innerhalb des Kreises wieder. Das zweite Integral, das den induktiven Anteil des Außenraumes wiedergibt, kann leicht ausgerechnet werden, und zwar mit Hilfe der Näherung (2.24), die ja gerade für das große R gilt

$$E(\text{außen}) = \frac{8\, i\omega z_s}{\pi^2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{R}{z_s}\right) \cdot B_y(0,\omega,y) \tag{2.29}$$

Dieser Außenraum trägt also zum gesamten induzierten elektrischen Feld des Untergrundes folgenden Bruchteil bei:

$$\frac{E\,(\text{außen})}{E\,(\text{gesamt})} = \frac{8}{\pi^2} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{R}{z_s}\right) \tag{2.30}$$

Für einen Kreis mit dem Radius $R = z_s$ ergibt sich ein Bruchteil von etwa $^1/_4$. Man könnte also mit Hilfe von R den lateralen Durchmesser eines Raumes um den Beobachtungspunkt definieren, dessen Leitfähigkeitsverteilung zu $^3/_4$ das induzierte elektrische Feld des Untergrundes bestimmt. Dieser Raum wird der *Induktionsraum* genannt.

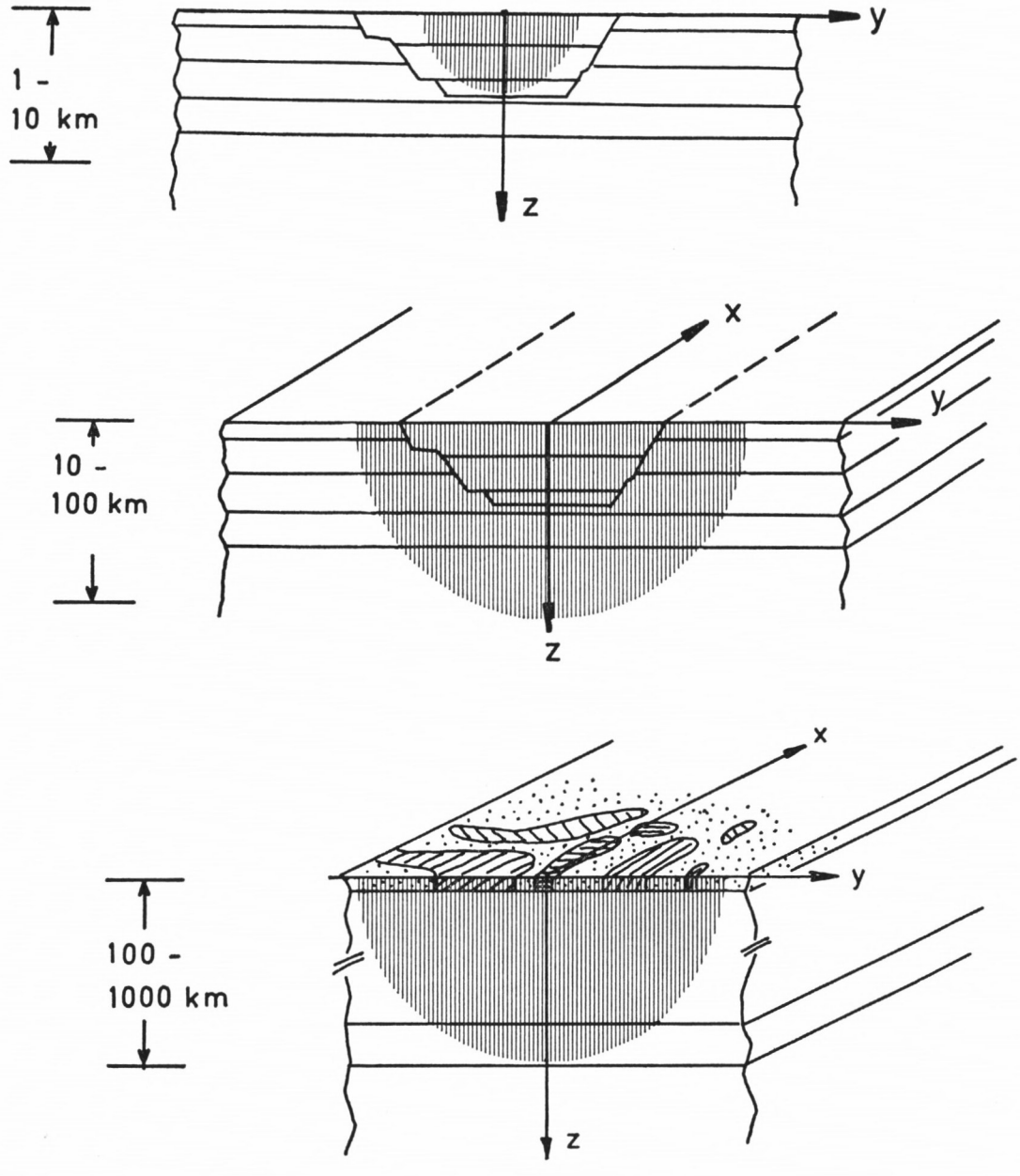


Abb. 2.2: Querschnitt durch eine inhomogene Leitfähigkeits-Verteilung, wie sie für Kontinente typisch sein kann, im Vergleich mit drei unterschiedlich großen Induktionsräumen. Der tiefere Untergrund ist aus horizontal lagernden Schichten aufgebaut, nur im Bereich der oberen Kilometer ändert sich die Leitfähigkeit auch lateral innerhalb kurzer Distanzen. – Der Meßort liege etwa in der Mitte einer Leitfähigkeitsanomalie. Bis zu Perioden von einigen Zehner-Sekunden ist der Induktionsraum verglichen mit der Leitfähigkeits-Anomalie noch so klein, daß das am Meßort beobachtete induzierte elektrische und magnetische Feld durch die horizontallagernden Schichten bestimmt wird. Für längere Perioden bis zu einigen hundert Sekunden ist die Leitfähigkeitsverteilung innerhalb des Induktionsraumes angenähert 2-dimensional. Für Perioden von einigen tausend Sekunden erstreckt sich der Induktionsraum schließlich über den Oberen Mantel, so daß man das obere Stockwerk mit den lateralen Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit als „Dünne Schicht" betrachten kann, wobei die Leitfähigkeitsanomalien in dieser Deckschicht keine Induktionsanomalien sind.

Da die Schwerpunktstiefe mit wachsender Periode zunimmt, nimmt im gleichen Maße auch der Radius des Induktionsraumes zu, wenn das Verhältnis

$$E(\text{außen})/E(\text{gesamt})$$

konstant bleiben soll.

2.3 *Einteilung der Interpretations-Methoden*

Die Frage, welches Interpretationsverfahren man anwenden muß, wird beantwortet durch die Verteilung der Leitfähigkeit und der Verteilung der Stärke des induzierenden Magnetfeldes im Induktionsraum.

Der Durchmesser des Induktionsraumes wächst mit wachsender Periode der zeitlich variablen elektrischen und magnetischen Felder und nimmt mit zunehmender elektrischer Leitfähigkeit des Halbraumes ab. Beachtet man die in etwa bekannte, mittlere Leitfähigkeits-Verteilung des Erdinnern, so folgt: Der Durchmesser des Induktions-Raumes wächst von einigen 100 m bei Perioden von einigen Sekunden, über einige Kilometer bei Perioden von einigen Zehner-Sekunden, und über einige Zehner-Kilometer bei mehreren hundert Sekunden bis zu einigen hundert Kilometern bei mehreren tausend Sekunden (siehe Abb. 2.2). Da für ein Interpretationsverfahren die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit nur innerhalb des Induktionsraumes wichtig ist, bzw. die Geometrie des induzierenden Magnetfeldes innerhalb des Induktionsraumes, ist es nicht notwendig, die gesamte tatsächlich existierende dreidimensionale Struktur der Leitfähigkeit und die des induzierenden Magnetfeldes zu berücksichtigen. So kann man z. B. bei kurzen Perioden, also kleinem Induktionsraum, in guter Näherung oft annehmen, daß die Leitfähigkeit nur eine Funktion der Tiefe ist, während das induzierende Magnetfeld homogen ist. Bei mittleren Perioden von einigen hundert Sekunden kann man die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit oft durch eine 2-dimensionale Verteilung annähern, da die meisten Gesteins-Strukturen von regionaler Ausdehnung 2-dimensional sind. Erst bei sehr langen Perioden von mehreren tausend Sekunden muß man die 3-dimensionale Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit in Rechnung setzen, wobei man dann in gewissen Gebieten der Erde, dem magnetischen Äquator und der Polarlicht-Zone, auch die inhomogene Struktur des induzierenden Magnetfelds berücksichtigen muß, da in diesen Gebieten die induzierenden Ströme der Ionosphäre keine homogenen Flächenströme über dem Untersuchungsgebiet sind.

3. INTERPRETATIONSVERFAHREN FÜR GESCHICHTETEN UNTERGRUND

3.1 *Das induzierende Magnetfeld ist innerhalb des Induktionsraumes homogen (quasi-homogenes Magnetfeld)*

Der Durchmesser des Induktionsraumes ist klein im Vergleich mit den lateralen Änderungen der Leitfähigkeit und des induzierenden Magnetfelds. Der Untergrund im Induktionsraum bestehe aus horizontalen Schichten homogener und isotroper Leitfähigkeit (siehe Abb. 3.1). Die Berechnung der Übertragungsfunktionen für dieses einfache Modell ist bereits lange bekannt (Cagniard, 1953) und deshalb auch häufig in der Literatur diskutiert worden. Es wurde auch viel darüber diskutiert, ob man Interpretationstheorien für solch einfache Modelle auf die Meßergebnisse auf der realen Erde überhaupt anwenden dürfe. Viele Meßergebnisse in den letzten Jahren haben ergeben, daß man solch einfache

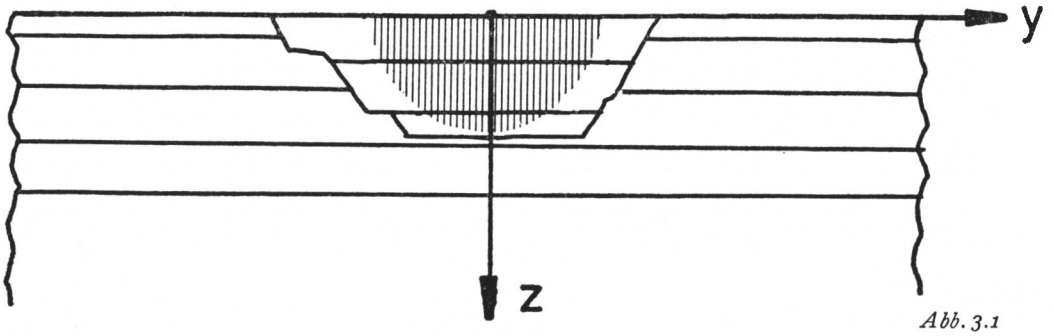


Abb. 3.1

Modelle der Interpretation realer Meßergebnisse zugrundelegen kann. Kriterien hierfür (Verteilung der Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes) werden im 5. Kapitel dieser Arbeit erörtert. Weiterhin kann man diese einfache Interpretationstheorie in vielen anderen Fällen als erste Näherung gebrauchen, um die in den folgenden Kapiteln diskutierten komplizierteren Verfahren der Interpretation zielstrebiger einsetzen zu können.

Das entscheidende Kriterium, solch einfache Modelle des Untergrundes, wenn auch nur als Näherung, der Interpretation zugrunde zu legen, ist die Existenz eines Inversionsverfahrens (SCHMUCKER, 1974), d. h. eines Verfahrens, direkt aus den gemessenen Übertragungsfunktionen die Leitfähigkeiten und Mächtigkeiten der einzelnen Schichten berechnen zu können. Die Existenz eines solchen Umkehrverfahrens setzt voraus, daß zwischen den gemessenen Größen und den gesuchten Größen ein linearer Zusammenhang besteht. Das ist aber gerade bei induktiven Prozessen nicht der Fall. SCHMUCKER (1974) hat durch eine spezielle Normierung und Umformulierung der in (1.8) definierten Übertragungsfunktion einen solchen gesuchten fast linearen Zusammenhang gefunden. Diese spezielle Übertragungsfunktion ergibt sich als Lösung einer einfachen Differentialgleichung, die im folgenden abgeleitet und gelöst wird (ECKHARDT, 1968).

Das Ziel ist zunächst die Berechnung der Übertragungsfunktion für ein gegebenes Modell. Die allgemein bekannte Methode, dieses Ziel zu erreichen, ist die Lösung einer Differential-Gleichung, die die Diffusion des elektrischen (bzw. des magnetischen) Feldes in den elektrisch leitfähigen Untergrund beschreibt

(3.1) $$E'_{x',n}(z,\omega) = \mu_0 \cdot i\omega\sigma(z)\, E_{x,n}$$

mit n = die Nummer der Schicht, von der Erdoberfläche aus gezählt

z = Tiefe innerhalb dieser Schicht $z_n < z < z_{n+1}$

Die Lösung dieser Differential-Gleichung ergibt die Variation von $E_{x,n}(z,\omega)$ mit der Tiefe, woraus dann mit Hilfe einer Maxwell-Gleichung auch die Variation von $B_{y,n}(z,\omega)$ mit der Tiefe berechnet werden kann. Nach (1.8) kann man dann die Übertragungsfunktion berechnen.

Andererseits kann man das Ziel, die Übertragungsfunktion für ein gegebenes Modell zu berechnen, auch direkt finden. Hierzu muß man eine Differential-Gleichung für die Variation der Übertragungsfunktionen mit der Tiefe formulieren, was im folgenden getan wird.

Aus der Maxwellgleichung (1.2) folgt

(3.2) $$E'_x(\omega,z) = -i\omega B_y(\omega,z)$$

Hiermit läßt sich die Übertragungsfunktion umschreiben

(3.3) $$C_n(\omega,z) = \frac{E_{x,n}(\omega,z)}{i\omega B_{y,n}(\omega,z)} = \frac{E_{x,n}(\omega,z)}{-E'_{x,n}(\omega,z)}$$

Differenziert man (3.3) nach z (Anwendung der Quotientenregel), dann erhält man

$$\frac{\partial C_n(\omega, z)}{\partial z} = \frac{(-E'_x)\,E'_x + (E''_x)}{(E'_x)^2} = (E'' \text{ wird mit Hilfe von (3.1) eliminiert}) \tag{3.4}$$

$$= -1 + \mu_0 i \omega \sigma \left(\frac{E_x}{E'_x}\right)^2 = -1 + \mu_0 i \omega \sigma\, C_n(\omega, z)^2$$

Letztere Umformung war mit (3.3) möglich. Das Ergebnis ist also

$$\frac{\partial C_n(\omega, z)}{\partial z} = \mu_0 i \omega \sigma\, C_n(\omega, z)^2 - 1 \tag{3.5}$$

Dies ist bereits die gesuchte Differentialgleichung für die Übertragungsfunktion. Sie gilt für die n-te Schicht. Sie soll jetzt dimensionslos gemacht werden, indem

a) die Tiefe z normiert wird auf die komplexwertige Eindringtiefe $\frac{p_n}{1+i}$, die für einen homogenen Halbraum der Leitfähigkeit σ_n bei der Frequenz ω gilt

$$\hat{z} = \frac{z}{p_n}(1 + i) \text{ für die n-te Schicht,} \tag{3.6}$$

b)die Übertragungsfunktion $C_n(\omega, z)$ normiert wird auf jene Übertragungsfunktion, die ein homogener Halbraum mit der Leitfähigkeit σ_n bei der Frequenz ω haben würde:

$$\hat{C}_n(\omega, z) = \frac{C_n(\omega, z)}{C_{n,\,HR}} = C_n(\omega, z) \cdot \frac{1+i}{p_n} \tag{3.7}$$

da nach (2.9) $C_{n,\,HR} = \frac{p_n}{1+i}$ die Übertragungsfunktion für den Halbraum ist.

Beachtet man noch, daß $\partial/\partial z = \frac{p_n}{1+i} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{z}}$, dann folgt aus (3.5) die dimensionslose Differentialgleichung

$$\frac{\partial \hat{C}_n(\omega, \hat{z})}{\partial \hat{z}} = \hat{C}_n(\omega, \hat{z})^2 - 1 \tag{3.8}$$

Diese Differentialgleichung kann nun noch einfacher umgeschrieben werden, wenn man anstelle der Übertragungsfunktion den natürlichen Logarithmus der Übertragungsfunktion in die Rechnung einführt. Es ist ja auch in der Praxis üblich, Übertragungsfunktionen und den scheinbaren spezifischen Widerstand in Logarithmen-Papiere einzutragen. Analog wird hier also die Differentialgleichung (3.8) in ein Logarithmenpapier eingetragen: man setzt

$$L_n(\omega, \hat{z}) = \ln(\hat{C}_n(\omega, z)) \text{ und } \hat{C}_n(\omega, \hat{z}) = e^{L_n(\omega, \hat{z})} \tag{3.9}$$

Differenziert man L nach $\hat{z}$, so ist

$$\frac{\partial L_n(\omega, \hat{z})}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\hat{C}_n(\omega, \hat{z})} \frac{\partial \hat{C}_n(\omega, \hat{z})}{\partial \hat{z}} \tag{3.10}$$

Formt man nun (3.8) geringfügig um,

$$\frac{1}{\hat{C}_n(\omega, \hat{z})} \cdot \frac{\partial \hat{C}_n(\omega, \hat{z})}{\partial \hat{z}} = \hat{C}_n(\omega, \hat{z}) - \frac{1}{\hat{C}_n(\omega, \hat{z})}$$

und setzt (3.10) und (3.9, 2. Gleichung) ein, so erhält man

$$\frac{\partial L_n(\omega, \hat{z})}{\partial \hat{z}} = e^{+L_n(\omega, \hat{z})} - e^{-L_n(\omega, \hat{z})} \tag{3.11}$$

$$= 2 \cdot \sin h\, L_n(\omega, \hat{z})$$

Diese Differentialgleichung kann exakt gelöst werden, was später gemacht wird. Zunächst ist die Näherung interessant, die erlaubt ist, wenn man

$$\sin h\, L_n(\omega, \hat{z}) = L_n(\omega, \hat{z}) \tag{3.12}$$

setzen darf. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{d L_n(\omega, \hat{z})}{d \hat{z}} = 2 \cdot L_n(\omega, \hat{z}) \rightarrow \frac{d L_n(\omega, \hat{z})}{L_n(\omega, \hat{z})} = 2\, d\hat{z}. \tag{3.13}$$

Man integriert die rechte Gleichung von der Unterseite der n-ten Schicht, also der Tiefe $\hat{z}_n + \hat{d}_n$, bis zu ihrer Oberseite, also der Tiefe $\hat{z}_n$: Die Lösung ist

$$\ln\left(L_n(\omega,\hat{z}_n)\right) - \ln\left(L_n(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)\right) = (\hat{z}_n - \hat{z}_n - \hat{d}_n)\cdot 2 \tag{3.14}$$

bzw.

$$L_n(\omega,\hat{z}_n) = L_n(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)\cdot e^{-2\hat{d}_n}$$

Diese Gleichung beschreibt die Fortsetzung der Übertragungsfunktion von der Schichtunterseite $(\hat{z}_n + \hat{d}_n)$ zur Schichtoberseite $\hat{z}_n$.

Um nun auch noch den Übergang von der Oberseite der $(n+1)$-ten Schicht zur Unterseite der n-ten Schicht zu formulieren, bilde man:

$$\begin{aligned} L_n(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n) - L_{n+1}(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n) &\overset{(3.9)}{=} \ln \hat{C}_n(\hat{z}_n+\hat{d}_n) - \ln \hat{C}_{n+1}(\hat{z}_n+\hat{d}_n) \\ &= \ln \frac{\hat{C}_n(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)}{\hat{C}_{n+1}(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)} \overset{(3.7)}{=} \ln \frac{p_n^{-1}\cdot C_n(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)}{p_{n+1}\cdot C_{n+1}(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)} = (\oplus) \\ &= \ln\sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}}} = \ln\sqrt{\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Insgesamt ergibt sich nun von der Oberseite der $(n+1)$-ten Schicht zur Oberseite der n-ten Schicht aus 3.14 und 3.15:

$$\begin{aligned} L_n(\omega,\hat{z}_n) &= L_n(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n)\, e^{-2\hat{d}_n} \\ &= \left(L_{n+1}(\omega,\hat{z}_n+\hat{d}_n) + \ln\sqrt{\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}}\right) e^{-2\hat{d}_n} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Diese Gleichung könnte also zur Berechnung der Übertragungsfunktion für ein vorgegebenes Modell verwendet werden. Darüberhinaus aber ist sie geeignet für eine Inversionsmethode, was später auch gezeigt wird.

Zunächst aber wird diskutiert, unter welchen Umständen die obige Vereinfachung erlaubt ist.

Aus der Definition (3.9) folgt zunächst

$$L_n(\omega,\hat{z}) = \ln\left(|\hat{C}_n(\omega,\hat{z})|\exp(-i\hat{\varphi}_n)\right) = \ln\left(|\hat{C}_n(\omega,\hat{z})|\right) - i\hat{\varphi}_n \tag{3.17}$$

Der Realteil von L_n ist also gleich dem Logarithmus des Betrages der normierten Übertragungsfunktion. Der Imaginärteil ist gleich der normierten Phasendifferenz zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \sin h\, L_n &= \sin h\,(\ln|\hat{C}_n| - i\hat{\varphi}_n) = \\ &\sin h\,(\ln|\hat{C}_n|)\cdot\cos h\,(i\hat{\varphi}_n) - \cos h\,(\ln|\hat{C}_n|)\cdot\sin h\,(i\hat{\varphi}_n) = \\ &\sin h\,(\ln|\hat{C}_n|)\cdot\cos(\hat{\varphi}_n) - i\cdot\cos h\,(\ln|\hat{C}_n|)\cdot\sin\hat{\varphi}_n \end{aligned} \tag{3.18}$$

Wenn angenähert gilt, daß

$$\hat{C}_n \approx 1 \quad\text{und}\quad \hat{\varphi}_n \approx 0^\circ \tag{3.19}$$

dann würde für (3.18) folgen

$$\ln|\hat{C}_n| \approx 0 \qquad \cos h\,(\ln|\hat{C}_n|) \approx 1$$

$$\sin h\,(\ln|\hat{C}_n|) \approx \ln\hat{C}_n$$

$$\sin\hat{\varphi}_n \approx \hat{\varphi}_n$$

($\oplus$) An den Schichtgrenzen sind die Übertragungsfunktionen stetig, da sowohl die elektrischen als auch die magnetischen Feldkomponenten stetig sind.

$$(3.18) \qquad = \ln |\hat{C}_n| - i\hat{\varphi}_n = L_n(\omega, \hat{z})$$

Die Bedingungen (3.19) sind also die Voraussetzungen für die Näherung (3.12). Was bedeuten diese Voraussetzungen?

a) $C_n \approx C_{HR}$, die Übertragungsfunktion für die n-te Schicht soll etwa gleich der Übertragungsfunktion für einen Halbraum mit der Leitfähigkeit der n-ten Schicht sein.

b) $\varphi_n \approx \varphi_{HR}$, die Phase zwischen elektrischem und magnetischem Feld sollte etwa der entsprechenden Phasendifferenz für einen Halbraum entsprechen.

Diese Bedingungen sind dann erfüllt wenn sich die Leitfähigkeiten der unter der n-ten Schicht folgenden Schichten sich gegenseitig nicht zu stark unterscheiden. Da diese Bedingungen im cos h und cos stehen, brauchen sie nicht besonders scharf erfüllt zu sein (vergleiche hierzu die spätere Diskussion zu Abb. 3.3).

Nachzutragen ist noch die exakte Lösung der Gleichung (3.11). Man schreibt sie zunächst in die folgende Form um:

$$(3.19) \qquad \frac{d\,L_n(\omega, \hat{z})}{\sin h(L_n(\omega, \hat{z}))} = 2 \cdot d\hat{z}$$

Integriert man nun linke und rechte Seite von der Tiefe $\hat{z}_n + \hat{d}_n$ nach oben in die Tiefe $\hat{z}_n$ (wobei man aber in der n-ten Schicht bleibt), also analog zu (3.14)

$$(3.20) \qquad \ln \tan h\, L_n(\omega, \hat{z}_n)/2 - \ln \tan h\, L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)/2 = -2\,\hat{d}_n$$

Zur Abkürzung setze man:

$$(3.21) \qquad \begin{aligned} \Phi(\omega, \hat{z}_n) &= \ln \tan h\, L_n(\omega, \hat{z}_n)/2 \\ \Phi(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) &= \ln \tan h\, L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)/2 \end{aligned}$$

Setzt man dies in (3.20) ein, so gilt also

$$(3.22) \qquad \Phi(\omega, \hat{z}_n) = \Phi(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) - 2\,\hat{d}_n$$

Löst man (3.21) nach L_n auf

$$(3.23) \qquad \begin{aligned} L_n(\omega, \hat{z}_n) &= 2 \operatorname{artan} h\, e^{\Phi(\omega, \hat{z}_n)} \\ &= 2 \operatorname{artan} h\, e^{\Phi(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) - 2\hat{d}_n} \text{ mit } (3.22) \\ L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) &= 2 \operatorname{artan} h\, e^{\Phi(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)} \end{aligned}$$

so ist das Verhältnis der Übertragungsfunktionen g_n:

$$(3.24) \qquad g_n = \frac{L_n(\omega, \hat{z}_n)}{L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)} = \frac{\operatorname{artan} h\, e^{\Phi(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)} - 2\,\hat{d}_n}{\operatorname{artan} h\, e^{\Phi(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)}}$$

Dieser Faktor g_n ist nun die exakte Lösung anstelle des Faktors $\exp(-2\,\hat{d}_n)$ in Gleichung (3.14). Die Gleichung (3.24) beschreibt also exakt die Fortsetzung der Übertragungsfunktion innerhalb einer Schicht. Die durch (3.15) beschriebene Fortsetzung über eine Schichtgrenze hinweg bleibt unverändert. Somit ergibt sich insgesamt folgende Methode zur Berechnung der Übertragungsfunktionen: (vergleiche hierzu die Abbildung 3.2)

Für den Übergang von A zu B gilt

$$(3.25) \qquad L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) = L_{n+1}(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) + \ln \sqrt{\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}}$$

und für den Weg von B nach C gilt:

$$(3.26) \qquad L_n(\omega, \hat{z}_n) = g_n \cdot L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) \approx e^{-2\hat{d}_n} \cdot L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) \text{ mit } (3.14).$$

Insgesamt gilt für den Weg von A nach C:

$$L_n(\omega, \hat{z}_n) = g_n \cdot \left(L_{n+1}(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) + \ln \sqrt{\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}}\right) \tag{3.27}$$

Gibt man sich ein Modell mit N Schichten vor, also N Leitfähigkeiten und N—1 Mächtigkeiten, so kann man mit der Gleichung (3.27) die Übertragungsfunktionen an der Erdoberfläche berechnen: Da die Übertragungsfunktion für die N-te Schicht gleich der Übertragungsfunktion für den Halbraum ist, ist gemäß der Definition (3.9)

$$L_N = 0 \quad \hat{C}_N = 1 \tag{3.28}$$

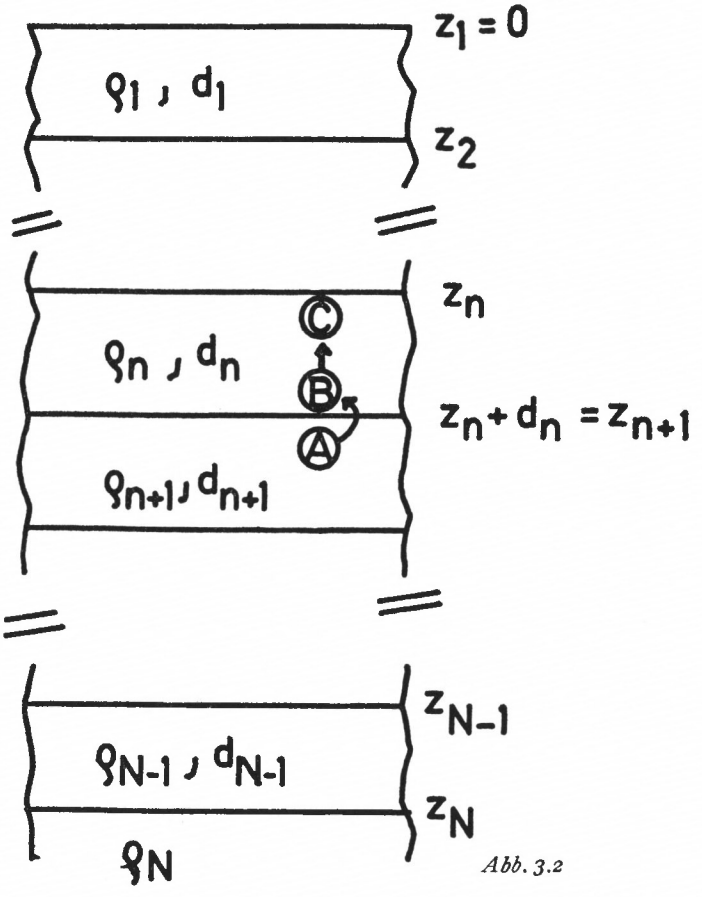


Abb. 3.2

Mit diesem Startwert kann man dann die Übertragungsfunktionen für alle Schichten sukzessive nach oben bis zur Erdoberfläche ausrechnen.

$L_1(\omega, z = 0)$ ist die Übertragungsfunktion an der Erdoberfläche, aus der man den scheinbaren spezifischen Widerstand und die Phasendifferenz zwischen E- und B-Feld ausrechnen kann:

$$L_1(\omega, 0) = RE(L_1) + i \cdot IM(L_1) = \ln(\hat{C}_1) - i\hat{\varphi}_1 = \ln(\rho_s/\rho_1) - i\,(\varphi - \varphi_{HR}) \tag{3.29}$$

$$\rho_s(z = 0, \omega) = \rho_1 \cdot \exp\,(RE(L_1)) \quad \varphi_E - \varphi_B = -\,IM(L_1) + 45^\circ \tag{3.30}$$

Die hier dargestellte Methode der Berechnung der Übertragungsfunktionen bzw. des scheinbaren spezifischen Widerstandes und der Phasendifferenz zwischen E und B für

geschichtete Medien eignet sich sowohl für ein graphisches Verfahren (ECKHARDT, 1968) als auch für die Inversion (SCHMUCKER, 1974). Beide Möglichkeiten werden im folgenden dargestellt.

3.11 *Bestimmung des scheinbaren spezifischen Widerstandes für ein vorgegebenes Modell mit einem graphischen Verfahren*

Die Funktion $g_n(\hat{d})$ von Gl. (3.24) beschreibt in einem bestimmten Koordinatensystem für ein festes $L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)$ eine Spirale, solange die vertikale Wegstrecke $\hat{d}$ noch innerhalb der Schicht mit der Leitfähigkeit σ_n ist. Für verschiedene „Startwerte" $L_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n)$ ergibt sich eine Schar von Spiralen, die in der Abb. (3.3) in der Original-Darstellung von ECKHARDT (1968) wiedergegeben ist. Ist die auf die Eindringtiefe normierte Schichtmächtigkeit sehr groß, so erreichen die Spiralen mit wachsendem $(-\hat{d})$ ihren Mittelpunkt. Da eine sehr dicke Schicht und ein Halbraum mit homogener Leitfähigkeit induktiv gleich wirkt, gibt der Mittelpunkt der Spiralen die Übertragungsfunktion für einen Halbraum an. Deshalb ist der Abszissenwert in dem in der Figur vorgegebenen Koordinatensystem die auf den Halbraum normierte Übertragungsfunktion des Halbraums, nämlich $\log(\hat{C}) = 0$, der Ordinatenwert die in dieser Darstellung nicht normierten Phase des Halbraums, nämlich 45°. Die Näherung (3.12) ergab als Lösung eine Näherung für die Funktion $g_n(\hat{d}) \approx \exp(-2\hat{d})$ (Gl. 3.14). In der Abbildung (3.3) sind zwei solcher logarithmischer Spiralen dick eingetragen. Innerhalb des Kreises ist diese Näherungslösung mit der exakten Lösung fast gleich. Man kann nun mit Hilfe dieser Spiralen-Schar für ein vor-

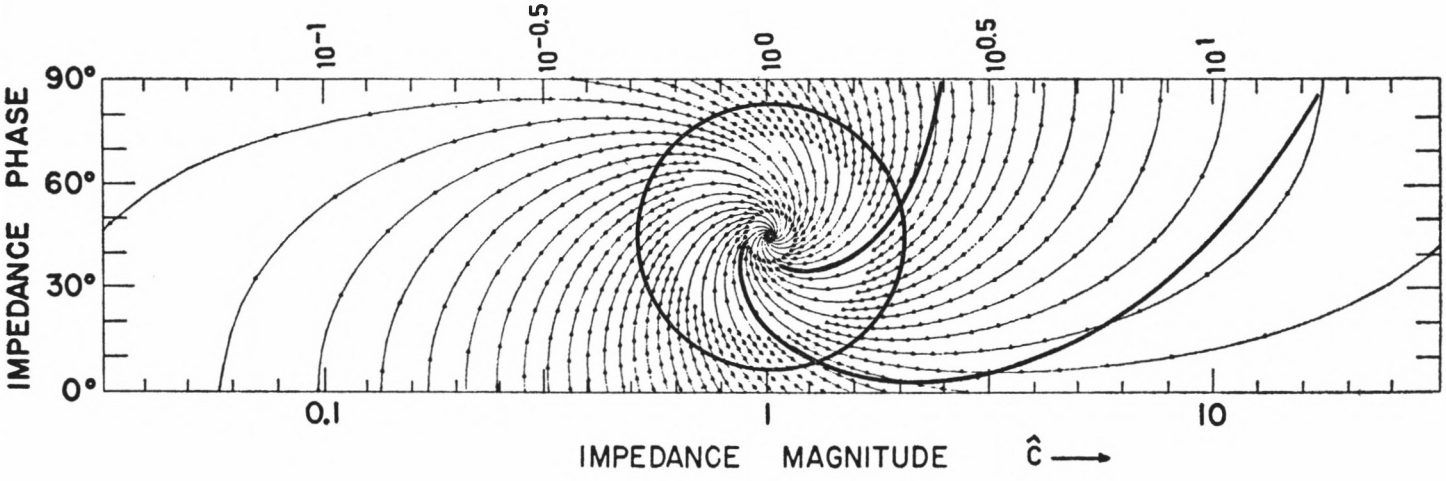


Abb. 3.3: Spiralen-Schar (Originalzeichnung von ECKHARDT) für Lösungswege von $L_{n+1} \cdot g_n(-2\hat{d})$: Längs einer Spirale ändert sich $\hat{d}$. Für jedes L_{n+1} ergibt sich eine neue Spirale. Die Abszisse (original mit „impedance magnitude" bezeichnet, hier: Betrag der Übertragungsfunktion) ist irreführend unterteilt. Die eingetragene dekadische Unterteilung bezieht sich auf den Exponenten $\log|\hat{C}|$. Der abzulesende Wert ist aber der Wert für $|\hat{C}|$:

$$|\hat{C}| = 10^{\log|\hat{C}|}$$

Die Ordinate gibt die absolute Phasendifferenz zwischen elektrischem und magnetischem Feld an. Die Spiralen sind unterteilt in Wegstrecken durch die kleinen Punkte, und zwar in der Umgebung des Mittelpunktes in $\delta\hat{d} = 0.2$, außerhalb in $\delta\hat{d} = 0.05$. Dick eingetragen sind zwei logarithmische Spiralen, die als Näherungslösung in den Gleichungen (3.14–3.18) diskutiert werden: Der dick eingetragene Kreis grenzt das Gebiet um die für den Halbraum geltende Übertragungsfunktion ein, in dem diese Näherung gültig ist.

gegebenes geschichtetes Modell die Übertragungsfunktion zeichnerisch für jede Tiefe, also auch für die Erdoberfläche bestimmen. Das wird an einigen Beispielen im folgenden demonstriert. Hierzu sei an die Gleichung (3.27) erinnert und den in Abb. (3.2) skizzierten Lösungsweg:

a) Bekannt sei die Funktion L_{n+1} am Ort A. Betrag und Phase dieser Funktion definieren einen bestimmten Ort in der Spiralenschar.

b) Beim Übergang zur nächsthöheren Schicht, also von A nach B, wird zu dieser Funktion ein reeller Wert $1/2 \ln(\rho_{n+1}/\rho_n)$ addiert. Diese Addition ist in der Spiralenschar ein Sprung nach rechts bzw. links parallel zur Abszisse (da die Phase sich nicht ändert) um den Wert $1/2 \ln(\rho_{n+1}/\rho_n)$. Hiermit ist

$$L_{n+1} + 1/2 \ln(\rho_{n+1}/\rho_n)$$

bestimmt.

c) Wandert man nun innerhalb der Schicht von B nach C, so wird die Übertragungsfunktion von der Stelle B mit der Funktion $g_n(\hat{d})$ multipliziert. Da die Funktion $g_n(\hat{d})$ eine Spirale ist, wandert die Übertragungsfunktion vom Sprung-Endpunkt von b) in Richtung des Mittelpunktes. Die Wegstrecke auf der Spirale ist dabei gleich der auf die Eindringtiefe normierten vertikalen Wegstrecke $(-2\hat{d})$.

Diese drei Schritte a), b) und c) wiederholt man für jede Schicht. Man beginnt in der untersten Schicht, die immer ein homogener Halbraum sein soll, da man dann die unterste Übertragungsfunktion kennt ($\ln |\hat{C}| = 0$; $\hat{\varphi} = 0$). Hat man schließlich die Erdoberfläche erreicht, so liest man die Koordinaten für die normierte Übertragungsfunktion ab und berechnet nach (3.29) und (3.30) den scheinbaren spezifischen Widerstand und die Phasendifferenz zwischen E und B. Abweichend von den Gleichungen sind in den Originalzeichnungen von Eckhardt die dekadischen Logarithmen und die absolute (nicht normierte) Phasendifferenz angegeben. Die Spiralen sind bereits in kleine Wegabschnitte unterteilt, wobei diese Wegabschnitte in der Nähe des Nullpunktes (in der Mitte der Spiralen) jeweils $\delta\hat{d} = 0.2$, dagegen außerhalb $\delta\hat{d} = 0.05$ sind.

In der Abbildung (3.5) wird ein 2-Schichtenfall für mehrere Perioden graphisch gelöst. In der Abbildung (3.6) ein 4-Schichten-Modell für 2 Perioden graphisch gelöst.

Die Genauigkeit der Lösungen mit diesem graphischen Verfahren ist nicht allzu groß. Das liegt hier auch an einer nicht verzerrungsfreien Reproduktion der Spiralenschar.

Es sei nun folgendes Modell (Abb. 3.4) gegeben: Eine 15 km mächtige Schicht mit 1000 Ωm über einem Halbraum mit 50 Ωm.

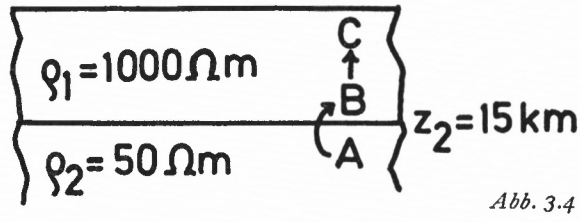


Abb. 3.4

Man beginnt an der Oberseite des Halbraums (Punkt A) (vergleiche Abb. 3.5), wo die normierte Übertragungsfunktion $\log(\hat{C}) = 0$ ist (= Mittelpunkt der Spiralen). Von der Oberseite dieses Halbraums A zur Unterseite der darüberliegenden Schicht B existiert ein von der Phase und der Frequenz unabhängiger Sprung:

$$1/2 \log \frac{\rho_N}{\rho_{N-1}} = 1/2 \log \frac{50}{1000} = -0.65$$

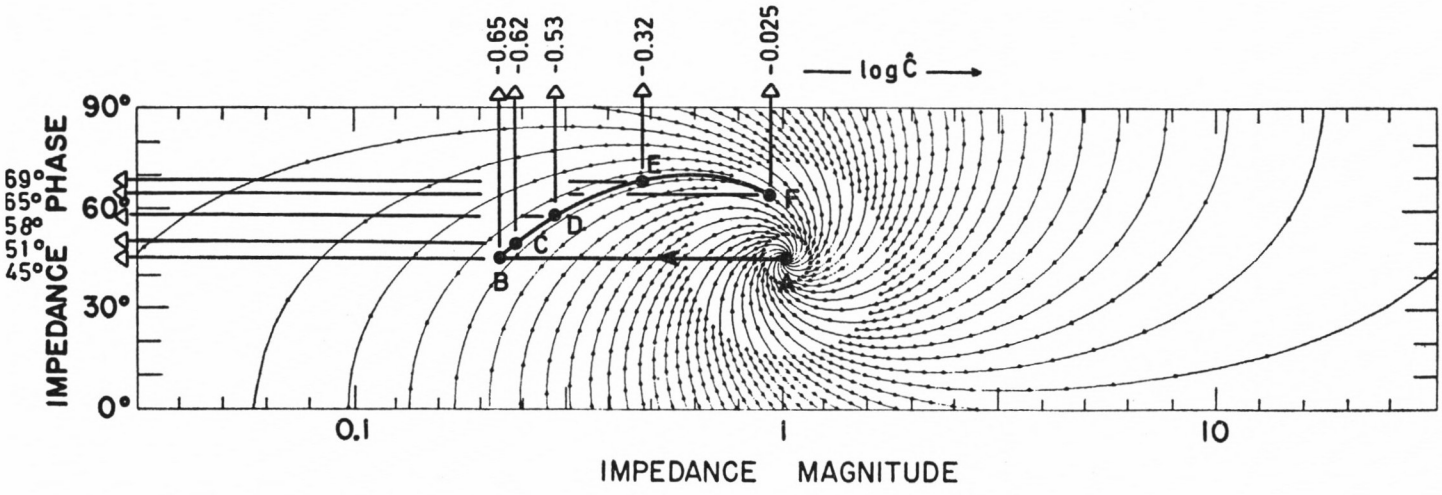


Abb. 3.5: Konstruktion des Lösungswegs für das Modell in Abb. 3.4.

