

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 86

MAX KNEISSL

Pendel- und Gravimetermessungen
auf den europäischen Gravimeter-
Eichlinien

Mit 4 Figuren

Vorgetragen am 8. November 1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

INHALT

1. Allgemeines	5
2. Die Beschreibung der Stationspunkte der europäischen Gravi- metereichlinien	8
3. Pendelmessungen auf den europäischen Gravimetereichlinien	10
a) Beobachtungsergebnisse	10
b) Die Ausgleichung des Pendelgrundnetzes	12
4. Lineare Abbildung des MORELLI-MARTIN-Gravimeternetzes (1956) auf das Pendelgrundnetz	18

1. ALLGEMEINES

Auf der X. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik in Rom (1954) wurde die Anlage europäischer Gravimetereichlinien empfohlen und hierzu folgende Linienauswahl getroffen:

1) Hauptlinie:

Hammerfest – Bodö – Oslo – Kopenhagen – Bad Harzburg – München – Rom

2) Parallellinie (Kontroll-Linie):

Edinburgh – Teddington – Paris – Bagnères de Bigorre

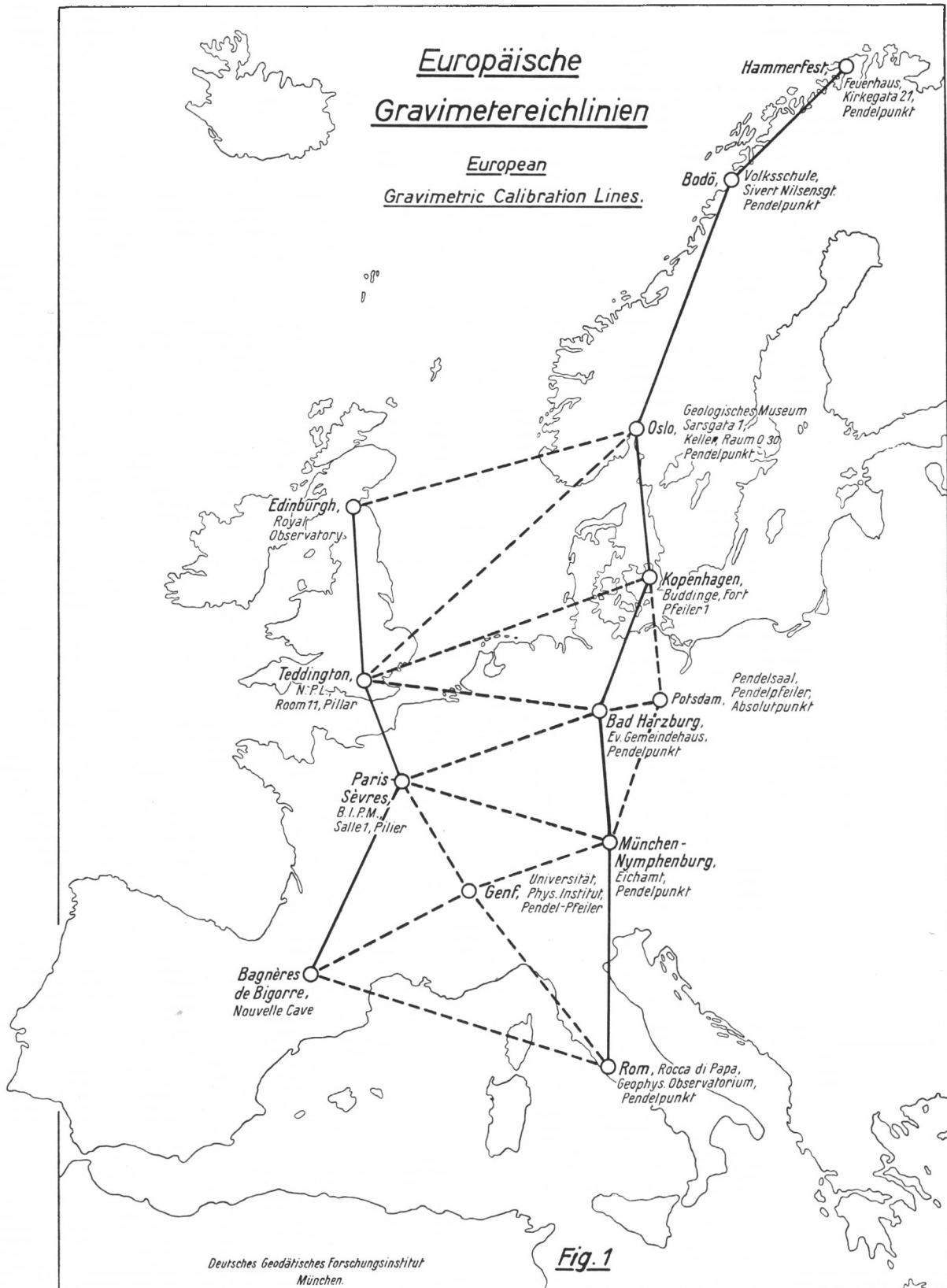
3) Die zwischen diesen Linien bestehenden Querverbindungen.