Um nun von der Unterseite der Schicht zur Oberseite zu kommen, muß man entlang der eingezeichneten Spirale um den Betrag $\hat{d} = d/p = 15/p_{km}$ mit $p_{km} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{10 \cdot 50 \cdot T}$ zum Mittelpunkt der Spirale zurückwandern. Dieser Betrag ist von der Periode abhängig:

T = 1000 sec	$\hat{d} = 0.03$	0.6	Einheiten (Punkt C)
100 sec	$\hat{d} = 0.095$	2	Einheiten (Punkt D)
10 sec	$\hat{d} = 0.3$	6	Einheiten (Punkt E)
1 sec	$\hat{d} = 0.95$	19	Einheiten (Punkt F)

Die Koordinaten des Punktes B geben Betrag und Phase für die normierte Übertragungsfunktion L an der Erdoberfläche für eine unendlich große Periode an:

L — 0.65; hieraus berechnet man $|\hat{C}| = 10^{-0.65} = 0.224$

$\rho_s = |C|^2 \cdot \rho_1 = 0.050 * 1000 = 50$ Ohm · m

$\Delta\varphi = 45°$

Auf diese Weise berechnet man den scheinbaren spezifischen Widerstand und die Phasen-Differenz für alle Perioden:

	T	L	ρ_s	(exakt)	$\Delta\varphi$	(exakt)
B	∞	— 0.65	50 Ωm	50 Ωm	45°	45°
C	1000	— 0.62	58	64	51	51
D	100	— 0.53	87	106	58	58
E	10	— 0.32	230	320	69	69
F	1	— 0.025	890	1125	65	58

3.12 *Bestimmung des Modells für eine vorgegebene Kurve des scheinbaren spezifischen Widerstandes* (Schmucker)

Die durch (3.9) definierte Übertragungsfunktion $L_n(\omega, z)$ wird ersetzt durch die neue Definition:

$$\Psi_n(\omega, \hat{z}) = 2 \cdot \ln \hat{C}_n(\omega, \hat{z}) = 2\, L_n(\omega, \hat{z}) \tag{3.34}$$

Durch diese Definition fällt in (3.25) das Wurzelzeichen weg (vergl. 3.15)

$$\Psi_n(\omega, \hat{z}_{n+1}) = \Psi_{n+1}(\omega, \hat{z}_{n+1}) + \ln(\rho_{n+1}/\rho_n) \tag{3.35}$$

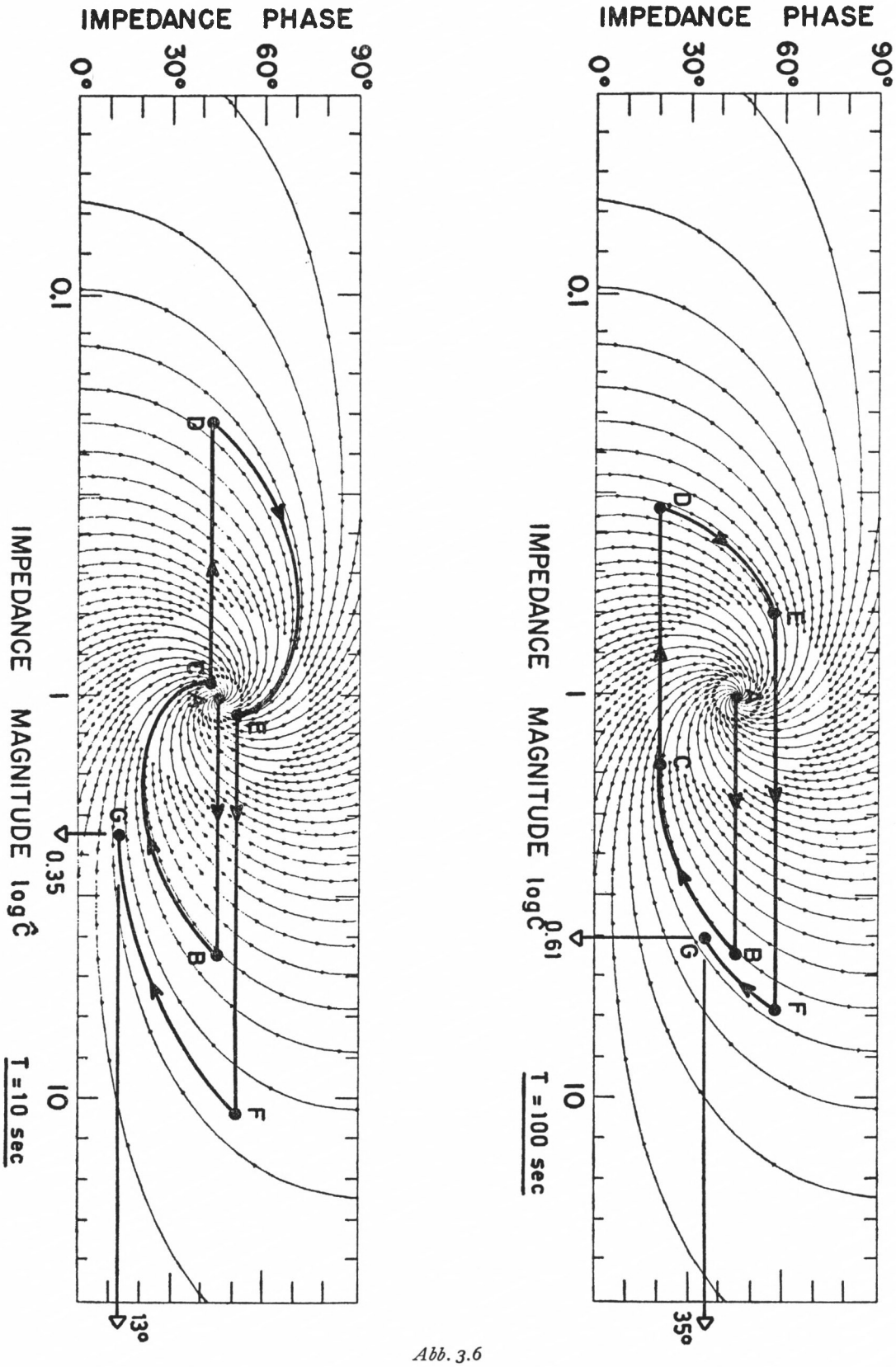

IMPEDANCE PHASE
90°
60°
30°
0°
0.1
1
10
IMPEDANCE MAGNITUDE log Ĉ
T = 10 sec
0.35
13°
B
C
D
E
F
G
IMPEDANCE PHASE
90°
60°
30°
0°
0.1
1
10
IMPEDANCE MAGNITUDE log Ĉ
T = 100 sec
0.61
35°
B
C
D
E
F
G

Abb. 3.6

Abb. 3.6

	Erdoberfläche	T = 100 sec	T = 10 sec
	10 Ωm/ 2 km ↑ G F	$p_1 = 16$ km; $\hat{d}_1 = \frac{2}{16} = 0.125 \triangleq 2.5$ E	$p_1 = 5$ km; $\hat{d}_1 = \frac{2}{5} = 0.4 \triangleq 8$ E
$\frac{1}{2}\log\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.00$			
	1000 Ωm/80 km ↑ E D	$p_2 = 160$ km; $\hat{d}_2 = \frac{80}{160} = 0.5 \triangleq 10$ E	$p_2 = 51$ km; $\hat{d}_2 = \frac{80}{51} = 1.6 \triangleq 32$ E
$\frac{1}{2}\log\frac{\rho_3}{\rho_2} = -0.65$			
	50 Ωm/20 km ↑ C B	$p_3 = 35$ km; $\hat{d}_3 = \frac{20}{35} = 0.57 \triangleq 11$ E	$p_3 = 11$ km; $\hat{d}_3 = \frac{20}{11} = 1.8 \triangleq 35$ E
$\frac{1}{2}\log\frac{\rho_4}{\rho_3} = 0.65$			
	1000 Ωm/∞ km A		

A → B Sprung von A nach B um den Betrag +0.65
B → C Wandern entlang der Spirale zum Mittelpunkt um 11 (35) Einheiten
C → D Sprung um den Betrag —0.65
D → E Wandern entlang der Spirale um 10 (32) Einheiten
E → F Sprung um den Betrag 1
F → G Wandern entlang der Spirale um 2.5 (8) Einheiten
G : Unterseite der Erdoberfläche, dort ist
100 s : $L = 0.61$ $\hat{C} = 10^{0.61} = 4$ $\rho_s = \hat{C}^2 \cdot \rho_1 = 16 \cdot 10 = \underline{160\ \Omega m/35°}$
10 s : $L = 0.35$ $\hat{C} = 10^{0.35} = 2.24$ $\rho_s = 5.10 = \underline{50\ \Omega m/13°}$

Die Gleichung (3.26) bleibt gleich:

$$\Psi_n(\omega, \hat{z}_n) = g_n \cdot \Psi_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) \approx \exp(-2\hat{d}_n) \cdot \Psi_n(\omega, \hat{z}_n + \hat{d}_n) \tag{3.36}$$

Insgesamt gilt also für den Übergang von der Oberseite der (n + 1)-ten Schicht zur Oberseite der n-ten Schicht

$$\Psi_n(\omega, \hat{z}_n) = g_n(\Psi_{n+1}(\omega, \hat{z}_{n+1}) + \ln(\rho_{n+1}/\rho_n)) \tag{3.37}$$

Im folgenden werden stets nur Übertragungsfunktionen an den Oberseiten der einzelnen Schichten diskutiert, deshalb sei die Gleichung (3.37) abgekürzt geschrieben:

$$\Psi_n = g_n \cdot \left(\Psi_{n+1} + \ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right) \tag{3.38}$$

Für ein N-Schichten-Modell ergibt sich mit dieser Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
&\text{N (Halbraum)} && \Psi_N = 0 \\
&N-1 && : \Psi_{N-1} = g_{N-1} \cdot (0 + \ln(\rho_N/\rho_{N-1})) \\
&N-2 && : \Psi_{N-2} = g_{N-2} \cdot (\Psi_{N-1} + \ln(\rho_{N-1}/\rho_{N-2})) \\
& && \quad = g_{N-2} \cdot g_{N-1} \cdot \ln(\rho_N/\rho_{N-1}) + g_{N-2} \cdot \ln(\rho_{N-1}/\rho_{N-2}) \\
&N-3 && : \Psi_{N-3} = g_{N-3} \cdot (\Psi_{N-2} + \ln(\rho_{N-2}/\rho_{N-3})) = \\
& && \quad = g_{N-3} \cdot g_{N-2}\, g_{N-1} \ln(\rho_N/\rho_{N-1}) + g_{N-3} g_{N-2} \cdot \ln(\rho_{N-1}/\rho_{N-2}) \\
& && \quad + g_{N-3} \cdot \ln(\rho_{N-2}/\rho_{N-3})
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Es sei nun konkret N = 4 angenommen (3 Schichten über einem Halbraum):

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot (\ln\rho_4 - \ln\rho_3) + g_1 \cdot g_2 \cdot (\ln\rho_3 - \ln\rho_2) + g_1 \cdot (\ln\rho_2 - \ln\rho_1) \\
&= -g_1 \cdot \ln\rho_1 + g_1(1 - g_2) \cdot \ln\rho_2 + g_1 \cdot g_2 \cdot (1 - g_3) \cdot \ln\rho_3 + g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \ln\rho_4
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Andererseits ergibt sich aufgrund der Definition (3.34):

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= 2 \cdot L_1 = (\text{mit (3.9) und (3.7)}) \\
&= \ln((\mu_0\omega/\rho_1)(E_x/\omega B_y)^2 + i(\pi/2 + 2\Delta\varphi) = \ln\rho_s - \ln\rho_1 + i(\pi/2 + 2\Delta\varphi)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Ordnet man nun die Größen so, daß die Meßwerte

$$\ln\rho_s \text{ und } i(\pi/2 + 2\Delta\varphi)$$

auf der linken Seite, alle übrigen Größen auf der rechten Seite stehen, so ergibt sich

$$\ln\rho_s + i(\pi/2 + 2\,\Delta\varphi) = (1 - g_1)\cdot\ln\rho_1 + (1 - g_2)\cdot g_1\cdot\ln\rho_2 + (1 - g_3)\cdot g_1\cdot g_2\cdot\ln\rho_3 + g_1\cdot g_2\cdot g_3\cdot\ln\rho_4 \tag{3.42}$$

Führt man zur Abkürzung ein:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - g_1 \\ \gamma_2 &= (1 - g_2)\cdot g_1 \\ \gamma_3 &= (1 - g_3)\cdot g_1\cdot g_2 \\ \gamma_n &= (1 - g_n)\cdot g_1\cdot g_2\cdot\cdot g_{n-1} \\ \gamma_N &= g_1 g_2 \cdots g_{N-1} \end{aligned} \tag{3.43}$$

so läßt sich (3.42) auf den N-Schichtenfall erweitern:

$$\ln\rho_s + i\cdot(\pi/2 + 2\,\Delta\varphi) = \gamma_1\cdot\ln\rho_1 + \gamma_2\cdot\ln\rho_2 + \ldots + \gamma_N\cdot\ln\rho_N \tag{3.44}$$

Eine Messung ergibt im allgemeinen eine $\rho_s(T)$ und $\Delta\varphi(T)$ Kurve. Liest man an T_M Stellen die diskreten Werte $\rho_s(T_m)$ ab, so kann man also die obige Gleichung (3.44) M mal anschreiben. Man erhält dadurch ein lineares Gleichungssystem:

Mit den Abkürzungen

$$r_m = \ln\rho_s(T_m) + i\,(\pi/2 + 2\,\Delta\varphi) \qquad m = 1 \ldots M \tag{3.45}$$

und

$$x_n = \ln\rho_n \quad n = 1 \ldots N \tag{3.46}$$

lautet dieses Gleichungssystem, abgekürzt in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ . \\ r_m \\ . \\ r_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(T_1) & \gamma_2(T_1) & \gamma_3(T_1) & \ldots & \gamma_N(T_1) \\ \gamma_1(T_2) & \gamma_2(T_2) & \gamma_3(T_2) & \ldots & \gamma_N(T_2) \\ \gamma_1(T_3) & \gamma_2(T_3) & \gamma_3(T_3) & \ldots & \gamma_N(T_3) \\ .. & .. & .. & & .. \\ \gamma_1(T_m) & \gamma_2(T_m) & \gamma_3(T_m) & \ldots & \gamma_N(T_m) \\ .. & .. & .. & & .. \\ \gamma_1(T_M) & \gamma_2(T_M) & \gamma_3(T_M) & \ldots & \gamma_N(T_M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ x_n \\ .. \\ x_M \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

Da aus der Diskussion weiter unten folgen wird, daß alle γ_{nm} berechnet werden können und deshalb bekannt sind, sind für die Berechnung der N unbekannten x_n insgesamt M Gleichungen vorhanden. Dieses Gleichungssystem läßt sich also dann lösen, wenn $M \geqslant N$ ist, d. h. mehr Meßwerte als Unbekannte existieren. Hierzu wendet man die Methode der Kleinsten Quadrate an.

Wie kann man nun die γ_{nm} berechnen?

Man stelle sich vor, daß der spezifische Widerstand eine kontinuierliche Funktion der Tiefe sei, also

$$\rho = \rho(z) \tag{3.48}$$

Um nun den bisher abgeleiteten Formalismus verwenden zu können, muß man diese kontinuierliche Funktion diskretisieren, also in mehrere Schichten mit jeweils konstantem spezifischen Widerstand zerlegen.

$$\rho_i = \rho_i(z_i) \quad i = 1 \ldots N \tag{3.49}$$

Hierbei könnte man alle Schichten gleichmächtig machen:

$$d_i = z_{i+1} - z_i = \text{konstant} \tag{3.50}$$

Diese Aufteilung in Schichten gleicher Mächtigkeit ist aber der Änderung der Feldamplituden mit der Tiefe nicht angepaßt, da in den Schichten mit höherer Leitfähigkeit die Felder stärker gedämpft werden als in den Schichten mit niedriger Leitfähigkeit. Eine bessere, dem Induktionsvorgang angepaßtere Aufteilung erreicht man, wenn man die Mächtigkeit der einzelnen Schichten größer macht, wenn der spezifische Widerstand größer ist, bzw. kleiner macht, wenn der spezifische Widerstand kleiner ist. Da das induktive Verhalten zweier Schichten ähnlich ist, wenn der Induktionsparameter beider Schichten gleich ist, also

$$d_l \sqrt{\mu_0 \sigma_l \omega} = d_{l+1} \sqrt{\mu_0 \sigma_{l+1} \omega} \tag{3.51}$$

erreicht man die richtige Aufteilung, wenn für alle Schichten

$$\hat{d} = \frac{d_n}{\sqrt{\rho_n}} \qquad n = 1 \,..\, N, \ \omega = \text{konstant, ist.} \tag{3.52}$$

Es sei also die kontinuierliche Funktion $\rho(z)$ in mehrere Schichten aufgeteilt, für die $\hat{d}$ = konstant ist. Hiermit kann man nun die γ_{nm} des linearen Gleichungssystems berechnen, wenn auch zunächst nur in einer ersten Näherung:

Man benutzt die Näherung in (3.36) für die g_{nm}: $(\hat{d}_m = \hat{d}\sqrt{i\omega_m \mu_0})$

$$\gamma_{1m} = 1 - \exp(-2\,\hat{d}_m)$$

$$\gamma_{2m} = (1 - \exp(-2\,\hat{d}_m))\exp(-2\,\hat{d}_m)$$

also

$$\gamma_{nm} = (1 - \exp(-2\,\hat{d}_m))\exp(-2(n-1)\,\hat{d}_m) \tag{3.53}$$

$$\gamma_{Nm} = \exp(-2(N-1)\,\hat{d}_m)$$

$n = 1 \ldots N$ Schichten; $m = 1 \ldots M$ Perioden.

Setzt man diese Werte in das zu lösende Gleichungssystem ein, so erhält man für die unbekannten x_n eine erste, genäherte Lösung. Man hat also jetzt ein erstes Modell für die spezifischen Widerstände und Mächtigkeiten:

$$\rho_n \text{ und } d_n = \hat{d} \cdot \sqrt{\rho_n}$$

Für dieses Modell kann man nun die exakten g_{nm} nach (3.36) berechnen:

$$g_n = \frac{\Psi_n(T_m, \hat{z}_n)}{\Psi_{n+1}(T_m, \hat{z}_{n+1})} = \frac{\ln \hat{C}_n(T_m, \hat{z}_n)}{\ln \hat{C}_{n+1}(T_m, \hat{z}_{n+1})}$$

Berechnet man nun nach (3.43) die γ_{nm} und löst das Gleichungssystem erneut, so ergeben sich neue Werte für die unbekannten ρ_n. Für dieses Modell kann man nun wiederum die γ_{nm} berechnen, das Gleichungssystem wiederum lösen. Nach mehreren Iterationen wird sich das Modell dann nur noch wenig ändern.

Die Frage ist nun, welches $\hat{d}$ wählt man? Man müßte genau jenes $\hat{d}$ wählen, das dem Induktionsparameter der einzelnen Schicht optimal angepaßt ist. Ein sicheres Kriterium hierfür ist, ob die für das bisher beliebig gewählte $\hat{d}$ berechnete $\rho_s(T_m)$-Kurve mit der gemessenen genau übereinstimmt. Um diese Anpassung zu prüfen, berechnet man den mittleren quadratischen Fehler zwischen der gemessenen $\rho_s(T_m)$-Kurve mit der für das berechnete Modell abgeleiteten $\rho_s(T_m)$-Kurve.

Danach wählt man – systematisch – ein anderes $\hat{d}$, und wiederholt die gesamte Prozedur, wie sie soeben beschrieben wurde. Auch hiernach berechnet man den mittleren quadrati-

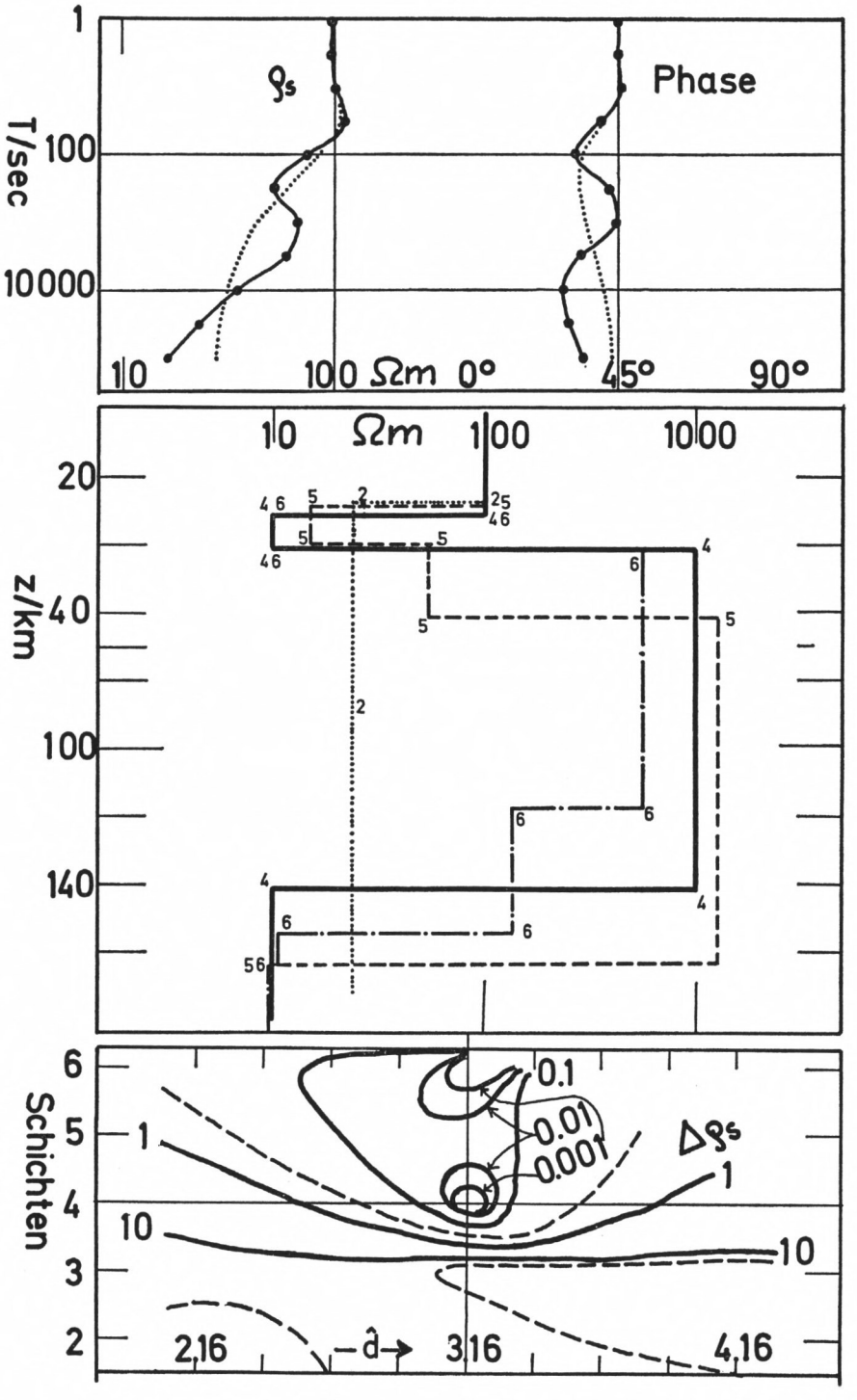

T/sec
1
100
10000
ρs
Phase
10
100 Ωm 0°
45°
90°
z/km
20
40
100
140
10
Ωm
100
1000
Schichten
6
5
4
3
2
0.1
0.01
0.001
Δρs
1
10
2,16
d
3,16
4,16

Abb. 3.7

Abb. 3.7: Kontrolle des Inversionsverfahrens an einem Beispiel.

a. Es ist ein Modell vorgegeben, das aus vier Schichten besteht, wobei die Modellparameter so gewählt sind, daß

$$\hat{d} = d_n/\sqrt{\rho_n} = \text{konstant}$$

$$\left.\begin{array}{ll} d_1 = 31.6\ \text{km} & \rho_1 = 100\ \text{Ohm}\cdot\text{m} \\ d_2 = 10\ \text{km} & \rho_2 = 10\ \text{Ohm}\cdot\text{m} \\ d_3 = 100\ \text{km} & \rho_3 = 1000\ \text{Ohm}\cdot\text{m} \\ d_4 = \text{Halbraum} & \rho_4 = 10\ \text{Ohm}\cdot\text{m} \end{array}\right\} \hat{d} = 3.16$$

Für dieses Modell wurden die $\rho_s(T)$ und $\delta\varphi(T)$ Kurven berechnet und im oberen Drittel der Abb. 3.7 eingetragen.

b. Aus diesen beiden Meßkurven soll nun zur Kontrolle des Inversions-Verfahrens das Modell berechnet werden. Das Modell soll jetzt unbekannt sein, insbesondere also die Anzahl der Schichten. Deshalb beginnt man systematisch mit dem 2-Schichten Fall, variiert $\hat{d}$ von 2.16 bis 4.16 km/$\sqrt{\Omega m}$ in Schritten von 0.25 und berechnet für jedes Modell den Interpretationsfehler. Dann folgen der 3-Schichtenfall, der 4-Schichtenfall usw. Im unteren Drittel der Abb. 3.7 sind die Linien für den gleichen Interpretationsfehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Schichten und von $\hat{d}$ eingetragen. Dieser Darstellung entnimmt man in diesem Fall sofort, daß das beste Modell jenes ist, das 4 Schichten hat und für das $\hat{d} = 3.16$ km ist. Es ist das Ausgangsmodell.

c. Der Abbildung des Interpretationsfehlers entnimmt man aber auch, daß der 5- und 6-Schichtenfall für $\hat{d} = 3.16$ gut die beiden Meßkurven erklärt. Diese Modelle sind im mittleren Teil der Abb. 3.7 angegeben. Die Zahlen an den Kanten geben an, um welchen N-Schichtenfall es sich handelt. Für N = 2 ergibt sich ein Modell, das die Mächtigkeit und den spezifischen Widerstand der 1. Schicht ziemlich genau angibt, dagegen den gesamten tieferen Untergrund durch eine Schicht mit einem mittleren spezifischen Widerstand ersetzt (Im oberen Teil der Abbildung ist die zu diesem Modell gehörige $\rho_s(T)$ und $\delta\varphi(T)$-Kurven eingetragen, die die Meßkurven recht gut mitteln).

Am 6-Schichtenfall erkennt man (wieder im mittleren Teil der Abbildung), daß das Inversionsverfahren eine mehr kontinuierliche Änderung des spezifischen Widerstands mit der Tiefe liefert, aber dabei doch dem ursprünglichen Modell noch recht ähnlich bleibt.

schen Fehler. Hat man den mittleren quadratischen Fehler für mehrere Modelle mit jeweils verschiedenem $\hat{d}$ berechnet, so trägt man den Fehler als Funktion von $\hat{d}$ auf: Für das $\hat{d}$, für das sich der kleinste Fehler ergab, ist die Anpassung der gemessenen Kurve an das Modell am besten. Eine andere Frage ist, in wieviel Schichten man eine Widerstandsverteilung auflösen soll. Auch auf diese Frage antwortet man mit Probieren: Man beginnt mit 2 Schichten, und bestimmt die Kurve für den Anpassungsfehler, dann nimmt man 3 Schichten an, usw. Man wird dabei beobachten, daß der Anpassungsfehler ab einer bestimmten Anzahl von Schichten viel kleiner wird. Hierzu siehe das Beispiel in Abb. (3.7).

Dieses Inversions-Verfahren ist – im Prinzip – für jede nur von z abhängige Leitfähigkeits-Verteilung anwendbar. Man kann nämlich immer ein für alle (fiktiven und realen) Schichten gleiches $\hat{d}$ finden, wenn man nur die Anzahl der Schichten groß genug vorgibt. Andererseits kann man aber die Anzahl der Schichten (und damit der zu bestimmenden Parameter) klein halten, wenn man für jede Schicht ein anderes $\hat{d}_n$ wählt (Larsen, 1975). Natürlich kennt man diese $\hat{d}$ zunächst nicht, man muß sie eventuell durch Probieren finden. Es lohnt sich aber, die $\hat{d}_n$ zu suchen, da die Auflösung des Gleichungssystems (3.47) nach der Methode der kleinsten Quadrate besser funktioniert, wenn die Anzahl der zu bestimmenden Parameter viel kleiner ist als die Anzahl der mit Meßfehlern behafteten Meßdaten. Ein Beispiel ist in Abb. 3.8 gegeben.

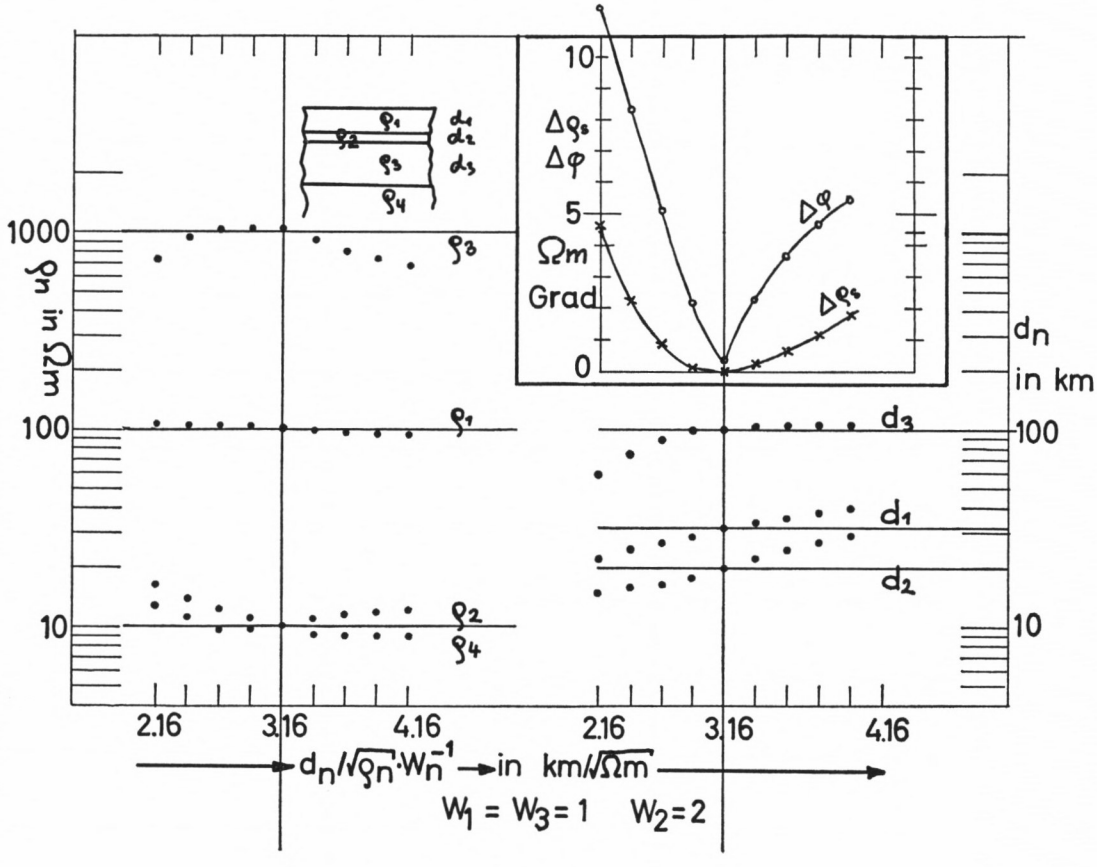


Abb. 3.8: Variation der Modell-Parameter bei sich änderndem $\hat{d}$. Die richtigen Werte für die spezifischen Widerstände der einzelnen Schichten und die Mächtigkeiten sind durch dicke, horizontale Linien markiert, die die Ordinaten in ihren jeweiligen Werten schneiden. Die Punkte geben jeweils den Wert an, den der Parameter für ein auf der Abszisse angegebenes $\hat{d}$ hat. Man sieht, daß alle Parameter bei $\hat{d} = 3.16$ km ihre richtigen Werte haben. Offensichtlich ändern die Modellparameter stetig ihre Werte, wenn $\hat{d}$ geändert wird, nicht sprunghaft.

Außerdem soll mit dieser Abbildung demonstriert werden, daß die Inversionsmethode auch bei solchen Schichtmodellen anwendbar ist, bei denen nicht für jede Schicht $\hat{d}$ konstant ist (Bewichtungs-Methode von Larsen 1975). Das Modell war folgendermaßen „verstimmt":

$d_1 = 31.6$ km	$\rho_1 = 100\ \Omega$m	$\hat{d} = 3.16$ km/$\sqrt{\text{Ohm}\cdot\text{m}}$
$d_2 = 20$ km	$\rho_2 = 10\ \Omega$m	$\hat{d} = 6.32$ km/$\sqrt{\text{Ohm}\cdot\text{m}}$
$d_3 = 100$ km	$\rho_2 = 1000\ \Omega$m	$\hat{d} = 3.16$ km/$\sqrt{\text{Ohm}\cdot\text{m}}$
$d_4 = $ HR	$\rho_4 = 10\ \Omega$m	

In einem ersten Rechengang wurde jeder Schicht das Gewicht 1 gegeben, also so, als ob $\hat{d} = 3.16 =$ konstant für alle Schichten sei. Es ergaben sich für den Anpassungsfehler der Phasen und für den Anpassungsfehler für den scheinbaren spezifischen Widerstand Minima bei verschiedenen $\hat{d}$: Für $\delta\rho_s$ ist das Minimum bei $\hat{d} = 3.5$ km/$\sqrt{\text{Ohm}\cdot\text{m}}$, für $\delta\varphi$ ist das Minimum bei $\hat{d} = 3.7$ km/$\sqrt{\text{Ohm}\cdot\text{m}}$.

Im 2. Rechengang wurde das Gewicht für die 2. Schicht 2 gesetzt, und es ergab sich das gemeinsame Minimum (siehe Abb. rechts oben).

3.2 *Das induzierende Magnetfeld ist innerhalb des Induktionsraumes inhomogen*

Während man in mittleren geographischen Breiten mit räumlich homogenen, induzierenden Magnetfeldern rechnen kann, können die induzierenden Magnetfelder am magnetischen Äquator und in der Polarlichtzone räumlich inhomogen sein. Sie werden erzeugt durch elektrische Ströme in der Ionosphäre, die längs des magnetischen Äquators und in der Polarlichtzone fließen und auf eine Breite von wenigen 100 km in NS-Richtung beschränkt sind.

Ohne hier näher auf die Physik dieser beiden Erscheinungen, des äquatorialen und des polaren Elektrojets (abgekürzt: EEJ und PEJ) einzugehen (siehe UNTIEDT, 1968; RICHMOND, 1973), muß diskutiert werden, welche Morphologie die induzierenden Magnetfelder am Boden haben, bzw. welche Stromsysteme in der Ionosphäre zu ihnen korrespondieren.

Die Beobachtung des Magnetfeldes entlang von NS-Profilen zeigt, daß das Magnetfeld in der Nähe des magnetischen Äquators durch einen Term beschrieben werden kann, der die räumliche Variation des normalen S_q-Systems beschreibt und durch einen Term der die räumlich Variation des EEJ beschreibt:

$$B_y(y) = B_y(y)_{Sq} + B_y(y)_{EEJ} \tag{3.54}$$

Die Periode für diesen normalen S_q-EEJ-Gang ist ein Tag. Für das Verhältnis der Maximal-Amplituden der beiden Anteile kann man 1 : 1 annehmen, obwohl beide Anteile miteinander nicht streng korrelierbar sind. Für Variationen mit kürzerer Periode ist das Verhältnis der Maximal-Amplituden des EEJ-Anteils zum homogenen Anteil möglicherweise größer (4 : 1) (FORBUSH und CASAVERDE, 1961).

Während man sich den homogenen Anteil des Magnetfeldes durch Flächenströme erzeugt vorstellen kann, ist die geometrische Verteilung der ionosphärischen Ströme, die den EEJ-Anteil erzeugen, nicht genau bekannt. Die einfachste Möglichkeit ist die, einen Linienstrom in einer Höhe $-z_L$ anzunehmen, der an der Erdoberfläche ein Magnetfeld erzeugt, das folgende Geometrie hat

$$B_{EEJ}(y) = (I_0/2\pi)\,\frac{z_L}{y^2 + z_L^2} \tag{3.55}$$

Dieser Linienstrom muß aber nicht tatsächlich existieren, vielmehr kann er durch eine kontinuierliche Stromverteilung in einer realistischen Höhe für ionosphärische Ströme in etwa 100 km Höhe ersetzt werden, die folgende Geometrie hat (KERTZ, 1954)

$$j_{EEJ}(y) = I_0\,\frac{z_0 - z_L}{y^2 + (z_0 - z_L)^2} \tag{3.56}$$

Diese Stromverteilung in der Höhe z_0 erzeugt das gleiche Magnetfeld wie der Linienstrom in der Höhe z_L.

Für noch genauere Anpassung an das tatsächlich beobachtbare Magnetfeld des Elektrojets genügt allerdings die Beschreibung durch einen Linienstrom noch nicht. PORATH et al. (1973) gelingt eine bessere Anpassung durch 5 in gleiche Richtung fließende Linienströme (verschiedener Stärke und in verschiedenen Höhen), HESSE (1977) gelingt eine optimale Anpassung durch 3 Linienströme, wobei der mittlere Strom nach Osten, die zwei Seitenströme nach Westen fließen.

Wenn man auch durch Kombination mehrerer Linienströme eine optimale Anpassung an das beobachtete Magnetfeld erreicht, so bedeutet dies allerdings noch nicht, daß diese Beschreibung physikalisch sinnvoll ist, d. h. diesen Linien- oder Flächenströmen ein physikalisches Modell zugrundegelegt werden kann.

UNTIEDT (1968), RICHMOND (1973) schließen vielmehr auf eine gauss-verteilte Flächenstromdichte in unmittelbarer Nähe des magnetischen Äquators

$$j_{EEJ}(y) = I_0 \exp(-y^2/y_0^2) \tag{3.57}$$

Für die Berechnung der induzierten elektrischen und magnetischen Felder ist es aber nicht wichtig, ob das für die Verteilung der ionosphärischen Ströme zugrunde gelegte Modell nur formal mathematisch oder auch physikalisch richtig ist. Deshalb soll hier die Beschreibung durch Linienströme bevorzugt werden. Da außerdem die Rechenmethode für einen oder mehrere Linienströme die gleiche ist, wird im folgenden nur ein Linienstrom vorausgesetzt werden.

Die hier angegebene Methode basiert auf der Fouriertransformation aller von y abhängigen Feldgrößen in den Wellenzahlen-Bereich k_y, z. B. für das elektrische Feld

$$E_x(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(y) \cdot \exp(-y \cdot k_y) \cdot dy \tag{3.58}$$

Der Vorteil dieser Methode beruht darauf, daß die Maxwell-Gleichungen einfache algebraische Gleichungen werden. Aus ihnen kann man die Diffusionsgleichung im k_y-Bereich ableiten:

$$\frac{\partial^2 E_x(k_y, z, \omega)}{\partial z^2} = K_n^2 \cdot E_x(k_y, z, \omega) \tag{3.59}$$

wobei

$$K_n = \sqrt{\mu_0 i \omega \sigma_n + k_y^2}$$

ist, und n die Nummer der Schicht angibt, die die Leitfähigkeit σ_n hat. Die in den Gleichungen angegebene Tiefe z ist dann nur für die (gesamte) Schicht n gültig.

Für die n-te Schicht kann (3.59) gelöst werden durch den Ansatz:

$$E_{x,n}(\omega, z) = A_n \cdot e^{-zK_n} + B_n \cdot e^{+zK_n} \tag{3.60}$$

Mit Hilfe einer Maxwell-Gleichung kann der korrespondierende Ansatz für das Magnetfeld berechnet werden:

$$\begin{aligned} B_{y,n}(\omega, z) &= + \frac{\partial E_x}{\partial z} \cdot \frac{1}{-i\omega} = -(-A_n \cdot K_n \cdot e^{-zK_n} + B_n \cdot K_n \cdot e^{+zK_n}) \\ &= K_n \cdot (A_n e^{-zK_n} - B e^{zK_n}) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Oberhalb der leitenden Erde ist $n = 0$, $\sigma = 0$. Für $z = 0$ folgt

$$B_{y,0}(\omega, 0) = k_y A_0 - k_y B_0 = B^i + B^e \tag{3.62}$$

B^i = induziertes (*i*nternes) Magnetfeld

B^e = induzierendes (*e*xternes) Magnetfeld

Gibt man sich nun ein induzierendes Magnetfeld an der Erdoberfläche vor, so kann man das induzierte Magnetfeld ausrechnen:

Für die Übertragungsfunktion an der Erdoberfläche folgt aus (3.60, 3.61, 3.62):

$$C(k_y, z = 0, \omega) = \frac{E_x(k_y, 0, \omega)}{i\omega B_y(k_y, 0, \omega)} = \frac{1}{k_y} \frac{B^e - B^i}{B^e + B^i} \tag{3.63}$$

wobei

$$B_y = B^e + B^i$$

Für die Beziehung zwischen B^e und B^i folgt aus (3.63)

$$B_y^i(k_y, z = 0, \omega) = \frac{1 - k_y \cdot C(k_y, z = 0, \omega)}{1 + k_y \cdot C(k_y, z = 0, \omega)} \cdot B_y^e(k_y, z = 0) \tag{3.64}$$

Das elektrische Feld $E_x(k_y, z = 0, \omega)$ kann man mit dem ersten Teil der Beziehung (3.63) ausrechnen.

Es bleiben zwei Fragen:

Wie berechnet man das Spektrum $B_y^e(k_y, z = 0)$ z. B. für das Magnetfeld eines Linienstromes,

und

Wie berechnet man die Übertragungsfunktion für ein gegebenes Schichtenmodell.

$B_y^e(k_y)$ berechnet man mit der Fouriertransformation aus der korrespondierenden Ortsfunktion $B_y^e(y)$:

$$B_y^e(k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_y^e(y, z) \cdot \exp(-y \cdot k_y)\, dy \tag{3.65}$$

$= (I_0/2\pi) \cdot \exp(-(z_L - z))$ für den Linienstrom in der Höhe z_L über der Tiefe z (3.55)

Die Übertragungsfunktion im k_y-Bereich wird nach einem Algorithmus berechnet, den SCHMUCKER (1971) angegeben hat, und der im folgenden im Detail abgeleitet wird. Ausgangspunkt ist der Ansatz (3.60) für das elektrische Feld, der daraus folgende Ansatz für das Magnetfeld und die Definition für die Übertragungsfunktion (3.63):

Die Koeffizienten A_n und B_n werden durch die Stetigkeitsbedingungen für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder an den Schichtgrenzen bestimmt, sie enthalten also Terme, in denen die Leitfähigkeiten und Mächtigkeiten der angrenzenden Schichten existieren.

Schließlich sei die Übertragungsfunktion für die Tiefe z in der n-ten Schicht definiert:

$$C_n(\omega, z) = \frac{E_{x,n}(\omega, z)}{i\omega\, B_{y,n}(\omega, z)} = \frac{1}{K_n} \cdot \frac{A_n \cdot e^{-z \cdot K_n} + B_n \cdot e^{+z \cdot K_n}}{A_n \cdot e^{-z K_n} - B_n \cdot e^{+z K_n}} \tag{3.66}$$

Im folgenden wird eine Rekursionsformel für die Übertragungsfunktion abgeleitet, die es ermöglicht, aus der Übertragungsfunktion der untersten Schicht – dem Halbraum – die Übertragungsfunktionen aller Schichten von Schicht zu Schicht nach oben fortschreitend zu berechnen.

Bei dieser Methode ist es nicht nötig, die Koeffizienten A_n und B_n zu berechnen. Dies wird dadurch ermöglicht, daß man für jede Schicht 2 Übertragungsfunktionen berechnet, und zwar einmal für die Oberseite der Schicht und einmal für die Unterseite der Schicht:

$$C_n(\omega, z_n) = \frac{1}{K_n} \frac{A_n e^{-z_n K_n} + B_n e + z_n K_n}{A_n e^{-z K_n} - B_n e^{-z K_n}} \tag{3.67}$$

$$C_n(\omega, z_n + d_n) = \frac{1}{K_n} \frac{A_n e^{-(z_n + d_n) K_n} + B_n e + (z_n + d_n) K_n}{A_n e^{-(z_n + d_n) K_n} - B_n e + (z_n + d_n) K_n} \tag{3.68}$$

Da man für jede Schicht somit zwei Gleichungen hat, kann man die beiden Unbekannten A_n und B_n eliminieren:

So folgt aus der Gleichung (3.68):

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{K_n C_n(\omega, z_n + d_n) + 1}{K_n C_n(\omega, z_n + d_n) - 1}\, e + (z_n + d_n) \cdot 2 \cdot K_n \tag{3.69}$$

Setzt man dies in Gleichung (3.67) ein, erhält man

$$C_n(\omega, z_n) = \frac{1}{K_n} \frac{K_n C_n(\omega, z_n + d_n)\,(e^{d_n K_n} + e^{-d_n K_n}) + (e^{d_n K_n} - e^{-d_n K_n})}{K_n C_n(\omega, z_n + d_n)(e^{d_n K_n} - e^{-d_n K_n}) + (e^{d_n K_n} + e^{-d_n K_n})} \tag{3.70}$$

$$= \frac{1}{K_n} \frac{K_n C_n(\omega, z_n + d_n) + \tanh(K_n d_n)}{1 + K_n C_n(\omega, z_n + d_n) \tanh(K_n d_n)}$$

Die Gleichung (3.70) gibt also die Beziehung zwischen den Übertragungsfunktionen an der Oberseite und der Unterseite der n-ten Schicht an. Um nun die Beziehung zwischen der Übertragungsfunktion an der Unterseite der n-ten Schicht und der Übertragungsfunktion an der Oberseite der (n + 1)-ten Schicht zu bekommen, wird die Stetigkeit der Komponenten sowohl des elektrischen Feldes als auch des magnetischen Feldes an den Schichtgrenzen in Rechnung gesetzt: Da die Feldkomponenten stetig sind, sind es auch die Verhältnisse E_x/B_y, also auch die Übertragungsfunktion:

$$C_n(\omega, z_n + d_n) = C_{n+1}(\omega, z_{n+1}) \tag{3.71}$$

Setzt man dies in Gleichung (3.70) ein, erhält man

$$C_n(\omega, z_n) = \frac{1}{K_n} \frac{K_n C_{n+1}(\omega, z_{n+1}) + \tan h(K_n d_n)}{1 + K_n \cdot C_{n+1}(\omega, z_{n+1}) \cdot \tan h(K_n d_n)} \tag{3.72}$$

Dies ist die gesuchte Rekursionsformel. Man beginnt mit der untersten Schicht, d. h. mit dem homogenem Halbraum. Die Übertragungsfunktion für die Oberseite des Halbraums bekommt man aus Gleichung (3.70), wobei man d_n sehr groß wähle, sodaß $\tan h(K_n d_n) = 1$ gesetzt werden kann. Man kann auch die Gleichung (3.67) benutzen, indem man dort $B_n = 0$ setzt, da im Halbraum die Felder mit zunehmender Tiefe gegen Null gehen müssen. In beiden Fällen bekommt man für die Oberseite des Halbraums = der N-ten Schicht

$$C_N(\omega, z_N) = \frac{1}{K_N} \tag{3.73}$$

Diese Übertragungsfunktion setze man nun in (3.72) ein, um $C_{N-1}(\omega, z_{N-1})$ zu berechnen. Durch wiederholtes Einsetzen erreicht man schließlich die Erdoberfläche $C_1(\omega, z = 0)$.

Man kann ebenfalls die elektrischen und magnetische Felder in jeder Tiefe berechnen, bezogen z. B. auf die Felder an der Erdoberfläche:

$$\frac{E_x(\omega, z)}{E_x(\omega, 0)} = \frac{E_x(\omega, z)}{E_x(\omega, z_n)} \frac{E_x(\omega, z_n)}{E_x(\omega, z_{n-1})} \cdots \frac{E_x(\omega, z_1)}{E_x(\omega, 0)} \tag{3.74}$$

Hierbei ist z eine Tiefe in der n-ten Schicht.

Die noch unbekannten Amplituden-Verhältnisse $E_{x,n}/E_{x,n-1}$ können aus dem Ansatz (3.60) berechnet werden, wobei die A_n und B_n wiederum durch Gleichung (3.69) eliminiert werden können. Aus der Stetigkeit der E-Feldkomponenten folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{E_{x,n}(z_n)}{E_{x,n-1}(z_n - d_n)} &= \frac{E_{x,n}(z_n)}{E_{x,n}(z_n - d_n)} = \\
&\frac{A_n e^{-K_n z_n} + B_n e^{K_n z_n}}{A_n e^{-K_n(z_n - d_n)} + B_n e^{K_n(z_n - d_n)}} = \text{mit: (3.69)} \\
&\frac{(K_n C_n + 1) e^{-K_n d_n} + (K_n C_n - 1) e^{K_n d_n}}{K_n C_n + 1 + K_n C_n - 1} = \\
&\frac{e^{-K_n d_n} + e^{K_n d_n}}{2} + \frac{1}{K_n C_n} \frac{e^{-K_n d_n} - e^{K_n d_n}}{2} = \\
&\cos h(K_n C_n(\omega, z_n)) - \sin h(K_n C_n(\omega, z_n)) / (K_n C_n(\omega, z_n))
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Analog kann auch das Magnetfeld in jeder Tiefe rekursiv berechnet werden

$$\frac{B_{y,n}(z_n)}{B_{y,n-1}(z_{n-1})} = \cos h(K_n C_n) - \sin h(K_n C_n) \cdot K_n C_n \tag{3.76}$$

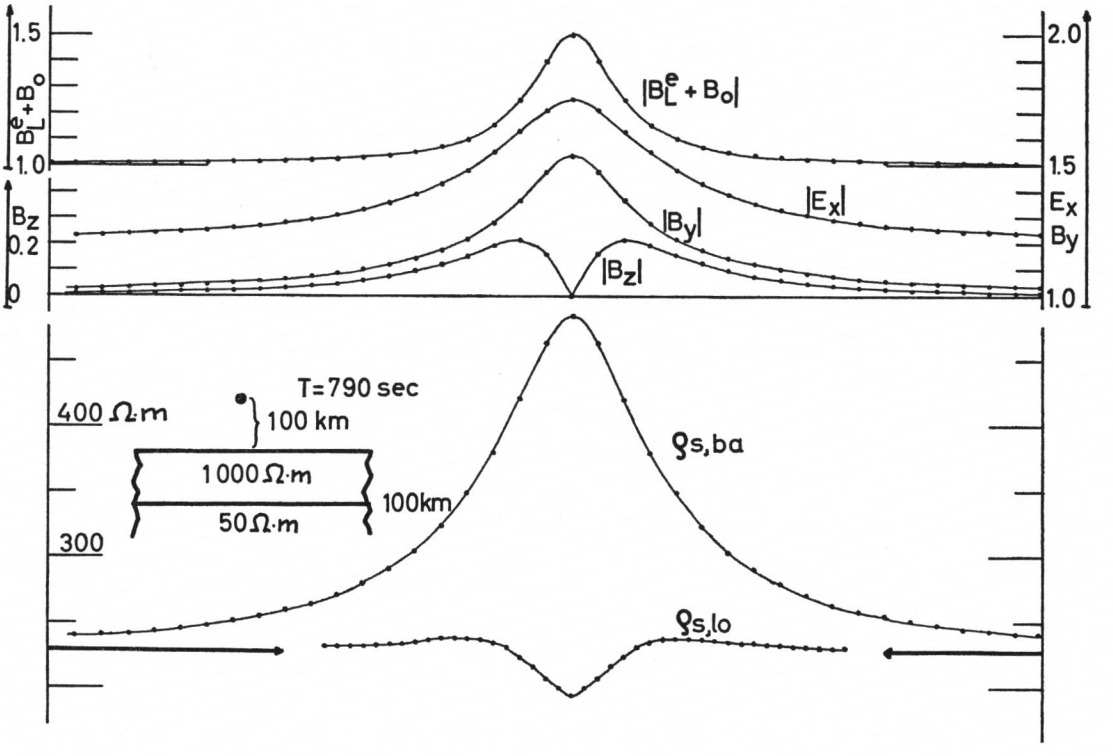


Abb. 3.9: Über einem geschichteten Medium (siehe Modell links) induziert ein inhomogenes Magnetfeld, das aus folgenden Anteilen besteht:

a. Homogener externer Anteil $B_o^e = 0.5$
b. Homogener interner Anteil $B_o^i = 0.5$ $\Big\}$ $B_o = B_o^e + B_o^i$

c. Externer Anteil eines Linienstromes in der Höhe 100 km, der so normiert ist, daß am Erdboden direkt unter dem Linienstrom $B_L^e = 0.5 = B_o^e$ ist

d. Interner (induzierter) Anteil des Magnetfelds des Linienstromes für das angegebene Modell bei der Periode T = 790 sec: B_L^i

In der Figur ist dargestellt: (Von oben nach unten):

1. Die Summe der oben genannten Anteile a + b + c = $B_o^e + B_o^i + B_L^e = B_o + B_L^i$
2. Das induzierte E-Feld (homogen + inhomogen): Im Maximum erreicht es den Wert 1.75 $B_{o,\max}$
3. Der Absolutbetrag der Horizontalkomponente des aus den vier Anteilen a, b, c, d bestehenden Magnetfeldes, im Maximum erreicht es den Wert 1.55 $B_{o,\max}$
4. Der Absolutbetrag der Vertikalkomponente des aus den vier Anteilen a, b, c, d bestehenden Magnetfeldes, es erreicht maximal die Werte 0.22 $B_{o,\max}$
5. Der scheinbare spezifische Widerstand $\rho_{s,ba} = \frac{T\,\mu_0}{2\,\pi}\left|\frac{E_x(y)}{B_y(y_0)}\right|^2$
   (Linearer Maßstab)
6. Der scheinbare spezifische Widerstand $\rho_{s,lo} = \frac{T\mu_0}{2\pi}\left|\frac{E_x(y)}{B_y(y)}\right|^2$
   Unter dem Linienstrom erniedrigen sich die Werte gegenüber den Werten für homogene Anregung.

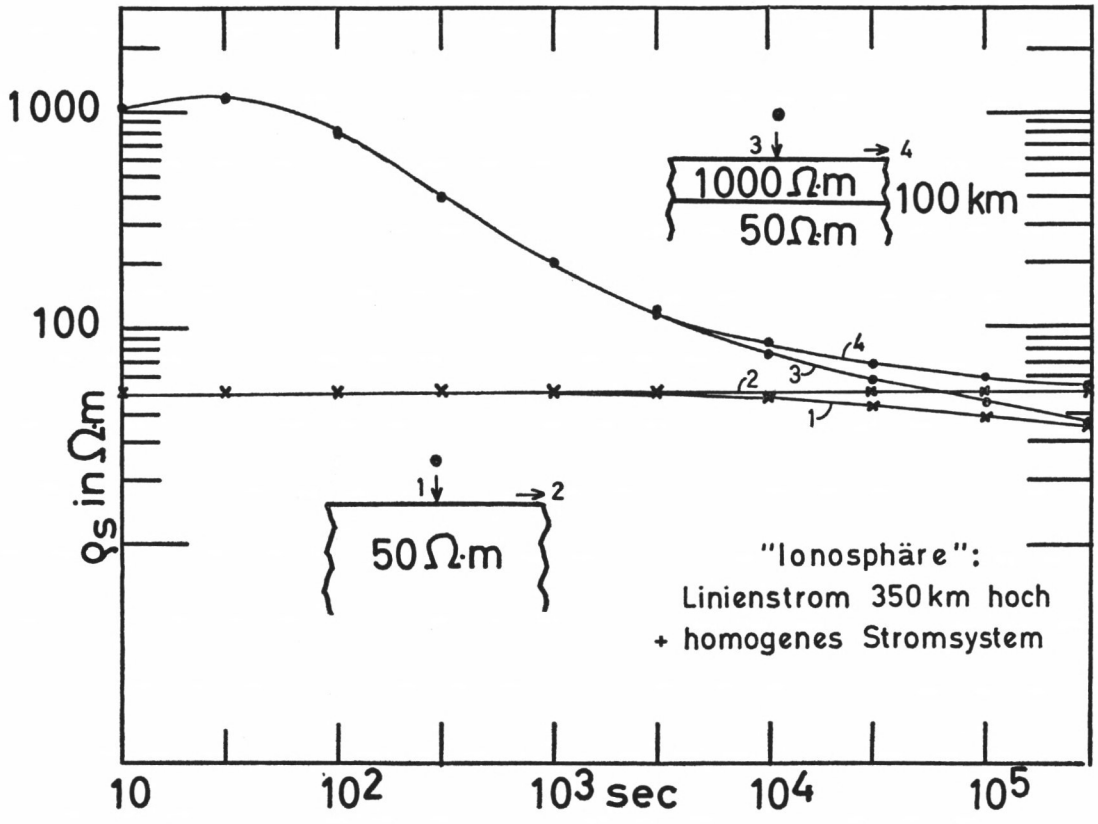


Abb. 3.10: Scheinbarer spezifischer Widerstand als Funktion der Periode für die zwei angegebenen Modelle. Dem homogenen, induzierenden Magnetfeld ist das Magnetfeld eines Linienstromes in 350 km Höhe über dem Erdboden überlagert worden (das entspricht einer äquivalenten Bandbreite eines Stromes an der Erdoberfläche von 700 km). In der Abbildung sind für jedes Modell zwei ρ_s-Kurven angegeben, und zwar eine Kurve für den Ort direkt unter dem Zentrum des Linienstromes (diese Kurve ist ab 10000 sec jeweils die untere) und eine Kurve für einen Ort so weit vom Linienstrom entfernt, daß sie der ρ_s-Kurve für ein räumlich homogenes induzierendes Magnetfeld gleich ist.

4. INTERPRETATIONSVERFAHREN FÜR ZWEI-DIMENSIONALE VERTEILUNGEN DER ELEKTRISCHEN LEITFÄHIGKEIT

(Methode der Endlichen Differenzen)

Die elektrische Leitfähigkeit möge sich nur in zwei Richtungen ändern, der y- und der z-Richtung

$$\sigma = \sigma(y, z) \tag{4.1}$$

Die Frage ist, ob es solche Leitfähigkeitsverteilungen auch in der Natur gibt. In der Abb. 4.1 ist eine Aufsicht auf eine 3-dimensionale Leitfähigkeitsverteilung dargestellt, wobei der Mittelpunkt des Koordinaten-Kreuzes der Meßort ist. Der Induktionsraum für eine bestimmte Periode ist durch den schraffierten Kreis markiert: Da die Leitfähigkeitsverteilung außerhalb dieses Kreises eine sehr kleine Wirkung auf das induzierte Feld am

Beobachtungspunkt hat, ist nur die Leitfähigkeitsverteilung innerhalb dieses Kreises für das am Beobachtungspunkt induzierte elektrische und magnetische Feld wichtig, die – durch die gestrichelten Geraden markiert – tatsächlich angenähert 2-dimensional ist. Ein wichtiges Kriterium, inwieweit eine Leitfähigkeitsverteilung 2-dimensional ist, ist die Verteilung der Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes. Diese wird im Kapitel 5 diskutiert und soll hier zunächst noch nicht betrachtet werden.

Das Koordinatensystem und das Modell ist in Abb. 4.2 gegeben.

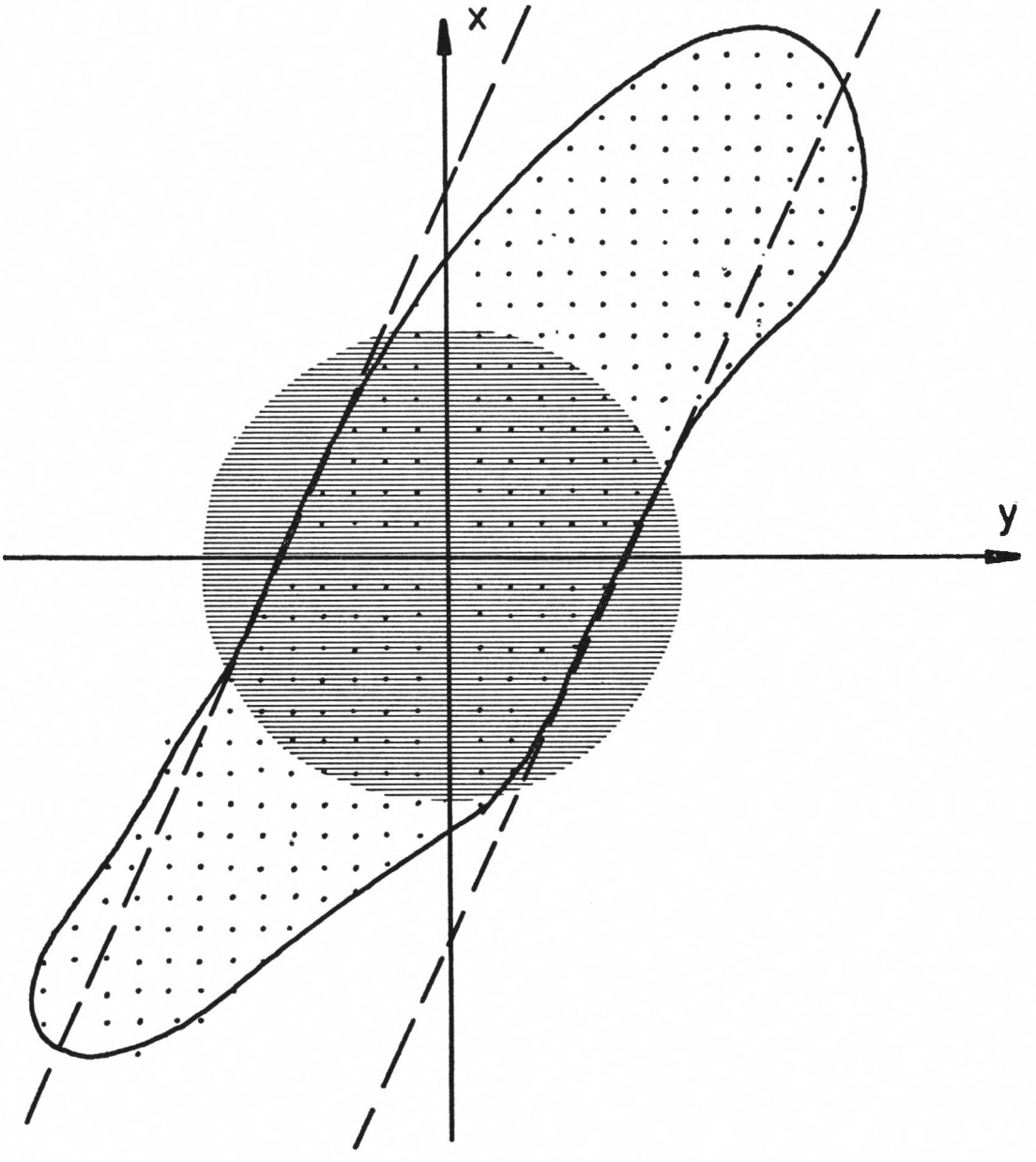


Abb. 4.1

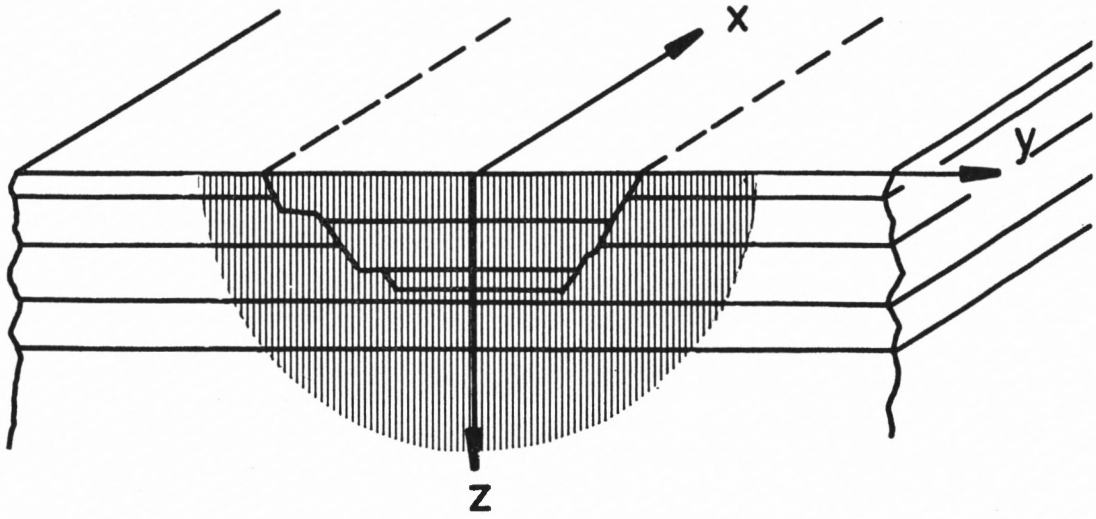


Abb. 4.2

4.1 *Grundgleichungen für die E- und B-Polarisation*

Da sich weder die Leitfähigkeit noch das inhomogene induzierende Feld in x-Richtung ändert, existiert keine Feldänderung in x-Richtung:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \tag{4.2}$$

Hiermit vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen, die in ihre Komponenten zerlegt, folgendermaßen lauten:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_x \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_x \tag{4.4}$$

$$-\frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \sigma E_z \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega B_x \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega B_y \tag{4.7}$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega B_z \tag{4.8}$$

Die 6 Gleichungen (4.3) bis (4.8) lassen sich in zwei Gruppen unterteilen, nämlich in

Gruppe 1: (4.3), (4.7) und (4.8)

Gruppe 2: (4.4), (4.5) und (4.6)

Da eine Komponente, die in Gruppe 1 vorkommt, nicht in Gruppe 2 zu finden ist (und umgekehrt), sind beide Gruppen voneinander entkoppelt. Das bedeutet, daß man den gesamten Induktionsvorgang bei 2-dimensional verteilter Leitfähigkeit in zwei voneinander unabhängige Vorgänge zerlegen kann.

Gruppe 1: Die Gleichungen dieser Gruppe beschreiben den in x-Richtung fließenden Strom, der von geschlossenen Magnetfeldlinien umgeben ist (Abb. 4.3).

Diese Gruppe faßt man unter dem Begriff „E-*Polarisation*" zusammen. Aus den drei Gleichungen der Gruppe erhält man durch Umformung eine Gleichung mit nur einer Feldkomponente, die *Diffusions-Gleichung:*

$$\frac{\partial^2 E_x(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(y,z)}{\partial z^2} = \mu_0 i \omega \sigma(y,z) \cdot E_x(y,z) \tag{4.9}$$

Gruppe 2: Die Gleichungen dieser Gruppe beschreiben einen Stromwirbel in der (y, z)-Ebene, durch den senkrecht die Magnetfeldkomponete B_x weist (Abb. 4.4).

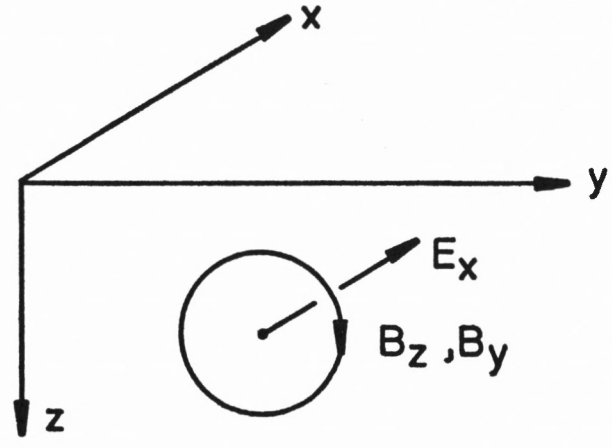


Abb. 4.3

Diese Gruppe faßt man unter dem Begriff „B-*Polarisation*" zusammen. Aus den drei Gleichungen der Gruppe gewinnt man auch hier durch Umformung eine Gleichung mit nur einer Feldkomponente, die „*Diffusions-Gleichung*"

$$\frac{\partial^2 B_x(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x(y,z)}{\partial z^2} = \mu_0 i \omega \sigma(y,z) \cdot B_x(y,z) \tag{4.10}$$

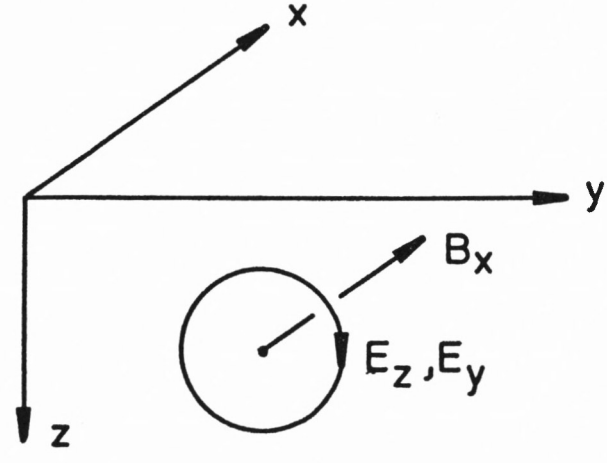


Abb. 4.4

Die Aufgabe der Modellrechnung ist es, diese beiden Gleichungen – jede unabhängig von der anderen – in der ganzen (y, z)-Ebene zu lösen. Die Lösung ist dann erreicht, wenn bei fest vorgegebener Verteilung der Leitfähigkeit im Fall der E-Polarisation $E_x(y,z)$ in der ganzen (y, z)-Ebene bekannt ist, im Falle der B-Polarisation $B_x(y,z)$ in der ganzen (y, z)-Ebene bekannt ist. Alle übrigen 4 Feldkomponenten können aus diesen beiden Feldkomponenten berechnet werden:

$B_z(y,z)$ mit (4.8), $B_y(y,z)$ mit (4.7) aus $E_x(y,z)$

$E_z(y,z)$ mit (4.5), $E_y(y,z)$ mit (4.4) aus $B_x(y,z)$.

4.2 *Grundgleichungen in Differenzenform*

Da die beiden zu lösenden Differential-Gleichungen (4.9) und (4.10) formal gleich aussehen, werden sie beide in diesem Abschnitt durch *eine* Gleichung ersetzt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \mu_0 i \omega \sigma \cdot F \text{ mit } F = \begin{cases} E_x \\ B_x \end{cases} \tag{4.11}$$

Diskretisierung des Modells

Es wird ein Netz mit beliebigen Gitterabständen über die (y, z)-Ebene gelegt. Die Gitterlinien müssen parallel bzw. senkrecht zu den y- und z-Achsen verlaufen. Die Feldkomponenten werden an den Knotenpunkten dieses Gitters berechnet. Die Leitfähigkeit einer Zelle wird *gekennzeichnet* durch die Koordinaten des linken, oberen Knotenpunktes, wie es die Abbildung (4.5) wiedergibt. Es seien (y, z) die Koordinaten eines beliebigen Punktes in der Gitterebene, δy der Abstand zum linken Nachbar-Knotenpunkt, Δy der Abstand zum rechten Nachbarpunkt, δz der Abstand zum oberen Nachbarpunkt und Δz der Abstand zum unteren Nachbarpunkt.

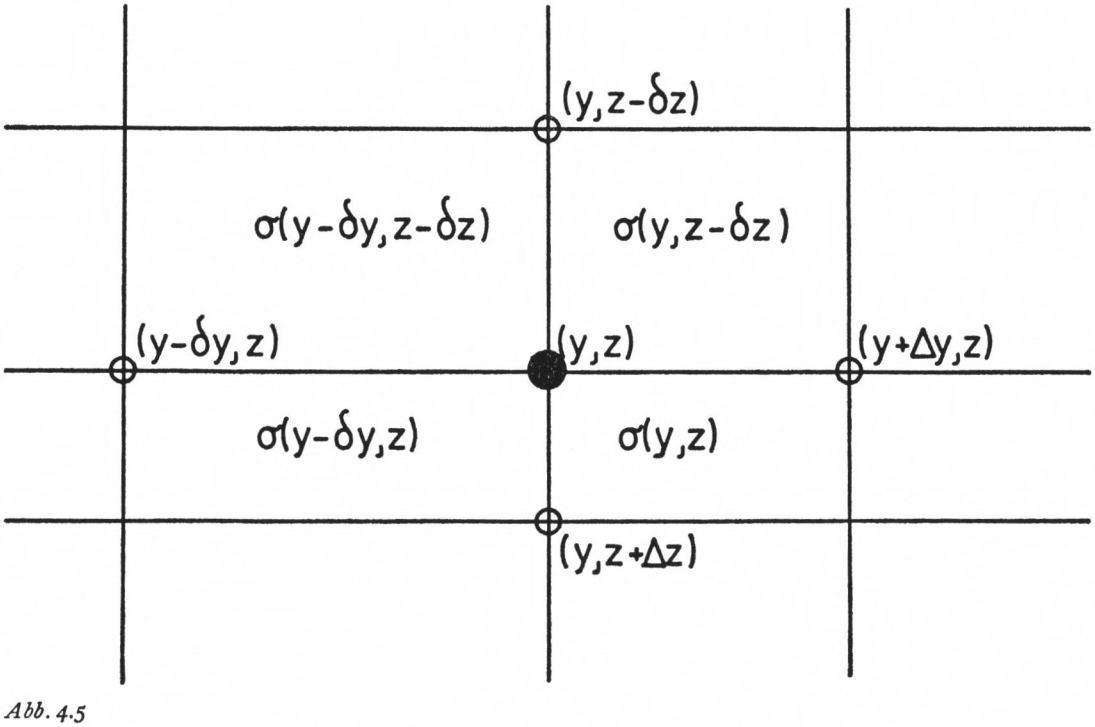


Abb. 4.5

Die weitere Umwandlung der Differential-Gleichung in eine Differenzen-Gleichung mit Hilfe einer Taylorentwicklung (hier wird die Methode der „Zentralen Differenzen" angewandt) wird hier nicht im Detail wiedergegeben. Siehe hierzu die umfangreiche Literatur, insbesondere die Arbeiten von W. F. Jones und seinen Mitarbeitern, die im Literaturverzeichnis aufgeführt sind. Es werden hier die resultierenden Differenzengleichungen angegeben, die sich teilweise von denen von Jones unterscheiden.

Da alle Feldgrößen komplexwertig sind, wird Gleichung (4.11) vor ihrer Umwandlung noch in Real- und Imaginär-Teil aufgespalten

(4.12)
$$F = f + i\,g$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\mu_0 \omega \sigma g$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \mu_0 \omega \sigma f$$

Ersetzt man nun die Differential- durch Differenzen-Quotienten, so erhält man

(4.13)
$$f(y,z) \cdot A(y,z) - g(y,z) \cdot B(y,z) = f(y-\delta y,z) \cdot C_1(y,z) + f(y,z-\delta z) \cdot C_2(y,z) + f(y+\Delta y,z) \cdot C_3(y,z) + f(y,z+\Delta z) \cdot C_4(y,z)$$

(4.14)
$$g(y,z) \cdot A(y,z) + f(y,z) \cdot B(y,z) = g(y-\delta y,z)\, C_1(y,z) + g(y,z-\delta z)\, C_2(y,z) + g(y+\Delta y,z)\, C_3(y,z) + g(y,z+\Delta z)\, C_4(y,z)$$

Die Gitterkonstanten A, B, C_1, C_2, C_3 und C_4 sind Funktionen der Abstände vom zentralen Punkt (y, z) zu den 4 Nachbarpunkten, sowie der Leitfähigkeiten der Nachbarzellen und der Periode. Die beiden letztgenannten Größen kommen mit ins Spiel, wenn man die Randbedingungen für die elektrischen und magnetischen Felder am Übergang zweier verschieden leitfähiger Zellen berücksichtigt. Auch diese Randbedingungen sind von Jones et al. (1971) ausführlich behandelt worden, weshalb sie hier nur kurz beschrieben werden:

4.3 *Randbedingungen an den Grenzflächen im Innern des Modells*

Es wird der Fall betrachtet, daß alle vier den Zentralpunkt (y, z) umgebenden Zellen untereinander verschiedene Leitfähigkeit haben. Da der Zentralpunkt jeder der vier anliegenden Zellen zuzuordnen ist, gelten an der Stelle (y, z) sowohl für die E-Polarisation als auch für die B-Polarisation je 4 Diffusionsgleichungen, entsprechend den 4 Leitfähigkeiten. Diese 4 am Zentralpunkt gültigen Diffusionsgleichungen kann man zu einer einzigen Diffusionsgleichung zusammenfassen, wenn man die Stetigkeits-Bedingungen für die Feldkomponenten an den Grenzflächen der einzelnen Zellen berücksichtigt. Diese Stetigkeits-Bedingungen sind für den Fall der E-Polarisation – hier sind die Komponenten des elektrischen Feldes stets parallel zu den Grenzflächen – anders als für den Fall der B-Polarisation – hier existieren auch Komponeten des elektrischen Feldes senkrecht zu den Grenzflächen. Deshalb unterscheiden sich die Gitterkonstanten für die E- und die B-Polarisation.

E-Polarisation:

(4.15)

a. $A(y,z) = 4\,(1/(\delta y \cdot \Delta y) + 1/(\delta z \cdot \Delta z))$

b. $B(y,z) = -\frac{\mu_0}{2} \cdot \omega\,[\sigma(y-\delta y, z-\delta z) + \sigma(y,z-\delta z) + \sigma(y,z) + \sigma(y-\delta y,z)]$

c. $C_1(y,z) = 1/[\delta y(\delta y + \Delta y)]$

d. $C_2(y,z) = 1/[\delta z(\delta z + \Delta z)]$

e. $C_3(y,z) = 1/[\Delta y(\delta y + \Delta y)]$

f. $C_4(y,z) = 1/[\Delta z(\delta z + \Delta z)]$

B-Polarisation:

(4.16)

a. $$A(y,z) = 4 \cdot \left[\frac{1}{\delta y \cdot \Delta y} + \frac{1}{\delta z \cdot \Delta z}\right] + C_1(y,z) + C_2(y,z) + C_3(y,z) + C_4(y,z) - 4 \cdot [D_1(y,z) + D_2(y,z) + D_3(y,z) + D_4(y,z)]$$

b. $$B(y,z) = -\frac{\mu_0}{2}\omega \cdot [\sigma(y-\delta z, z-\delta z) + \sigma(y, z-\delta z) + \sigma(y,z) + \sigma(y+\delta y, z)]$$

c. $$C_1(y,z) = D_1(y,z) \cdot \left[\frac{\sigma(y,z)}{\sigma(y-\delta y, z)} + \frac{\sigma(y, z-\delta z)}{\sigma(y-\delta y, z-\delta z)} + 2\right]$$

d. $$C_2(y,z) = D_2(y,z) \cdot \left[\frac{\sigma(y-\delta y, z)}{\sigma(y-\delta y, z-\delta z)} + \frac{\sigma(y,z)}{\sigma(y, z-\delta z)} + 2\right]$$

e. $$C_3(y,z) = D_3(y,z) \cdot \left[\frac{\sigma(y-\delta y, z-\delta z)}{\sigma(y, z-\delta z)} + \frac{\sigma(y-\delta y, z)}{\sigma(y,z)} + 2\right]$$

f. $$C_4(y,z) = D_4(y,z) \cdot \left[\frac{\sigma(y, z-\delta z)}{\sigma(y,z)} + \frac{\sigma(y-\delta y, z-\delta z)}{\sigma(y-\delta y, z)} + 2\right]$$

g. $$D_1(y,z) = \frac{1}{\delta y(\delta y + \Delta y)}$$

h. $$D_2(y,z) = \frac{1}{\delta z(\delta z + \Delta z)}$$

i. $$D_3(y,z) = \frac{1}{\Delta y(\delta y + \Delta y)}$$

j. $$D_4(y,z) = \frac{1}{\Delta\delta(\delta z + \Delta z)}$$

4.4 *Anfangswerte für die Feldverteilung bei homogener und inhomogener Induktion im Modell*

Man kann eine beliebige Leitfähigkeitsverteilung in Gedanken aufteilen in eine normale und eine anomale Leitfähigkeitsverteilung. Die normale Leitfähigkeitsverteilung enthält keine lateralen Änderungen der Leitfähigkeit, sie kann also entweder homogen oder geschichtet sein. Die anomale Leitfähigkeitsverteilung mit lateralen Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit ist auf ein Gebiet im Innern des Modells beschränkt. Um den durch die Differenzgleichungen (4.13, 4.14) angegebenen Rechenprozeß anwenden zu können, berechnet man zunächst die Feldverteilung für die normale Leitfähigkeitsverteilung, wobei die in Kapitel 3, insbesondere durch die Gleichungen (3.72), (3.75), (3.76) gegebenen Algorithmen verwendet werden können. Der durch die Differenzengleichungen gegebene Rechenprozeß – er wird weiter unten noch ausführlicher beschrieben – verändert dann die normale Feldverteilung im Gebiet der anomalen Leitfähigkeitsverteilung so, daß die Stetigkeitsbedingungen für die Felder – ausgedrückt durch die 6 Gitterkonstanten – erfüllt werden. Damit ist dann die Lösung erreicht.

Als normale Leitfähigkeitsverteilung setzt man die – nur von der Tiefe abhängige – Leitfähigkeitsverteilung an den Modellrändern in Rechnung. Es kommt aber oft vor, daß die Leitfähigkeitsverteilung am linken Rand anders ist als am rechten Rand. Eine Möglichkeit, auch für diesen Fall eine angenähert normale Feldverteilung zu berechnen, ist die lineare Interpolation der normalen Feldwerte für die linke Randspalte zu den normalen Feldwerten des rechten Randes entlang der einzelnen Zeilen des Modells. Diese Möglichkeit – von JONES angegeben – wurde auch hier angewandt. Dabei sind die für die E-Polarisation und die B-Polarisation verschiedenen Regeln zu beachten.

B-Polarisation: Da an der Erdoberfläche keine anomalen Anteile des B_x-Feldes existieren können, muß man die $B_x(y,z)$-Werte so normieren, daß

$$B_x(y,0) = (B_{x,\,real},\ B_{x,\,imag}) = \text{konst.} = (1,0)$$

ist.

E-Polarisation: Eine der B-Polarisation entsprechend einfache Normierung für das $E_x(y,z)$-Feld existiert nicht, da die Änderung von der „normalen" Leitfähigkeitsverteilung des linken Randes zu der „normalen" Leitfähigkeitsverteilung des rechten Randes anomale Anteile im E-Feld auch an der Erdoberfläche verursacht, die möglicherweise an den Rändern noch gar nicht abgeklungen sind. Noch komplizierter wird die Normierung, wenn das induzierende Magnetfeld lateral inhomogen ist. Deshalb ist es am sichersten, das Modell am linken oder am rechten Rand noch so zu erweitern, daß die Leitfähigkeitsverteilungen an beiden Rändern gleich sind. Die normale Feldverteilung für lateral inhomogen induzierendes Magnetfeld berechnet man nach der in Kapitel 3.2 angegebenen Methode. Ist das induzierende Magnetfeld homogen, so kann man bei verschiedener Leitfähigkeitsverteilung an den Rändern des Modells zumindest angenähert eine Normierung nach einer von JONES et al. 1971 ausführlich abgeleiteten Methode machen, die umso besser stimmt, je breiter man das Modell macht. Hierbei multipliziert man die $E_x(x,z)$-Werte am rechten Rand mit dem Verhältnis der Übertragungsfunktionen an der Erdoberfläche

$$C(y_r,\ z = 0)\,/\,C(y_l,\ z = 0)$$

$$(r = \text{rechter Rand};\ l = \text{linker Rand})$$

und interpoliert die $E_x(y,z)$-Werte linear vom linken zum rechten Rand (JONES & PRICE 1970).

4.5 *Iterationsprozeß – Gauß/Seidel-Methode – Sukzessive Überrelaxation*

Aus den Gleichungen (4.13) und (4.14) folgert man, daß man einen neuen Feldwert für einen zentralen Punkt berechnen kann, indem man die Feldwerte an den 4 Nachbarpunkten, jeweils multipliziert mit den Gitterkonstanten, addiert. Dieser neue Wert wird aber im allgemeinen noch nicht der richtige Wert sein, der bereits die Lösung für diesen zentralen Punkt darstellt. Denn man berücksichtigt ja hierbei nur die vier nächstgelegenen Punkte, obwohl eine Störung des Feldes noch weit über die sie verursachende Leitfähigkeits-Anomalie hinausreichen kann. Wieweit eine Störung des Feldes sich in die Umgebung einer Leitfähigkeits-Anomalie ausbreiten kann, hängt vom Modell ab, also der Leitfähigkeit der Anomalie, der Leitfähigkeit der Umgebung, der Geometrie und der Periode.

Der erste Zentralpunkt, den man nach (4.13) und (4.14) berechnet, liegt in der 2.Zeile/2. Spalte, der 2. Zentralpunkt in der 2. Zeile/3. Spalte, usw. Auf diese Weise führt man den Summationsprozeß von links nach rechts, Zeile für Zeile von oben nach unten. Die Feldwerte an den Rändern bleiben hierbei unverändert. Danach wiederholt (iteriert) man den Summationsprozeß von vorne und zwar sooft, bis man anhand verschiedener Kontrollen Gewißheit hat, daß sich die Feldwerte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen nur noch wenig unterscheiden. Diese Feldwerte sind die gesuchte Lösung der Differenzen-Gleichung.

Am folgenden einfachen Rechenbeispiel soll deutlich werden, daß sich Feldstörungen nur recht langsam im Laufe der Iterationen im Modell ausbreiten.

Es wird eine Folge von Zahlen als Anfangsverteilung angenommen, die unten in der 1. Zeile (Iterationsnummer $n = 0$) angegeben ist. Auf diese Zahlenreihe wird ein Summationsprozeß angewandt, der durch die Formel

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(x_{i-1}^{(n+1)} + x_{i+1}^{(n)}\right)$$

definiert ist, wobei $i = 1, 2, \ldots$ die Numerierung der Zahlen von links nach rechts ist, $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Anzahl der Iterationen dieses Rechenproesses ist.

n =	i = 1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	100
1	0	0	0	0	0	0	50	100
2	0	0	0	0	0	25	63	100
3	0	0	0	0	13	39	70	100
4	0	0	0	7	23	47	74	100
5	0	0	4	14	31	53	77	100
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Die Zahl 100 am rechten Rand sei fest, der Rechenprozeß schreitet bei jeder Iteration von links nach rechts, er gibt gleichzeitig ein Beispiel für die Gauß-Seidel-Iteration, die im folgenden Abschnitt erklärt wird. Man erkennt, daß die „Störung" durch die feste Zahl 100 sich um nur einen Gitterpunkt pro Iteration nach links ausbreitet.

Es sei die folgende, augenblickliche Situation während der n-ten Iteration an und um einen Zentralpunkt gegeben (siehe Abb. 4.6).

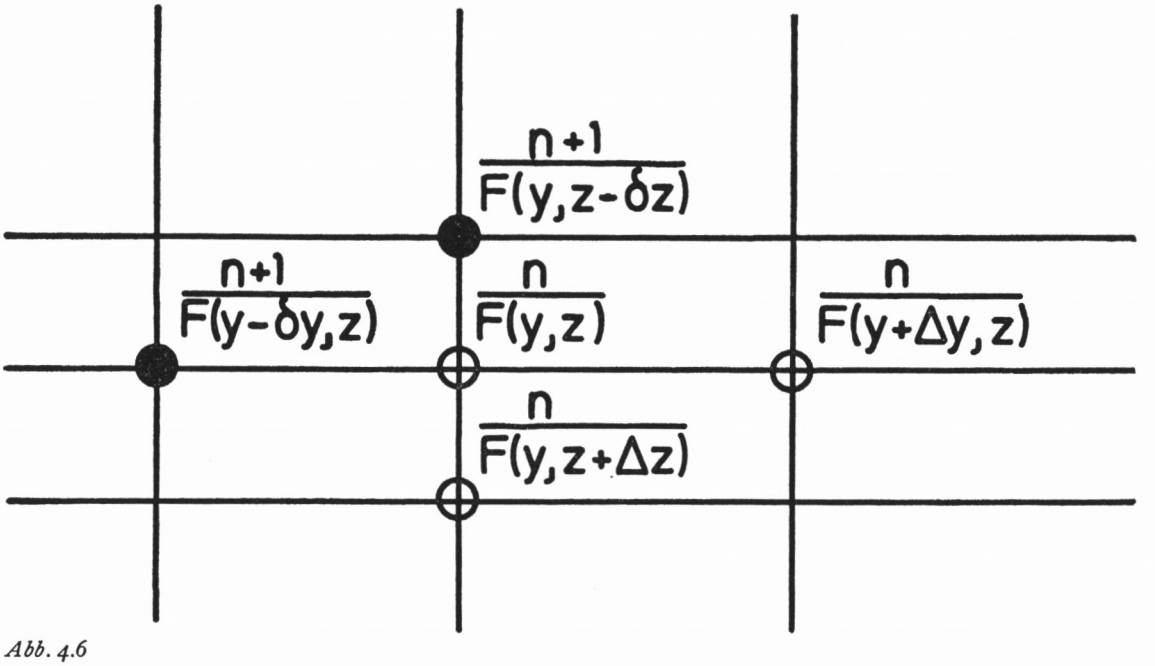


Abb. 4.6

Es soll jetzt der Feldwert am Zentralpunkt (y, z) berechnet werden. Durch den fortschreitenden Summationsprozeß sind aber die Feldwerte an den Punkten der darüberliegenden Zeile und die Feldwerte an den Punkten links vom Zentralpunkt bereits $(n+1)$-mal neu berechnet worden, dagegen alle Feldwerte rechts und unterhalb des Zentralpunktes erst n-mal. Die Gauß-Seidel-Iteration unterscheidet sich dadurch von anderen Verfahren, daß sie die bereits $(n+1)$-mal iterierten Feldwerte des oberen und linken Punktes (und natürlich die erst n-mal iterierten Feldwerte des rechten und unteren Punktes) bei der

Summation verwendet. Führt man diese Summationsprozesse auf einem elektronischen Rechner aus, so ist die *Gauß-Seidel*-Iteration also eine Selbstverständlichkeit. Ein Verfahren, das nur die n-mal iterierten Feldwerte bei der Summation verwendet, ist die Jacobi-Iteration. Die Konvergenz der *Gauß-Seidel*-Iteration ist doppelt so schnell wie die der Jacobi-Iteration (SMITH 1970).

Die Gleichungen (4.13) und (4.14) sehen unter Berücksichtigung des „Iterationsgrades" n so aus: $\left[\frac{n}{f(y,z)}: \text{n-mal iterierter Wert } f(y,z)\right]$*

$$(4.17)\qquad A \cdot \frac{(n+1)}{f(y,z)} - B \cdot \frac{(n+1)}{g(y,z)} = U =$$

$$C_1 \cdot \frac{(n+1)}{f(y-\delta y, z)} + C_2 \cdot \frac{(n+1)}{f(y, z-\delta z)} + C_3 \cdot \frac{(n)}{f(y+\Delta y, z)} + C_4 \cdot \frac{(n)}{f(y, z+\Delta z)}$$

$$A \cdot \frac{(n+1)}{g(y,z)} + B \cdot \frac{(n+1)}{f(y,z)} = V =$$

$$C_1 \cdot \frac{(n+1)}{g(y-\delta y, z)} + C_2 \cdot \frac{(n+1)}{g(y, z-\delta z)} + C_3 \cdot \frac{(n)}{g(y+\Delta y, z)} + C_4 \cdot \frac{(n)}{g(y, z+\Delta z)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen explizit die Real- und Imaginärteile des zentralen Feldwertes:

$$(4.18)\qquad \text{a.}\ \frac{(n+1)}{f(y,z)} = \frac{A \cdot U + B \cdot V}{A^2 + B^2}$$

$$\text{b.}\ \frac{(n+1)}{g(y,z)} = \frac{A \cdot V - B \cdot U}{A^2 + B^2}$$

Die Gitterkonstanten nach (4.15) und (4.16) werden während des Iterations-Prozesses nicht verändert.

Die Sukzessive Überrelaxation

Durch die Methode der sukzessiven Überrelaxation (engl. successive overrelaxation, s. o. r) kann man die Konvergenz der Feldwerte gegen ihren Endwert beschleunigen (SMITH, 1970).

Man addiert in Gleichung (4.18) rechts $\frac{(n)}{f(y,z)}$, bzw. $\frac{(n)}{g(y,z)}$ und subtrahiert es an einer anderen Stelle derselben Gleichung

$$(4.19)\qquad \text{a.}\ \frac{(n+1)}{f(y,z)} = \frac{(n)}{f(y,z)} + \underbrace{\left[\frac{A\,U + B\,V}{A^2 + B^2} - \frac{(n)}{f(y,z)}\right]}_{\delta f}$$

$$\text{b.}\ \frac{(n+1)}{g(y,z)} = \frac{(n)}{g(y,z)} + \underbrace{\left[\frac{A\,V - B\,U}{A^2 + B^2} - \frac{(n)}{g(y,z)}\right]}_{\delta g}$$

Der Summationsprozeß sieht in dieser Darstellung also so aus, als ob man den Feldwert $\frac{(n+1)}{f(y,z)}$ aus dem n-mal iterierten Feldwert $\frac{(n)}{f(y,z)}$ erhielte, indem man die Zahl δf addierte (analog auch bei $g(y,z)$):

$$(4.20)\qquad \text{a.}\ \frac{(n+1)}{f(y,z)} = \frac{(n)}{f(y,z)} + \delta f$$

$$\text{b.}\ \frac{(n+1)}{g(y,z)} = \frac{(n)}{g(y,z)} + \delta g$$

Im Laufe der Iterationen sollten δf und δg mit Annäherung an die gesuchte Lösung immer kleiner werden. Da die Geschwindigkeit der Konvergenz davon abhängt, wie groß

* Der Querstrich ist hier kein Bruchstrich, sondern ein *Mittelungs-Strich*

die Beträge der δf und δg sind, die bei jeder Iteration hinzukommen, kann man hier *künstlich* etwas nachhelfen: Man addiert einfach etwas mehr hinzu, als es eigentlich nach Gleichung (4.18) berechtigt wäre:

$$\text{(4.21)} \qquad \text{a.}\ \frac{(n+1)}{f(y,z)} = \frac{(n)}{f(y,z)} + \alpha \cdot \delta f$$

$$\text{b.}\ \frac{(n+1)}{g(y,z)} = \frac{(n)}{g(y,z)} + \alpha \cdot \delta g$$

Bei der S.Ü.R. ist der Faktor α größer als 1, kleiner als 2. Es ist anscheinend schwierig, Formeln für die optimale Berechnung von α für Modellrechnungen anzugeben, wie sie hier gemacht werden sollen. Ansätze hierzu sind bei SMITH (1970) Seite 212 zu finden. Größeren Erfolg als mit den dort angegebenen Formeln hatte ich durch Ausprobieren: Bei der in Abb. 4.13 diskutierten Modellrechnung erreichte ich mit dem Faktor $\alpha = 1.9$ eine 10mal schnellere Konvergenz als mit dem Faktor $\alpha = 1$.

4.6 *Einfluß der Gitter-Abstände auf die Lösung*

Bei der Transformation der Differential- in eine Differenzen-Gleichung wurden höhere als die 2. Ableitungen vernachlässigt. Hierzu wurden zunächst die Beziehungen zwischen Differential-Quotient und Differenzen-Quotient abgeleitet. Man erhält sie durch eine Taylor-Entwicklung, die die Feldfortsetzung von einem Punkt im Innern des Modells zu einem der vier Nachbarpunkte beschreibt.

$$\text{(4.22)} \qquad \begin{aligned} &\text{a.}\ F(y+\Delta y, z) = F(y,z) + \Delta y \cdot \frac{\partial F(y,z)}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2}\,\frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial y^2} \\ &\text{b.}\ F(y-\delta y, z) = F(y,z) - \delta y \cdot \frac{\partial F(y,z)}{\partial y} + \frac{\delta y^2}{2}\,\frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial y^2} \\ &\text{c.}\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2}{\Delta y + \delta y}\left[\frac{F(y+\Delta y, z)}{\Delta y} + \frac{F(y-\delta y, z)}{\delta y} - F(y,z)\left(\frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{\delta y}\right)\right] \end{aligned}$$

Aus diesem Grund muß man darauf achten, daß die Feldänderungen von Punkt zu Punkt des Gitternetzes nicht zu groß sind. Das kann immer dann passieren, wenn die Gitterabstände zu groß gewählt werden. Man kann den Fehler folgendermaßen abschätzen.