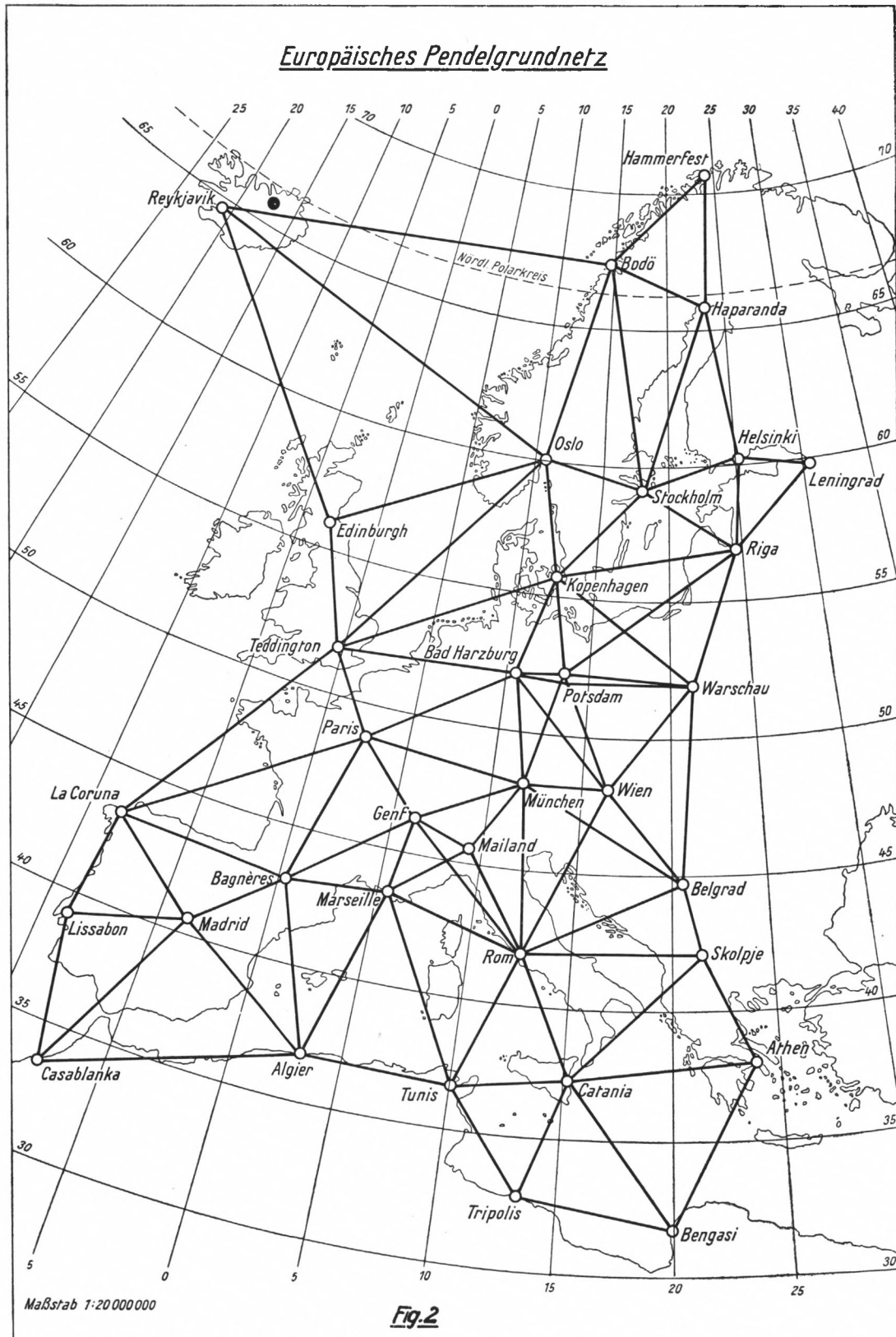
Damit wurden die zunächst isoliert angelegten meridionalen Eichlinien zu einem Gravimetereichnetz zusammengeschlossen, das aus annähernd gleichseitigen Dreiecken besteht. Die Unterteilung in Dreiecke gestattet, die Eichmessungen durch Bildung der Polgonschlußfehler unabhängig und durchgreifend zu verproben.