Es wird angenommen, daß die für die hier zu lösenden Diffusionsvorgänge typische Feldänderung mit dem Ort eine Änderung in Form einer Exponential-Funktion sei:

(4.23) $F(\hat{z}) = e^{-\hat{z}}$ mit $\hat{z} = \frac{z}{p}$, p = Eindringtiefe in ein homogenes Material mit der Leitfähigkeit der betrachteten Zelle.

Einerseits wäre die exakte 2. Ableitung hiervon

$$\text{(4.24)} \qquad \frac{\partial^2 F(z)}{\partial \hat{z}^2} = e^{-\hat{z}}$$

Andererseits wäre die numerische Ableitung nach (4.22c) mit $\delta\hat{z} = \Delta\hat{z}$:

$$\text{(4.25)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\hat{z})}{\partial \hat{z}^2} &= \frac{1}{\delta\hat{z}^2}\left[f(\hat{z}+\delta\hat{z}) + f(\hat{z}-\delta\hat{z}) - 2\,f(\hat{z})\right] \\ &= \frac{1}{\delta\hat{z}^2}\left[e^{-(\hat{z}+\delta\hat{z})} + e^{-(\hat{z}-\delta\hat{z})} - 2\,e^{-\hat{z}}\right] \\ &= 2\,\frac{e^{-\hat{z}}}{\delta\hat{z}^2}\left[\frac{e^{-\delta\hat{z}} + e^{\delta\hat{z}}}{2} - 1\right] = 2\,\frac{e^{-\hat{z}}}{\delta\hat{z}^2}\left[\cos h\,\delta\hat{z} - 1\right] \\ &\approx 2 \cdot \frac{e^{-\hat{z}}}{\delta\hat{z}}\left[\frac{\delta\hat{z}^2}{2} + \frac{\delta\hat{z}^4}{24}\right] \end{aligned}$$

Daraus folgt der relative Fehler:

$$\left|\frac{\text{Exakte Ableitung} - \text{Numerische Ableitung}}{\text{Exakte Ableitung}}\right| = \tag{4.26}$$

$$\left|\frac{e^{-\hat{z}} - 2 \cdot e^{-\hat{z}}\,(1/2 + \delta\hat{z}^2/24)}{e^{-\hat{z}}}\right| = \frac{\delta\hat{z}^2}{12}$$

Hieraus folgt die Beziehung zwischen Gitterabstand δz, der lokalen Eindringtiefe p und dem relativem Fehler, demonstriert an einigen plausiblen numerischen Werten:

$\delta\hat{z} = \delta z/p$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
relat. Fehler	0.1%	0.4%	1.0%	1.3%	2.1%	3.0%	4.1%

Fehler von mindestens dieser Größenordnung sind bei der numerischen Lösung der Diffusionsgleichung zu erwarten, da in ihr 2. Ableitungen nach dem Ort existieren. In der Tat konnten bei der Berechnung der Feldkomponenten in Modellen, in denen die Leitfähigkeit zwar homogen war, aber die Gitterabstände lateral variierten, Fehler in der oben angegebenen Größenordnung beobachtet werden. Deshalb sollte man also die Gitterabstände nicht größer als etwa $^1/_3$ der lokalen Eindringtiefe machen.

4.7 *Feste und Freie Randwerte*

Der hier beschriebene Summations- und Iterations-Prozeß läßt die Werte an allen vier Rändern des Modells unverändert. Hierbei entsprechen die Feldwerte am linken und am rechten Rand einer Feld-Tiefen-Verteilung eines geschichteten Halbraumes. Deshalb sind diese Feldwerte nur dann richtig, wenn die Feld-Anteile der Leitfähigkeits-Anomalien vom Innern des Modells am Rande abgeklungen sind. Das wäre dann der Fall, wenn nach einer genügend großen Anzahl von Iterationen die Feldwerte *in der Nähe* des linken und des rechten Randes – noch innerhalb des Bereichs mit der horizontalen Schichtung – „freiwillig" unverändert geblieben wären (die Feldwerte des Randes sind gezwungenermaßen unverändert).

Wären der linke und der rechte Rand des Modells zu nahe an einer Leitfähigkeitsanomalie, so kann man sich außerhalb des Modells Ströme erzeugt denken, die so gepolt sind, daß zwar die anomalen Feldanteile direkt am Rand verschwinden, die aber auch die Feld-Verteilung im Innern des Modells verfälschen. Man kann zwar die Ränder des Modells sehr weit von allen Anomalien im Innern des Modells weglegen. Da aber die Kapazität der Rechenanlagen begrenzt ist, kann man dies nicht erreichen durch zusätzliche Gitterpunkte an den Rändern, sondern durch große Gitterabstände in den Randbereichen. Man darf das aber nur in dem Maß tun, wie es in 4.6 beschrieben wurde, nämlich mit Gitterabständen bis zu einem Drittel der Eindringtiefe, da sonst bereits die Lösung für den geschichteten Halbraum falsch werden würde.

Darüber hinaus können zu große Modelle zu systematischen Fehlern führen, wenn die normale Feldverteilung im Fall der E-Polarisation wegen eines lateral inhomogenen induzierenden Magnetfelds selber bereits inhomogen ist. Zwar bleiben die E-Feldwerte an den Rändern des Modells unverändert, also so, wie sie für das inhomogene induzierende Magnetfeld berechnet wurden. Aber die Feldwerte im Innern des Modells werden linearisiert. Dies sei an einem Beispiel in Abb. 4.7 angedeutet, das einen Schnitt durch die Feldverteilung von links nach rechts darstellen soll.

Auf die anfangs gekrümmte Feldverteilung wird die Formel

$$F_i^{neu} = (F_{i-1}^{alt} + F_{i+1}^{alt})/2 \qquad i = 1 \ldots N$$

iterativ angewendet. Nach jeder Anwendung ergibt sich eine neue Kurve, die zunehmend glatter wird, bis schließlich eine Gerade entsteht, die den linken mit dem rechten Randwert verbindet.

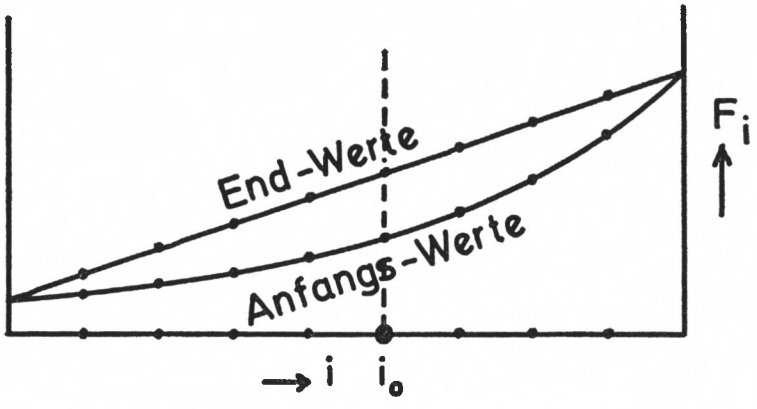


Abb. 4.7

Wäre nun in der Mitte bei $i = i_0$ die Leitfähigkeitsanomalie, so würde man in diesem Fall nicht jene induzierten anomalen Felder berechnen, die zur anfangs vorgegebenen Feldverteilung passen (und die ja in Übereinstimmung mit dem vorgegebenen inhomogenen Magnetfeld ist), sondern ganz andere Felder zu einer unbekannten inhomogenen Magnetfeldverteilung. Deshalb muß man die Modelle möglichst auf den Bereich der Anomalie beschränken, sodaß eine linearisierte Feldverteilung immer noch eine gute Näherung der ursprünglichen Feldverteilung ist.

Nach einem Vorschlag von SCHMUCKER (pers. Mitt.) kann man eine Randbedingung formulieren, die eine unbegrenzte Fortsetzung des geschichteten Untergrundes nach links, bzw. rechts über die Ränder des Modells simuliert. Dadurch erreicht man, daß die anomalen Feldanteile, die durch die Leitfähigkeits-Anomalien verursacht sind, an den Rändern des Modells nicht gezwungen werden, zu verschwinden, sondern sich frei einstellen können.

Die Randbedingung müßte exakt eine Diffusion (Gl. 4.9) des anomalen Feldanteiles in den geschichteten Halbraum jenseits der Modellränder beschreiben. Anstatt dieser exakten Lösung, die noch nicht existiert, formuliert man eine näherungsweise Lösung: Man berechnet an jedem Randpunkt den anomalen Feldanteil unter der Annahme, daß es die Ausbreitung eines räumlich homogenen Feldes in einen Halbraum mit einer homogenen Leitfähigkeit (nämlich der der Umgebung dieses Randpunktes) sei. Es sei die folgende Situation während der n-ten Iteration in einem Teil des Modells gegeben:

a. *Linker, rechter und unterer Rand* (*Randbedingungen im elektrisch leitfähigen Untergrund*):

vergl. Abb. 4.8).

$$\text{a. } F_{i,2}^{an} = F_{i,2} - F_{i,2}^{o}$$

$$\text{b. } F_{i,1}^{an} = F_{i,2}^{an} e^{-dy \cdot \sqrt{\mu_0 i \omega \sigma_1}}$$

$$\text{c. } F_{i,1} = F_{i,1}^{o} + F_{i,1}^{an}$$

Hierbei sind die mit [°] indizierten Feldwerte die Anfangswerte für die normale Feldverteilung bei inhomogener oder homogener Anregung über dem geschichteten Unter-

grund. Sie werden während des Iterationsprozesses *nicht* verändert. Die tatsächlich im Modell existierenden Feldwerte haben keine hochgestellte Indizierung. Die mit [an] indizierten Feld-Anteile werden im Laufe der Iterationen durch die Leitfähigkeitsanomalie erzeugt. Die Anwendung dieser Randbedingung ist sehr schnell, da der gesamte Exponential-Term nur einmal für alle Randpunkte ausgerechnet zu werden braucht und gespeichert wird.

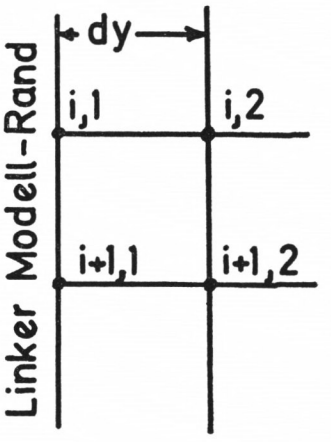


Abb. 4.8

Liegt der Randpunkt zwischen zwei Schichten verschiedener Leitfähigkeit σ_1 und σ_2, so muß man einen mittleren Wert berechnen. Das kann man folgendermaßen machen:

E-Polarisation:

Da

(4.28) $$E_{x,\sigma_1} = E_{x,\sigma_2};\ \bar{j}_x = 1/2 \cdot (j_{x,\sigma_1} + j_{x,\sigma_2})$$

folgt $$\bar{j}_x = 1/2 \cdot (j_{x,\sigma_1} + j_{x,\sigma_2}) = 1/2\ E_x \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = \bar{\sigma} \cdot E_x$$

(4.29) $$\bar{\sigma} = 1/2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$$

B-Polarisation:

Da man den *anomalen* Anteil $B_{x,an}$ in y-Richtung fortsetzen will, korrespondiert dies mit einer Aussage über das Verhalten von $E_{z,an}$ am Rand (siehe Gl. 4.6). Da $E_{z,an}$ aber senkrecht zur Schichtung steht, gilt hier:

(4.30) $$j_{z,\sigma_1} = j_{z,\sigma_2};\ \bar{E}_z = 1/2 \cdot (E_{z,\sigma_1} + E_{z,\sigma_2})$$

Hieraus folgt, wiederum wie oben mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes:

(4.31) $$\bar{\sigma} = \frac{2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

b. *Oberer Rand des Modells*

Im Fall der *B-Polarisation* existieren am oberen Rand des Modells, der Oberfläche der leitfähigen Erde, keine anomalen Anteile, so daß die Feldwerte konstant bleiben.

Anders bei der *E-Polarisation*, bei der anomale Feldanteile auch an der Erdoberfläche existieren. Man kann aber diese anomalen Feldanteile nicht aufgrund eines Diffusionsprozesses nach oben fortsetzen, wie es an den seitlichen und am unteren Rand des Modells möglich ist, da die Leitfähigkeit $\sigma = 0$ ist. Hierzu kann folgende Methode angewandt werden (Abb. 4.9):

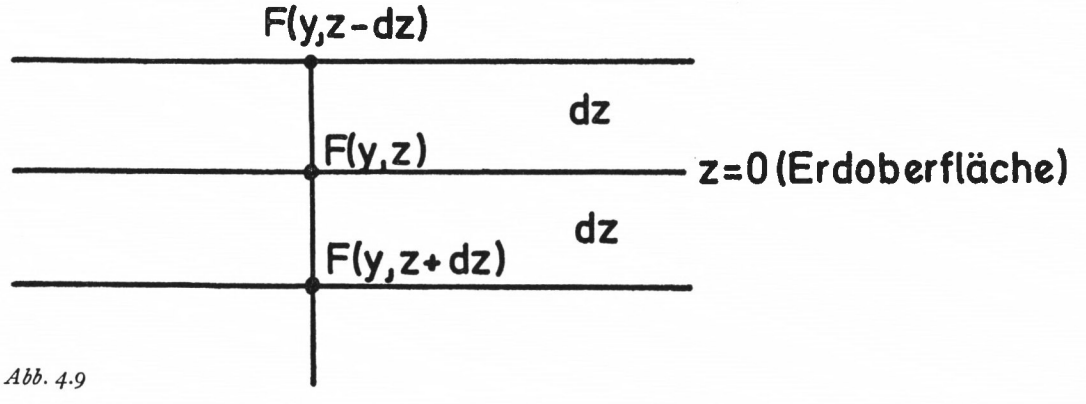


Abb. 4.9

Die Taylorentwicklung des Feldes von einem Punkt im Abstand dz unter der Erdoberfläche (an dem der berechnete Feldwert noch eine Lösung der Diffusionsgleichung ist) bis zur Höhe dz über der Erdoberfläche ergibt:

$$F(y,z-dz) = F(y,z+dz) - 2 \cdot dz \cdot \frac{\partial F(y,z)}{\partial z} \tag{4.32}$$

Unbekannt ist noch die Ableitung $\partial F / \partial z$. Sie enthält zwei Anteile:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F^{\circ}}{\partial z} + \frac{\partial F^{an}}{\partial z} \tag{4.33}$$

Hiervon ist der 1. Anteil, die vertikale Ableitung des normalen Feldes, bekannt. Den 2. Anteil, die Ableitung des nur durch die Leitfähigkeitsanomalie erzeugten Feldanteils, kann man folgendermaßen berechnen:

$$F^{an}(y,z=o) = F(y,z=o) - F^{\circ}(y,z=o) \tag{4.34}$$

Nun ist aufgrund einer der Maxwell-Gleichungen die horizontale Ableitung des elektrischen Feldes proportional zur Vertikal-Komponente des magnetischen Feldes. Faltet man diese Ableitung mit dem *Kertz-Operator*, so erhält man eine Größe, die proportional zur horizontalen Komponente des Magnetfeldes ist. Da die horizontale Komponente des Magnetfeldes aber wiederum proportional zur vertikalen Ableitung des elektrischen Feldes ist, erhält man so den gewünschten 2. Anteil der obigen Gleichung:

$$\frac{\partial F^{an}(y,z=o)}{\partial z} = K * \frac{\partial F^{an}(y,z=o)}{\partial y} \tag{4.35}$$

WINTER (1973) hat für diese Faltung eine sehr gute numerische Approximation angegeben, die entscheidend für die Wirksamkeit der Randbedingung ist. Sie lautet:

mit der Abkürzung $F' = \partial F^{an} / \partial y$

$$K * F' = \frac{3}{2\pi}(F'(y-dy) - F'(y+dy)) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{N} \frac{F'(y-n \cdot dy) - F'(y+n \cdot dy)}{n} \tag{4.36}$$

4.8 *Kontrollen zur Konvergenz der Lösung*

Es sei F die exakte Lösung der Differential-Gleichung, f sei die exakte Lösung der Differenzen-Gleichung und $f^{(n)}$ sei die Lösung der Differenzen-Gleichung nach der n-ten Iteration. Die in Abschnitt 4.6 diskutierten Fehlermöglichkeiten (Gitterabstände) beziehen sich auf die Differenz $|F - f|$. In diesem Abschnitt soll die Differenz $|f - f^{(n)}|$ diskutiert werden.

Maximale Feld-Differenzen

Es sei $f^{(n)}(y,z)$ die Feldverteilung im Modell nach der n-ten Iteration, $f^{(n+1)}(y,z)$ die Feldverteilung nach der $(n+1)$-ten Iteration. Eine leicht zu berechnende Größe ist die maximale Feld-Differenz:

$$\Delta_{max}(n+1) = \text{Maximum}\ |f^{(n+1)}(y,z) - f^{(n)}(y,z)| \tag{4.37}$$

Diese maximalen Feld-Differenzen werden nach jeder Iteration ausgedruckt, wobei der Gitterpunkt des Modells, wo die maximale Felddifferenz jeweils nach einer Iteration ge funden wird, von Iteration zu Iteration variieren kann. In Abb. 4.13 ist die Folge der maximalen Felddifferenzen bei der Berechnung der Felder von Modell II in Abb. 4.12 wiedergegeben.

Wenn die maximalen Felddifferenzen sehr klein werden, konvergiert $f^{(n)}$ gegen f, was in Abb. 4.13 durch die sukzessive Überrelaxation erreicht wurde.

Maximale Differenz zwischen f *und* $f^{(n)}$

In der Abbildung 4.13 lassen sich die Folgen der maximalen Felddifferenzen für große n durch Geraden approximieren. Da die Ordinate logarithmisch eingeteilt ist, bedeutet dies also eine einfache Exponentialfunktion:

Es sei N eine große Zahl, ab der sich die Folge der maximalen Fehldifferenzen als Exponentialfunktion darstellen läßt, dann ist für

$$n > N$$

$$\Delta_{max}(n) = A \cdot e^{-\beta \cdot n} = \Delta_{max}(N)\, e^{-\beta \cdot (n-N)} \tag{4.38}$$

Unter der Annahme, daß sich dieses Gesetz für $n \to \infty$ nicht ändert, unterscheidet sich die exakte Lösung f von $f^{(N)}$

$$\text{Maximum}\ |f - f^{(N)}| = \Delta_{max}(N) \int_N^\infty e^{-\beta \cdot (n-N)}\, dn = \frac{A}{\beta} e^{-\beta N} \tag{4.39}$$

mit:

$$A = \Delta_{max}(N)\, e^{\beta N} \tag{4.40}$$

und

$$\beta = \frac{\ln(\Delta_{max}(n)) - \ln(\Delta_{max}(N))}{n - N} \tag{4.41}$$

Hierzu ein numerisches Beispiel, entnommen den beiden Kurven in Abb. 4.13,

$\alpha = 1$: $\beta = 4\ 10^{-3}$, $A = 1.5\ 10^{-3}$, $N = 300$
Maximum $|f - f^{(N)}| = 0.113$
Hiermit ergibt sich ein relativer Fehler von etwa 10%
(unter Berücksichtigung des absoluten Feldwertes)

$\alpha = 1.9$: $\beta = 5.3\ 10^{-2}$, $A = 7\ 10^{-2}$, $N = 300$
Maximum $f - f^{(N)} = 1.8\ 10^{-7}$
Hiermit ergibt sich ein relativer Fehler von etwa 10^{-5}%.

Die Erfahrung lehrt, daß die sukzessive Überrelaxation nur bei einfachen Leitfähigkeitsverteilungen den Konvergenzprozeß beschleunigt.

Bei den Berechnungen komplizierterer Modelle, bei inhomogener Anregung oder falls die obere Randbedingung im Fall der E-Polarisation benutzt wird, kann die sukzessive Überrelaxation divergierende Prozesse einleiten, oder auch sonst falsche Ergebnisse ohne Konvergenz erzeugen.

Eine andere Möglichkeit, die Konvergenz des Rechenvorgangs zu prüfen, ist die wiederholte Berechnung der wichtigen Größen, z. B. des scheinbaren spezifischen Widerstandes. Da dies mehr Rechenzeit erfordert als das Berechnen der Felddifferenzen, berechnet man diese Größen nach einer Anzahl von Iterationen, z. B. nach je 25 Iterationen. Trägt man dann diese Größen als Funktion der Iteration auf, erkennt man recht anschaulich, ob der Rechenvorgang bereits konvergierte oder noch nicht. Hierzu ist in Abb. 4.11 ein Beispiel gegeben.

4.9 *Rechenergebnisse für ausgewählte Verteilungen der elektrischen Leitfähigkeit und der Geometrie des induzierenden Magnetfelds*

Die hier vorgestellte Methode der Berechnung von elektrischen und magnetischen Feldern in Modellen mit lateral variierender Leitfähigkeit und sowohl homogenen als auch inhomogenen induzierenden Magnetfeldern wurde an mehreren Modellen erprobt, die z. T.

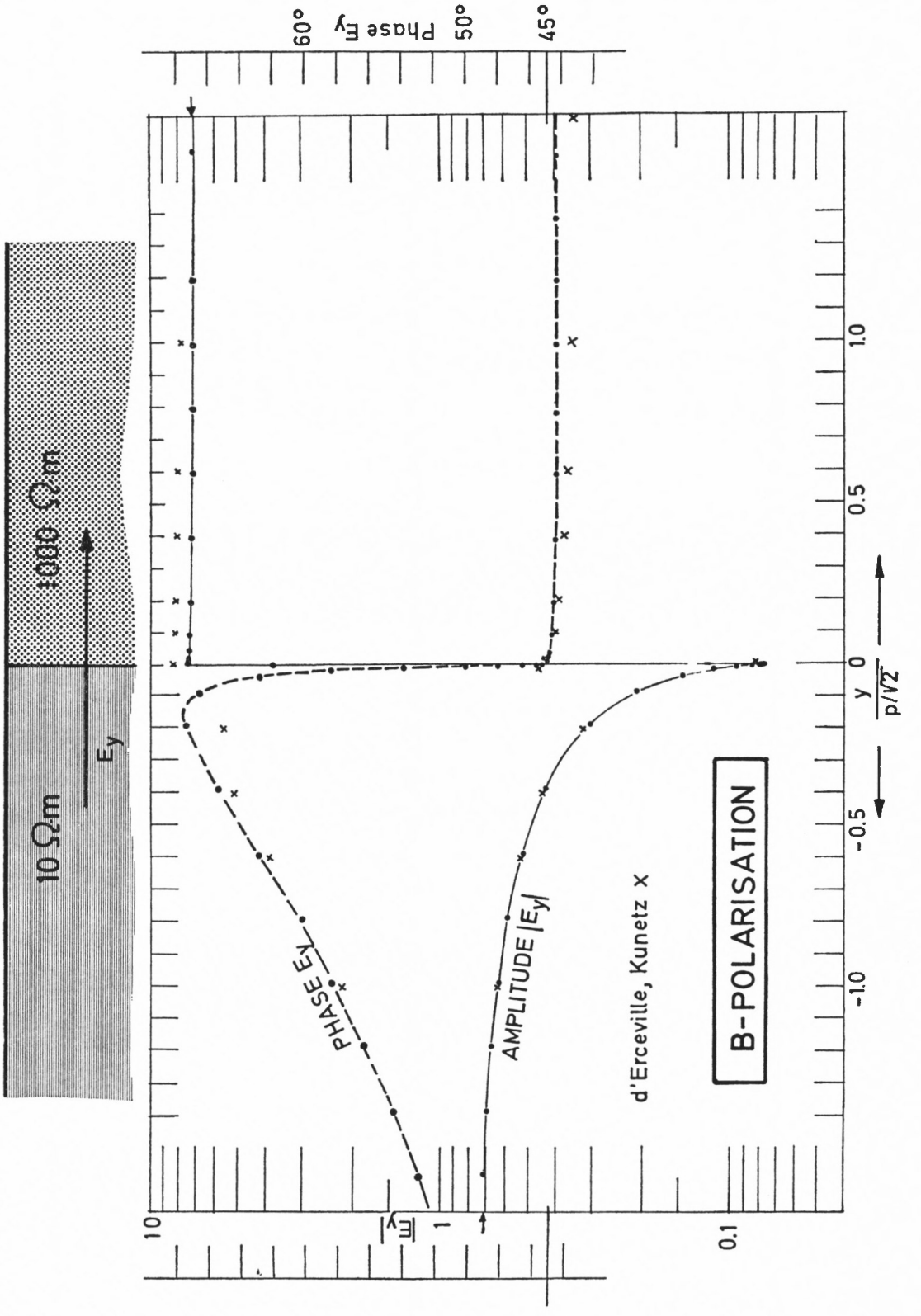

10 Ωm
1000 Ωm
E_y
PHASE E_y
AMPLITUDE $|E_y|$
d'Erceville, Kunetz x
B-POLARISATION
Phase E_y
60°
50°
45°
10
1
0.1
$|E_y|$
-1.0
-0.5
0
0.5
1.0
$y/p/\sqrt{2}$

Abb. 4.10

in der Literatur bereits bekannt waren. Es werden die Ergebnisse verglichen, die Konvergenz der Methode und die Wirksamkeit der Randbedingungen diskutiert.

Für die Bestimmung des spezifischen Widerstandes in der Erde ist die Antwort auf die Frage wichtig: Wie groß ist die Veränderung des *scheinbaren* spezifischen Widerstandes durch eine inhomogene Verteilung des induzierenden Magnetfelds? Für das Modell eines geschichteten Halbraums wurde bereits in Kapitel 3 ein Ergebnis vorgestellt. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse an einigen Modellen mit lateral variierender Leitfähigkeit diskutiert.

Abb. 4.10: Das Modell der Leitfähigkeits-Verteilung besteht aus zwei aneinander-grenzenden Vierteläumen, wobei der linke Viertelraum den spezifischen Widerstand 10 Ωm hat, der rechte Viertelraum den spezifischen Widerstand 1000 Ωm. Für dieses Modell wurde die exakte Lösung berechnet (D'Erceville and Kunetz, 1962). Da die beiden Autoren die Amplitude und Phase des elektrischen Feldes unter anderem auch kurz vor der Grenzfläche (y = +0) und kurz nach der Grenzfläche (y = —0) berechnet hatten, sollte ähnliches auch hier versucht werden. Hierzu wurden die horizontalen Gitterabstände mit Annäherung an die Grenzfläche stets kleiner gewählt:

10 × 2.25 km — 1.13 km — 0.554 km — 0.225 km — 0.113 km — 0.0554 km — 0.225 km — 0.00554 km — 0.00225 km — 0.00113 km — Grenze — 0.00113 km — (Abstände wieder spiegelbildlich zur linken Seite anwachsend).

Der Punkt „+ 0" lag in meiner Rechnung also 1.13 m von der Grenzfläche entfernt, „— 0" ebenfalls 1.13 m.

In der Abbildung wurde allerdings – wie bei den beiden Autoren – die Entfernung normiert auf $p/\sqrt{2}$, wobei p die Eindringtiefe in den linken Viertelraum ist. Da $\rho = 10$ Ωm und $T = 100$ sec angenommen wurde, ist $p = 15.8$ km). Der linke Rand des Modells war 24.6 km von der Grenzfläche entfernt, das entspricht dem 1.55fachen der Eindringtiefe. Der rechte Rand war dagegen nur das 0.155fache der Eindringtiefe in den rechten Viertelraum entfernt.

Der Unterschied zwischen der exakten und der numerischen Lösung ist nicht sehr groß. (Die Skala für die Phase ist stark gedehnt). Die größeren Abweichungen sind über dem rechten Viertelraum zu erkennen. Das kann man vermutlich durch die Nähe des Modell-Randes zur Grenzfläche erklären. Die durch die Grenzfläche erzeugte Anomalie des elektrischen Feldes klingt im Viertelraum mit dem hohen spezifischen Widerstand viel allmählicher aus, als in dem Viertelraum mit dem niedrigen spezifischen Widerstand. Bei der Modellrechnung ergab sich aber ein zu schnelles Abklingen der Anomalie des Feldes. Das ist auch aus der folgenden Abschätzung ersichtlich:

Nach der Theorie sollte das Verhältnis der Amplituden von einem Ort, der nach links unendlich weit von der Grenzfläche entfernt liegt, und von einem Ort, der nach rechts unendlich weit von der Grenzfläche entfernt liegt,

$$\frac{0.7071}{7.0711} = \sqrt{\frac{\rho(\text{links})}{\rho(\text{rechts})}} = \frac{1}{10}$$

sein. Für die numerische Lösung ergab sich:

$$\frac{0.725}{7.157} = \frac{1}{9.88}$$

Da die beiden Orte, für die dieses Amplitudenverhältnis berechnet wurde, am linken. bzw. am rechten Modellrand lagen, die fast noch im Nahfeld der Anomalie des elektrischen Feldes lagen, ist dieses Ergebnis nicht besonders gut. Allerdings blieb hier die Möglichkeit ungenutzt, bei gleichbleibender Punktanzahl die Gitterabstände für den rechten Viertelraum um den Faktor 10 zu vergrößern. Dann wäre die Randbedingung mit der vereinfachenden Annahme, daß die anomalen Felder homogen seien, wahrscheinlich auch besser zur Wirkung gekommen. Gut ist allerdings der berechnete Sprung der Amplitude des elektrischen Feldes an der Grenzfläche: Theoretisch sollte er genau

$$\frac{\rho(\text{links})}{\rho(\text{rechts})} = \frac{1}{100}$$

sein. Für die berechnete Lösung ergab sich

$$\frac{E_y(-0)}{E_y(+0)} = \frac{0.0748}{7.444} = \frac{1}{99.5}$$

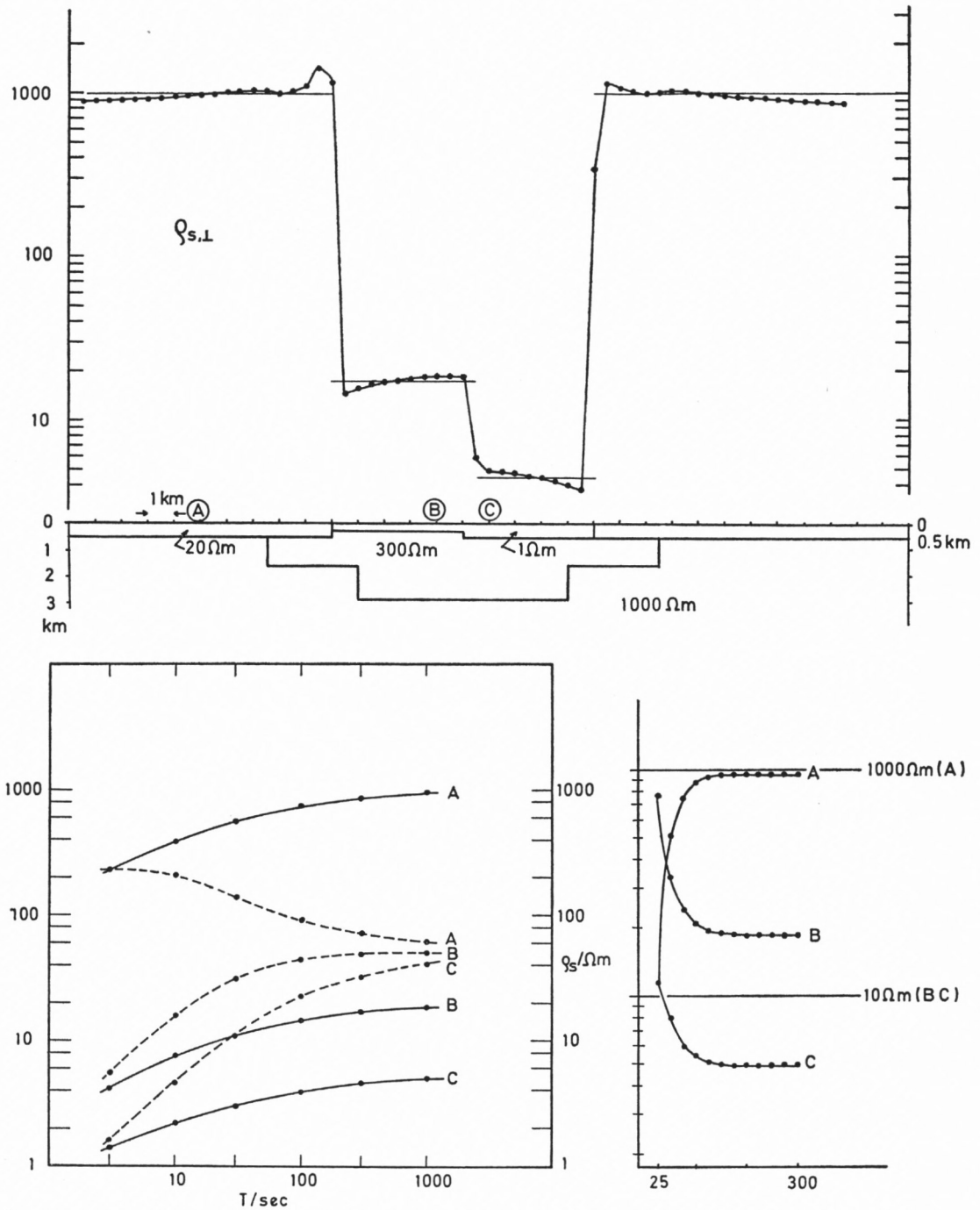


Abb. 4.11: Berechnung des scheinbaren spezifischen Widerstandes im Fall der B-Polarisation für das angegebene Modell. Das Modell wird in 15 km Tiefe von einem Halbraum mit 50 Ohm m unterlagert (nicht eingetragen). Die im oberen Teil der Abbildung eingetragene Änderung des scheinbaren spezifischen Widerstandes gilt für die Periode T = 1000 sec. An der Oberfläche des Modells sind 3 Stationen A, B und C angegeben,ffür die im linken unteren Teil der Abbildung die Abhängigkeit des scheinbaren spezifischen Widerstandes von der Periode dargestellt ist, und zwar je einmal für den Fall, in dem keine lateralen Änderungen der Leitähigkeit existieren (gestrichelt), und je einmal für den tatsächlichen Fall der B-Polarisation (durchgezogen). Man erkennt, daß die drei $\rho_s(T)$-Kurven, die einem geschichteten Untergrund ohne laterale Änderungen entsprechen, sich mit wachsender Periode dem Grenzwert von 50 Ohm · m des tieferen Unter-

grundes annähern. Dagegen konvergieren die drei durchgezogenen Kurven nicht, für deren Berechnung die lateralen Änderungen der Leitfähigkeit in Rechnung gesetzt wurden. Vielmehr ist ihr Verhältnis zueinander konstant.

Im rechten unteren Teil der Abbildung ist die Konvergenz der ρ_s-Werte für die Periode T = 1000 sec an den drei Stationen im Laufe des iterierten Rechenprozesses an ihren Endwert dargestellt. Die logarithmische Skala der Ordinate ist für die Station A gegenüber den beiden Stationen B und C um eine Dekade verschoben.

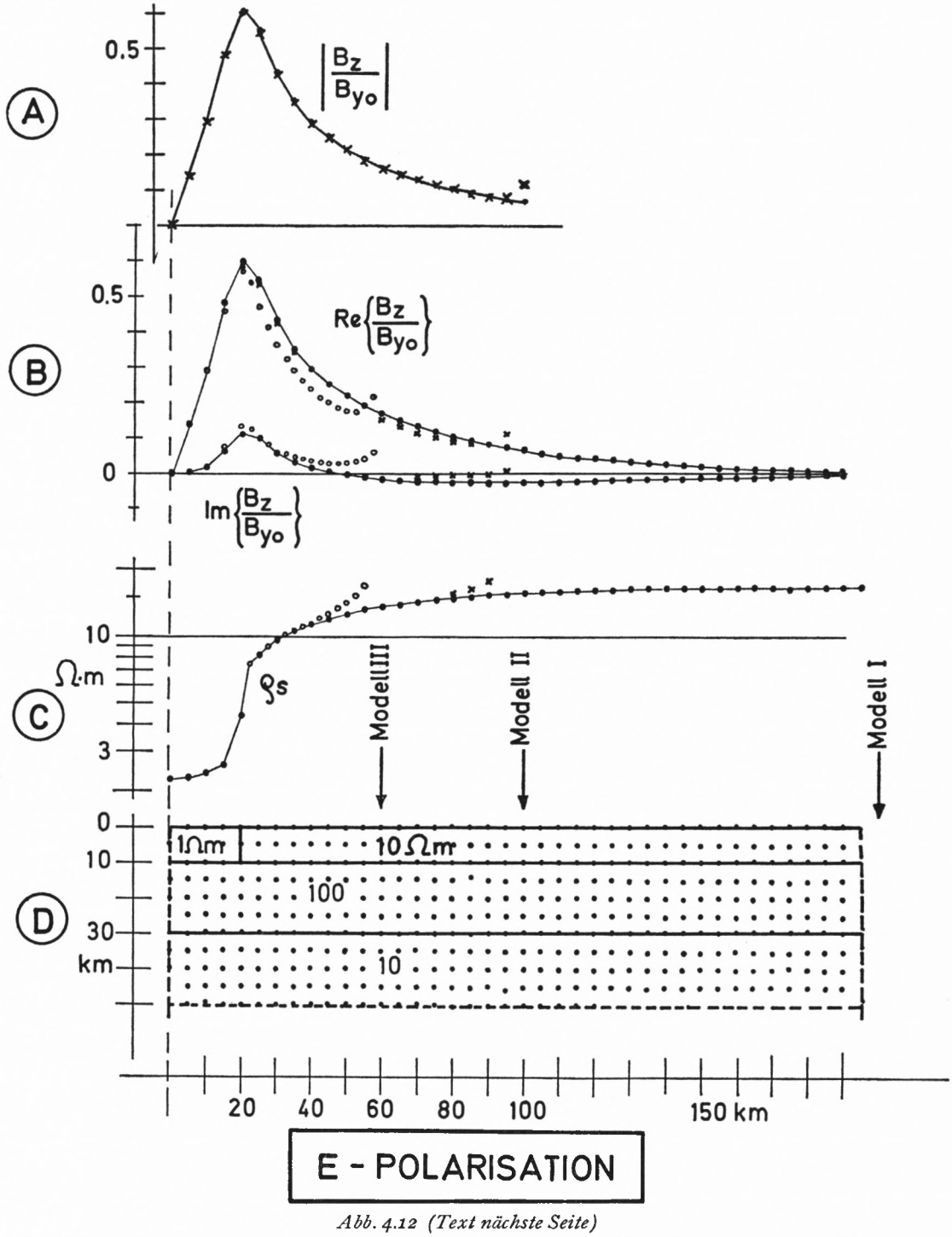


Abb. 4.12 (Text nächste Seite)

Abb. 4.12: Es wurde das unten angegebene Modell einer einfachen Leitfähigkeitsverteilung gewählt, für das bereits SCHMUCKER und WEIDELT (WEIDELT 1974) mit anderen Methoden die induzierten elektrischen und magnetischen Felder (E-Polarisation) berechnet hatten, so daß die Ergebnisse der Modellrechnung miteinander vergleichbar sind. – Das Modell gibt einen zu Mittelachse (km = 0) symmetrischen Graben wieder, der rechte Grabenrand ist bei km 20. Der linke Grabenrand ist nicht gezeichnet. Der Teil, der den Zwischenraum zwischen Erdoberfläche und oberem Modellrand darstellt, wurde ebenfalls nicht eingezeichnet. Die elektrischen und magnetischen Felder wurden für 3 Versionen dieses Modells berechnet:

Modell I: Die seitlichen Ränder des Modells waren 180 km vom jeweils nächsten Grabenrand entfernt; *Modell II:* Die seitlichen Ränder waren jeweils 80 km vom Grabenrand entfernt; *Modell III:* Die seitlichen Ränder des Modells waren 40 km vom Grabenrand entfernt.

Die Periode ist 1138,.. sec = $\sqrt{10}$ cph, was den folgenden Eindringtiefen für die im Modell angegebenen spezifischen Widerständen entspricht:

1 Ωm : 16.6 km; 10 Ωm : 53.3 km; 100 Ωm : 168 km

Die Gitterweite im ganzen Modell ist konstant 5 km, was etwa einem Drittel der Eindringtiefe im Graben entspricht.

Einfluß der Höhe des oberen Modellrandes über der Erdoberfläche: Es wurde ohne die in Kapitel 4.7b beschriebene obere Randbedingung gerechnet. Um abzuschätzen, wie hoch der Modellrand sein muß, damit die Feldwerte an der Erdoberfläche nicht mehr durch die festen Randwerte des oberen Randes verfälscht werden, wurde die Modellversion II mit 3 verschiedenen Höhen des oberen Modellrandes gerechnet. Für die beiden Höhen 100 km und 1300 km ergaben sich die identischen Rechenergebnisse, bei einer Höhe von 50 km waren die Maxima der B_z-Anomalie an den Rändern des Grabens um 5% zu groß. Die in dieser Abbildung angegebenen Lösungen wurden mit der Höhe 100 km berechnet.

Teil C: Der scheinbare spezifische Widerstand ρ_s entlang des Profils von der Grabenmitte (links) bis zum Rand des jeweiligen Modells. ρ_s wurde hierbei berechnet aus dem elektrischen Feld und dem magnetischen Feld am gleichen Ort. Es wird vermutet, daß die durch die Leitfähigkeits-Anomalie (Graben) verursachte örtliche Variation von ρ_s in Modell I nicht durch die Modellränder gestört wird. Dagegen sind die ρ_s-Werte an den Rändern der Modelle II und III etwas verfälscht, im Innern des Modells sind die ρ_s-Werte aller drei Modelle fast identisch.

Teil B: Die Variation der Amplitude der vertikalen Komponente des Magnetfeldes längs des Profils, normiert auf die Amplitude der horizontalen Komponente des für den geschichteten Halbraums des Modellrandes berechneten Magnetfeldes, aufgeteilt in Real- und Imaginärteil. Hierbei ergab sich, daß die für Modell I berechneten Amplitudenwerte (● ● ● ●) mit denen von WEIDELT fast identisch sind (die Differenzen lagen unter 5%). Man erkennt an der Zeichnung, daß die Anomalie des Magnetfeldes, die durch den Graben verursacht wird, an den Rändern der Modelle II und III noch nicht abgeklungen ist und daß die für diese beiden Modelle berechneten Amplitudenverhältnisse (Modell II × × × ×, Modell III gekennzeichnet durch: ○○○○) aber noch gut mit den Werten für Modell I übereinstimmen. Man kann daraus schließen, daß die Randbedingung für freie Werte trotz der vereinfachenden Annahmen (siehe Kapitel 4.7) befriedigend ist.

Teil A: Die Variation des Absolutbetrages der Amplitude der vertikalen Komponente des Magnetfeldes längs des Profils (berechnet aus den in Teil B aufgetragenen Werten). Die durchgezogene Kurve gibt die für Modell I berechneten Werte von der Mitte des Grabens bis zum Rand von Modell II wieder, die Kreuze (× × ×) die für Modell II berechneten Werte wieder. Die nach oben, bzw. nach unten gerichteten Haken geben Amplitudenverhältnisse wieder, die SCHMUCKER für das mit Modell II identische Modell berechnet hat. Hierbei wurden die durch ∧ gekennzeichneten Werte der vertikalen Komponente des Magnetfeldes aus den Werten für das elektrische Feld nach Gl. 4.8 ($\partial E_x/\partial y$) berechnet, die durch ∨ gekennzeichneten Werte dagegen mit einer Faltung des K-Operators nach $-K * (\partial E_x/\partial z)$.

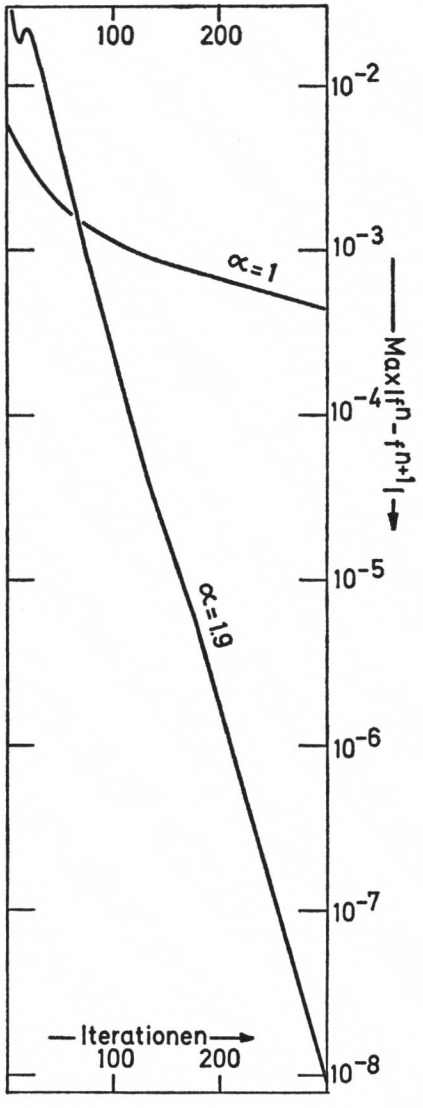


Abb. 4.13: Die Folge der maximalen Differenzen zwischen den Lösungen zweier aufeinanderfolgender Iterationen für den Realteil des elektrischen Feldes, berechnet für das Modell II in Abb. 4.12 $\alpha = 1$ mit *Gauß-Seidel* Iteration, $\alpha = 1.9$ mit sukzessiver Überrelaxation.

Vorbemerkungen zu den Abbildungen 4.18 *und* 4.19

Für das „Afar-Modell" wurde zunächst die Verteilung des elektrischen Feldes $E_x(y, z)$ berechnet (Abb. 4.18), wobei ein inhomogenes Magnetfeld vorgegeben wurde, dessen Amplitude an der Erdoberfläche unter dem Linienstrom 4mal so groß war wie die Amplitude des homogenen Magnetfeldes. Für die Abb. 4.19 wurde die Verteilung des Magnetfeldes $B_x(y, z)$ berechnet, wobei das Magnetfeld homogen war. Die Periode ist in beiden Abbildungen $T = 1000$ sec. Es wurden nun die Feldverteilungen zu verschiedenen Zeitpunkten während einer Periode berechnet, wobei die Zeitpunkte $\hat{t}_n$

$$\hat{t}_n = \frac{2\pi}{T} \cdot t_n = \frac{\pi}{12} \cdot n$$

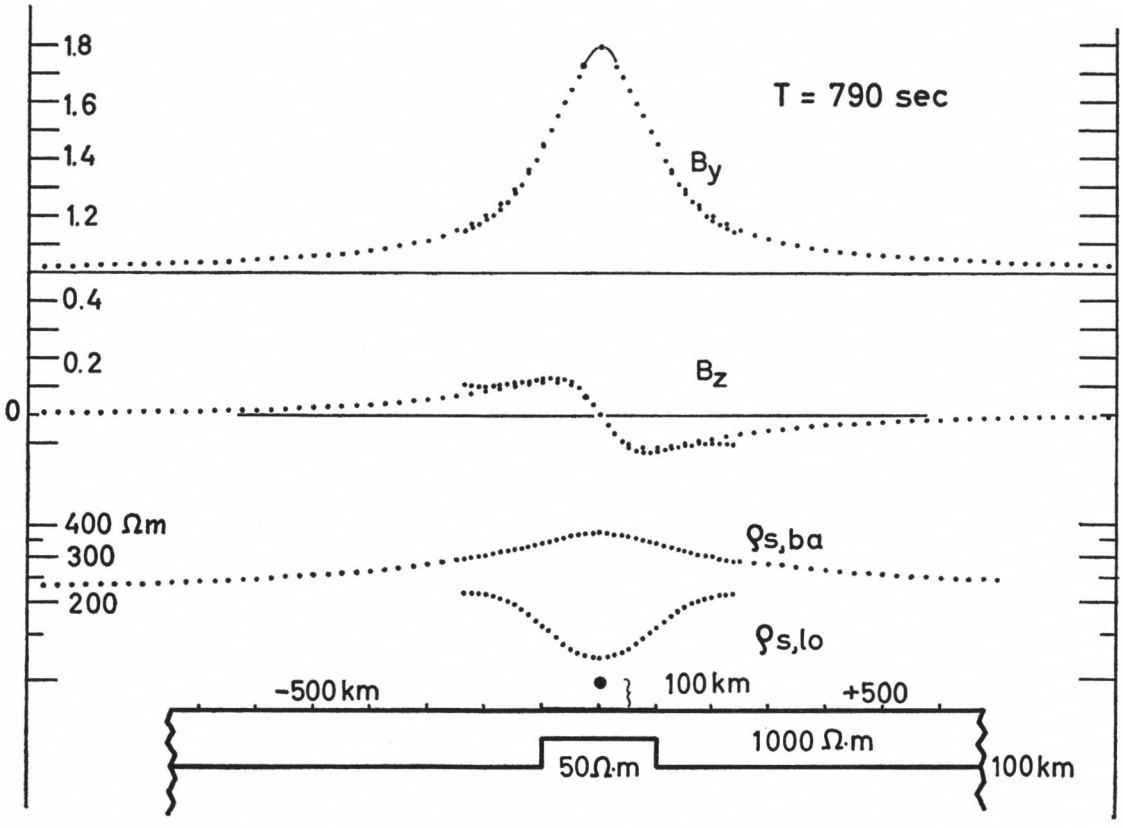


Abb. 4.14: Induktion durch ein inhomogenes Magnetfeld in einer 2-dimensionalen Leitfähigkeits-Anomalie. Die *normale* Leitfähigkeitsverteilung des Modells, eine 100 km mächtige Schicht mit 1000 Ωm über einem Halbraum mit 50 Ωm, ist dieselbe wie in Abbildung 3.9. Das angegebene Modell ist identisch mit dem Modell von SCHMUCKER (1971, Protokoll Rothenberge, Abb. 5), es soll als Test-Modell für das hier entwickelte Rechenprogramm dienen.

Vorgegeben wurde ein inhomogenes Magnetfeld, das sich aus einem homogenen Magnetfeld und dem Magnetfeld eines Linienstromes zusammensetzt. Das ergibt eine Verteilung der induzierenden Felder wie in Abbildung 3.9.

Verschiedene Versionen des Modells wurden gerechnet:

1. Punktabstand $\Delta y = 50$ km, die Ränder des Modells sind jeweils 1000 km vom Linienstrom entfernt.
2. Punktabstand $\Delta y = 25$ km, sonst wie 1. Dieser Punktabstand ist in der Abbildung wiedergegeben.
3. Punktabstand $\Delta y = 12.5$ km, die Ränder des Modells sind jeweils nur 250 km vom Linienstrom entfernt. Diese Version diente insbesondere zum Test der Randbedingungen (enger Punktabstand).

Ergebnisse: Dargestellt sind jeweils die Beträge der angegebenen Feldkomponenten.

Die Verteilung der Feldkomponenten längs eines Profils ist die gleiche (innerhalb der Zeichengenauigkeit) wie die von SCHMUCKER berechnete. Für die Modellversion 3 differieren die Werte etwas in der Nähe der Ränder.

Diskussion: Die Horizontalkomponente B_y des Magnetfeldes ist über der Anomalie gegenüber Abb. 3.9 auf maximal 1.8 B_0 verstärkt worden, und zwar durch die zusätzlich in der Anomalie induzierten Magnetfelder, die den in der normalen Leitfähigkeitsverteilung induzierten Magnetfeldern gleichgerichtet sind. Dagegen ist die Vertikalkomponente kleiner (0.135 B_0) geworden, da die in der Anomalie induzierte Vertikalkomponente der Vertikalkomponente des Magnetfelds des Linienstromes entgegengerichtet ist.

$\rho_{s,lo}$ ist der scheinbare spezifische Widerstand, der aus den am gleichen Ort existierenden Feldkomponenten berechnet wurde, während $\rho_{s,ba}$ aus dem elektrischen Feld einer „Wanderstation" und dem magnetischen Feld einer Basisstation berechnet wurde. $\rho_{s,lo}$ wird über der Anomalie erniedrigt, und zwar sowohl durch die hohe Leitfähigkeit der Anomalie als auch durch das inhomogene Magnetfeld des Linienstromes (vergl. Abb. 3.9). $\rho_{s,ba}$ ist zwar noch durch das inhomogene Magnetfeld des Linienstromes überhöht, aber nicht mehr so stark wie in Abb. 3.9, da die Leitfähigkeitsanomalie den Effekt des Linienstromes teilweise kompensiert.

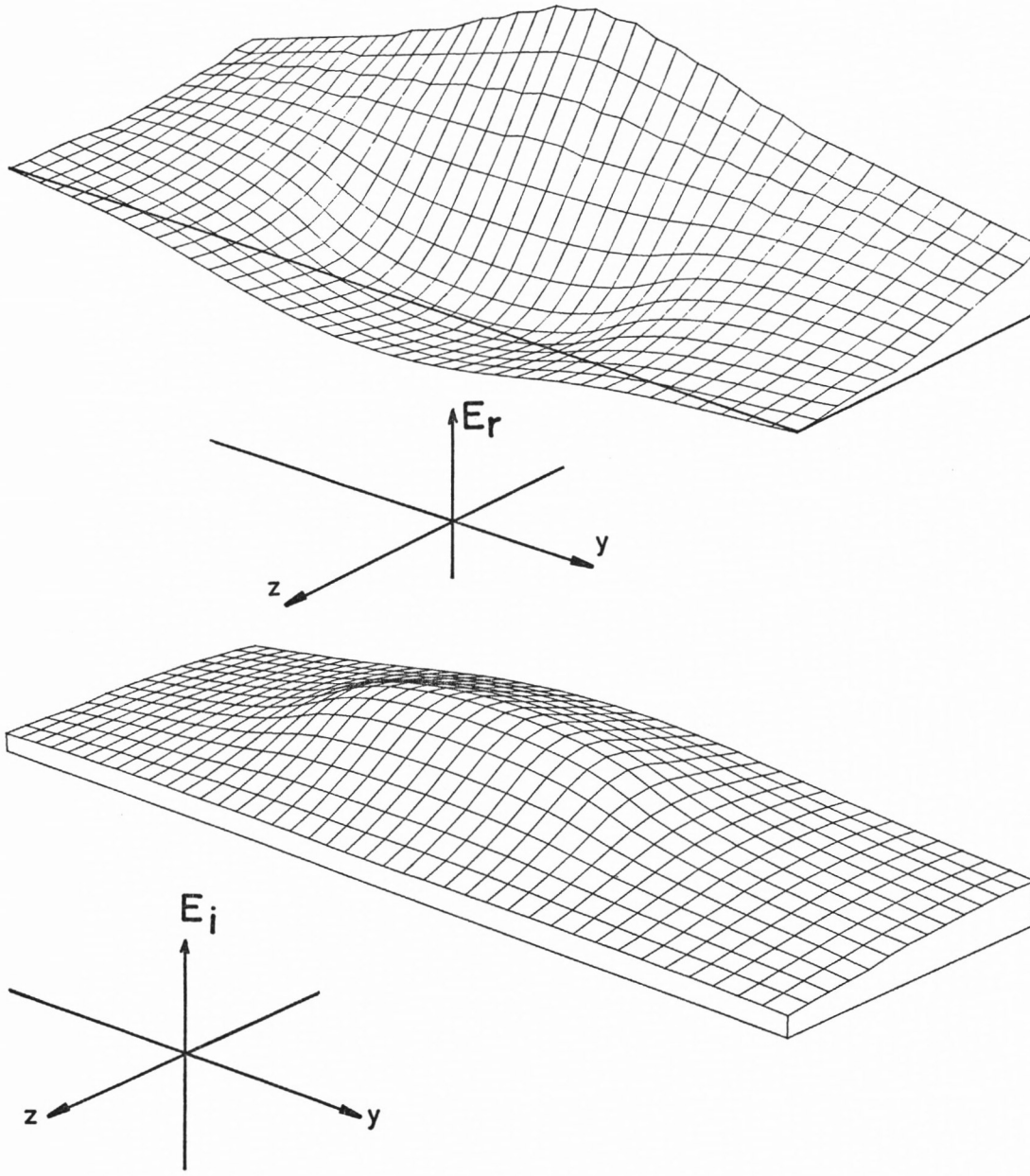


Abb. 4.15: Perspektivische Darstellung der Werte des elektrischen Feldes in der (y, z)-Ebene, und zwar nur des inhomogenen Anteils für die Modellversion 3 (Abb. 4.14)

Realteil: $E_r(y, z) = E(y, z)_{r,gesamt} - E(z)_{o,r}$ (obere Abb.)
Imag.teil: $E_i(y, z) = E(y, z)_{i,gesamt} - E(z)_{o,i}$ (untere Abb.)

wobei $E_o(z) = E_{o,r}(z) + i\, E_{o,i}(z)$ die E-Feldwerte für die normale Leitfähigkeitsverteilung bei homogener Anregung sind.

Die Höhe eines Gitterpunktes über der (y, z)-Fläche gibt die Amplitude des betreffenden Feldes an einem Gitterpunkt des Modells an. Beachte, daß die (y, z)-Ebene vertikal steht! Hierbei gibt jeweils die zweite Linie von oben den Verlauf der Amplitude längs der Erdoberfläche an.

Diese Darstellung soll veranschaulichen, wie groß die Inhomogenität der berechneten Felder an den Rändern des Modells 3 nach Abschluß des Iterationsprozesses war, was die Wirksamkeit der Randbedingungen (4.27) und (4.32) demonstriert.

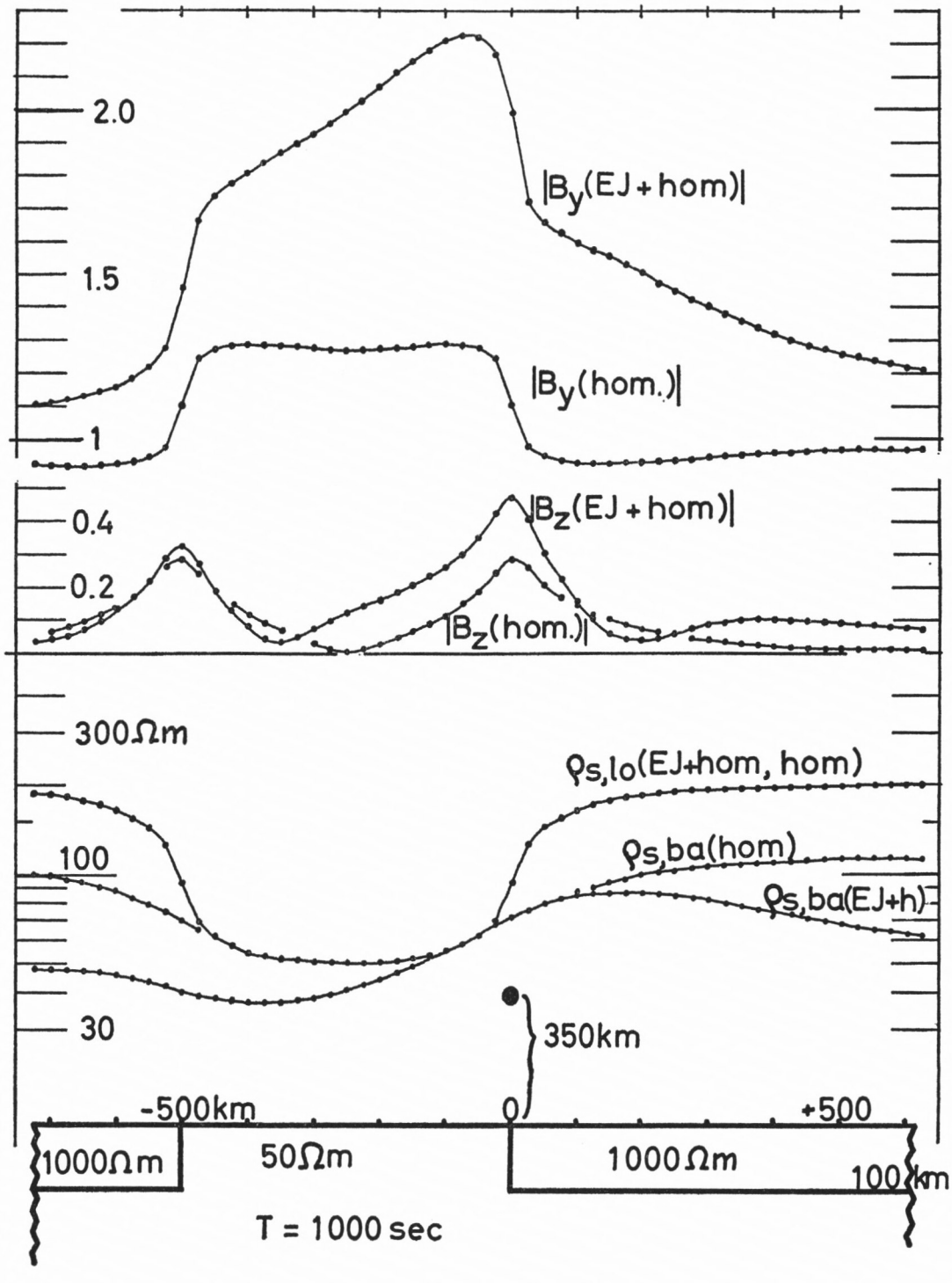


Abb. 4.16 (Text S. 68)

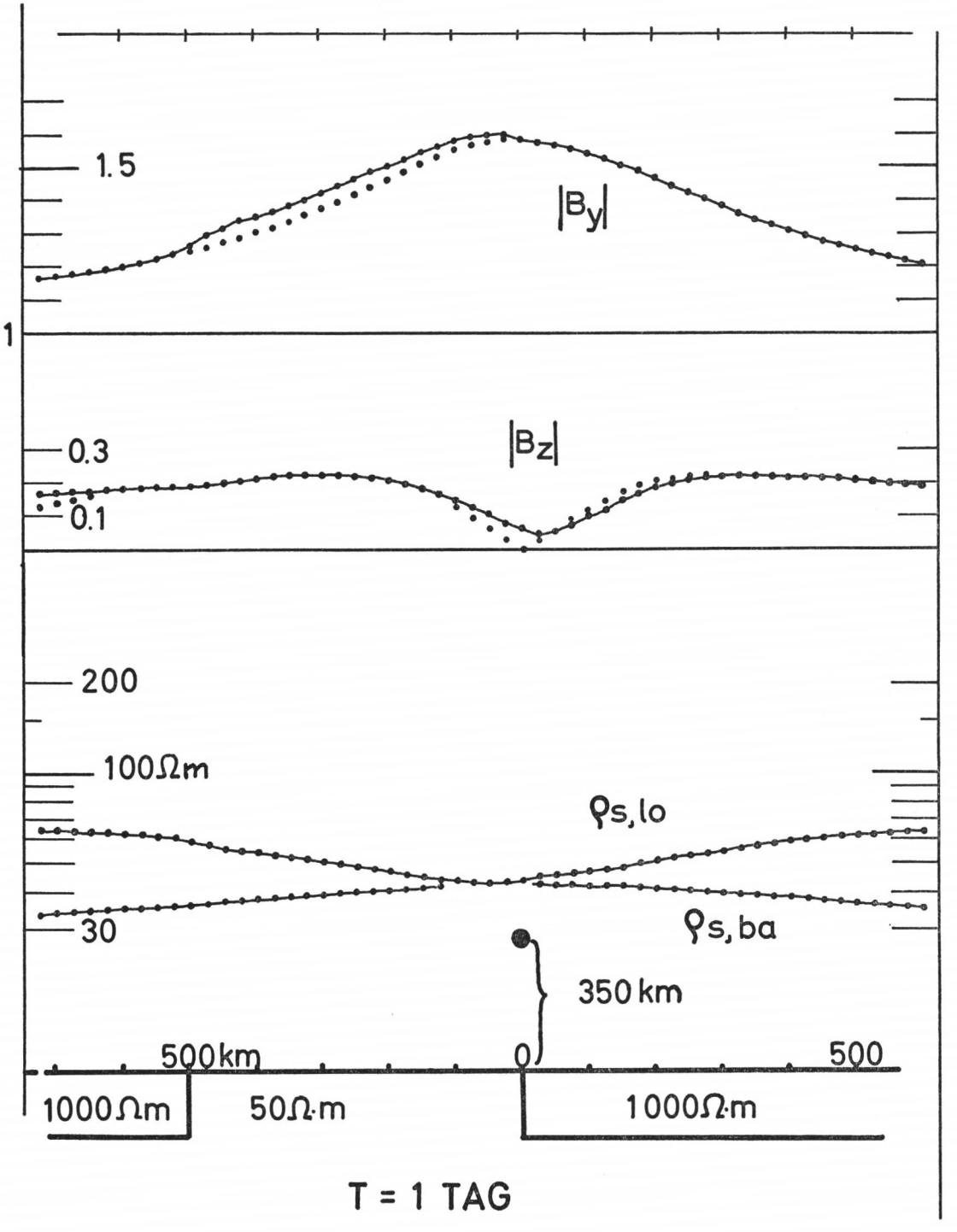


Abb. 4.17 (Text S.68)

Abb. 4.16: Vergleich der Ergebnisse bei homogener und inhomogener Induktion in einem Modell, das vereinfacht vermutlich die Leitfähigkeits-Verteilung längs eines NS-Profils durch die Afarsenke in Äthiopien zum SE-Plateau darstellt. Ein gutleitender Körper (50 Ωm) reicht von der Erdoberfläche bis in 100 km Tiefe. Süden = rechte Seite = SE-Plateau. In 350 km Höhe über dem Erdboden wird ein Linienstrom angenommen, der an der Erdoberfläche durch einen äquivalenten Flächenstrom mit der Bandbreite von 700 km ersetzt werden könnte. Zusätzlich wurde ein homogenes Magnetfeld überlagert, wobei die Stärke des vom Linienstrom erzeugten Magnetfelds und des homogenen Feldes unter dem Zentrum des Linienstromes an der Erdoberfläche gleich waren. Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse bei homogener Anregung eingezeichnet. Es sind nur direkt beobachtbare Feldkomponenten mit folgenden Bezeichnungen wiedergegeben:

$|B_y|$: Betrag der horizontalen Komponente des Gesamt-Magnetfeldes

$|B_z|$: Betrag der Vertikalkomponente des Gesamtmagnetfeldes.

Es wurden zwei Arten des scheinbaren spezifischen Widerstandes eingezeichnet:

$\rho_{s,lo}$: Hierbei wurde das elektrische Feld jeweils auf das Magnetfeld am gleichen Ort bezogen

$\rho_{s,ba}$: Hierbei wurde das elektrische Feld auf das Magnetfeld an einer Basisstation bezogen, die 50 km links (nördlich) vom Escarpment lag (dort ist auch $\rho_{s,lo} = \rho_{s,ba}$).

Für die Periode T = 1000 sec ergab sich bei homogener und inhomogener Anregung fast genau der gleiche scheinbare spezifische Widerstand $\rho_{s,lo}$. Die Erhöhung der Amplituden des elektrischen und die des magnetischen Feldes durch den Linienstrom kürzen sich also im Quotienten E_x/B_y wieder weg. Dagegen variiert $\rho_{s,ba}$ deutlich beim Wechsel von homogener zu inhomogener Anregung, da das elektrische Feld an allen Stationen des Profils stets auf dasselbe Magnetfeld der Basisstation bezogen wird.

Abb. 4.17: Induzierendes Magnetfeld und Leitfähigkeitsverteilung sind die gleichen wie in der vorherigen Abb. 4.16. Die Periode ist aber jetzt T = 1 Tag. Die Verteilung der Feldkomponenten längs eines Profils ist durch die *durchgezogenen* Kurven angegeben. Die *Punkte* geben die Änderung der Feldkomponenten für ein Modell *ohne die Anomalie* der Afarsenke wieder: Hiermit erkennt man, wie klein die durch die Anomalie induzierten anomalen Feldanteile bei dieser langen Periode geworden sind. Die Induktionsanomalie ist abgeklungen, so daß die durch den Linienstrom erzeugte inhomogene Feldverteilung deutlich zu erkennen ist. Der scheinbare spezifische Widerstand $\rho_{s,lo}$ für *homogene* Anregung ist nicht eingezeichnet: Er ist längs des Profils konstant 50 Ohm · m, entsprechend dem wahren spezifischen Widerstand des unteren Halbraumes. Dagegen ist $\rho_{s,lo}$ für *inhomogene* Anregung deutlich unter dem Zentrum des Linienstromes erniedrigt: Diese Erniedrigung wird also durch das inhomogene induzierende Magnetfeld verursacht, *nicht* durch die Leitfähigkeitsanomalie der „Afar"-Senke. $\rho_{s,ba}$ wird unter dem Zentrum des Linienstromes erhöht: Unter dem Linienstrom ist das induzierte elektrische Feld erhöht. Dagegen ist $\rho_{s,ba}$ in Richtung auf die Modellränder (N und S) zu klein, da es auf das Magnetfeld der Basisstation bezogen wurde, das dort einen überhöhten äußeren Anteil enthält (50 km nördlich vom Zentrum des Linienstroms).

waren. Die beiden Abbildungen sind also Momentaufnahmen, z. B. für die Verteilung von $E_x(y,z)$:

$$E_x(y,z,\hat{t}_n) = E_{x,real}(y,z) \cdot \cos(\hat{t}_n) + E_{imag}(y,z) \cdot \sin(\hat{t}_n)$$

Zeichnet man in diese Zahlentableaus die Linien gleicher E-Feld-Amplitude, so sind diese Linien *parallel zu den Magnetfeldlinien* (in Abb. 4.18). In Abb. 4.19 sind die Linien gleicher B_x-Feld-Amplitude parallel zu den E-Feldlinien. Denn (für Abb. 4.18) gilt:

$$\text{grad } E_x(y,z) = \left(0, \frac{\partial E_x}{\partial y}, \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

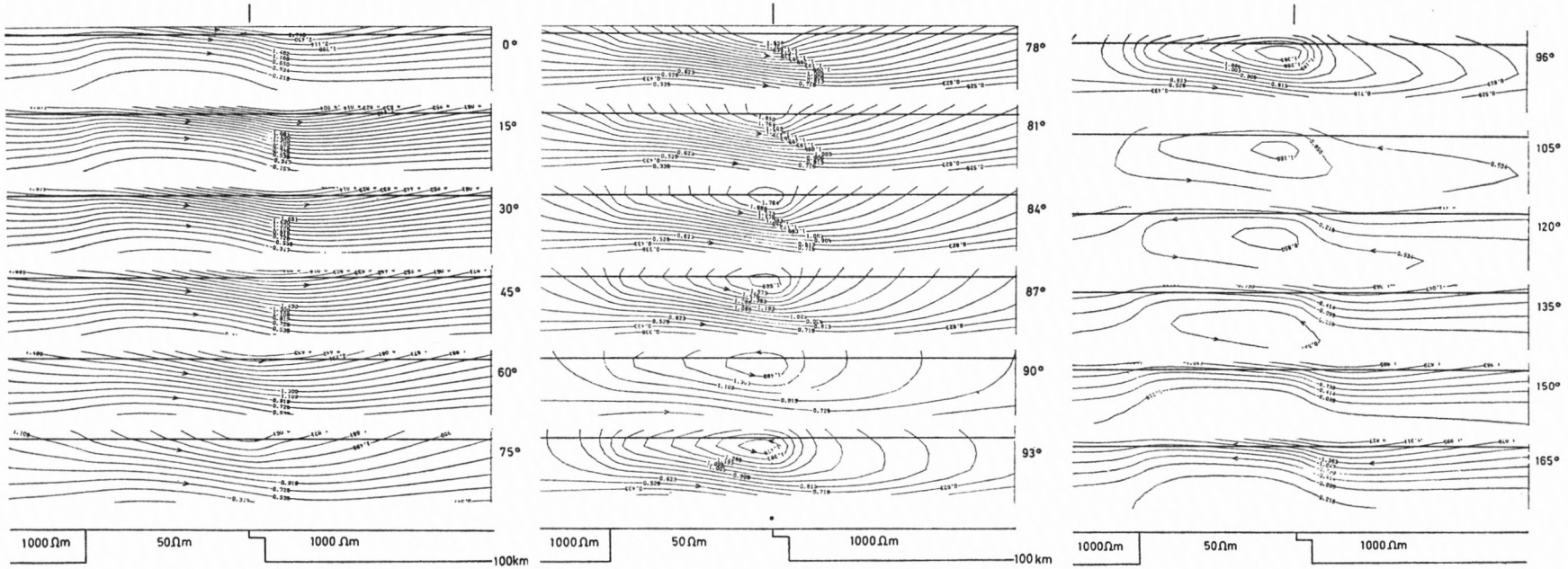
und

$$\vec{B}(y,z) = \left(0, \frac{\partial E_x}{\partial z}, -\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \frac{1}{i\omega}$$

also ist

$$\vec{B}(y,z) \cdot \text{grad } E_x(y,z) = 0$$

Die Isolinien wurden mit einem Rechenprogramm gezeichnet, das W. F. Jones (Edmonton, Canada) zur Verfügung gestellt hatte. Die Zahlen an den Isolinien geben die elektrische Feldstärke in 10^{-6} V/m (in Abb. 4.18), bzw. in nT (in Abb. 4.19) an. Die Dichte der Isolinien einzelner Tableaus ist nicht konsistent untereinander (aus rechentechnischen Gründen).



Diskussion der Abb. 4.18: Man stelle sich als induzierendes Magnetfeld ein sinus-förmig zeitlich variierendes Feld vor:

$$B^e(t) = B^e_o \sin \omega t$$

Die Ströme fließen senkrecht in die Bildebene hinein, bzw. heraus. Die gezeichneten Linien sind die Magnetfeldlinien des induzierenden + induzierten Magnetfeldes. Die Zahlen an den rechten Seiten geben jeweils den Zeitpunkt $\hat{t}_n$ an. Diese Zeitschritte variieren jeweils um 15° (linkes und ganz rechtes Bild), mit Ausnahme des mittleren Bildes, wo die Zeitschritte jeweils 3° betragen.

Dargestellt ist eine halbe Periode: An das rechte untere Bild für den Zeitpunkt 165° schließt sich das linke obere Bild wieder an, wobei aber die eingezeichneten Pfeile in Gegenrichtung zu denken sind. Im unteren Teil der drei Abbildungen ist jeweils das Modell eingezeichnet (Laterale Erstreckung 2000 km) und das Zentrum des Linienstroms, der in einer Höhe von 350 km angenommen wurde, was durch einen äquivalenten Strom mit einer Breite von 700 km an der Erdoberfläche ersetzt werden kann.

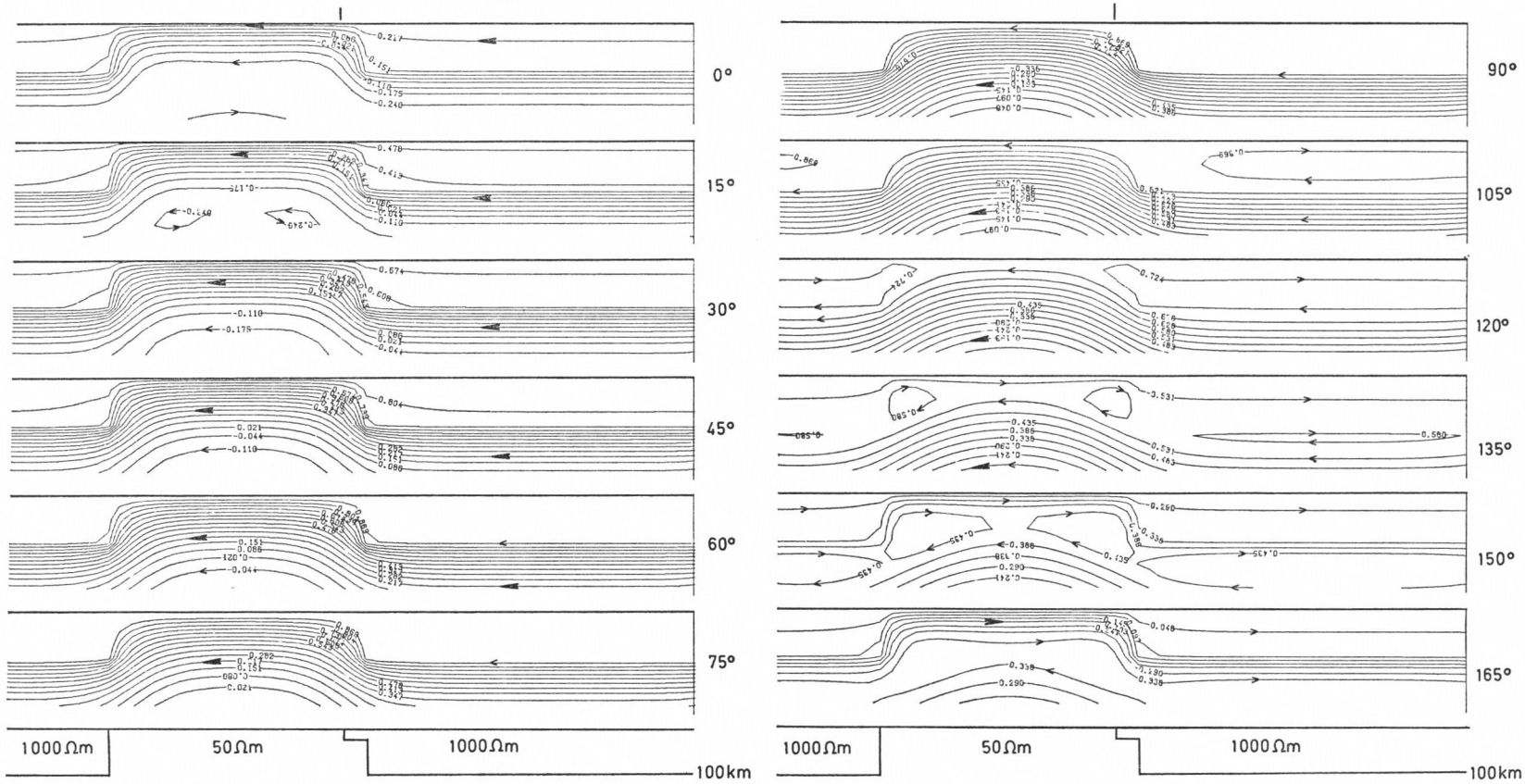
Linkes Bild: Die Ströme fließen in die Bildebene hinein, die Magnetfelder werden aus der hochleitfähigen Anomalie nach oben gedrängt (verringerte Eindringtiefe des induzierten Stromsystems) und werden unter dem Zentrum des Linienstroms in die Erde gedrängt. Zur Zeit von etwa $\hat{t} = 45°$ erreichen die induzierten Ströme ihr Maximum, also 45° bevor das induzierende Feld das Maximum der Intensität erreicht. Danach nimmt die Intensität der induzierten Ströme ab, während die Intensität des induzierenden Feldes zunimmt: Unter dem Zentrum des Linienstromes bildet sich ein fast symmetrisches Magnetfeld ab.

Die momentane Feldverteilung im Untergrund wird durch die unterschiedliche Selbstinduktivität der Gebiete unterschiedlicher Leitfähigkeit bestimmt. Die induzierten Felder in der Leitfähigkeitsanomalie zerfallen langsamer als in der schlechterleitendenden Umgebung, und werden auch langsamer wieder aufgebaut.

Die Überlagerung dieser in den Gebieten unterschiedlicher Leitfähigkeit unterschiedlich schnell zerfallender und sich aufbauender Felder erzeugt einen Magnetfeldwirbel etwa in der Mitte des Modells, der in den darauffolgenden Zeitpunkten tiefer in die Erde sinkt und schließlich die Umpolung der Felder an der Erdoberfläche bewirkt.

Rechtes Bild: Der Magnetfeldwirbel sinkt unter die Erdoberfläche, ab 135° ist das Magnetfeld an der Erdoberfläche umgepolt, die Ströme fließen jetzt aus der Bildfläche auf den Leser zu.

Man erkennt die in der Modellrechnung angewendeten Randbedingungen für die vier äußeren Ränder des Modells!



Diskussion der Abb. 4.19: In dieser Abbildung sind die elektrischen Ströme eingezeichnet, die senkrecht zur 2-dimensionalen Anomalie fließen (B-Polarisation), das induzierende Magnetfeld ist homogen.

Man erkennt, daß die Ströme in den oberen 100 km fast nur im Gebiet mit der hohen Leitfähigkeit fließen. Das Maximum wird hier kurz nach 45° erreicht (an der Erdoberfläche), danach sinkt das ganze Stromsystem tiefer in den Untergrund. Bei 105° ist die Tiefe so groß, daß der oberste Stromfaden nicht mehr bis an die Erdoberfläche in der Anomalie kommt, sondern im schlechteren Leiter umkehrt und zurückfließt. Ab 135° bilden sich Stromwirbel in der Anomalie aus, die sich an der Erdoberfläche wieder vereinigen und schließlich das neue, umgepolte Stromsystem ergeben.

5. INTERPRETATIONSVERFAHREN FÜR BESONDERE 3-DIMENSIONALE VERTEILUNGEN DER ELEKTRISCHEN LEITFÄHIGKEIT

In den oberen Kilometern der Erde existieren starke laterale Änderungen der Leitfähigkeit innerhalb kurzer Entfernungen, bedingt durch Sedimente, verwitterte und kristalline Gesteine u.s.w., während die Leitfähigkeit des tieferen Untergrundes vor allem von der Tiefe abhängt. Die Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit des tieferen Untergrundes kann aber durch inhomogene Leitfähigkeitsverteilung der oberen Deckschicht stark beeinflußt werden. Dieses Problem und dessen mögliche Lösungen sollen hier diskutiert werden. 3-dimensionale Körper mit anomaler Leitfähigkeit in der Deckschicht bzw. im tieferen Untergrund, die bei entsprechend kurzen bzw. langen Perioden 3-dimensionale Induktionsanomalien verursachen, werden dagegen hier nicht betrachtet.

Das Modell für die folgenden Diskussionen soll etwa folgendermaßen aussehen: (Abb. 5.1)

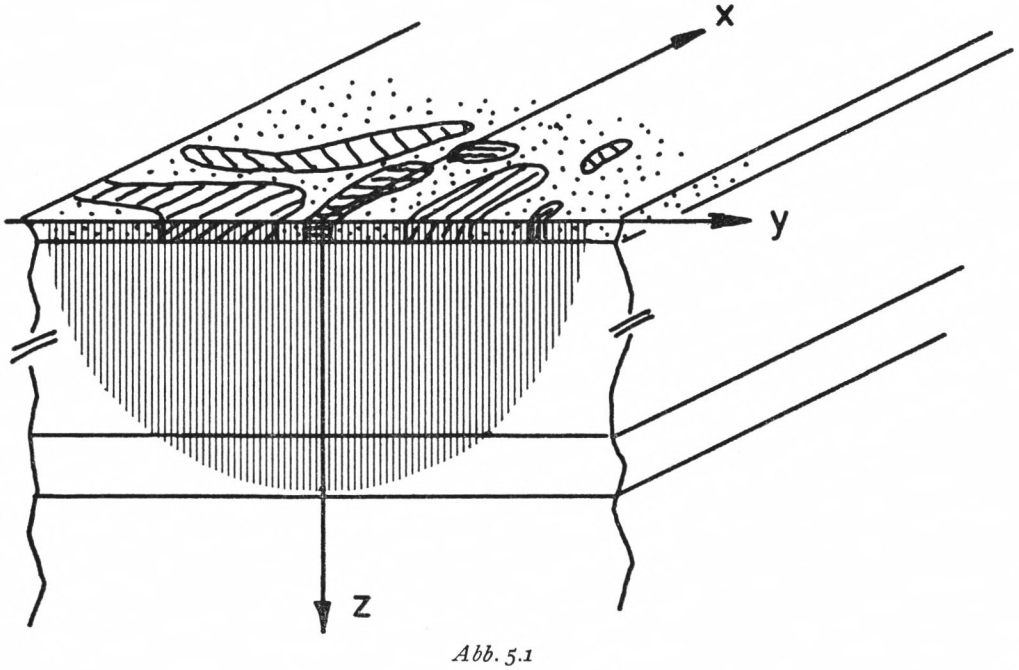


Abb. 5.1

Da der Induktionsraum viel größer sein soll, als die charakteristischen lateralen Erstreckungen der Anomalien in der Deckschicht, existieren keine Induktionsanomalien an der Erdoberfläche. Deshalb sind die tangentialen elektrischen Felder an der Erdoberfläche und der Unterseite der homogenen Schicht gleich groß und man kann die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit der Dünnen Deckschicht durch die Verteilung der integrierten Leitfähigkeit beschreiben:

$$S(x,y) = \int_0^d \sigma(x,y,z)\,dz = S_0 + S_{an}(x,y) \tag{5.1}$$

wobei d = Dicke der Dünnen Deckschicht,
S_0 eine mittlere integrierte Leitfähigkeit der Deckschicht ist,
$S_{an} = S(x,y) - S_0$.

Die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit des tieferen Untergrundes und die Geometrie des induzierenden Magnetfeldes kann 1- oder 2-dimensional (normales Feld) sein.

Um aber die folgende Diskussion übersichtlicher zu machen, sei der tiefere Untergrund aus horizontalen Schichten aufgebaut.

Das Magnetfeld induziere in dieser 1-dimensionalen Leitfähigkeitsverteilung ein homogenes elektrisches Feld. Es gilt (nach 1.7) die einfache Beziehung zwischen den Feldkomponenten

$$\begin{pmatrix} E_{x0}(y, z=0, T) \\ E_{y0}(y, z=0, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z(T) \\ -z(T) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x(y, z=0, T) \\ B_y(y, z=0, T) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Damit man das elektrische und das magnetische Feld an der Erdoberfläche $z = 0$ messen kann, wurde auf das Modell des tieferen Untergrundes eine dünne Platte der Mächtigkeit d und der integrierten Leitfähigkeit S_0 gelegt. Addiert man nun die örtlich variierende Leitfähigkeit $S_{an}(x, y)$ hinzu, so wird das homogene elektrische Feld (E_{x0}, E_{y0}) verzerrt zu (E_x, E_y)

$$\begin{pmatrix} E_x(x, y, z=0, T) \\ E_y(x, y, z=0, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x(x, y) & t_y(x, y) \\ p_x(x, y) & p_y(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{x0}(y, z=0, T) \\ E_{y0}(y, z=0, T) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Da die lateral variierende integrierte Leitfähigkeit nach den Voraussetzungen keine Effekte durch Induktion verursacht, sind die 4 Ortsfunktionen t_x, p_x, t_y und p_y nicht von der Periode abhängig. Eliminiert man das nicht beobachtbare homogene elektrische Feld, so erhält man aus der oberen und unteren Beziehung die tatsächlich meßbare Beziehung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x(x, y, T) \\ E_y(x, y, T) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -z(T) \cdot t_y(x, y) & z(T) \cdot t_x(x, y) \\ -z(T) \cdot p_y(x, y) & z(T) \cdot p_x(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x(y, T) \\ B_y(y, T) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_{xx}(x, y, T) & z_{xy}(x, y, T) \\ z_{yx}(x, y, T) & z_{yy}(x, y, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x(y, T) \\ B_y(y, T) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die Gleichung (5.4) ist die Beziehung zwischen den Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes in der 3-dimensionalen Leitfähigkeitsverteilung von Abb. 5.1. Das Ziel ist die Bestimmung von $z(T)$ und die Bestimmung von t_x, t_y, p_x und p_y. Dann könnte man die elektrische Leitfähigkeit des tieferen Untergrundes durch Inversion von $z(T)$ durch die in Kapitel 3.12 beschriebene Methode ableiten. Die Frage ist, ob die getrennte Bestimmung der 5 Größen aus den gemessenen Größen z_{xx}, z_{xy}, z_{yx} und z_{yy} möglich ist. Die spätere Diskussion wird ergeben, daß eine solche „vollständige Inversion" nicht möglich ist. Man muß deshalb auch die Methoden der Modellrechnung benutzen, wobei die vorzugebenden Modelle, die sich auf die Verteilung der integrierten Leitfähigkeit $S(x, y)$ beschränken, auch Meßergebnisse anderer geophysikalischer Methoden enthalten.

Eine bisher nicht genannte Meßgröße ist die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes. Sie gehört zu den „Inversions-Größen", da aus der örtlichen Verteilung der Vorzugsrichtung direkt die lateralen Änderungen der integrierten Leitfähigkeit $S(x, y)$ lokalisiert und deren Streichrichtungen bestimmt werden können.

5.1 *Modellrechnung für Dünne Schichten*

Die normale Verteilung der elektrischen und magnetischen Felder für den tieferen Untergrund kann mit den Methoden des Kapitels 3 berechnet werden. Für diese Felder kann man die Feldverteilung in der Dünnen Deckschicht mit der integrierten Leitfähigkeit $S(x, y)$ berechnen.

Die kontinuierliche Leitfähigkeits-Verteilung $S(x,y)$ wird durch eine diskrete Leitfähigkeitsverteilung $S_{i,j}$ angenähert: (siehe Abb. 5.2, die eine Aufsicht von oben darstellt).

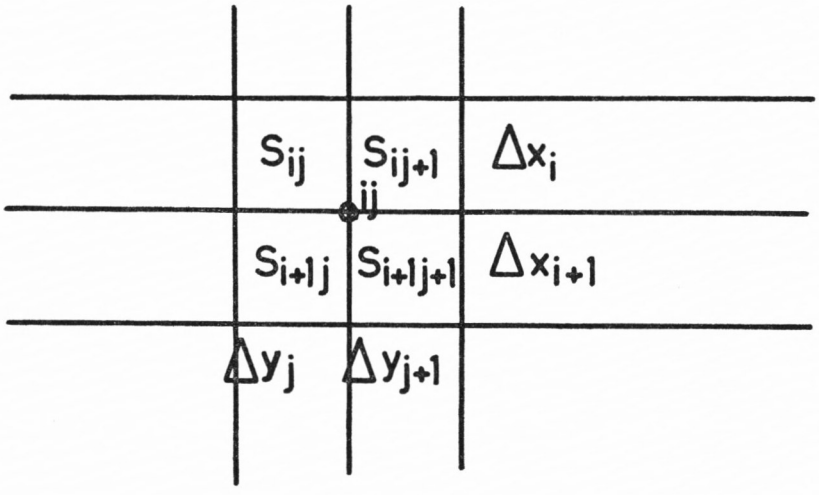


Abb. 5.2

Innerhalb eines Rechtecks der homogenen, integrierten Leitfähigkeit $S_{i,j}$ gilt die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{5.5}$$

mit

$$(E_x(x,y), E_y(x,y)) = -\operatorname{grad}\,(U(x,y)) \tag{5.6}$$

Diese Potentialgleichung gilt auch an den Rändern und den Eckpunkten dieses Rechtecks. Man kann deshalb die Differential-Gleichung (5.5) durch eine Differenzen-Gleichung für die Potentiale an den Eckpunkten analog zu der in Kapitel 4 beschriebenen Methode ersetzen. An den Eckpunkten sind aber auch die Potentialgleichungen für die angrenzenden Rechtecke mit den integrierten Leitfähigkeiten $S_{i+1,j}$, $S_{i,j+1}$ und $S_{i+1,j+1}$ gültig. Die 4 Differenzen-Gleichungen für das Potential $U_{i,j}$ werden zu einer Differenzen-Gleichung zusammengefaßt, wobei die Stetigkeitsbedingung div $j = 0$ berücksichtigt wird.