Die einzelnen Stationen und die eigentlichen Beobachtungspunkte wurden 1954 international festgelegt. Dabei wurde auf die bereits feststehenden nationalen Eichlinien und auf die bereits früher eingerichteten und mehrmals benutzten Pendelstationen Rücksicht genommen. So stimmt die Linie Rom – München – Bad Harzburg mit der von MORELLI (Triest) für seine Gravimetereichungen ausgewählten Linie weitgehend überein. Die französische Eichlinie Paris – Bagnères de Bigorre und die englische Eichlinie Edinburgh – Teddington sind vollständig übernommen. Für Dänemark und Norwegen wurden durch entsprechende Unterteilung der Linie Kopenhagen – Flensburg bzw. Hammerfest – Bodö – Oslo zweckmäßige Eichlinien geschaffen. Damit ist die künftige praktische Benutzung und der Anschluß der nationalen Schwerenetze an das System der europäischen Gravimetereichlinien gewährleistet.

Im übrigen wurde das in Rom geplante Eichnetz noch durch Einbeziehung der Punkte Potsdam, Geodätisches Institut, Pendelsaal und Genf, Universität, Phys. Institut, Pendelpfeiler einerseits mit dem Weltschwerebezugspunkt Potsdam (Absolutpunkt), andererseits mit der in der Berichtszeit neu eingerichteten Schweizer Eichlinie Zürich – Genf verbunden.

Weiter wurden in Südfrankreich noch die Pyrenäenstrecke Bagnères de Bigorre, Nouvelle Cave – Pic du Midi, Point Lejay, in Italien die Strecke Rom, I. N. G. – Rocca di Papa, Geophysikalisches Observatorium, in Deutschland die Bergstrecke München – Garmisch – Zugspitze und das vollständig neu beobachtete deutsche Pendelgrundnetz mit den Punkten Bamberg, Flensburg, Hamburg-Harburg, Bentheim, Karlsruhe, Weidenau und Regensburg angeschlossen.





Für den Anschluß der Finnischen Gravimetrierungen an das europäische Gravimeter-eichnetz wurde die Herstellung einer Verbindung zwischen Helsinki und Hammerfest über Haparanda angeregt.

Damit ergibt sich für die Europäischen Gravimeteereichlinien, ihre Zwischenpunkte und Verbindungslinien das in Fig. 1 gegebene Bild. Das Hauptanliegen besteht nun darin, für die verschiedenen Teillinien des europäischen Gravimeter-eichsystems einheitliche, möglichst gleich genaue und allgemein verbindliche Eichwerte festzulegen. Dabei sollte man sich von vornherein darüber klar werden, daß es sich nur darum handeln kann, sich zunächst auf möglichst plausible Werte zu einigen, die den z. Z. vorliegenden Beobachtungen am besten entsprechen. Im übrigen sollte man darauf Bedacht nehmen, daß nach gewissen Zeiträumen – ich denke etwa gleichlaufend mit den Internationalen Geophysikalischen Jahren, d. h. etwa alle 25 Jahre – das gesamte Eichsystem auf Grund der bis dahin vorliegenden Messungen überprüft und gegebenenfalls neu bewertet werden muß.

Die Anlage des europäischen Gravimeter-eichnetzes hat seit 1954 noch eine sehr bedeutungsvolle Nebenwirkung erreicht. Es bildet in seiner systematischen und nahezu symmetrischen Anlage den Kern für ein einheitliches europäisches Pendel- und Gravimetergrundnetz. Erfreuliche Ansätze hierzu zeichnen sich durch neue Gravimetermessungen zwischen Helsinki und Potsdam und die geplanten Pendelmessungen zwischen München und Wien ab.

Die in vielen europäischen Ländern begonnene systematische Einrichtung von nationalen Gravimetergrundnetzen und ihr Zusammenschluß zu einem einheitlichen europäischen Gravimetergrundnetz wurde durch die Anlage der europäischen Eichlinien wesentlich gefördert. Mustergültig geordnete und angelegte Gravimeternetze bestehen – soweit ich dies überblicken kann – schon heute in England, Dänemark, Deutschland, der Schweiz, Österreich, Italien, und sicher noch in weiteren europäischen Ländern, wobei in vielen Fällen an den Landesgrenzen einwandfreie Grenzübergänge mit gegenseitigen Beobachtungen geschaffen werden konnten. Abschließend soll hierzu in Fig. 2 noch ein allgemeiner Vorschlag für den Aufbau eines europäischen Schweregrundnetzes gegeben werden.¹

2. DIE BESCHREIBUNG DER STATIONSUNKTE DER EUROPÄISCHEN GRAVIMETEREICHLINIEN

Die Beobachtungspunkte der europäischen Gravimeteereichlinie sind eingehend beschrieben und ihre örtliche Lage durch Skizzen und Photographien erläutert in M. KNEISL, „Die internationalen europäischen Gravimeter-Eichbasen“, Abh., Neue Folge Heft 79, Bayer. Akad. d. Wiss., München 1956.

Hiernach wurden auf Grund der Empfehlungen der Internationalen Gravimetrischen Kommission folgende Punkte als Hauptstationen der europäischen Gravimeteereichlinien bestimmt:

¹ KNEISL, M.: „Vorschlag für ein einheitliches europäisches Schwerenet“. Festschrift C. F. Baeschlin, Zürich 1957, S. 137–148.