Die zu lösende Differenzengleichung für das Potential $U_{i,j}$ lautet dann:

$$A_{i,j} \cdot U_{i,j} = C^1_{i,j} \cdot U_{i,j+1} + C^2_{i,j} \cdot U_{i-1,j} + C^3_{i,j} \cdot U_{i,j-1} + C^4_{i,j} \cdot U_{i+1,j} \tag{5.7}$$

wobei die Koeffizieten $A_{i,j}$; $C^1_{i,j}$; $C^2_{i,j}$; $C^3_{i,j}$ und $C^4_{i,j}$ folgendermaßen zu berechnen sind:

$$C^1_{i,j} = D_1\left[\frac{S_{i-1,j}}{S_{i-1,j-1}} + \frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} + 2\right];\ D_1 = \frac{1}{\Delta x_{j+1}(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \tag{5.8}$$

$$C^2_{i,j} = D_2\left[\frac{S_{i-1,j-1}}{S_{i,j-1}} + \frac{S_{i-1,j}}{S_{i,j}} + 2\right];\ D_2 = \frac{1}{\Delta y_i(\Delta y_i + \Delta y_{i+1})}$$

$$C^3_{i,j} = D_3\left[\frac{S_{i,j-1}}{S_{i,j}} + \frac{S_{i-1,j-1}}{S_{i-1,j}} + 2\right];\ D_3 = \frac{1}{\Delta x_j(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})}$$

$$C^4_{i,j} = D_4\left[\frac{S_{i,j}}{S_{i-1,j}} + \frac{S_{i,j-1}}{S_{i-1,j-1}} + 2\right];\ D_4 = \frac{1}{\Delta y_{i+1}(\Delta y_i + \Delta y_{i+1})}$$

$$A_{i,j} = 4 \cdot \left[\frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} + C^1 - 4\,D_1 + C^2 - 4\,D_2 + C^3 - 4\,D_3 + C^4 - 4\,D_4\right]$$

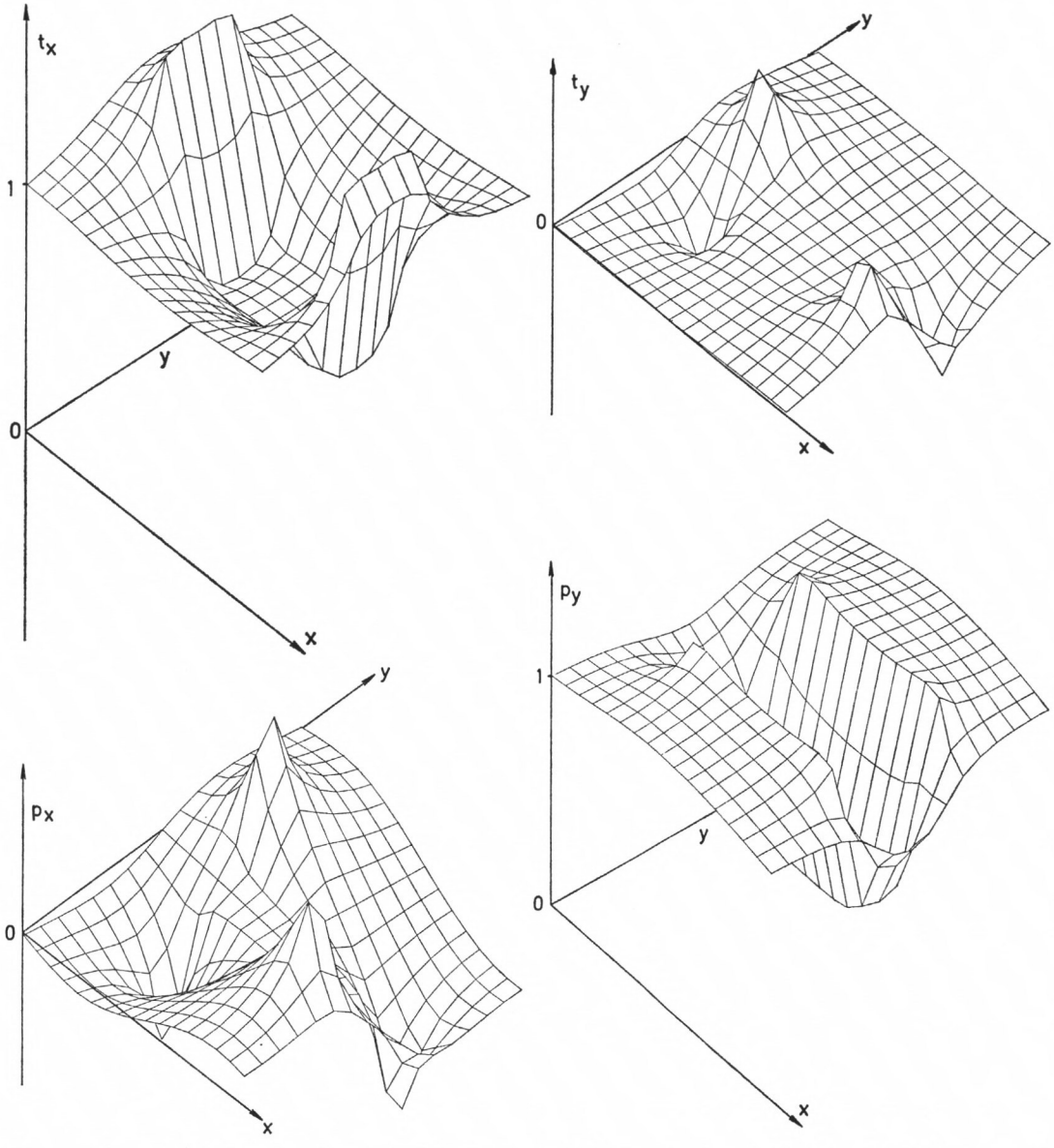


Abb. 5.3: Perspektivische Darstellung der Ortsfunktionen $t_x(x, y)$, $t_y(x, y)$, $p_x(x, y)$ und $p_y(x, y)$ für eine rechteckige Einlagerung höherer integrierter Leitfähigkeit als die der Umgebung. Für die homogene Umgebung ist

$$\begin{pmatrix} t_x = 1 & t_y = 0 \\ p_x = 0 & p_y = 1 \end{pmatrix}$$

Anschauliche Interpretation der Figuren, z. B. für t_x:

Es fließe ein homogener Strom nur in x-Richtung. t_x ist dann das Amplitudenverhältnis vom lokal beobachteten elektrischen Feld zum homogenen Feld $t_x = E_x(x, y)/E_{x0}$

Man sieht an der linken oberen Abbildung, daß das elektrische Feld an den schmalen Stirnseiten des Rechtecks „springt", da der integrierte Strom stetig ist, das Feld aber im Verhältnis $S_0/S(x, y)$ abnimmt. Dagegen ist das elektrische Feld längs der Flanken der rechteckigen Einlagerung stetig, da es parallel zu ihnen gerichtet ist.

t_y: Da $t_y(x, y) = E_y(x, y)/E_{x0}$ ist, kann man aus ihrer Darstellung erkennen, an welchen Stellen des Modelles die meisten Ströme in die Anomalie hineingezogen werden (an diesen Orten ist die größte Abweichung von einem Tensor mit 2-dimensionaler Symmetrie zu erwarten).

p_x und p_y sind die entsprechenden Abbildungen für ein homogenes regionales Stromsystem E_{y0} in y-Richtung.

Man gibt das Potentialfeld U_0 des normalen, in x-Richtung polarisierten elektrischen Feldes vor, indem man dem linken Rand das Potential $-U_0/2$ gibt, dem rechten Rand $+U_0/2$. Man berechnet dann für alle inneren Punkte des Gitternetzes das normale Potentialfeld. Damit hat man

$$E_{x0} = -\operatorname{grad} U_0 = -dU_0/dx \qquad (5.9)$$
$$E_{y0} = 0$$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (5.7) mit den Randbedingungen (5.8) verändert sich nun das Potentialfeld solange, bis es den Stetigkeitsbedingungen genügt. Konvergiert dieser Iterationsprozeß (was er der Erfahrung nach immer macht), so hat man

$$E_x(x,y) = -dU/dx \text{ und } E_y(x,y) = -dU/dy \qquad (5.10)$$

Da $E_{y0} = 0$ in diesem Rechenprozeß gesetzt wurde, hat man also: (nach Gleichung 5.3)

$$t_x = E_x(x,y)/E_{x0} \text{ und } p_x = E_y(x,y)/E_{x0} \qquad (5.11)$$

Im 2. Rechengang gibt man sich das Potential U_0 des normalen, aber in y-Richtung polarisierten elektrischen Feldes vor, $E_{x0} = 0$.

Man wiederholt dann den ganzen Rechenprozeß wie oben, und bekommt so

$$t_y = E_x(x,y)/E_{y0} \text{ und } p_y = E_y(x,y)/E_{y0} \qquad (5.12)$$

5.2 *Die Polarisations-Richtung und die Vorzugs-Richtung des erdelektrischen Feldes und ihre Beziehung zur lateralen Variation der Leitfähigkeit in einer Dünnen Deckschicht*

Setzt man die beiden Komponenten $E_x(T)$ und $E_y(T)$ (bzw. $B_x(T)$ und $B_y(T)$) zu der zur Erdoberfläche parallelen Komponente des Gesamtvektors $E_h(T) = (E_x(T), E_y(T))$, bzw. $B_h(T) = (B_x(T), B_y(T))$ zusammen, so sieht man, daß die Spitze des horizontalen Vektors während einer Periode T eine Ellipse umläuft. Die Richtung der großen Halbachse dieser Ellipse heißt die Polarisations-Richtung, während das Verhältnis von großer zu kleiner Halbachse Polarisations-Stärke genannt wird.

Die Polarisations-Richtung und die Polarisations-Stärke des *induzierenden* Magnetfeldes können sich sowohl mit der Zeit als auch mit der Periode beliebig ändern. Die Ursache hierfür sind die zeitlichen Variationen der Stromsysteme in der Ionosphäre und Magnetosphäre. In der Nähe des magnetischen Äquators fließen allerdings die ionosphärischen Ströme fast nur in EW-Richtung, sodaß das induzierende Magnetfeld fast linear in NS-Richtung polarisiert ist.

Die Polarisations-Richtung und die Polarisations-Stärke des *induzierten* erdelektrischen Feldes ist einerseits eine Funktion von Richtung und Stärke der Polarisation des induzierenden Magnetfeldes, andererseits aber auch eine Funktion der lateral variierenden elektrischen Leitfähigkeit des Untergrundes. Letzteres wird in diesem Kapitel untersucht. Zunächst soll noch die Polarisations-Richtung des an der Erdoberfläche beobachteten Magnetfeldes definiert werden: Das beobachtbare Magnetfeld setzt sich zusammen aus dem induzierenden und dem induzierten Magnetfeld. Die Polarisations-Richtung des induzierten Magnetfeldes ist einerseits eine Funktion der Polarisations-Richtung des induzierenden Magnetfeldes, andererseits aber auch – wie beim elektrischen Feld – eine Funktion der inhomogenen Leitfähigkeits-Verteilung. Der Einfluß der inhomogenen Leitfähigkeits-Verteilung ist jedoch auf das Magnetfeld viel geringer als auf das elektrische Feld. Die Ursache hierfür kann man sich leicht veranschaulichen an dem Beispiel einer 2-dimensionalen Leitfähigkeits-Verteilung, wie sie in Kapitel 4 an mehreren Beispielen gegeben

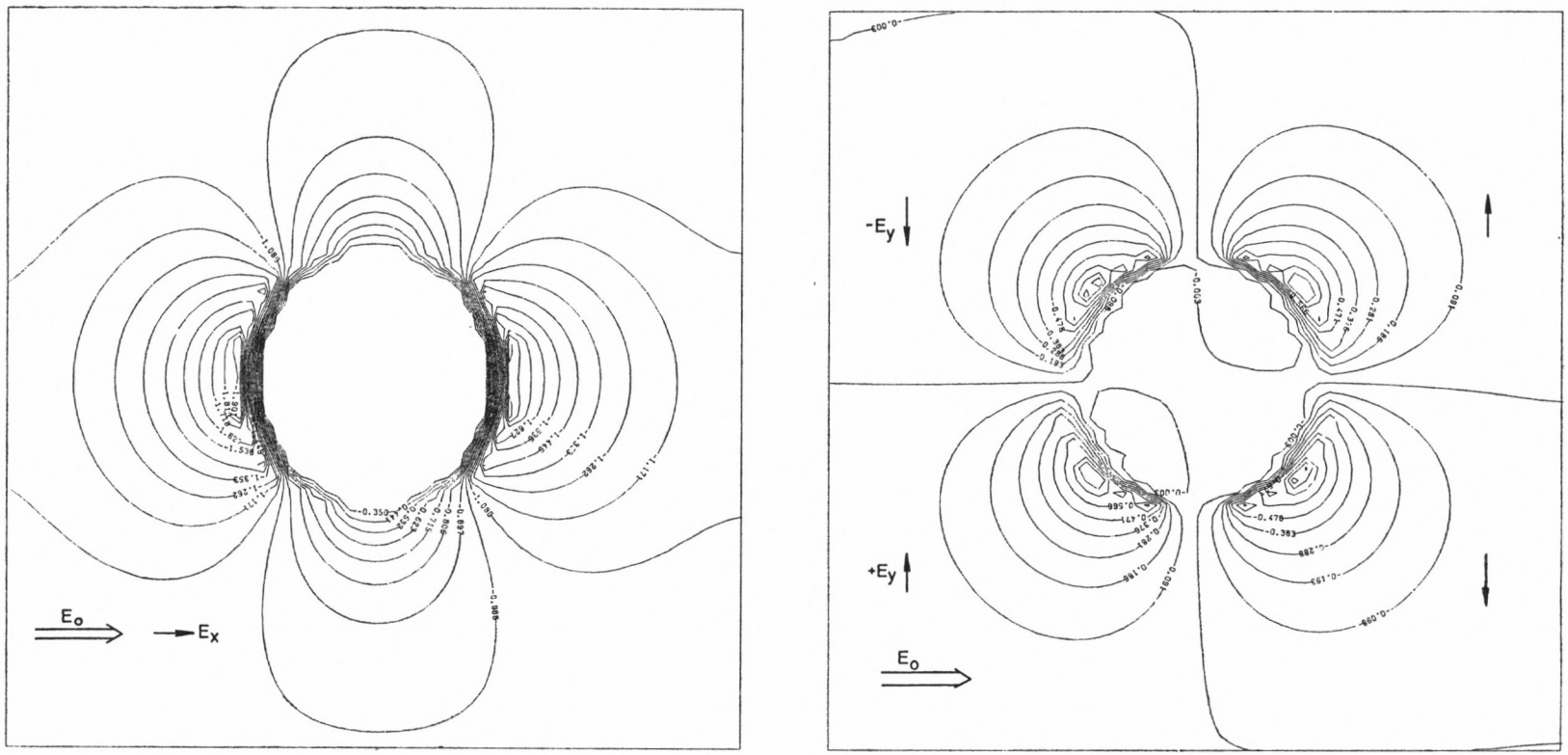


Abb. 5.4: Gutleitende Kreisscheibe in schlechtleitender Umgebung. Für ein regional homogenes E_0-Feld in x-Richtung sind die Ortsfunktionen für das Verhältnis $E_x(x, y)/E_0$ und $E_y(x, y)/E_0$ dargestellt (Isolinien des Amplituden-Verhältnisses). Man erkennt auch hier wiederum das unstetige Verhalten an den Stirnseiten der Kreisscheibe und das stetige Verhalten an den Flanken.

wurden: Das Magnetfeld einer solchen Leitfähigkeits-Verteilung enthält nur *einen* anomalen Anteil, nämlich den der E-Polarisation; das elektrische Feld enthält *zwei* anomale Anteile, nämlich den der E- und der B-Polarisation. Mit wachsender Periode werden die anomalen Anteile der E-Polarisation kleiner, während die anomalen Anteile der B-Polarisation unabhängig von der Periode erhalten bleiben. Bei dem in diesem Kapitel betrachteten Modell einer Dünnen Deckschicht existieren keine anomalen Anteile, die der E-Polarisation entsprechen, sondern nur noch die der B-Polarisation entsprechenden Anteile. Deshalb kann die Polarisations-Richtung und die Polarisations-Stärke des beobachteten Magnetfelds der Polarisations-Richtung des induzierenden Magnetfelds gleichgesetzt werden.

Es sei zunächst angenommen, daß die integrierte Leitfähigkeit der Dünnen Deckschicht eine Funktion nur von y sei:

$$S = S(y) \tag{5.13}$$

Die Streichrichtungen dieser Anomalien ist also die x-Richtung. In einem Koordinatensystem (x, y) existieren dann die einfachen Beziehungen

$$\begin{aligned} E_x(y,T) &= z_{xy}(y,T) \cdot B_y(T) = t(y) \cdot z(T) \cdot B_y(T) \\ E_y(y,T) &= z_{yx}(y,T) \cdot B_x(T) = -p(y) \cdot z(T) \cdot B_x(T) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Es sei außerdem angenommen, daß die Felder $(E_x(y,T), E_y(y,T))$ und $(B_x(T), B_y(T))$ linear polarisiert seien. Dann ist die Richtung der Polarisation für eine feste Periode T:

$$\tan \varphi_E = \frac{E_x}{E_y} \text{ und } \operatorname{cotan} \varphi_B = -\tan(\varphi_B + 90^\circ) = \frac{B_y}{B_x} \tag{5.15}$$

Andererseits folgt aus (5.14):

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{t \cdot z(T)}{-p \cdot z(T)} \cdot \frac{B_y}{B_x} \tag{5.16}$$

Aus (5.16) und (5.15) erhält man schließlich:

$$\tan \varphi_E = \frac{t}{-p} \cdot (-\tan(\varphi_B + 90^\circ)$$

$$\varphi_E = \arctan\left(\frac{t}{p} \tan(\varphi_B + 90^\circ)\right) \tag{5.17}$$

(5.17) ist die gesuchte Beziehung zwischen der Polarisations-Richtung des elektrischen und magnetischen Feldes für eine 2-dimensionale Anomalie in der Dünnen Deckschicht. φ_B ist durch die Polarisations-Richtung des induzierenden Magnetfelds vorgegeben, der Quotient t/p durch die 2-dimensionale Leitfähigkeits-Verteilung. Für den Fall, daß keine lateralen Inhomogenitäten in der Dünnen Deckschicht existieren, ist:

$$t = p \text{ also } \varphi_E = \varphi_B + 90^\circ \tag{5.18}$$

In diesem Fall ist die Polarisations-Richtung des elektrischen Feldes also stets senkrecht zu der Polarisations-Richtung des magnetischen Feldes. Zu einer Gleichverteilung der Polarisations-Richtungen des Magnetfeldes korrespondiert in diesem Fall ebenfalls eine Gleichverteilung der Polarisations-Richtungen des elektrischen Feldes.

In der Abb. 5.5 wird für den Fall, daß $t \neq p$ ist (und zwar speziell $t/p = 10$) die Funktion φ_E in Abhängigkeit von φ_B dargestellt. Man erkennt an dieser Darstellung, daß aus einer vorgegebenen Gleichverteilung der Polarisations-Richtungen des Magnetfelds eine Häufigkeits-Verteilung der Polarisations-Richtungen des elektrischen Feldes entsteht, die ihr Maximum entweder parallel (wenn $t/p > 1$) oder senkrecht ($t/p < 1$) zur Streichrichtung der Anomalie hat.

Jene Richtung, in der das Häufigkeits-Maximum der Polarisations-Richtungen des elektrischen Feldes existiert, wird die *Vorzugsrichtung* des elektrischen Feldes genannt (ANGENHEISTER, BERKTOLD, SENGPIEL, 1965). In einer 2-dimensionalen Anomalie gilt, daß die Polarisations-Richtung des elektrischen Feldes parallel oder senkrecht zur Vorzugsrichtung stets senkrecht zur Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes ist. In allen anderen Polarisationsrichtungen ist das elektrische Feld schiefwinklig zum magnetischen Feld.

Unter der Voraussetzung einer Gleichverteilung der Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes kann man die Verteilung der Vorzugsrichtungen allein aus Messungen des

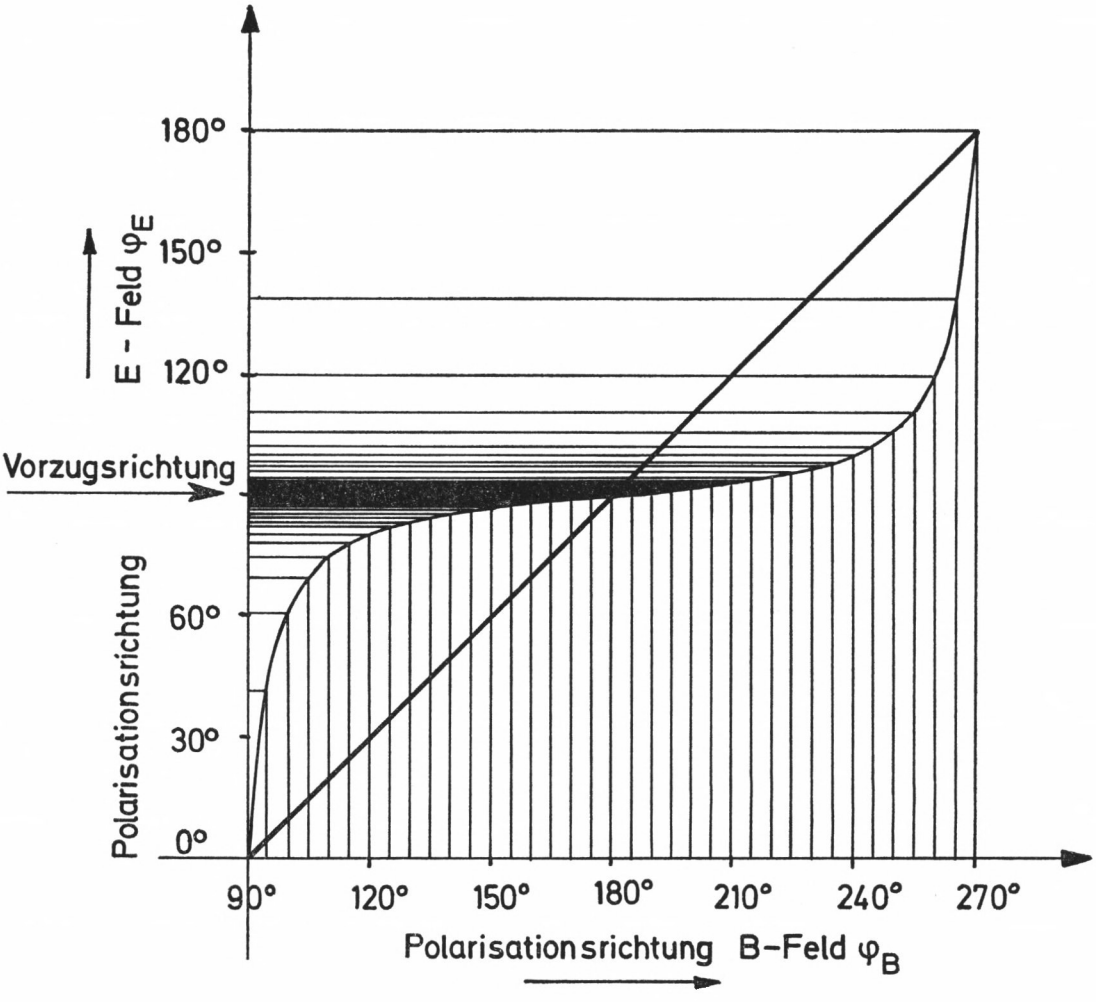


Abb. 5.5: Die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes φ_E als Funktion der Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes φ_B. Die Winkel werden beide im Uhrzeigersinn gezählt:

$\varphi_E = 0°$ ist senkrecht zur Streichrichtung (parallel zum Gradienten)
$\varphi_E = 90°$ ist parallel zur Streichrichtung.

Bei einer Gleichverteilung der Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes erhält man hier ein Häufigkeitsmaximum der Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes. Der Mittelwert dieses Häufigkeits-Maximums ist die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes (in diesem Fall parallel zum Streichen der Anomalie).

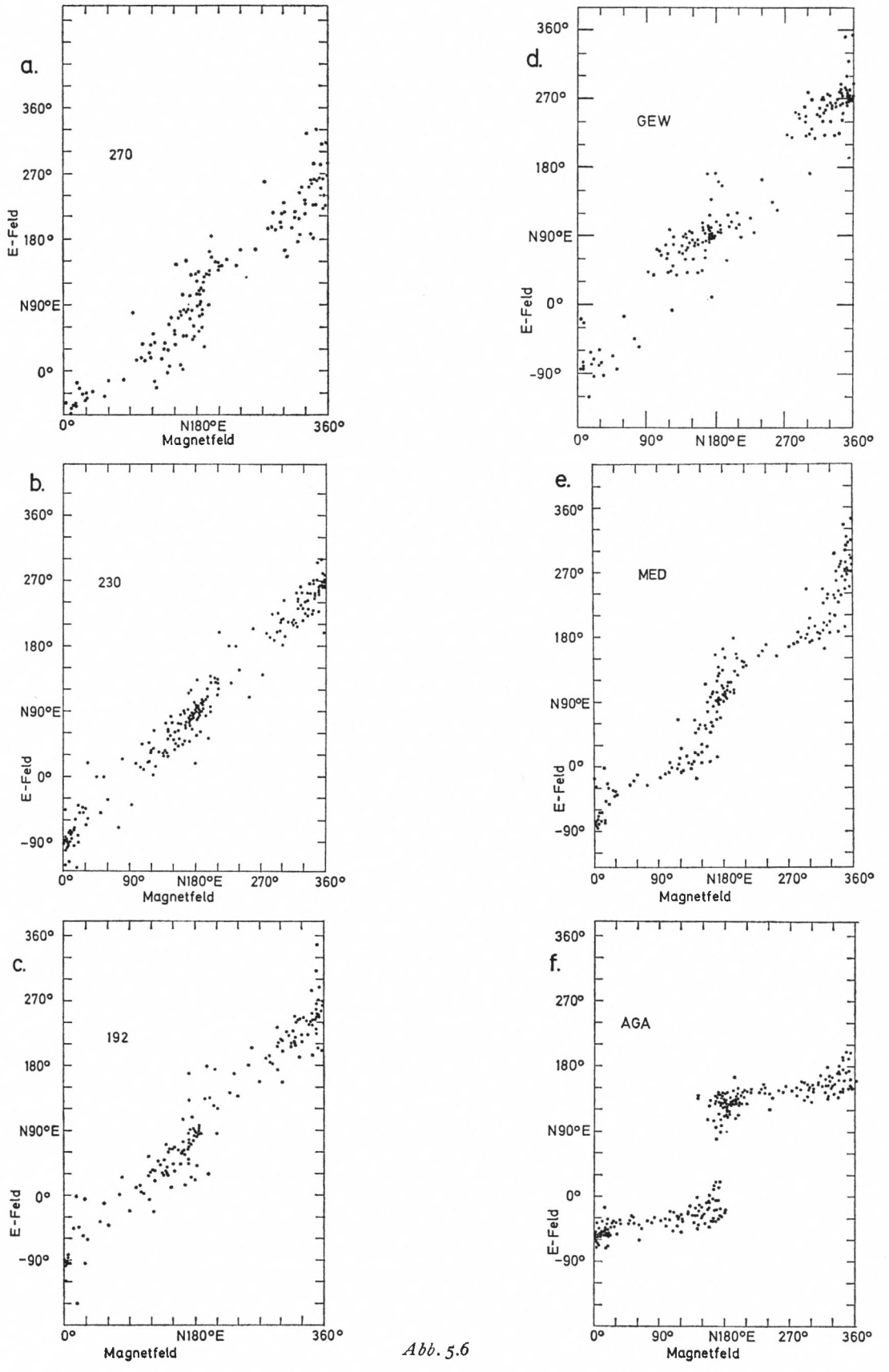

a.
270
E-Feld
360°
270°
180°
N90°E
0°
0°
N180°E
360°
Magnetfeld
b.
230
E-Feld
360°
270°
180°
N90°E
0°
-90°
0°
90°
N180°E
270°
360°
Magnetfeld
c.
192
E-Feld
360°
270°
180°
N90°E
0°
-90°
0°
N180°E
360°
Magnetfeld
d.
GEW
E-Feld
360°
270°
180°
N90°E
0°
-90°
0°
90°
N180°E
270°
360°
e.
MED
E-Feld
360°
270°
180°
N90°E
0°
-90°
0°
90°
N180°E
270°
360°
Magnetfeld
f.
AGA
E-Feld
360°
270°
180°
N90°E
0°
-90°
0°
90°
N180°E
270°
360°
Magnetfeld

Abb. 5.6

Abb. 5.6, a–f: Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes als Funktion der Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes an 6 Meßorten in Äthiopien für den Periodenbereich 480 sec bis 3840 sec. Am Ergebnis für die Station 230 (b.) erkennt man, daß dort keine Vorzugsrichtung existiert, da dort die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes stets senkrecht zu der Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes ist. Aus dem Ergebnis für die Station AGA (f.) kann man dagegen deutlich eine Vorzugsrichtung ableiten.

Man erkennt, daß die Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes ein Häufigkeitsmaximum bei etwa 0°, bzw. 180° haben, also etwa Nord–Süd. Aus diesem Grunde sind NS-Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes schwer zu erkennen, wie sie – wenn auch nur schwach ausgeprägt – bei den Stationen 270 und 192 existieren.

elektrischen Feldes bestimmen. Andererseits kann man die Vorzugsrichtung einfach aus den 4 Impedanzen z_{xx}, z_{xy}, z_{yx} und z_{yy} ausrechnen, falls die Leitfähigkeitsverteilung tatsächlich genau 2-dimensional ist:

Im Koordinatensystem der Streichrichtung, das in diesem Fall identisch ist mit dem Koordinatensystem für die Vorzugsrichtung, gilt

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z(T)\cdot t \\ -z(T)\cdot p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_y \\ B_x \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

Mit der Definition:

$$z_1 = z(T)\cdot\frac{t+p}{2} \qquad z_2 = z(T)\cdot\frac{t-p}{2} \tag{5.20}$$

gilt in einem um den Winkel φv aus der Vorzugsrichtung gedrehtem Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} E_x(\varphi v) \\ E_y(\varphi v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \sin(2\,\varphi v) & z_1 + z_2\cos(2\,\varphi v) \\ -z_1 + z_2\cdot\cos(2\,\varphi v) & -z_2\sin(2\,\varphi v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x(\varphi v) \\ B_y(\varphi v) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

$$= \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

Berechnet man aus diesem Tensor nun

$$\frac{z_{xx} - z_{yy}}{z_{xy} + z_{yx}} = \frac{\sin(2\varphi v)}{\cos(2\varphi v)} \text{ dann folgt für die Vorzugsrichtung} \tag{5.22}$$

$$\varphi v = 0.5 \arctan\frac{z_{xx} - z_{yy}}{z_{xy} + z_{yx}} \tag{5.23}$$

Beide Methoden, nämlich einerseits die Vorzugsrichtung nur aus Messungen des elektrischen Feldes und andererseits mit Hilfe der Beziehung (5.23) zu bestimmen, sind entweder an eine Gleichverteilung der Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes bzw. an die Existenz einer 2-dimensionalen Anomalie gebunden. Ohne Voraussetzung ist dagegen die Methode, die Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes als Funktion der Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes zu bestimmen. Diese Methode wurde deshalb für die Bestimmung der Vorzugsrichtungen an einigen Orten in Äthiopien benutzt (Abb. 5.6).

Das Problem bestand hierbei in der auf die Nord-Süd-Richtung beschränkten Verteilung der Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes. Eine Häufigkeitsanalyse der Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes alleine ergibt deshalb an fast allen Meßorten eine EW-Vorzugsrichtung (Berktold, 1974). Es ist aber zu bezweifeln, ob diese „Vorzugsrichtungen" durch die Leitfähigkeitsverteilung überhaupt beeinflußt wurden, sie also nicht nur das „Spiegelbild" der ionosphärischen Ströme sind. Auch eine Hauptsachentransformation nach der Beziehung (5.23) ist unsicher, da die statistische Sicherheit der Impedanzen gering ist, die zu der NS-Komponente des elektrischen Feldes, bzw. EW-Komponente des Magnetfeldes korrespondieren. Dagegen ergab die Bestimmung jeder einzel-

nen Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes als Funktion der Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes andere Vorzugsrichtungen als EW. Vergleicht man die in Abb. 5.6 a–d dargestellten Ergebnisse mit der Abb. 5.5, so erkennt man, daß an den meisten Meßorten keine lateralen Gradienten der Leitfähigkeit wirksam sind. Nur an den zwei Stationen, mit MED und AGA bezeichnet, Abb. 5.6 e und f, existieren deutlich Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes.

5.22 *Ergebnisse von Modellrechnungen für die Vorzugsrichtung*

Zunächst wird an einigen Beispielen demonstriert, wie die Verteilung der Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes zur Verteilung der integrierten Leitfähigkeit korrespondiert. Diese Verteilungen der Vorzugsrichtungen wurden mit der in (5.1) beschriebenen Modellrechnung bestimmt, wobei die Vorzugsrichtung jeweils mit der Beziehung (5.23) berechnet wurde. Die Anwendung dieser Beziehung scheint zunächst nicht berechtigt zu sein, da die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit nicht 2-dimensional ist. Tatsächlich ist aber die Voraussetzung nicht die 2-dimensionale Verteilung der Leitfähigkeit, sondern die der Felder. Diese Voraussetzung ist aber an den meisten Gitterpunkten des Modells erfüllt. D. h. es läßt sich oft ein Koordinatensystem an einem Gitterpunkt finden, in dem der Tensor der vier Impedanzen:

$$\begin{pmatrix} t_x & t_y \\ p_x & p_y \end{pmatrix} \text{— angenähert} \rightarrow \begin{pmatrix} t & o \\ o & p \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

wird. Die Vorzugsrichtung ist dann jeweils die Hauptachse dieses Koordinatensystems. Die Länge der eingetragenen Vorzugsrichtungen ist proportional zum Verhältnis t/p: Mit zunehmender Entfernung von einer „Anomalie" nähert sich das Verhältnis

$$t/p \rightarrow 1$$

d. h., die Vorzugsrichtung verschwindet (zieht sich in den Abbildungen auf einen Punkt zusammen).

5.23 *Theorie und Bestimmung der Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes bei beliebiger lateraler Variation der elektrischen Leitfähigkeit*

Mit folgendem Modell kann ein allgemein beobachteter Aspekt der Vorzugsrichtung in beliebigen Verteilungen $S(x,y)$ erklärt werden: Es sei eine 2-dimensionale Induktionsanomalie gegeben, sodaß für das Normalfeld (ohne die inhomogene Deckschicht) gilt:

$$E_{x_0} = z_\perp \cdot B_y \text{ und } E_{y_0} = z_\parallel B_x \tag{5.25}$$

für die Streichrichtung der „Anomalie" φ_1.
(Die Ortskoordinaten (x_0, y_0) an den Feldkomponenten werden weggelassen.)

Die Polarisationsrichtung des elektrischen Normalfeldes ist deshalb folgende Funktion der Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \arctan\left(\frac{z_\perp}{z_\parallel} \tan(\varphi_B - \varphi_1 + 90^\circ)\right) \tag{5.26}$$

In der Dünnen Deckschicht am selben Ort (x_0, y_0) existiere nun eine ebenfalls 2-dimensionale Anomalie, allerdings mit einer anderen Streichrichtung φ_2. Diese 2-dimensionale Anomalie verzerrt das gegebene Normalfeld. Zwischen den Polarisationsrichtungen des

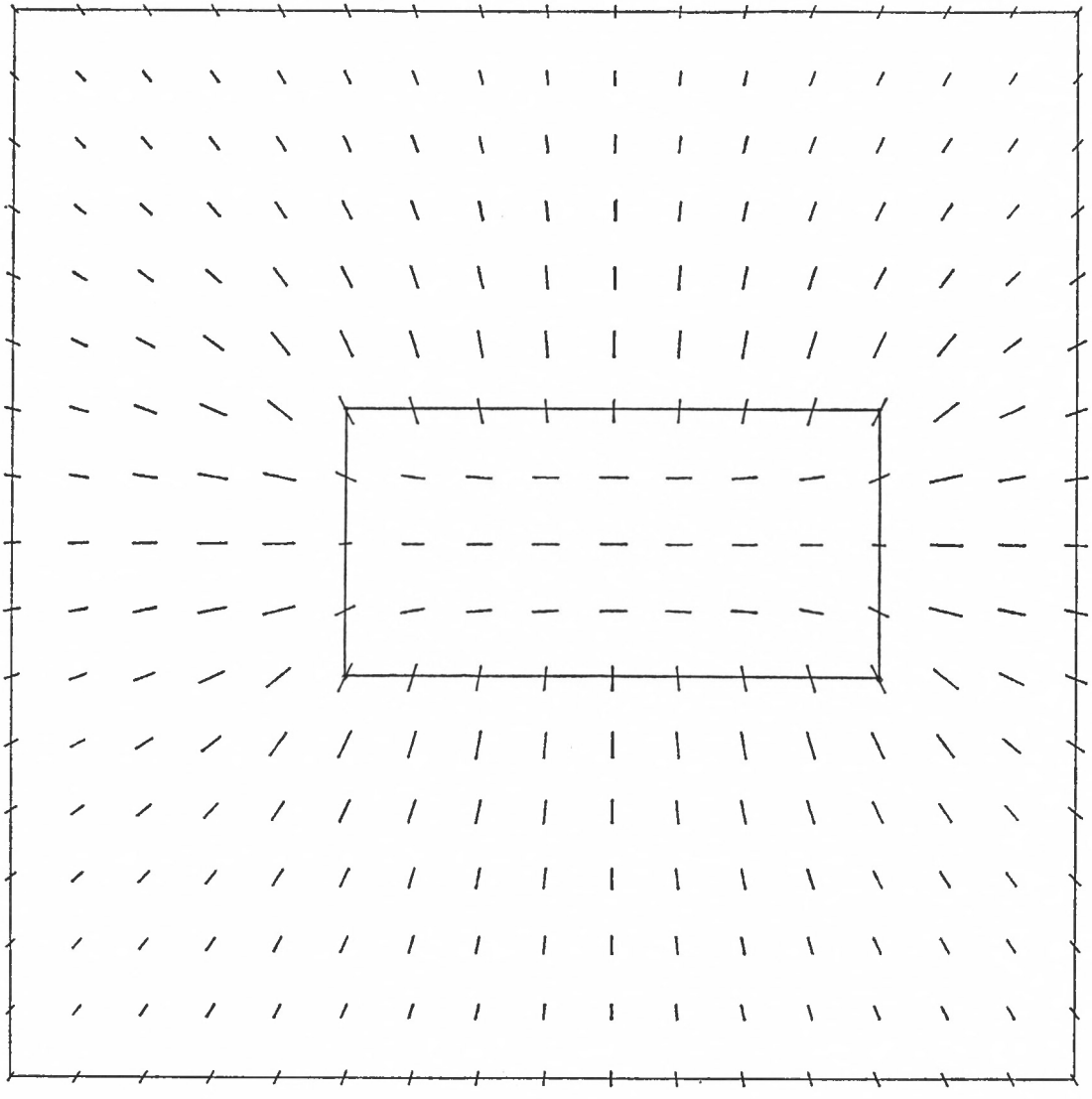


Abb. 5.7: Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes in dem Modell mit der rechteckigen, gutleitenden Einlagerung (siehe Abb. 5.3). Die Länge der Vorzugsrichtung ist proportional $(1 - p/t)$: Im Außenraum wird $p \approx t$, die Vorzugsrichtung verschwindet. Innerhalb der gutleitenden Anomalie ist die Vorzugsrichtung parallel zur Streichrichtung des Rechtsecks gerichtet. An den Breitseiten dreht sich die Vorzugsrichtung um 90°, dagegen ändert sie sich nicht an den schmalen Stirnseiten des Rechtecks, trotz der unterschiedlichen Leitfähigkeit! Läßt man das Rechteck in ein Quadrat schrumpfen, und vom Quadrat in eine kreisrunde Scheibe (hierbei werde der Einwand des Mathematikers überhört, das sei ja die Quadratur des Kreises) dann verschwinden die Vorzugsrichtungen im Innern der Scheibe (da dann die elektrischen Felder innerhalb der Scheibe homogene, von der Richtung des äußeren Feldes unabhängige Felder sind). Dagegen bleibt die Vorzugsrichtung bei dessen Transformationen im *Außen*raum etwa so wie hier beim Rechteck erhalten: Hieraus kann gefolgert werden, daß die Existenz von Vorzugsrichtungen und deren Richtungen nicht nur durch die Größe der Leitfähigkeitsänderung sondern auch durch die Geometrie der Anomalie bestimmt wird.

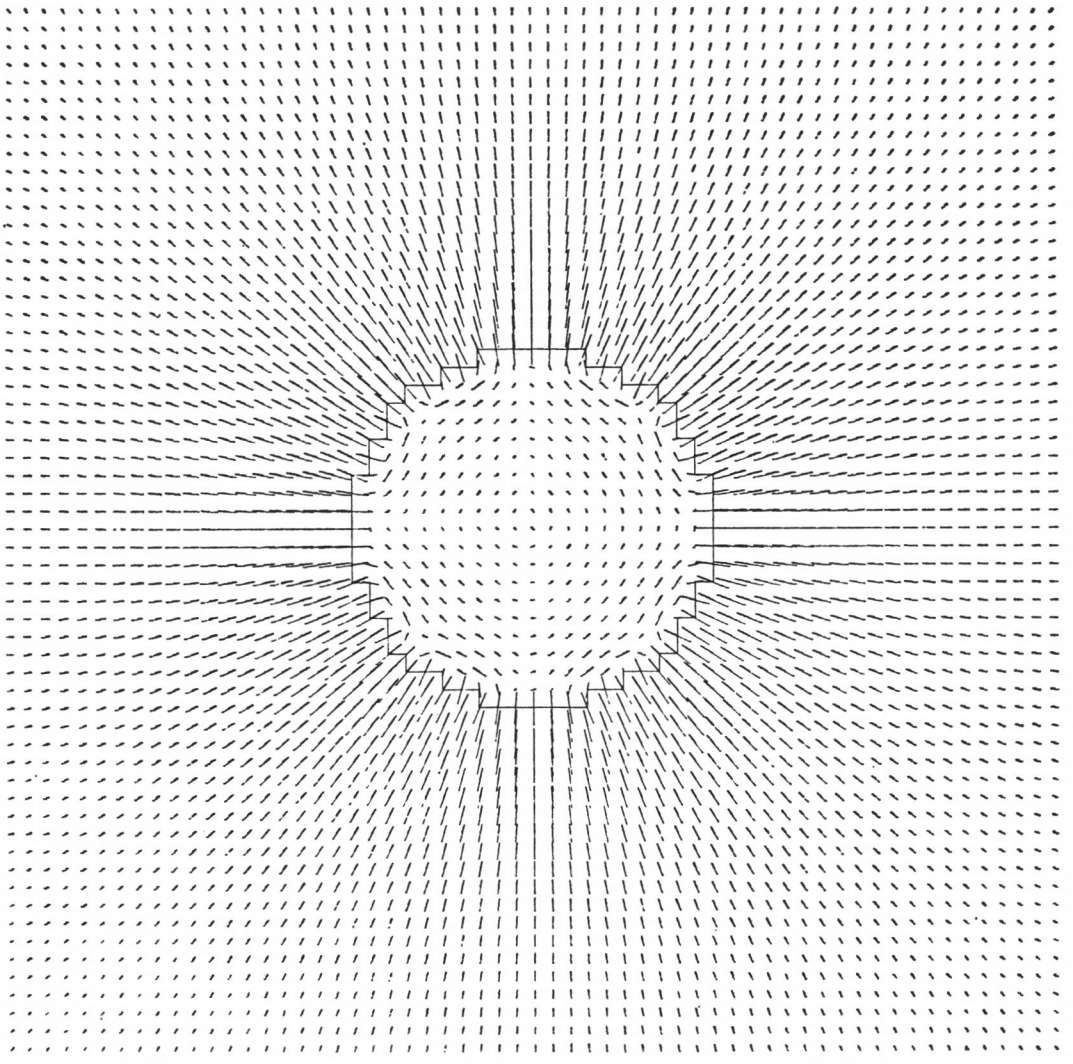


Abb. 5.8: Vorzugsrichtungen für die Kreisscheibe: Man sieht hier, daß der Kreis durch einen Polygonzug angegeben wurde. In einer idealen Kreisscheibe dürften keine Vorzugsrichtungen innerhalb der Scheibe existieren. Im Außenraum sind die Vorzugsrichtungen radial vom Mittelpunkt der Kreisscheibe weggerichtet.

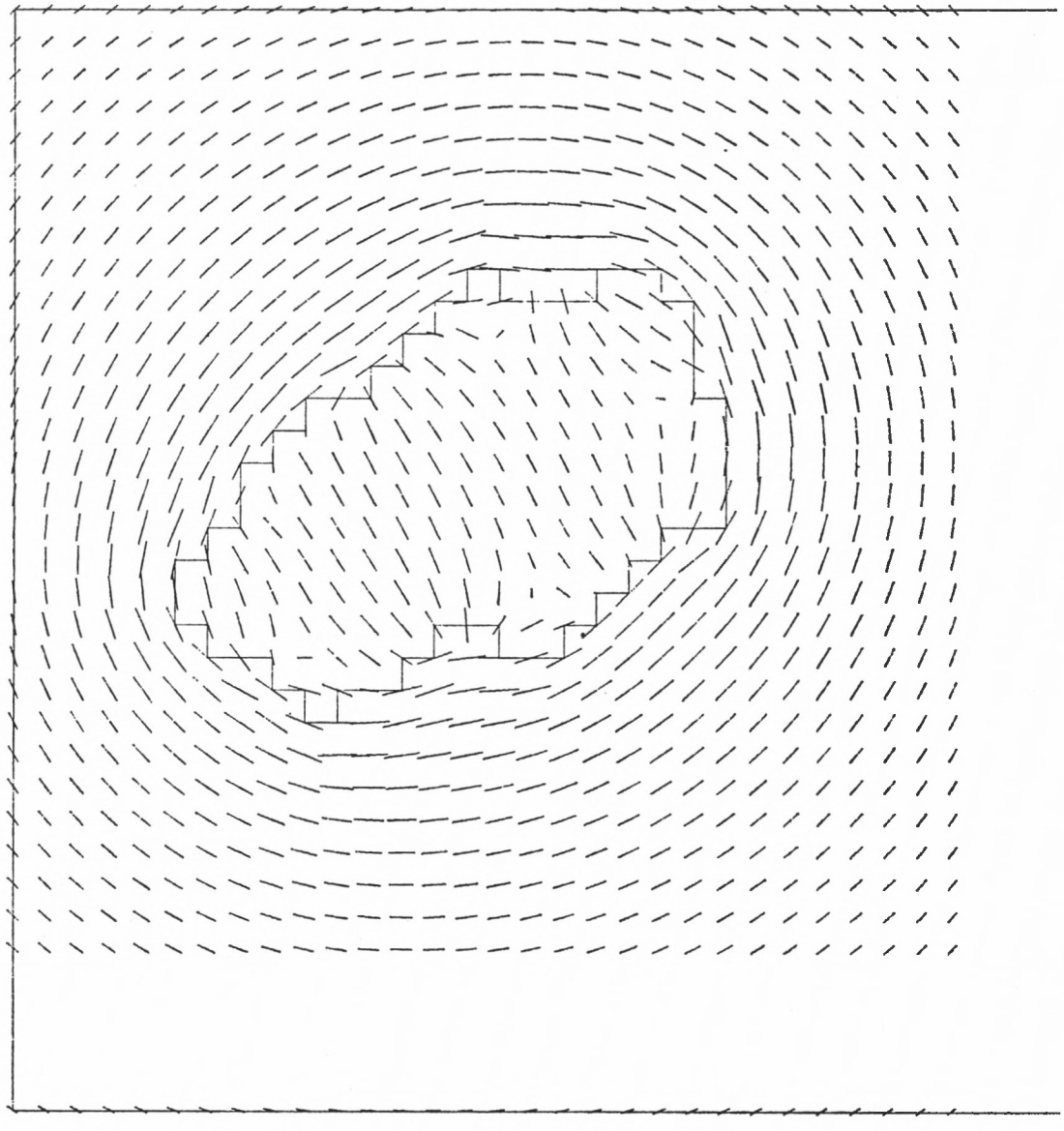


Abb. 5.9: Vorzugsrichtungen für eine schlechtleitende Einlagerung in einer gutleitenden Umgebung (Insel St. Helena im Ozean). Auf der Insel sind die Vorzugsrichtungen senkrecht zur langen Mittelachse der Insel gerichtet.