- I. Edinburgh, Royal Observatory
 $\varphi = 55^{\circ} 55' 24,5''$ N.; $\lambda = 3^{\circ} 07' 36''$ W.; $H = 129,4$ m
- II. Teddington, National Physical Laboratory, Meteorology Division Building, Room 11, Pillar
 $\varphi = 51^{\circ} 25' 13,6''$ N.; $\lambda = 0^{\circ} 21' 21,4''$ W.; $H = 9,23$ m
- III. Paris-Sèvres, Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, Laboratoire, Salle 1, pilier devant la porte
 $\varphi = 48^{\circ} 49,45'$ N.; $\lambda = 2^{\circ} 13,14'$ E.; $H = 65,93$ m (Pfeileroberfl.)
- IV. Bagnères de Bigorre, Nouvelle Cave, Station Géophysique de Bagnères de Bigorre, nouvelle Cave
 $\varphi = 43^{\circ} 03,6'$; $\lambda = 0^{\circ} 08,6'$ E.; $H = 563$ m (Prov. Höhe)
 Pic du Midi, Station R. P. Lejay, Observatoire, 4^e étage de l'ascenseur, vestibule, devant la fenêtre vers le sud
 $\varphi = 42^{\circ} 56,3'$; $\lambda = 0^{\circ} 08,3'$ E.; $H = 2855$ m
- V. Hammerfest, „Feuerhaus“ Kirkegata 21, Werkstatt im Keller, Pendelpunkt
 $\varphi = 70^{\circ} 39' 43''$ N.; $\lambda = 23^{\circ} 41' 06''$ E.; $H = 15,60$ m
- VI. Bodö, Volksschule, Sivert Nilsensgt., Waschraum im Keller, Pendelpunkt
 $\varphi = 67^{\circ} 16' 47''$; $\lambda = 14^{\circ} 23' 43''$ E.; $H = 13,37$ m
- VII. Oslo, Sarsgate 1, Geologisk Museum, Keller, Raum 030
 $\varphi = 59^{\circ} 55' 07''$ N.; $\lambda = 10^{\circ} 46' 37''$ E.; $H = 30,59$ m (Fußboden)
- VIII. Kopenhagen, Buddinge Fort, Pfeiler I, Kopenhagen-Soborg, Geodetisk Instituts Observatorium, Buddinge pillar Nr. 1
 $\varphi = 55^{\circ} 44,35'$ N.; $\lambda = 12^{\circ} 30,12'$ E.; $H = 44,73$ m (Pfeileroberfläche)
- IX. Potsdam, Pendelsaal des Geodätischen Instituts, Station der Absolutmessung Kühnen, Furtwängler, Referenzstation des Potsdamer Systems
 $\varphi = 52^{\circ} 22,86'$ N.; $\lambda = 13^{\circ} 04,06'$ E.; $H = 87,00$ m (Fußboden)
- X. Bad Harzburg, Kirchstr. 6, Evangelisches Gemeindehaus, Pendelkeller hinter der Kellerküche
 $\varphi = 51^{\circ} 52,91'$ N.; $\lambda = 10^{\circ} 34,07'$ E.; $H = 275,19$ m (Fußboden)
- XI. München-Nymphenburg, Franz-Schrank-Str. 9, Bayer. Landesamt für Maß und Gewicht, Tiefbehälterraum
 $\varphi = 48^{\circ} 10,00'$ N.; $\lambda = 11^{\circ} 30,20'$ E.; $H = 511,00$ m
- XII. Rom, Rocca di Papa, Osservatorio Geofisico, prima stanzetta (delle preparazione) a sinistra sotto la scala accanto al sismografo Wiechert, a 1,50 m dallo spigolo E.
 $\varphi = 41^{\circ} 45,5'$; $\lambda = 12^{\circ} 43'$; $H = 757$ m
 Rom, I. N. G. Città Universitaria, Istituto Nazionale di Geofisica, Stazione Sismica, Pilastro gravimetrico
 $\varphi = 41^{\circ} 54,2'$; $\lambda = 12^{\circ} 30,8'$; $H = 45$ m

XIII. Genf, 24, Quai de l'Ecole-de-Médecine, Institut de Physique de l'Université, Sous-terrain, Salle des Mesures, pilier

$$\varphi = 46^{\circ} 11' 50''; \quad \lambda = 6^{\circ} 08' 03'' \text{ E.}; \quad H = 372,5 \text{ m}$$

Zu den Hauptpunkten der Stationen, die durchwegs als Pendelpunkte eingerichtet sind, wurden Neben- und Anschlußpunkte für die Gravimetermessungen angelegt.

3. PENDELMESSUNGEN AUF DEN EUROPÄISCHEN GRAVIMETEREICHLINIEN

a) BEOBACHTUNGSERGEBNISSE

Die auf den europäischen Gravimeterreichlinien vorliegenden älteren Pendelmessungen wurden systematisch gesichtet und seit der Tagung in Rom durch folgende Neumessungen ergänzt:

- 1954 von J. C. ROSE, Woods Hole Oceanographic Institution, Massachusetts, mit einem Gulf-Pendelapparat;
- 1955 von G. JELSTRUP, Norges Geografiske Oppmåling, Oslo, mit dem Pendelapparat der Universität Cambridge;
- 1955 und 1956 von R. BRUNS und K. MARZAHN, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut München, mit einem Askania Vierpendelapparat.

Die endgültigen Ergebnisse von ROSE¹ und JELSTRUP² sind veröffentlicht. Die Messungen von Bruns und Marzahn, für die zunächst vorläufige Ergebnisse veröffentlicht worden sind,³ wurden einheitlich reduziert. Dann wurden die Tagesmittel der Pendelschwingungszeiten unter Berücksichtigung von Korrektionsgrößen für die sprunghaften und stetigen Änderungen der Schwingungszeiten – soweit sie sich als real nachweisen ließen⁴ – ausgeglichen und daraus die Schwereunterschiede berechnet.⁵

Die in den genannten Publikationen eingehend beschriebenen neuen Beobachtungen sind nun mit den wichtigsten der vorliegenden älteren Messungen in Tabelle 1 durch einfache Mittelung zusammengefaßt, wobei mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Einzelbeobachtungen alle Ergebnisse wie gleichgewichtige und unabhängige Beobachtungen behandelt worden sind. Diese Voraussetzungen treffen selbstverständlich nicht zu. Eine vollständige und strenge Berücksichtigung aller Abhängigkeiten und der tatsächlichen Beobachtungsgewichte ist praktisch nicht möglich, sie würde die Zusammenfassung nur erschweren und sicher keine merkliche Genauigkeitssteigerung bringen.

¹ ROSE, J. C. und G. P. WOLLARD, Report on gravity measurements carried out with the Gulf, „M“ and „K“ sets of pendulums (1953–55) Reference No 56–72, Woods Hole, Massachusetts, Dezember 1956.

² JELSTRUP, G., Observations on the gravimetric calibration base Hammerfest-Munich with the Cambridge pendulum apparatus, Norges geografiske oppmåling, Geodetiske arbeider, Heft 7, Oslo 1957.

³ KNEISL, M., Das Deutsche Schweregrundnetz, Veröff. der DGK, Reihe B, Heft Nr. 23, Teil IV und V, München 1956 und 1957.

⁴ MARZAHN, K., Über die Meßgenauigkeit des Askania-Vierpendelapparates des Deutschen Geodätischen Forschungsinstituts, Veröff. der DGK, Reihe B, Heft Nr. 43 (im Druck).

⁵ MARZAHN, K., Ergebnisse der Pendelmessungen des Deutschen Geodätischen Forschungsinstituts auf den Stationen der europäischen Gravimeterreichlinien, Veröff. der DGK, Reihe B, Heft Nr. 44 (im Druck).

Tabelle 1

Ergebnisse der Pendelmessungen auf den europäischen Gravimetereichlinien

Stand: 19. 6. 1957

Abschnitt Station A Station B	Beobachter	Jahr	$\Delta g = g_A - g_B$ mGal	Δg Mittel mGal
I. Abteilung: Nord-Süd-Verbindungen				
I-II				
Edinburgh, Royal Observatory	Bullerwell	1952	+387,25	+388,36
Teddington, N. P. L.	Bruns, Marzahn	1956	+389,48	
II-III				
Teddington, N. P. L.	Cook	1952	+256,73	+256,68
Paris - Sèvres, B. I. P. M.	Bruns, Marzahn	1956	+256,63	
III-IV				
Paris - Sèvres, B. I. P. M.	Bruns	1955	+653,07	+653,07
Bagnères de Bigorre, Nouvelle Cave	Bruns	1955	+542,88	
Bagnères de Bigorre, Nouvelle Cave Pic du Midi, Magasin				
V-VI				
Hammerfest, Feuerhaus	Jelstrup	1955	+244,95	+244,95
Bodø, Volksschule				
VI-VII				
Bodø, Volksschule	Jelstrup	1955	+459,22	+459,68
Oslo, Geologisches Museum	Bruns, Marzahn	1956	+460,15	
VII-VIII				
Oslo, Geologisches Museum	Rose	1954	+369,5	+369,94
Kopenhagen-Buddinge, Pfeiler 1	Bruns	1955	+371,54	
	Jelstrup	1955	+368,79	
VIII-X				
Kopenhagen-Buddinge, Pfeiler 1	Rose	1954	+377,80	+377,18
Bad Harzburg, Evang. Gemeindehaus	Bruns	1955	+375,97	
	Jelstrup	1955	+377,76	
X-XI				
Bad Harzburg, Evang. Gemeindehaus	Weiken	1934/43	+437,3	+436,60
München-Nymphenburg, Eichamt	Rose	1954	+436,2	
	Jelstrup	1955	+435,72	
	Bruns, Marzahn	1956	+437,17	
XI-XII				
München-Nymphenburg, Eichamt	Rose	1954	+380,2	+381,40
Rom, I. N. G.	Bruns	1955	+382,60	
Rom, I. N. G.				
Rocca di Papa, Geophys. Observat.	Bruns	1955	+169,51	+169,51