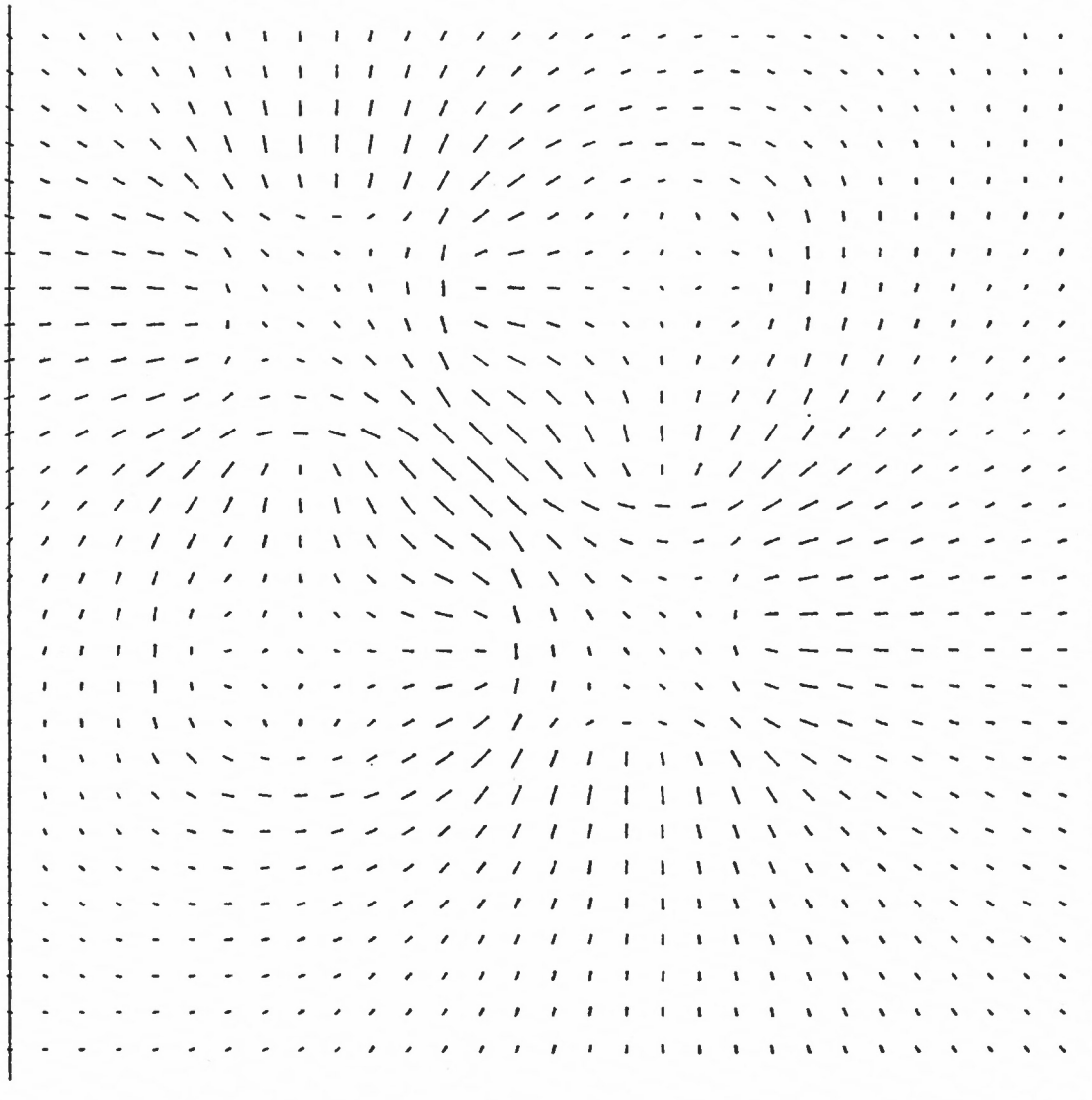


Abb. 5.10: Es wurden vier Quadrate in eine homogen leitende Umgebung eingebettet: Zwei diagonal gegenüberliegende Quadrate haben eine größere Leitfähigkeit als die Umgebung, die beiden anderen Quadrate eine kleinere Leitfähigkeit als die Umgebung. Es wurden keine Modellgrenzen eingezeichnet, um zu demonstrieren, daß man allein aus der Verteilung der Vorzugsrichtungen die Modellkonfiguration erkennen kann.

beobachtbaren elektrischen Feldes und den Polarisationsrichtungen des Normalfeldes besteht folgender Zusammenhang

$$\varphi = \varphi_2 + \arctan\left(\frac{t}{p}\tan(\varphi_0 - \varphi_2)\right) \tag{5.27}$$

Damit ergibt sich insgesamt für den Zusammenhang zwischen dem beobachtbaren elektrischen Feld und dem magnetischen Feld

$$\varphi = \varphi_2 + \arctan\left(\frac{t}{p}\tan\left((\varphi_1 - \varphi_2) + \arctan\left(\frac{z_\perp}{z_\parallel}\tan(\varphi_B - \varphi_1 + 90^\circ)\right)\right)\right) \tag{5.28}$$

Diese Funktion wurde für ein vorgegebenes Modell in Abb. 5.11 gezeichnet. Die Vorzugsrichtung, die man dieser Kurve im Bereich ihrer geringsten Steigung (= Maximum der Häufigkeit der Polarisationsrichtungen des E-Feldes) entnehmen kann, liegt zwischen den Vorzugsrichtungen, die man einerseits für die Induktionsanomalie und andererseits für die Deckschichtanomalie erwarten würde. Der *besondere Aspekt* dieser Kurve liegt darin, daß sie zu der Geraden „senkrecht" unsymmetrisch liegt. Alle Kurven für eine einzige 2-dimensionale Anomalie liegen stets symmetrisch zu dieser Geraden. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Geraden sind immer die Richtungen, in denen das elektrische Feld parallel zur Streichrichtung der Anomalie gerichtet ist, wobei das Magnetfeld senkrecht zum elektrischen Feld gerichtet ist, und die Richtung, in der das elektrische Feld senkrecht zur Streichrichtung gerichtet ist, wobei das magnetische Feld parallel zur Streichrichtung ist. Dagegen ist nun das elektrische Feld in Vorzugsrichtung polarisiert, wenn das Magnetfeld senkrecht zur Streichrichtung der Anomalie gerichtet ist, bzw. das elektrische Feld senkrecht zur Vorzugsrichtung, wenn das Magnetfeld parallel zur Streichrichtung gerichtet ist.

Zwar ist das hier zugrundegelegte Modell der zwei sich überlagernden 2-dimensionalen Anomalien noch sehr beschränkt in seiner Aussagekraft, aber die Beobachtung lehrt, daß diese Schiefwinkeligkeit von elektrischem und magnetischem Feld recht häufig ist. Ein Beispiel hierfür ist die beobachtete Kurve von Figur (5.6, f). Diese beiden Koordinatensysteme, das der Vorzugsrichtung für das elektrische Feld und das (in diesem Modell mit der Streichrichtung der Induktionsanomalie übereinstimmende) Koordinatensystem des Magnetfeldes zeichnen sich zudem dadurch aus, daß die Kohärenz zwischen den Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes maximal ist. Man kann deshalb diese beiden Koordinatensysteme unabhängig von einem zugrundegelegten Modell folgendermaßen bestimmen:

Gibt man eine Gleichverteilung der Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes vor, so ist die Kohärenz der zueinander orthogonalen Komponenten B_x und B_y sehr klein und unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems. Dagegen ist die Kohärenz der zueinander orthogonalen Komponenten des hierzu korrespondierenden elektrischen Feldes nur für ein einziges Koordinatensystem sehr klein, nämlich das der Vorzugsrichtung (Haak, 1972). Sucht man nun zu jeder dieser Komponenten des elektrischen Feldes die maximal kohärente Komponente des Magnetfeldes, so sind diese Komponenten meist nicht senkrecht zu den Komponenten des elektrischen Feldes (siehe Abb. 5.12).

Den Zusammenhang der beiden Methoden, die beiden ausgezeichneten Koordinatensysteme des elektrischen und des magnetischen Feldes zu bestimmen, nämlich einerseits über die Abhängigkeit der Polarisationsrichtungen und andererseits über die Methode der Minimalen und Maximalen Kohärenz, klärt eine Auswertemethode von W. Kiessling (1970), die im folgenden dargestellt wird.

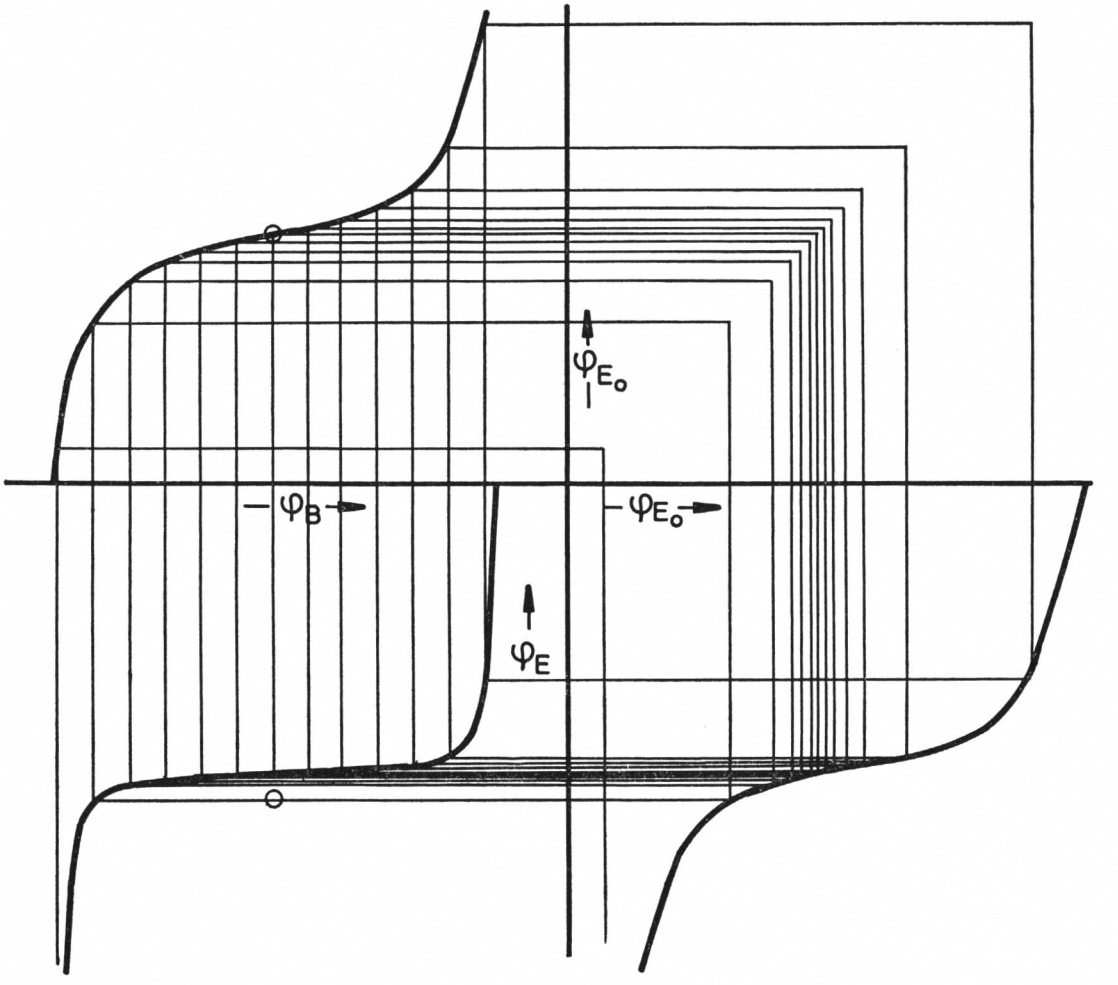


Abb. 5.11: Graphische Konstruktion der Vorzugsrichtung bei Überlagerung zweier 2-dimensionaler Anomalien verschiedener Streichrichtung. Im *linken oberen* Teil der Abbildung gibt die „Schlangenkurve" den Zusammenhang zwischen den Polarisationsrichtungen des magnetischen Feldes (senkrechte Striche im gleichen Abstand) und den Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes (waagrechte Striche mit Häufung bei der Vorzugrichtung) für die 1. Anomalie an, Gl. (5.26). Die Vorzugsrichtung ist parallel (oder senkrecht) zur Streichrichtung der Anomalie. Im *rechten unteren* Teil der Abbildung gibt die „Schlangenkurve" den Zusammenhang zwischen den Polarisationsrichtungen der elektrischen Felder der 1. Anomalie (senkrechte Striche) und der 2. Anomalie (waagrechte Striche) an, Gl. (5.27). Da die 1. Anomalie der 2. Anomalie bereits eine gehäufte Verteilung von Polarisationsrichtungen anbietet, produziert die 2. Anomalie in dem hier dargestellten Fall eine noch stärkere, etwas schiefe Häufung der Polarisationsrichtungen. In den Schnittpunkten der polarisationsrichtungen der 2. Anomalie mit den Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes ergibt sich die resultierende „Schlangenkurve" (*linker unterer Teil*), Gl. (5.28). Der kleine Kreis in der oberen linken Abbildung gibt an, daß die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes in Vorzugsrichtung (also in Streichrichtung der Anomalie, bzw. senkrecht zu ihr) senkrecht zur Polarisationsrichtung des Magnetfeldes ist (Fall der E- oder B-Polarisation). Im unteren, linken Teil der Abbildung gibt der kleine Kreis an, wo die Polarisationsrichtung des zur Streichrichtung der Anomalie 1 senkrechten, bzw. parallelen Magnetfelds senkrecht zur Polarisationsrichtung des resultierenden elektrischen Feldes sein würde, es aber jetzt nicht mehr ist:

Bei Überlagerung mehrerer Gradienten der Leitfähigkeit sind die kohärenten Richtungen von elektrischem und magnetischem Feld nicht mehr senkrecht zueinander.

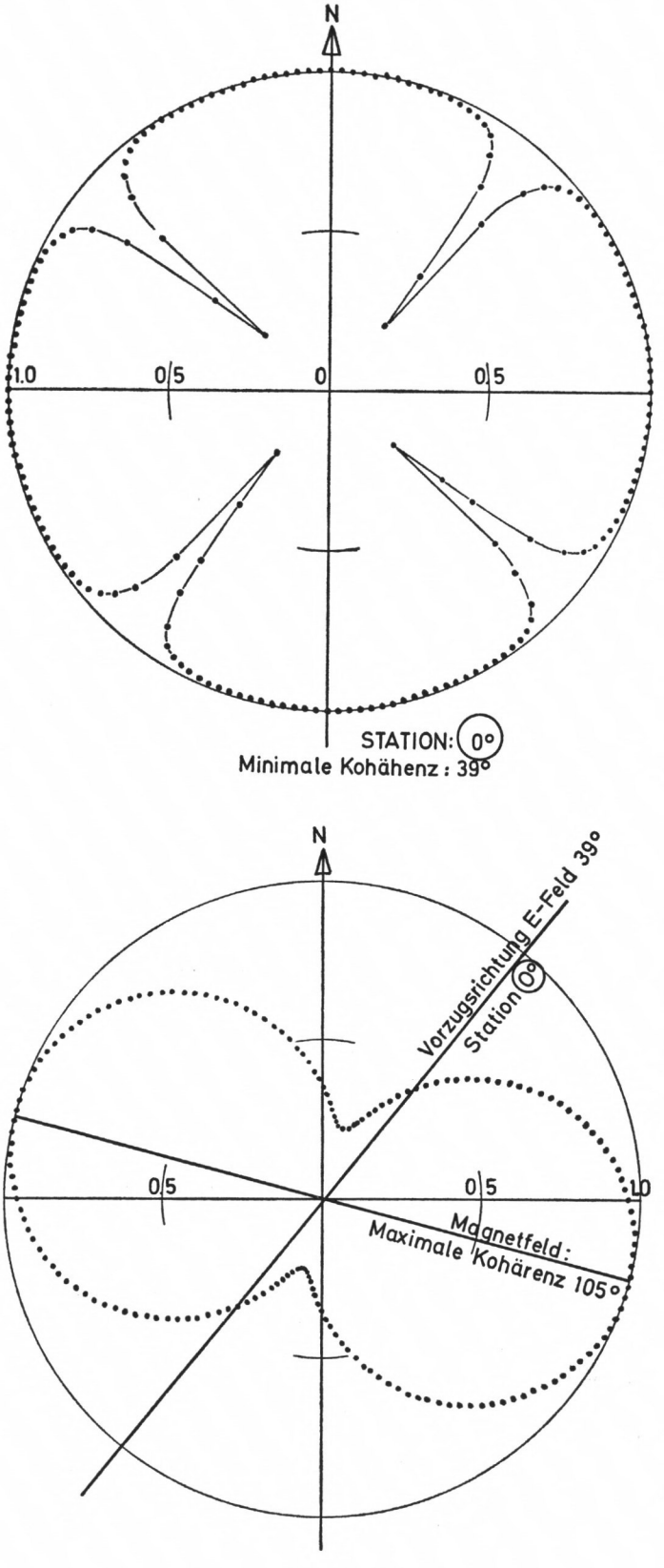


Abb. 5.12: Anwendungsbeispiel für die Methode der Minimalen und Maximalen Kohärenz. Vorgegeben wurde ein Modell der Leitfähigkeitsverteilung, in dem eine Induktionsanomalie die Streichrichtung N 15° E hat, wobei die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes parallel zur Streichrichtung ist, überlagert von einer Anomalie mit der Streichrichtung N 0° E mit einer Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes N 90° E.

Die *obere* Figur gibt die Kohärenz zwischen den zueinander orthogonalen Komponenten des elektrischen Feldes als Funktion des Azimuts des Koordinatensystems an: Im Koordinatensystem der Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes N 39° E ist die Kohärenz minimal, d. h. die Komponente des elektrischen Feldes in Vorzugsrichtung ist linear unabhängig von der Komponente des elektrischen Feldes senkrecht zur Vorzugsrichtung.

In der *unteren* Figur ist die Kohärenz zwischen der Komponente des elektrischen Feldes in Vorzugsrichtung mit einer Komponente des Magnetfeldes wiedergegeben: Die maximale Kohärenz wird erreicht, wenn das Koordinatensystem des Magnetfeldes mit der Streichrichtung der Induktionsanomalie übereinstimmt.

Die 4 Impedanzen des Tensors

$$\begin{pmatrix} z_{xx}(\varphi_E, \varphi_B) & z_{xy}(\varphi_E, \varphi_B) \\ z_{yx}(\varphi_E, \varphi_B) & z_{yy}(\varphi_E, \varphi_B) \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

sind Funktionen der Orientierung des Koordinatensystems sowohl des elektrischen Feldes φ_E, als auch des magnetischen Feldes φ_B. Stellt man diese Variation der Impedanz-Beträge für alle voneinander unabhängigen Orientierungen der beiden Koordinatensysteme durch Linien gleicher Impedanzbeträge in einem φ_E,φ_B Koordinatensystem dar, so erhält man ein „*Impedanz-Gebirge*", dessen Morphologie die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes und die dazu kohärente Richtung des Magnetfeldes angibt.

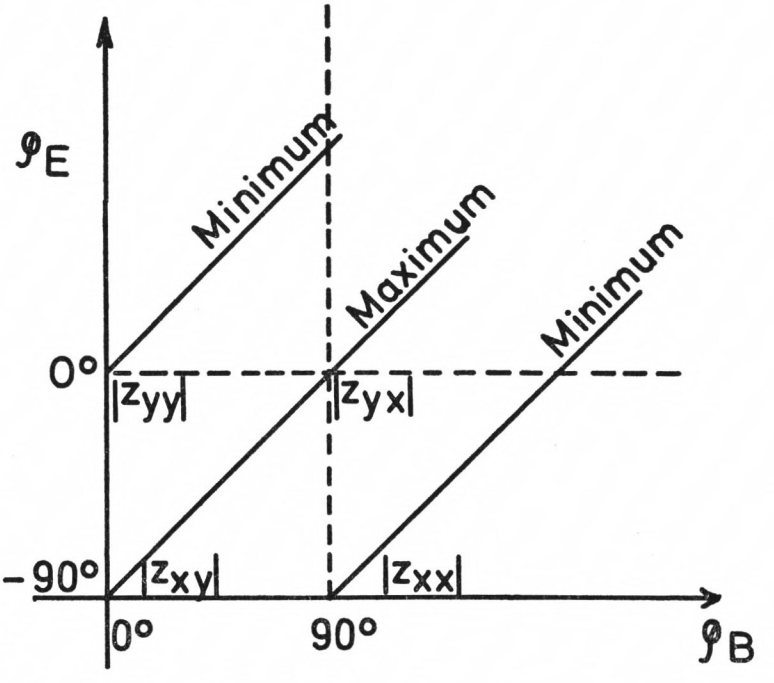


Abb. 5.13

Existieren keine lateralen Gradienten der Leitfähigkeit, so erhält man eine um 45° schräge „Wellblech-Struktur" (Abb. 5.13).

In Abb. 5.14 ist hierzu ein Beispiel aus der Auswertung realer Meßdaten (aus der Afarsenke in Äthiopien) gegeben. Existieren dagegen starke Gradienten der Leitfähigkeit, wird diese schräge Wellblech-Struktur deformiert, wie es in Abb. 5.15 dargestellt wird, die wiederum ein Beispiel aus der Auswertung realer Meßdaten aus Äthiopien ist. Es ist aufschlußreich,den Impedanztensor in jedem Koordinatensystem erneut durch eine Ausgleichsrechnung zu bestimmen, da sich dann jedesmal die Meßfehler neu auf die Komponenten aufteilen. Bei schlechten Meßdaten ergeben sich unregelmäßig geformte Berge und Täler, sogar Neben-Täler und -Gipfel.

Die beiden Abbildungen 5.14 und 5.15 geben diese Impedanzgebirge für reale Meßdaten aus Äthiopien wieder.

Bei konstanter Orientierung des Koordinatensystems des Magnetfelds φ_B, aber Rotation des Koordinatensystems des elektrischen Feldes, wird die Impedanz bei einer Orientierung des Koordinatensystems des elektrischen Feldes φ_E maximal: Diese beiden Richtungen sind identisch mit der Polarisationsrichtung φ_E des elektrischen Feldes bei gegebener Polarisationsrichtung φ_B des Magnetfeldes. Bei Variation von φ_B erhält man so eine Kurve längs des Höhenrückens eines Impedanzgebirges, das die Abhängigkeit der Polarisations-

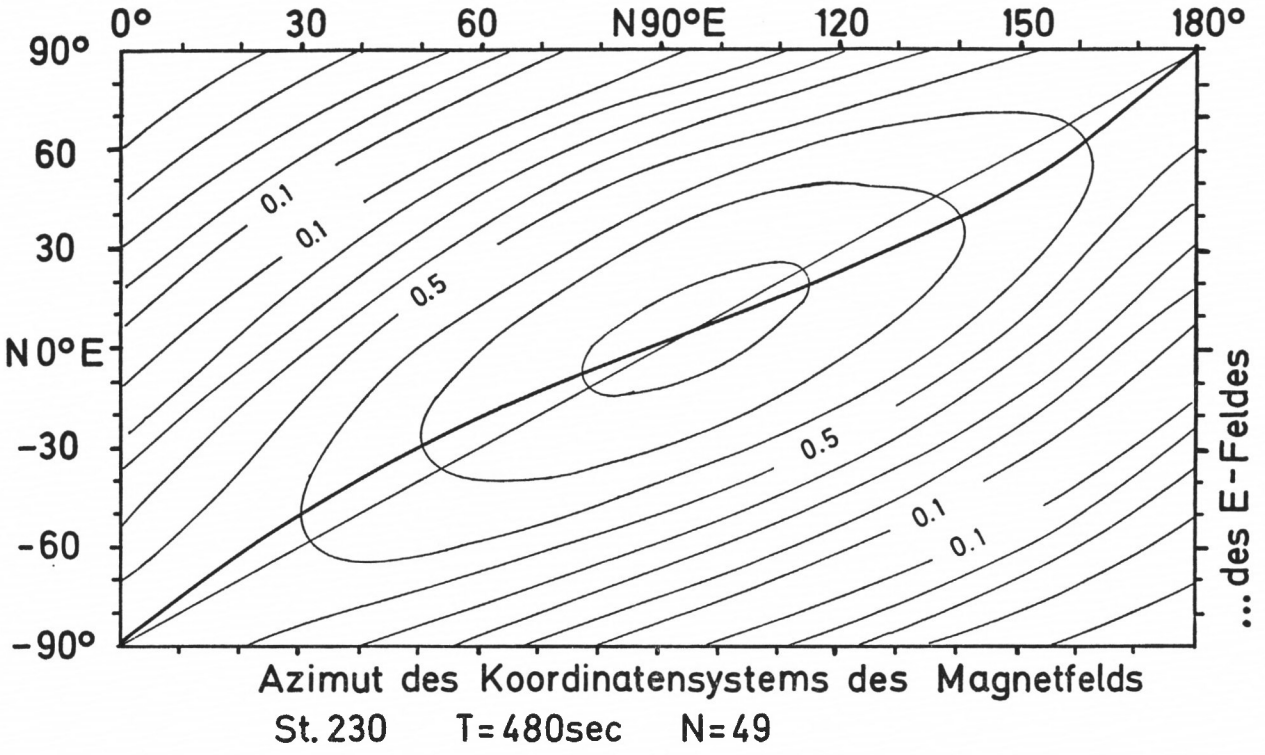


Abb. 5.14: Impedanzgebirge für einen Meßort in Äthiopien (Station 230, Anzahl der Fourier-Koeffizienten N = 49, Periode T = 480 sec). Die dicke Kurve gibt an, wo die Impedanz für ein vorgegebenes φ_B maximal wird. Da sie mit der eingetragenen Geraden fast identisch ist, die angibt, wo die Polarisations-Richtung des elektrischen Feldes senkrecht zur Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes ist, kann man aus der Abbildung folgern, daß nur ein schwacher lateraler Gradient der elektrischen Leitfähigkeit an diesem Meßort existiert.

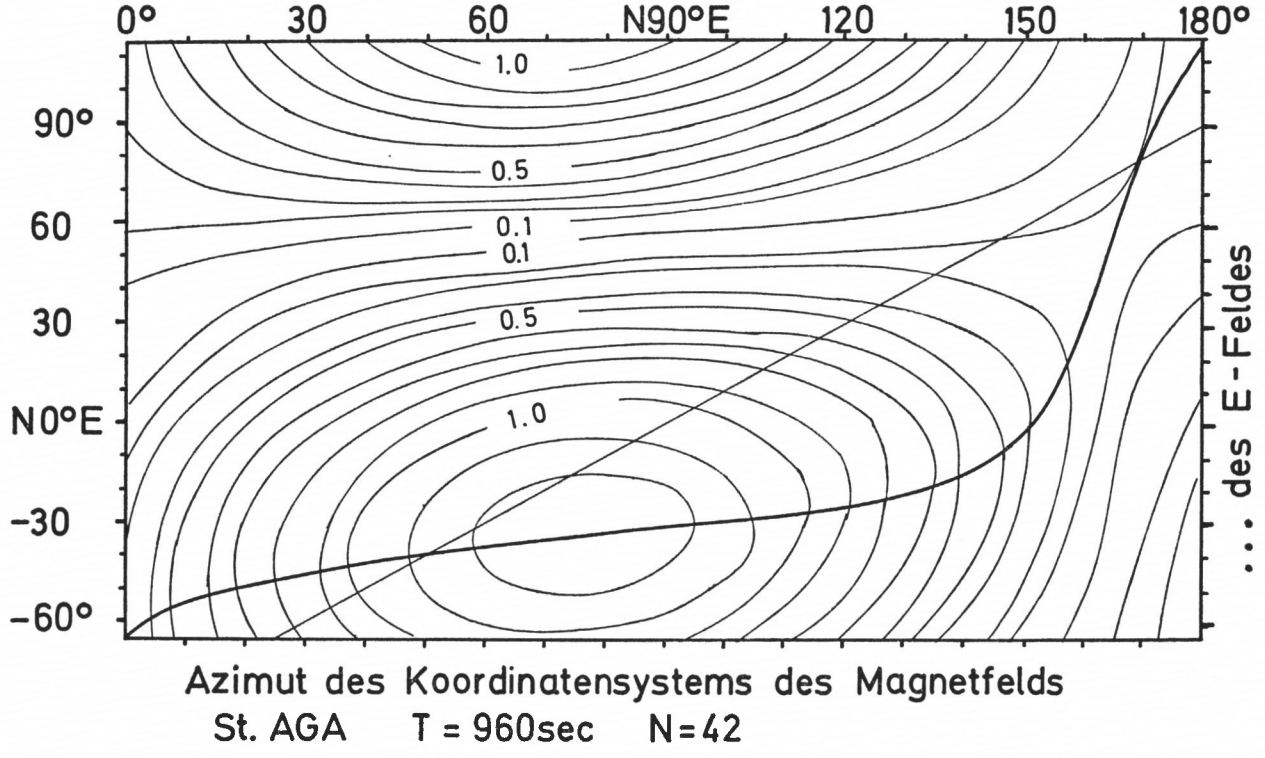


Abb. 5.15: Impedanzgebirge für einen Meßort in Äthiopien (Station AGA, Anzahl der Fourierkoeffizienten N = 42, Periode T = 960 sec). Da die dicke Kurve, die dem Höhenrücken des Impedanzgebirges folgt, stark von der Geraden abweicht, auf der die Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes senkrecht zu der Polarisations-Richtung des magnetischen Feldes ist, kann man folgern, daß an dieser Station ein starker lateraler Gradient der elektrischen Leitfähigkeit wirksam ist. Der Ordinatenwert ist die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes (siehe auch Tabelle 5.1.)

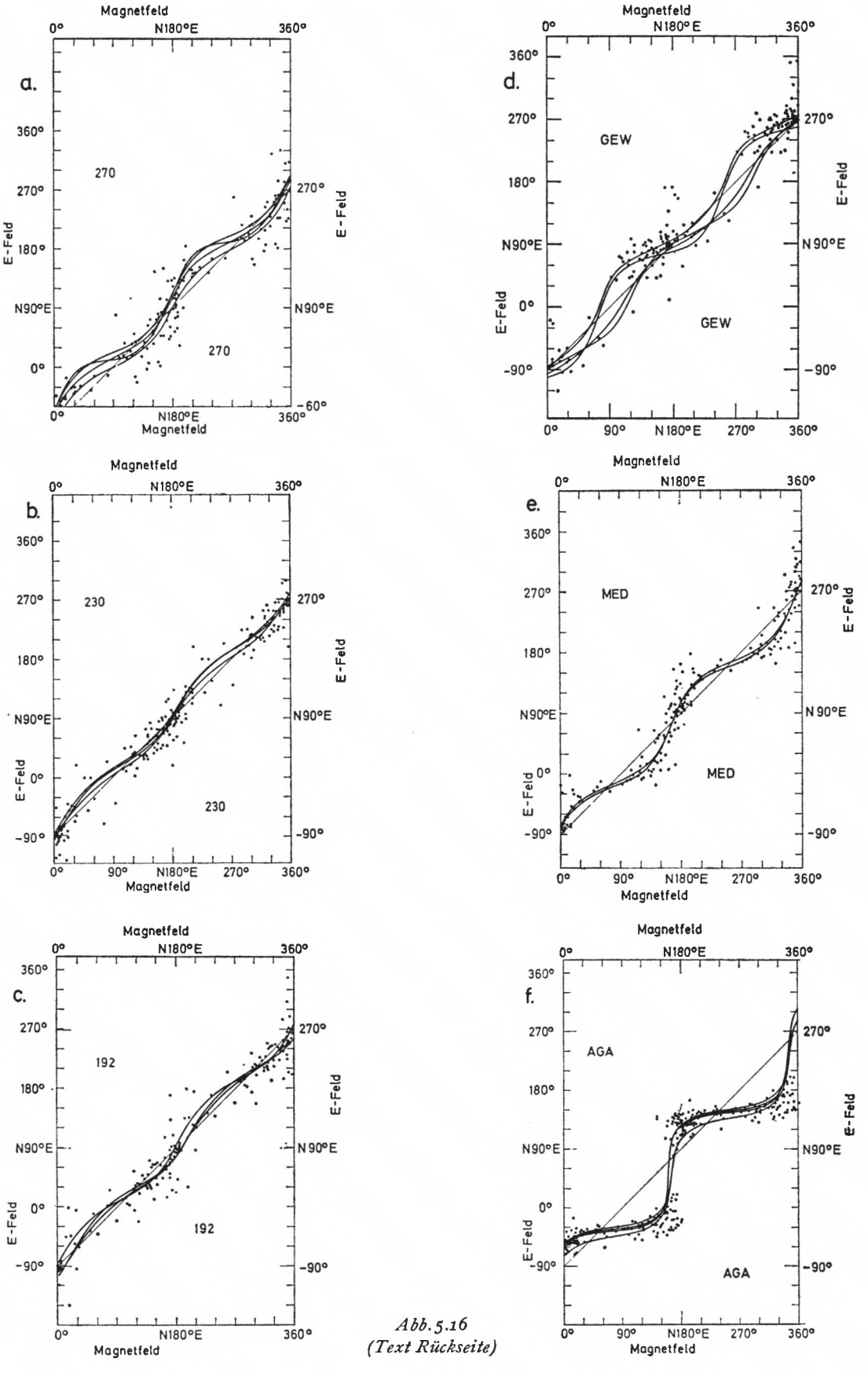


Abb. 5.16
(Text Rückseite)

Abb. 5.16a–f: Die Abhängigkeit der Polarisationsrichtungen des elektrischen Feldes von der Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes an 6 Stationen in Äthiopien. Die Kurven sind den „Impedanzgebirgen" (siehe Abb. 5.14, 5.15) entnommen, die Punkte sind Auswertungen von Einzelschwingungen (siehe Abb. 5.6). Verschiedene Kurven in jeder Abbildung gelten für je 4 Perioden (480, 960, 1920 und 3840 sec).

In jede Figur wurde eine Diagonale eingetragen, auf der $\varphi_E = \varphi_B + 90°$ ist. Abweichungen von dieser Diagonalen deuten auf laterale Gradienten der elektrischen Leitfähigkeit.

Figur e (MED): eine einfache 2-dimensionale Anomalie, da die Kurve deutlich gekrümmt und symmetrisch zur Diagonalen liegt.

Figur f (AGA): Überlagerung mindestens zweier lateraler Gradienten der Leitfähigkeit, da die Kurven unsymmetrisch zur Diagonalen sind.

Figur b (230) und c (192): Lateral homogener Untergrund, da die Kurven fast identisch mit der Diagonalen sind.

Figur a (270): NS-Vorzugsrichtung, aber schwacher Gradient.

richtung des elektrischen Feldes von der Polarisationsrichtung des magnetischen Feldes angibt. Diese Kurven sind gleich mit den in Abb. 5.5 und 5.11 diskutierten, bzw. aus den Meßdaten bestimmten Kurven (Abb. 5.6). In den Abb. 5.14, 5.15 sind sie als dicke Kurven eingetragen. In Abb. 5.16 a–f sind sie in die „Punktwolken" der Abb. 5.6 für vier verschiedene Perioden eingetragen.

Wichtig ist, daß die hier angewandte Methode auch dann noch funktioniert, wenn die Polarisationsrichtungen des Magnetfeldes ungünstigerweise auf einen Winkelbereich beschränkt sind, der mit der Vorzugsrichtung übereinstimmt (z. B. Abb. 5.16, a).

Die Vorzugsrichtungen des elektrischen Feldes aus den Abb. 5.16 wurden in die geographische Karte (Abb. 5.17) eingetragen, wobei die Länge des jeweiligen Striches proportional zum Verhältnis der maximalen zur minimalen Impedanz ist (siehe auch Tabelle 5.1).

In der Tabelle 5.1 ist angegeben, für welche Polarisationsrichtung des elektrischen Feldes die in den Abb. 5.16 dargestellten Funktionen jeweils die geringste Steigung haben (Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes), außerdem die Größe (Absolutwert) der diagonalen Terme des Tensors $|z_{xy}|$ und $|z_{yx}|$ (= Gipfel und Minimum im Impedanz-Gebirge) und das Verhältnis von Maximum zu Minimum $|z_{xy}/z_{yx}|$ (ein Maß für die Inhomogenität der elektrischen Leitfähigkeit am Meßort).

In Abb. 5.17 ist die jeweils aus den 4 Perioden gemittelte Vorzugsrichtung eingetragen, wobei die Länge des Striches proportional zur Größe $|z_{xy}/z_{yx}|$ ist.

Man erkennt, daß diese Vorzugsrichtungen nur schwache Gradienten der elektrischen Leitfähigkeit in der Afarsenke wiedergeben, nur die beiden Stationen am SE-Escarpment, MED und AGA liegen demnach im Bereich stärkerer Gradienten der elektrischen Leitfähigkeit, wobei die Richtungen andeuten, daß das Escarpment einen höheren spezifischen Widerstand haben muß als die Afarsenke.

5.3 *Bestimmung der Impedanzen für den tieferen Untergrund aus den gemessenen Impedanzen bei lateral variierender Leitfähigkeit der oberen Kilometer*

Da nach Gl. 5.4 die vier Beziehungen existieren:

$$z(T) = z_{xx}(T)/t_y \qquad z(T) = z_{yx}(T)/p_y \tag{5.30}$$
$$z(T) = z_{xy}(T)/t_x \qquad z(T) = z_{yy}(T)/p_x$$

kann man die Übertragungsfunktion gleich viermal bestimmen, wenn man die Verteilung der integrierten Leitfähigkeit der Deckschicht kennt und damit die vier Koeffizieten t_x, t_y,

Station	Periode (sec)	Vorzugs-richtung (von N über E)	Maximales $\lvert z_{xy} \rvert$	Minimales $\lvert z_{yx} \rvert$	$\frac{\lvert z_{xy} \rvert}{\lvert z_{yx} \rvert}$
270	480	175°	0.58	0.31	1.9
	960	10°	0.58	0.25	2.15
	1920	25°	0.52	0.24	2.15
	3840	17°	0.38	0.15	2.5
		9 ± 17°			2.2 ± 0.3
230	480	0°	0.83	0.54	1.54
	960	15°	0.74	0.41	1.8
	1920	20°	0.58	0.36	1.6
	3840	25°	0.45	0.27	1.67
		15 ± 11°			1.65 ± 0.11
192	480	25°	0.95	0.53	1.8
	960	30°	0.72	0.47	1.53
	1920	10°	0.68	0.36	1.9
	3840	0°	0.49	0.29	1.7
		16 ± 14°			1.7 ± 0.2
GEW	480	110°	0.17	0.08	2.1
	960	90°	0.13	0.08	1.6
	1920	75°	0.12	0.04	3
	3840	90°	0.09	0.04	2.2
		91 ± 14°			2.2 ± 0.6
MED	480	160°	0.73	0.25	2.9
	960	165°	0.60	0.23	2.6
	1920	165°	0.40	0.18	2.2
	3840	160°	0.35	0.15	2.3
		162.5 ± 3°			2.5 ± 0.3
AGA	480	150°	1.44	0.24	6.0
	960	145°	1.26	0.20	6.3
	1920	145°	0.89	0.12	7.4
	3840	145°	0.74	0.10	7.4
		146 ± 2.5°			6.6 ± 0.6

Tabelle 5.1

p_x und p_y mit der soeben beschriebenen Modellrechnung berechnet hat. Man kann hierbei nach der Methode der kleinsten Quadrate den Fehler:

$$(5.31) \qquad |\delta z|^2 = |z_{xx} - z(T) \cdot t_y|^2 + |z_{xy} - z(T) \cdot t_x|^2 \\ |z_{yx} - z(T) \cdot p_y|^2 + |z_{yy} - z(T) \cdot p_x|^2$$

durch Variation von $z(T)$ minimal machen. Differenziert man also diese Gleichung nach $z(T)$:

$$(5.32) \qquad \frac{d\delta z}{dz(T)} = 2\,|(z_{xx} - z(T)\, t_y)\,(-t_y)| + \ldots = 0$$

dann erhält man für die Übertragungsfunktion $z(T)$:

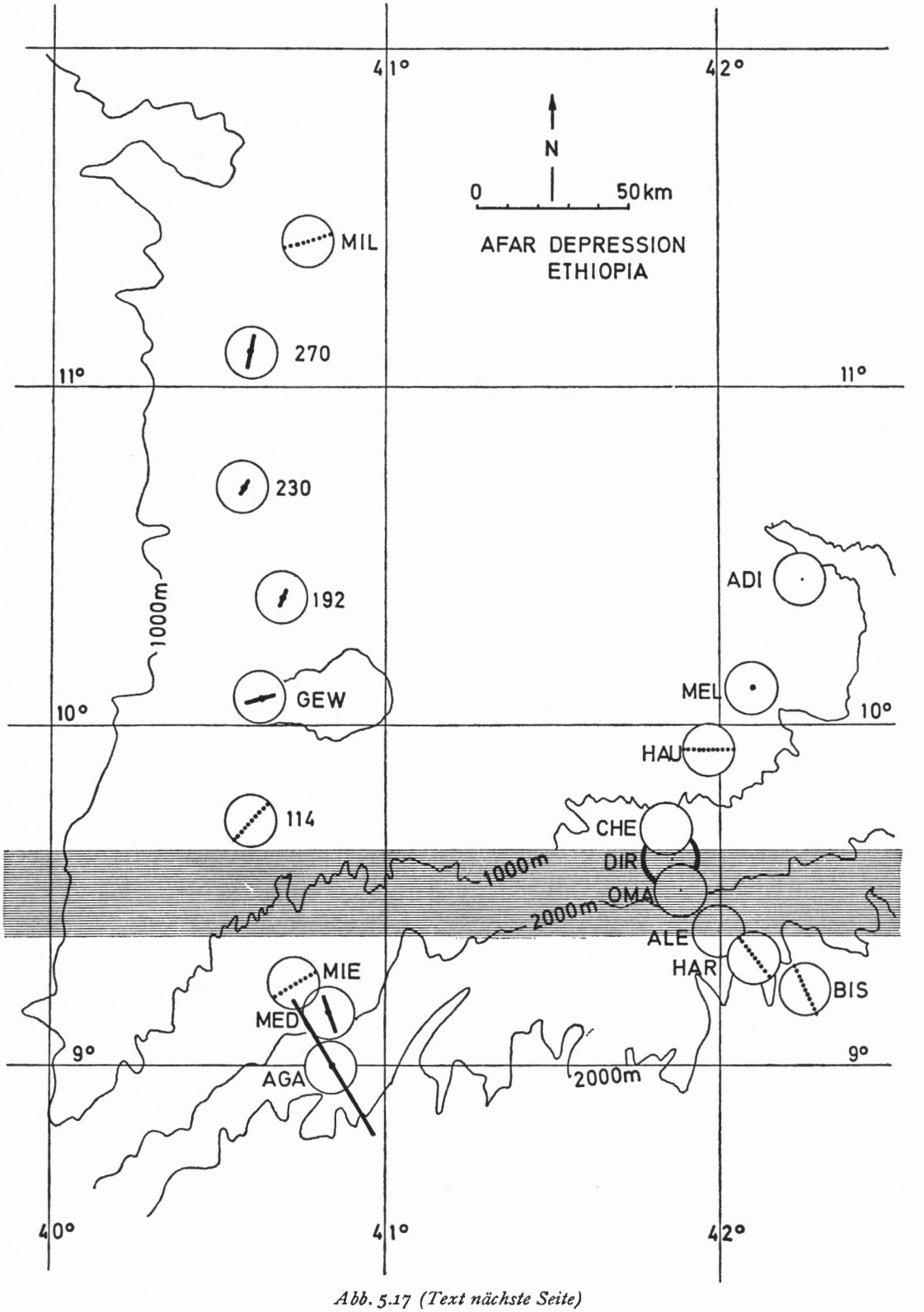


Abb. 5.17 (Text nächste Seite)

Abb. 5.17: Die Verteilung der Vorzugsrichtungen des erdelektrischen Feldes an einigen Meßorten in der Afarsenke in Äthiopien. Die eingezeichnete 1000-m-Höhenlinie begrenzt im Westen die Afarsenke durch das W-Plateau, im Süden durch das SE-Plateau. Das EW-gerichtete Band gibt die Position des äquatorialen Elektrojets an. Die gepunktet eingetragenen Vorzugsrichtungen (BERKTOLD, 1974) sind nach einer anderen als hier diskutierten Methode ausgewertet worden, die Länge hat keine Bedeutung. Die durchgezogenen Striche geben die in dieser Arbeit bestimmten Vorzugsrichtungen an. Die Striche sind umso länger je stärker die elektrischen Felder durch laterale Gradienten der elektrischen Leitfähigkeit polarisiert sind (siehe Tabelle 5.1).