Abschnitt Station A Station B	Beobachter	Jahr	$\Delta g = g_A - g_B$ mGal	Δg Mittel mGal
-------------------------------------	------------	------	--------------------------------	------------------------------

II. Abteilung: West-Ost-Verbindungen

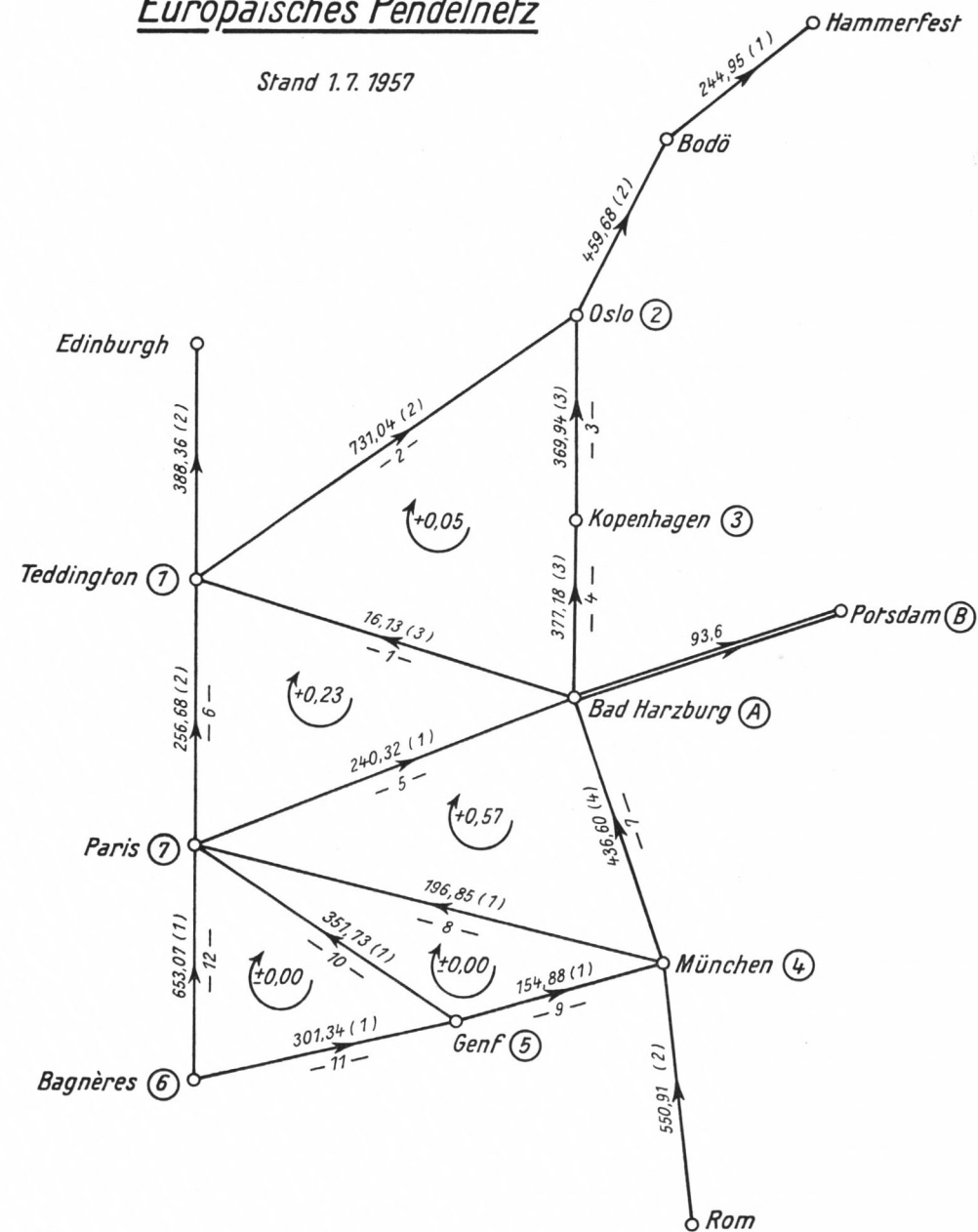
II-VII				
Teddington, N. P. L.	Jelstrup	1955	-730,88	-731,04
Oslo, Geologisches Museum	Bruns, Marzahn	1956	-731,20	
II-X				
Teddington, N. P. L.	Cook	1952	+ 15,6	+ 16,13
Bad Harzburg, Evang. Gemeindehaus	Rose	1954	+ 16,4	
	Bruns, Marzahn	1956	+ 16,31	
X-IX				
Bad Harzburg, Evang. Gemeindehaus	Weiken	1934/43	- 93,6	- 93,6
Potsdam, Geod. Inst., Pendelsaal				
III-X				
Paris-Sèvres, B. I. P. M.	Bruns	1955	-240,32	-240,32
Bad Harzburg, Evang. Gemeindehaus				
III-XI				
Paris-Sèvres, B. I. P. M.	Bruns	1955	+ 196,85	+ 196,85
München-Nymphenburg, Eichamt				
III-XIII				
Paris-Sèvres, B. I. P. M.	Bruns	1955	+ 351,73	+ 351,73
Genf, Physikalisches Institut				
XI-XIII				
München-Nymphenburg, Eichamt	Bruns	1955	+ 154,88	+ 154,88
Genf, Physikalisches Institut				
IV-XIII				
Bagnères de Bigorre, Nouvelle Cave	Bruns	1955	-301,34	-301,34
Genf, Physikalisches Institut				