Aus der Verteilung der Vorzugsrichtungen folgt, daß der spezifische Widerstand des SE-Plateaus viel größer ist (in der Größenordnung 1000 Ohm · m (BERKTOLD et al., 1975)) als der der Afarsenke (50 Ohm · m). An den Stationen in der Afarsenke sind nur schwache Gradienten der Leitfähigkeit wirksam, woraus man folgern kann, daß Interpretationsmethoden erlaubt sind, wie sie in Kapitel 3 (Geschichteter Untergrund) diskutiert wurden.

$$z(\mathrm{T}) = \frac{z_{xx}(\mathrm{T})\cdot t_y + z_{xy}(\mathrm{T})\cdot t_x + z_{yx}(\mathrm{T})\cdot p_y + z_{yy}(\mathrm{T})\cdot p_x}{t_x^2 + t_y^2 + p_x^2 + p_y^2} \tag{5.33}$$

Man muß bei dieser Mittelung nicht alle vier Funktionen z_{xx} bis z_{yy} verwenden, sondern kann sich auf jene beschränken, die am sichersten, also mit kleinstem Fehler gemessen worden sind. Die Mittelung muß für jede Periode, oder für jeden Periodenbereich ausgeführt werden, da die Funktionen von der Periode abhängen.

Der Nachteil dieser Methode ist natürlich der, daß man die Verteilung der integrierten Leitfähigkeit der Deckschicht nicht kennt und man sie deshalb durch andere geophysikalische Methoden erkunden muß.

Da die 4 gemessenen Größen komplexwertig sind, kennt man 8 Größen, nämlich z. B. 4 Beträge und 4 Phasen. Die 4 Phasen müssen aber alle gleich sein, womit also nur 5 voneinander unabhängige Größen gemessen wurden. Zu bestimmen sind aber 6 Größen, nämlich der Betrag von $z(\mathrm{T})$, die Phase von $z(\mathrm{T})$ und die vier reellen Größen $t_x \ldots p_y$. Aber man sieht, daß genau betrachtet nur $6 - 5 = 1$ Größe unbestimmt ist. Während also bei der oben beschriebenen Methode noch 4 Größen, $t_x \ldots p_y$ als unbekannt vorausgesetzt wurden, müßte es nach der soeben diskutierten Bilanz von Bekannten zu Unbekannten eine Methode geben, bei der nur noch *eine* einzige Größe unbekannt ist (und die auf irgendeine Art zu bestimmen ist). Solche Methoden gibt es auch und sollen jetzt diskutiert werden.

5.31 *Trennungsverfahren bei beliebig variierender Leitfähigkeit der oberen Kilometer und 1-dimensionaler Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(z)$ des tieferen Untergrundes* (LARSEN)

Es sei ein Tensor für ein Koordinatensystem gegeben, das die Orientierung ϑ_0 habe:

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{yx} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

Dreht man nun das Koordinatensystem in eine andere Orientierung ϑ_x und sei $\vartheta = \vartheta_x - \vartheta_0$, dann haben sich die vier Tensorgrößen geändert: Zur Abkürzung sei zunächst gesetzt

$$a = \frac{z_{xx} + z_{yy}}{2} \quad b = \frac{z_{xx} - z_{yy}}{2} \quad c = \frac{z_{xy} + z_{yx}}{2} \quad d = \frac{z_{xy} - z_{yx}}{2} \tag{5.35}$$

dann ist

$$\begin{aligned} z_{xx}(\vartheta) &= a + b\cos 2\vartheta + c\sin 2\vartheta \\ z_{xy}(\vartheta) &= d + c\cos 2\vartheta - b\sin 2\vartheta \\ z_{yx}(\vartheta) &= -d + c\cos 2\vartheta - b\sin 2\vartheta \\ z_{yy}(\vartheta) &= a - b\cos 2\vartheta - c\sin 2\vartheta \end{aligned} \tag{5.36}$$

Um eine ähnliche Schreibweise zu erhalten, wie sie LARSEN (1975) verwendet hat, werden alle vier Gleichungen durch d geteilt:

$$
\begin{aligned}
z_{xx}(\vartheta) &= d \cdot \Big(\underbrace{\tfrac{a}{d}} + \underbrace{\tfrac{b}{d}\cos 2\vartheta + \tfrac{c}{d}\sin 2\vartheta}\Big) \\
&= d \cdot (A + \qquad C \qquad) \\
z_{xy}(\vartheta) &= d \cdot \Big(1 + \underbrace{\tfrac{c}{d}\cos 2\vartheta - \tfrac{b}{d}\sin 2\vartheta}\Big) \\
&= d \cdot (1 + \qquad B \qquad) \\
z_{yx}(\vartheta) &= d \cdot \Big(-1 + \underbrace{\tfrac{c}{d}\cos 2\vartheta - \tfrac{b}{d}\sin 2\vartheta}\Big) \\
&= d \cdot (-1 + \qquad B \qquad) \\
z_{yy}(\vartheta) &= d \cdot \Big(\underbrace{\tfrac{a}{d}} - \underbrace{\tfrac{b}{d}\cos 2\vartheta - \tfrac{c}{d}\sin 2\vartheta}\Big) \\
&= d \cdot (A - \qquad C \qquad)
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

Schließlich sei noch gesetzt:

$$
d = z(T) \cdot \frac{t_x - p_y}{2} = z(T) \cdot D \tag{5.38}
$$

Die neue Bezeichnung soll andeuten, welche Anteile in einer Tensorgröße sich bei der Drehung des Koordinatensystems ändern und welche Anteile konstant bleiben:

A, D bleiben konstant,
B und C verändern sich bei der Drehung des Koordinatensystems.

Die Beziehung zwischen elektrischem Feld und magnetischem Feld ist also

$$
\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = z(T) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} A + C & 1 + B \\ -1 + B & A - C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \tag{5.39}
$$

Es soll bemerkt werden, daß die Größen A, B, C, D nicht identisch mit denen von LARSEN sind, da sein Ansatz (4.15) invers zu meinem Ansatz Gl. 5.3 ist. Im folgenden geht es um die Bestimmung von A, B und C aus den Meßgrößen, dann um die Bestimmung von $z(T) \cdot D$.

Bildet man die 4 möglichen Summen und Differenzen der Diagonal-Terme des Tensors, so erhält man

$$
\begin{aligned}
a(T) &= z(T) \cdot D \cdot \frac{(A+C) + (A-C)}{2} = z(T) \cdot D \cdot A \\
b(T) &= z(T) \cdot D \cdot \frac{(A+C) - (A-C)}{2} = z(T) \cdot D \cdot C \\
c(T) &= z(T) \cdot D \cdot \frac{(1+B) + (B-1)}{2} = z(T) \cdot D \cdot B \\
d(T) &= z(T) \cdot D \cdot \frac{(1+B) - (B-1)}{2} = z(T) \cdot D
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Diese vier Größen a, b, c und d sind aus der Messung bestimmte Werte als Funktion der Periode (siehe Gl. 5.35, wo die z_{xx}, z_{xy}, z_{yx} und z_{yy} die gemessenen Größen sind). Teilt man nun die obigen drei Gleichungen durch die vierte, also durch einen bekannten Wert, so erhält man

$$
\begin{aligned}
a(T) &= A \cdot d(T) \\
b(T) &= C \cdot d(T) \\
c(T) &= B \cdot d(T)
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

Man hat also drei lineare Gleichungen für die „meßbaren" a, b, c, d und die unbekannten A, B, C, aus denen man mit der Methode der kleinsten Quadrate die gesuchten Proportionalitäts-Konstanten A, B und C aus den Meßwerten ausrechnen kann. Man mittelt dabei jeweils über ein enges Perioden-Intervall benachbarter Perioden. Es sollte sich dabei ergeben, daß die A, B und C nicht von der Periode abhängen (siehe aber noch den Kommentar weiter unten). Nachdem man also die A, B und C bestimmt hat, kann man das Produkt $z(\mathrm{T}) \cdot \mathrm{D}$ ausrechnen, und zwar wiederum viermal:

$$z(\mathrm{T}) \cdot \mathrm{D} = \mathrm{a}(\mathrm{T})/\mathrm{A} \qquad z(\mathrm{T}) \cdot \mathrm{D} = \mathrm{b}(\mathrm{T})/\mathrm{C}$$
$$z(\mathrm{T}) \cdot \mathrm{D} = \mathrm{c}(\mathrm{T})/\mathrm{B} \qquad z(\mathrm{T}) \cdot \mathrm{D} = \mathrm{d}(\mathrm{T}) \tag{5.42}$$

Hierbei wendet man wiederum die Methode der kleinsten Quadrate an wie in Gl. 5.33.

Es bleibt also noch das Problem, wie D zu bestimmen sei. Doch zuvor sei noch die Abhängigkeit der Koeffizienten A, B und C von der Periode diskutiert. Larsen weist darauf hin, daß es sich bei einer Auswertung ergeben habe, daß sie tatsächlich nicht von der Periode abhängen und damit die Voraussetzung, die oberste Schicht der Erdoberfläche mit lateral variierender Leitfähigkeit sei eine Dünne Schicht, erfüllt sei. Tatsächlich sind aber die Koeffizienten A, B und C bereits Verhältnisse der ursprünglichen Koeffizienten t_x, t_y, p_x und p_y, z. B.

$$\mathrm{A} = \frac{z_{xx} + z_{yy}}{z_{xy} - z_{yx}} = \frac{z(\mathrm{T})}{z(\mathrm{T})} \frac{t_y + p_x}{t_x - p_y} = \frac{t_y + p_x}{t_x - p_y} \tag{5.43}$$

Ein Beweis für die Voraussetzung der „Dünnen Schicht" wäre also die Konstanz der Koeffizienten selber, bei variierender Periode. Diesen Beweis könnte man also nur dann erreichen, wenn man D als Funktion der Periode bestimmen könnte. Das scheint aber bisher nicht möglich zu sein.

Versuche, den Faktor D *zu bestimmen*

Gegeben ist jetzt eine Übertragungsfunktion

$$\tilde{z}(\mathrm{T}) = \mathrm{D} \cdot z(\mathrm{T}) \tag{5.44}$$

wobei $z(\mathrm{T})$ gesucht wird, D unbekannt ist, aber eine reelle, von der Periode nicht abhängige Zahl ist. Larsen hat nun das in Kapitel 3 beschriebene Inversionsverfahren hierzu eingesetzt: Man wähle irgendeine Zahl für D. Das Inversionsverfahren ergibt dann bei vorgegebener Anzahl von Schichten einen mittleren quadratischen Interpretationsfehler als Funktion des Schichtparameters $\hat{\mathrm{d}} = \mathrm{d}/\sqrt{\rho}$.

Dann ändere man die Zahl D, und man wiederhole das Inversionsverfahren. Es ergibt sich wiederum eine Abhängigkeit des Interpretationsfehlers vom Schichtparameter $\mathrm{d}/\sqrt{\rho}$. Wiederholt man nun diese Prozedur für einen großen Wertbereich von D und trägt die jeweiligen Interpretationsfehler in ein Koordinatennetz ein, dessen eine Achse die Werte von D angibt, die andere Achse die Werte des Schichtparameters $\mathrm{d}/\sqrt{\rho}$, so kann man schließlich Isolinien gleicher Interpretationsfehler zeichnen. Das richtige D und das richtige $\mathrm{d}/\sqrt{\rho}$ ist dann dort, wo der Interpretationsfehler am kleinsten ist: Das Modell des Untergrundes, das das Inversionsverfahren für diese beiden Parameter liefert, ist dann das richtige Modell.

Die Abb. 5.18 zeigt das Ergebnis von Larsen (es ist der Kehrwert des Fehlers aufgetragen!), allerdings auch die Schwierigkeiten, die bei dem Verfahren offenbar wurden: Bei einer reinen, reellen Zahl D erreichte er kein ausgeprägtes Minimum des Interpre-

tationsfehlers. LARSEN versuchte es deshalb mit komplexwertigen Zahlen, was dann auch zum Erfolg führte. Allerdings ist damit die Voraussetzung der Methode der Dünnen Schicht nicht mehr erfüllt.

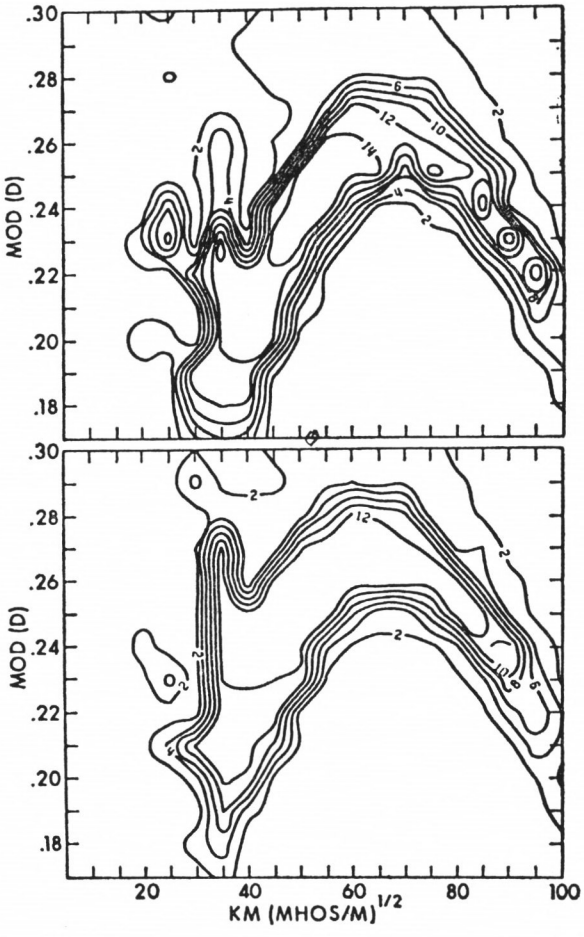


Abb. 5.18

Diese Methode, den Faktor D zu bestimmen, ist aber durchaus fraglich. Nach WEIDELT (1972) besteht zwischen der Phasendifferenz zwischen magnetischem und elektrischem Feld einerseits und der ρ_s-Kurve andererseits folgender ungefährer Zusammenhang:

$$\varphi_E - \varphi_H = 45^\circ \left(1 - \frac{d \ln \rho_s}{d \ln T}\right) \tag{5.45}$$

Dieser Zusammenhang wurde auch experimentell oft bestätigt: Da man den scheinbaren spezifischen Widerstand allgemein in ein doppelt-logarithmisches Netz einträgt, sollten Steigung und Gefälle von $\rho_s(T)$-Kurven zu Steigung und Gefälle von Phasenkurven korrespondieren: Bei steil ansteigender ρ_s-Kurve fällt die Phase gegen 0°, bei fallender ρ_s-Kurve steigt die Phase, bei ebener ρ_s-Kurve (homogener Halbraum) ist die Phase = 45°. Ist nun

$$\tilde{\rho}_s(T) = 2 \cdot T \cdot D^2 \cdot |z(T)|^2 = \rho_s(T) \cdot D^2 \tag{5.46}$$

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}_s}{d \ln T} = \frac{d \ln \rho_s(T)}{d \ln T} + 2 \frac{d \ln D}{d \ln T} = \frac{d \ln \rho_s(T)}{d \ln T} \tag{5.47}$$

Es gibt also zu ebensovielen D-Werten ebensoviele $\rho_s(T)$-Kurven, die alle die gleiche Phasenkurve haben. Deshalb muß das Inversionsverfahren auch ebensoviele Modelle lie-

fern, die alle die identisch gleiche Funktion für den Interpretationsfehler als Funktion des Schichtparameters haben: Die Linien gleichen Interpretationsfehlers müßten in der Abb. 5.18 alle gerade nach oben verlaufen.

Um zu demonstrieren, daß eine Änderung von D keine Änderung des Interpretationsfehlers ergibt, wurde einmal eine ρ_s-Kurve mit D = 1 und das anderemal mit D = 2 in ein Modell mithilfe der Inversionsmethode umgerechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 5.19 wiedergegeben.

Es zeigt sich allgemein, daß die Multiplikation einer ρ_s-Kurve mit einem reellen Faktor D ein Modell ergibt, bei dem die Schichtmächtigkeiten um den Faktor D, die spezifischen Widerstände um den Faktor D^2 vergrößert sind. Diese Erkenntnis ergibt aber eine Möglichkeit, den Faktor D zu bestimmen: Kennt man die Mächtigkeit und den spezi-

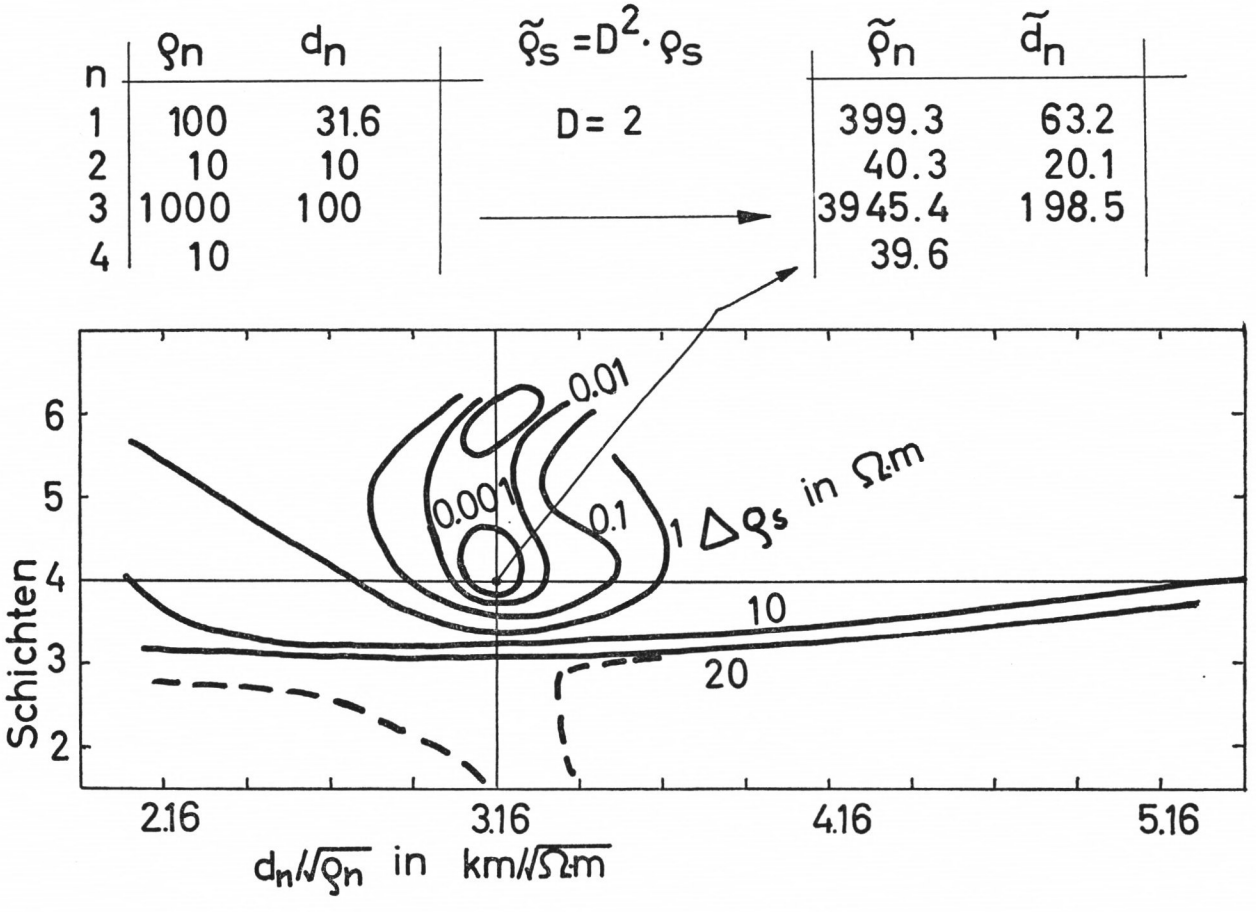


Abb. 5.19: Unbestimmbarkeit des Tellurik-Faktors D mit der Inversionsmethode:

Es wurde das linke Modell (= Abb. 3.7) vorgegeben, die dazugehörige ρ_s-Kurve aber mit dem Faktor $D^2 = 4$ multipliziert während die Kurve der Phasendifferenz zwischen E- und B-Feld unverändert blieb.

Die Anwendung des Inversionsverfahrens ergab ein deutliches Minimum für n = 4 und $\hat{d} = 3.16$:

Das dazugehörige Modell ist im oberen rechten Teil der Abbildung angegeben. Die spezifischen Widerstände dieses Modells sind um den Faktor D^2 und die Schichtmächtigkeiten um den Faktor D gegenüber dem linken Modell erhöht. Da sich die Fehlerverteilungen bei der Inversion der $\hat{\rho}_s$-Kurve und der ρ_s-Kurve (siehe Abb. 3.7) praktisch nicht unterscheiden, also keine Abhängigkeit der Fehlerverteilung vom Tellurik-Faktor D existiert, ist eine Bestimmbarkeit von D durch die Inversionsmethode nicht denkbar.

fischen Widerstand einer oberen Schicht, die noch deutlich in der Meßkurve zu sehen ist, so variiere man den Faktor D so, bis die entsprechende obere Modellschicht mit der wirklichen Schicht übereinstimmt. Für die Interpretation von Messungen auf einer kleinen Insel im Ozean kann man als bekannte obere Schicht die Mächtigkeit des Seewassers in Rechnung setzen.

5.32 *Trennungsverfahren bei 2-dimensionaler Feldverteilung der lokal variierenden Leitfähigkeit an der Oberfläche und 2-dimensionaler Leitfähigkeitsverteilung des tieferen Untergrundes*

Die allgemeine Diskussion in Kapitel (5.3) über die Trennbarkeit von regionaler Induktionsanomalie und lokaler Gleichstromanomalie ergab, daß *eine* unbekannte Größe zuviel existiert. Im vorhergehenden Abschnitt war dies der Faktor D.

Es ist nun ein weiteres Modell denkbar, für das die Trennung in regionale und lokale Anteile in ähnlicher Weise möglich ist. Dieses Modell besteht aus einer Überlagerung einer 2-dimensionalen Induktionsanomalie und einer 2-dimensionalen Gleichstromanomalie.

Für die regionale, 2-dimensionale Induktions-Anomalie gelten für die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes im Koordinatensystem der Streichrichtung der regionalen Anomalie folgende Beziehungen (*Achtung:* Ab hier wird die Bezeichnung für die Koordinatensysteme geändert: (x, y) ist ab jetzt stets ein gegenüber Streichrichtungen von Anomalien beliebiges Koordinatensystem)

$$E_{r,\parallel} = z_{\parallel} \cdot B_{r,\perp} \text{ und } E_{r,\perp} = z_{\perp} \cdot B_{r,\parallel} \tag{5.48}$$

Hierbei sind $z_{\parallel}$ und $z_{\perp}$ komplexwertige, von der Periode abhängige Impedanzen.

Für die lokale Gleichstrom-Anomalie gelten für die Komponenten des elektrischen Feldes parallel und senkrecht zur horizontalen Komponente des lokalen Gradienten der Leitfähigkeit

$$E_{l,p} = t \cdot E_{r,p} \text{ und } E_{l,s} = p \cdot E_{r,s} \tag{5.49}$$

Hierbei ist: p = parallel zum lokalen Gradienten

s = senkrecht zum lokalen Gradienten

und t, p sind 2 reelle, nicht von der Periode abhängige Größen (Übertragungs-Koeffizienten).

Der lokale Gradient soll eine beliebige Richtung, verglichen mit der Streichrichtung der regionalen Anomalie, haben, was hier durch die Unterschiede der verwendeten Zeichen für „parallel" ($\parallel$, p) und „senkrecht" ($\perp$, s) ausgedrückt ist.

Man kann die regional induzierten elektrischen Felder $E_{r,\parallel}$ und $E_{r,\perp}$ in Gl. 5.48 und in Gl. 5.49 ($E_{r,p}$ und $E_{r,s}$) gleichsetzen. *Zuvor* muß man allerdings die Feldkomponenten sowohl für das lokale Feld als auch für das regionale Feld für ein und dasselbe Koordinatensystem ausrechnen. Dieses gemeinsame Koordinatensystem habe die Koordinaten (x, y). Für die Übertragungsfunktion der Gl. 5.48 ergibt sich nach einer Drehung um $(\varphi - \varphi_r)$:

$$\begin{pmatrix} E_{x,r} \\ E_{y,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{x,r} \\ B_{y,r} \end{pmatrix} \text{ wobei:}$$

(5.50)

$$\text{a.}\quad z_{xx} = \frac{1}{2}(z_\perp + z_{||}) \cdot \sin 2\,(\varphi - \varphi_r)$$

$$\text{b.}\quad z_{xy} = \frac{1}{2}(z_\perp - z_{||}) + \frac{1}{2}(z_\perp + z_{||}) \cdot \cos 2\,(\varphi - \varphi_r)$$

$$\text{c.}\quad z_{yx} = \frac{1}{2}(z_{||} - z_\perp) + \frac{1}{2}(z_\perp + z_{||}) \cdot \cos 2\,(\varphi - \varphi_r)$$

$$\text{d.}\quad z_{yy} = -\frac{1}{2}(z_\perp + z_{||}) \cdot \sin 2\,(\varphi - \varphi_r)$$

Für die Übertragungs-Koeffizienten der lokalen Anomalie ergibt sich nach Drehung des Koordinaten-Systems um den Winkel $(\varphi - \varphi_l)$:

$$\begin{pmatrix} E_{x,l} \\ E_{y,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{xx} & \zeta_{xy} \\ \zeta_{yx} & \zeta_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{x,r} \\ E_{y,r} \end{pmatrix}$$

(5.51)

$$\text{a.}\quad \zeta_{xx} = p \cdot \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{p} - 1\right) \cos 2\left(\varphi - \varphi_l\right)\right]$$

$$\text{b.}\quad \zeta_{xy} = p \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - t\right) \sin 2\left((\varphi - \varphi_l\right)\right]$$

$$\text{c.}\quad \zeta_{yx} = p \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{t}{p} - 1\right) \sin 2\left(\varphi - \varphi_l\right)\right]$$

$$\text{d.}\quad \zeta_{yy} = p \cdot \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{p} - 1\right) \cos 2\left(\varphi - \varphi_l\right)\right]$$

Setzt man $E_{r,x}$ und $E_{r,y}$ von Gl. 5.50 in Gl. 5.51 ein, so ergibt sich der gesuchte Tensor, der die Beziehungen der beobachtbaren Komponenten von elektrischem und magnetischem Feld beschreibt:

(5.52)

$$\text{a.}\quad z_{xx} = p \cdot \left[\frac{\frac{t}{p} + 1}{2} + \frac{\frac{t}{p} - 1}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_\perp + z_{||}}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_r)\right] + \left[\frac{1 - \frac{t}{p}}{2} \sin 2\,(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_{||} - z_\perp}{2} + \frac{z_{||} + z_\perp}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_r)\right]$$

$$\text{b.}\quad z_{xy} = p \cdot \left[\frac{\frac{t}{p} + 1}{2} + \frac{\frac{t}{p} - 1}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_\perp - z_{||}}{2} + \frac{z_\perp + z_{||}}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_r)\right] \left[\frac{1 - \frac{t}{p}}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_\perp + z_{||}}{2} \sin 2\,(\varphi - \varphi_r)\right]$$

$$\text{c.}\quad z_{yx} = p \cdot \left[\frac{1 - \frac{t}{p}}{2} \sin 2\,(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_\perp + z_{||}}{2} \sin 2\,(\varphi - \varphi_r)\right] + \left[\frac{1 + \frac{t}{p}}{2} + \frac{1 - \frac{t}{p}}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_{||} - z_\perp}{2} + \frac{z_{||} + z_\perp}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_r)\right]$$

$$\text{d.}\quad z_{yy} = p \cdot \left[\frac{1 - \frac{t}{p}}{2} \sin 2\,(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_\perp - z_{||}}{2} + \frac{z_\perp + z_{||}}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_r)\right] - \left[\frac{1 + \frac{t}{p}}{2} + \frac{1 - \frac{t}{p}}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_l)\right] \cdot \left[\frac{z_\perp + z_{||}}{2} \sin 2\,(\varphi - \varphi_r)\right]$$

4. *Trennung in regionale und lokale Übertragungsfunktionen*

Die 4 Übertragungsfunktionen z_{xx}, z_{xy}, z_{yx} und z_{yy} auf den linken Seiten der Gleichungen 5.52 sind durch die Messung bestimmbar. Damit sind 6 voneinander unabhängige Größen bekannt, nämlich:

$$|z_{xx}|,\ |z_{xy}|,\ |z_{yx}|,\ |z_{yy}|,\ \varphi_{xx},\ \varphi_{xy}$$

wobei φ_{xx} und φ_{xy} die Phasen-Differenzen zwischen elektrischem und magnetischem Feld sind. Die beiden anderen Phasendifferenzen φ_{yx} und φ_{yy} sind nicht mehr unabhängig von den beiden anderen Phasen.

Diesen 6 durch Messung bestimmbaren Größen stehen 8 gesuchte, also unbekannte Größen gegenüber, nämlich

$$|z_{\parallel}|,\ |z_{\perp}|,\ \varphi_{\parallel},\ \varphi_{\perp},\ \varphi_{l},\ \varphi_{r},\ t \text{ und } p$$

Man kann aber durch die Methode der „Minimalen und Maximalen Kohärenz" jeweils die Richtung des Magnetfelds bestimmen, die das regional 2-dimensionale elektrische Feld induziert (E-, bzw. B-Polarisation). Diese zu bestimmenden Richtungen müßten an allen Meßorten übereinstimmen und ergeben damit die Streichrichtung der regionalen Induktionsanomalie φ_r.

Dreht man das Koordinatensystem sowohl für das elektrische als auch für das magnetische Feld in das Koordinatensystem der also bekannten Streichrichtung der regionalen Anomalie – hierzu setze man $\varphi = \varphi_r$ – so folgt aus den Gleichungen (5.52)

$$(5.53)\quad \begin{aligned}
&\text{a.}\quad z_{xx} = z_{\parallel}\cdot p\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{p}\right)\cdot\sin 2(\varphi_r-\varphi_l)\right\}\\
&\text{b.}\quad z_{xy} = z_{\perp}\cdot p\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{p}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{p}-1\right)\cdot\cos 2(\varphi_r-\varphi_l)\right\}\\
&\text{c.}\quad z_{yx} = z_{\parallel}\cdot p\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{p}-1\right)\cdot\cos 2(\varphi_r-\varphi_l)\right\}\\
&\text{d.}\quad z_{yy} = z_{\perp}\cdot p\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{t}{p}-1\right)\cdot\sin 2(\varphi_r-\varphi_l)\right\}
\end{aligned}$$

Es lassen sich nun ausrechnen:

$$(5.54)\quad \begin{aligned}
&\text{a.}\quad \varphi_l = \varphi_r + 0.5\cdot\arctan\frac{2\cdot z_{xx}\,z_{yy}}{z_{xx}\cdot z_{xy}-z_{yy}\cdot z_{yx}}\\
&\text{b.}\quad p\cdot z_{\parallel} = z_{yx} + z_{xx}\cdot\frac{1-\cos 2(\varphi_r-\varphi_l)}{\sin 2(\varphi_r-\varphi_l)}\\
&\text{c.}\quad p\cdot z_{\perp} = z_{xy} + z_{yy}\cdot\frac{1+\cos 2(\varphi_r-\varphi_l)}{\sin 2(\varphi_r-\varphi_l)}\\
&\text{d.}\quad \frac{t}{p} = \frac{z_{yx}\cdot\sin 2(\varphi_r-\varphi_l)-z_{xx}\cdot(1+\cos 2(\varphi_r-\varphi_l))}{z_{yx}\cdot\sin 2(\varphi_r-\varphi_l)+z_{xx}\cdot(1-\cos 2(\varphi_r-\varphi_l))}
\end{aligned}$$

Kontrollen für das Trennungsverfahren

Folgende Kontrollen können das dem Trennungsverfahren zugrundegelegte Modell einer regionalen 2-dimensionalen Induktionsanomalie mit überlagerten, lokalen Anomalien bestätigen:

a. Die Methode der „Minimalen und Maximalen Kohärenz" muß für alle Meßorte die gleiche kohärente Richtung für das Magnetfeld ergeben, nämlich φ_r

b. Symmetriebeziehungen für die Phasen: Nach Drehung des gemessenen Impedanz-Tensors in das Koordinatensystem des kohärenten Magnetfelds müssen die Phasen der folgenden Impedanzen einander gleich sein:

$$\varphi_{xx} = \varphi_{yx} = \varphi_{\parallel} \text{ und } \varphi_{xy} = \varphi_{yy} = \varphi_{\perp}$$

c. Der ganze Ausdruck hinter dem arctan in Gl. (5.54a) muß eine reelle Zahl (aufgrund der Symmetriebeziehungen der Phasen) ergeben.

d. Das Verhältnis t/p in Gl. (5.54d) muß eine reelle Zahl (wegen der gleichen Symmetriebeziehungen der Phasen) ergeben.

Schlußbemerkung:

Das Trennungsverfahren liefert nur bis auf den unbekannten Faktor p die Übertragungsfunktionen für die 2-dimensionale Induktionsanomalie. Die Situation ist vergleichbar mit dem Ergebnis des erstgenannten Trennungsverfahrens, wo der Faktor D unbestimmt blieb. Kann man Ergebnisse anderer geophysikalischer Methoden zu Hilfe nehmen, so wird man den Faktor p bei der Modellsuche so variieren, bis das aus den Impedanzen

$$p \cdot z_{\parallel} \text{ und } p \cdot z_{\perp}$$

ermittelte Modell in den oberen Kilometern (z. B. Mächtigkeit von Sedimenten) mit den Ergebnissen der anderen Methoden übereinstimmt. Dadurch könnte man dann also die tiefere Verteilung der elektrische Leitfähigkeit allein mit der Magnetotellurik bestimmen.

Danksagungen:

Diese Arbeit entstand am Institut für Allgemeine und Angewandte Geophysik der Ludwig-Maximilians-Universität München im Rahmen eines Forschungsprogramms, das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt wurde. Meinem verehrten Lehrer, Professor Dr. G. Angenheister, der dieses Forschungsprogramm initiierte und leitete, spreche ich meinen besten Dank aus. Eine für diese Arbeit wichtige Voraussetzung war die Existenz der Arbeitsgemeinschaft „Erdmagnetische Tiefensondierung", an der sich das *Institut für Geophysikalische Wissenschaften der Freien Universität Berlin, das Institut für Geophysik und Meteorologie der Technischen Universität Braunschweig, das Institut für Geophysik der Universität Göttingen, die Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe Hannover, das Institut für Geophysik der Universität Münster, das Institut für Geophysik der Universität Stuttgart* und das *hiesige Institut* beteiligen. Insbesondere sind hierbei die von der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* finanziell geförderten Kolloquien der Arbeitsgemeinschaft zu nennen, auf denen die meisten der in dieser Arbeit diskutierten Probleme angeregt wurden. – Professor Dr. U. Schmucker, Göttingen, hat in zahlreichen Diskussionen zur Beantwortung vieler hier beschriebener Probleme entscheidend mitgeholfen, wofür ich mich herzlichst bedanke. – Herrn Dipl.-Phys. D. Hesse danke ich vielmals für die Magnetogramm-Montagen seiner Registrierungen in Brasilien, die er mir freundlicherweise überließ. – Den Herren Dr. M. Beblo, Dr. A. Berktold und Dr. K. Kemmerle danke ich herzlichst für die jahrelangen Diskussionen zu den Themen dieser Arbeit. – Die Modell-Rechnungen und Daten-Analysen, sowie ein Teil der Zeichnungen wurden auf der TR 440 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften gemacht.

6. LITERATURVERZEICHNIS

Angenheister, G., A. Berktold, K.-P. Sengpiel, 1965: Die zeitlichen Variationen des erdelektrischen Feldes, beobachtet längs eines Profils vom Kristallin des Bayerischen Waldes durch das Alpenvorland bis zum Nordrand der Alpen. – Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Naturw. Klasse, Sonderdruck 7.

Beblo, M., 1974: Die elektrische Leitfähigkeit unter den Ostalpen, abgeleitet aus magnetotellurischen Messungen eines Profils vom Alpennordrand bis zu den Hohen Tauern. Diss. Univ. München.

Berdichevsky, M. N., V. I. Dmitriev, 1976: Basic Principles of Interpretation of Magnetotelluric Sounding Curves. In: Geoelectric and Geothermal Studies (East Central Europe, Soviet Asia), KAPG Geophysical Monograph, Ed. A. Adam, Akademiai Kiado, Budapest, S. 165–221.

Berktold, A., 1974: Ergebnisse der Magnetotellurik-Messungen in Äthiopien. – Prot. Erdm. Tiefens. Grafrath, 58–70.

BERKTOLD, A., V. HAAK, G. ANGENHEISTER, 1975: Magnetotelluric Measurements in the Afar area. In: Afar Depression of Ethiopia. Inter-Union Commission on Geodynamics, Scientific Report No. 14, Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 66–79.

CAGNIARD, L., 1953: Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. Geophysics, *18*, 605–635.

D'ERCEVILLE, I., G. KUNETZ, 1962: The effect of a fault on the earth's natural electromagnetic field. Geophysics, *27*, 651–665.

DORNER, F., 1976: Magnetotellurik entlang eines Profils vom westlichen Hochland Äthiopiens in die Afarsenke (Dessie-Burka). Diplomarb. Inst. Allg. Angew. Geophysik Univ. München.

ECKHARDT, D., 1968: Theory and Interpretation of the Electromagnetic Impedance of the Earth. – J. Geophys. Res., vol. 73, no. 16, 5317–5326.

FORBUSH, S. E., M. CASAVERDE, 1961: Equatorial Electrojet in Peru. Carnegie Inst. Wash. Publ. 620, Washington.

GLENN, W. E., J. RYO, S. H. WARD, W. J. PEEPLES, R. J. PHILLIPS, 1973: The Inversion of Vertical Magnetic Dipole Sounding Data. Geophysics, vol. 38, No. 6, S. 1109–1129.

GREINWALD, S., 1972: Ein Gerät zur Registrierung von Variationen des erdmagnetischen und erdelektrischen Feldes und die Bearbeitung der damit gewonnenen Meßwerte, demonstriert an zwei Stationen aus der Afarsenke. Diss. Fak. Geow. Univ. München.

HAAK, V., 1970: Das zeitlich sich ändernde erdelektrische Feld, beobachtet auf einem Profil über dem Rheingraben; eine hiervon abgeleitete Methode der Auswertung mit dem Ziel, die elektrische Leitfähigkeit im Untergrund zu bestimmen. – Diss. Univ. München.

HAAK, V., 1972: Bestimmung der Übertragungsfunktionen in Gebieten mit lateraler Änderung der elektrischen Leitfähigkeit. – Z. f. Geophysik, 38, 85–102.

HERMANCE, J. F., W. R. PELTIER, 1970: Magnetotelluric Field of a Line Current. J. G. R., 75, 3351–3356.

HERMANCE, J. F., L. R. GRILLOT, 1974: Constraints on Temperatures beneath Iceland from Magnetolluric Data. Phys. Earth Plan. Int. 8, 1–12.

HESSE, D., 1977: Filmmontagen von Registrierungen des Magnetfelds des Äquatorialen Electrojets in Brasilien (pers. Mitt.).

HIBBS, R. D., F. W. JONES, 1973: Electromagnetic Induction in the Earth by a Symmetric Non-Uniform Source. Geophys. J. R. astr. Soc., 32, 269–277.

HIBBS, R. D., F. W. JONES, 1973: Electromagnetic Induction in the Earth by a Non-Symmetric Non-Uniform Source. J. Geomagn. Geoelectr., 25, 75–86.

HIBBS, R. D., F. W. JONES, 1974: Electromagnetic Induction in the Earth by an Aperiodic Non-Uniform Current Source. J. Geomagn. Geoelectr., 26, 39–53.

HUTTON, R., 1972: Some Problems of Electromagnetic Induction in the Equatorial Electrojet Region – I: Magneto-telluric Relations. Geophys. J. R. astr. Soc., 28, 267–284.

INMAN, J. R., J. Ryo, S. H. WARD, 1973: Resistivity Inversion. Geophysics, vol. 38, No. 6, S. 1038–1108.

JACKSON, D. D., 1973: Marginal Solutions to Quasi-Linear Problems in Geophysics: The Edgehog Method. Geophys. J. R. astr. Soc., 35, S. 121–136.

JONES, F. W., 1970: Electromagnetic Induction in a Non-Horizontally Stratified Two-Layered Conductor. Geophys. J. R. astr. Soc., 22, 17–28.

JONES, F. W. and A. T. PRICE, 1970: The Perturbations of Alternating Geomagnetic Fields by Conductivity Anomalies. Geophys. J. R. astr. Soc., 20, 317–334.

JONES, F. W. and L. J. PASCOE, 1971: A General Computer Program to Determine the Perturbation of Alternating Electric Currents in a Two-Dimensional Model of a Region of Uniform Conductivity with an Embedded Inhomogeneity. Geophys. J. R. astr. Soc., 24, 3–30.

KERTZ, W., 1954: Modelle für erdmagnetisch induzierte elektrische Ströme im Untergrund. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Klasse, Abt. IIa, 101–110.

KIESSLING, W., 1970: Untersuchung der Variationen des erdelektrischen und erdmagnetischen Feldes im Oberpfälzer Wald zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit in größeren Tiefen mit der Methode der Magnetotellurik. – Dipl.-Arbeit Inst. Angew. Geophysik Univ. München.

LARSEN, J. C., 1975: Low Frequency (0.1–6.0 cpd) Electromagnetic Study of Deep Mantle Electrical Conductivity Beneath the Hawaiian Islands. Geophys. J. R. astr. Soc., 43, 17–46.

LOWES, F. J., 1974: Do Magnetometers Measure B or H ?, Geophys. J. R. astr. Soc., 37, 151–155.

PARKER, R. L., 1970: The Inverse Problem of the Electrical Conductivity in the Mantle. Geophys. J. R. astr. Soc., 22, S. 121–138.

PARKER, R. L., 1972: Inverse Theory with Grossly Inadequate Data. Geophys. J. R. astr. Soc., 29, S. 123–138.

PASCOE, L. J. and F. W. JONES, 1972: Boundary Conditions and Calculation of Surface Values for the General Two-Dimensional Electromagnetic Induction Problem. Geophys. J. R. astr. Soc., 27, 179–193.

PELTIER, W. R., J. F. HERMANCE, 1971: Magnetotelluric Fields of a Gaussian Electrojet. Can. J. Earth Sciences, 8, 338–346.

PORATH, H., A. DZIEWONSKI, P. GOUIN, D. J. BENNET 1973: Ground Observations of the magnetic field of the Electrojet with a large array of magnetometers. Vortrag First Lloyd V. Berkner Symp., Americ. Geophys. Union, Dallas, Texas.

PORSTENDORFER, G., 1975: Principles of Magneto-Telluric Prospecting. Geopublication Associates, Geoexploration Monographs Series 1 No. 5, Ed. G. Kunetz, D. S. Parasnis, Gebrüder Borntraeger, Berlin-Stuttgart.

REITMAYR, G., 1971: Auswertung von Messungen des erdelektrischen und erdmagnetischen Feldes auf einem Profil quer über den Oberrhein-Graben. – Dipl.-Arbeit Inst. Angew. Geophysik Univ. München.

REITMAYR, G., 1974: Elektromagnetische Induktion im Erdinnern, studiert am Rheingraben. Diss. Fak. Geow. Univ. München.

RICHMOND, A. D., 1973: Equatorial electrojet – I. Development of a model including winds and instabilities. J. Atmosph. Terr. Physics, vol. 35, 1083–1103.

SCHMUCKER, U.: 1969: Zwei neue Verfahren zur Bestimmung des elektrischen Widerstandes als Funktion der Tiefe aus erdmagnetischen und erdelektrischen Beobachtungen. S. 134 ff., Prot. Koll. Erdmagn. Tiefens. Reinhausen.

SCHMUCKER, U., 1970: Anomalies of Geomagnetic Variations in The Southwestern United States. Bull. Scripps Inst. Oceanogr. Univ. Cal., 13.

SCHMUCKER, U., 1970: An Introduction to Induction Anomalies. J. Geomagn. Geoelectr., vol 22, no. 1–2, 9–33.

SCHMUCKER, U., 1971: Neue Rechenmethoden zur Tiefensondierung. – Prot. Koll. Erdmag. Tiefens. Rothenberge, 1–39.

SCHMUCKER, U., 1971: Interpretation of Induction Anomalies above Nonuniform Surface Layers. Geophysics, vol. XXXVI, No. 1, pp. 156.

SCHMUCKER, U., 1972: A New Algorithm for the Interpretation of Surface Response Data above a Layered Halfspace. Manuskript, Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth, Edinburgh, 1972.

SCHMUCKER, U., 1972: Refined Boundary Conditions for 2-dimensional Model Calculations. Manuskript, Workshop on Electromagnetic Induction in Edinburgh.

SCHMUCKER, U., 1973: Regional Induction Studies: A Review of Methods and Results. Physics Earth Plan. Interiors, 7, pp. 365–378.

SCHMUCKER, U., 1974: Direkte und Iterative Verfahren zur Behandlung 2-dimensionaler Leitfähigkeitsmodelle. Prot. Koll. Erdmagn. Tiefens. Grafrath, S. 429 ff.

SCHMUCKER, U., 1974: Erdmagnetische Tiefensondierung mit langperiodischen Variationen. Prot. Koll. Erdmagn. Tiefens. Grafrath, S. 313–343.

SCHMUCKER, U. and J. JANKOWSKI, 1972: Geomagnetic Induction Studies and the Electrical State of the Upper Mantle. In A. R. Ritsema (Ed.), The Upper Mantle. Tectonophys., 13 (1–14): 233–256.

SMITH, G. D., 1970: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Vieweg Paperback.

UNTIEDT, J., 1968: Der äquatoriale Elektrojet – Stromsystem und Magnetfeld. GAMMA *2*, 1–81.

WEIDELT, P., 1972: The Inverse Problem of Geomagnetic Induction. Z. f. Geophysik, 38, S. 257–289.

WEIDELT, P., 1974: Modellrechnungen zur elektromagnetischen Induktion in dreidimensionalen Strukturen. – Prot. Koll. Erdmag. Tiefensond. Grafrath, 442–461.

WEAVER, J. T., 1973: Induction in a layered plane earth by uniform and non-uniform source fields. – Phys. Earth Plan. Int., 7, S. 279.

WINTER, R., 1973: Der Oberrheingraben als Anomalie der elektrischen Leitfähigkeit, untersucht mit Methoden der erdmagnetischen Tiefensondierung. Diss. Univ. Göttingen, 46–48.