b) DIE AUSGLEICHUNG DES PENDELGRUNDNETZES

Mit den Mittelwerten der Tabelle 1 wurden die Schleifenschlußfehler oder -widersprüche der Fig. 3 berechnet. Die beiden südlichsten Dreiecke (Paris-München-Genf, Paris-Genf-Bagnères de Bigorre) setzen sich nur aus Schweredifferenzen zusammen, die durch das D.G.F.I. beobachtet und in sich ausgeglichen wurden. Die Dreiecksschlußfehler müssen daher Null sein. Die übrigen Schleifenschlußfehler rühren von den Unterschieden der unabhängigen Einzelbeobachtungen her, die zu den Mittelwerten zusammengefaßt wurden. Für die nachfolgenden Ausgleichungsberechnungen sind in Fig. 3 den Schweredifferenzen in Rundklammern Gewichte beigeschrieben, die jeweils der Zahl der vorliegenden abhängigen Messungen entsprechen.

Europäisches Pendelnetz

Stand 1.7.1957



① *Punktnummer*

— i — Nummer der Linie

(....) Anzahl der gemittelten Werte

16,01 Beobachtete Schweredifferenz in m Gal

$+0,23$ Schleifenschlußfehler in m Gal

Widerspruch der Umfangsschleife: +0,85 m Gal

Fig.3

Die Ausgleichungsmethode wurde in der Abhandlung „Niveau und Maßstab des vorläufigen europäischen Gravimeternetzes (Morelli-Martin-Netz 1956)“¹ eingehend beschrieben und an einem Rechenbeispiel erläutert.

In diesem Beispiel mußten neben „vorläufigen“ Pendelwerten auch aus mehreren Teilsommen zusammengesetzte Schweredifferenzen und gefolgerte (also nicht beobachtete) Schweredifferenzen verwendet werden.

Da in der Zwischenzeit alle seit 1954 durchgeführten Pendelmessungen endgültig reduziert wurden, stehen nunmehr wesentlich bessere Werte zur Verfügung.

Es wurde daher mit den in Fig. 3 eingetragenen Werten die Ausgleichung wiederholt und unter verschiedenen Voraussetzungen zweimal durchgeführt. Die Anschlußstrecken Teddington–Edinburgh, Oslo–Bodö–Hammerfest und München–Rom wurden nicht berücksichtigt. Wenn wir diese Berechnungen mit Ausgleichung I und II bezeichnen, dann gelten folgende Voraussetzungen:

Ausgleichung I

Der bisherige Schwerewert des Ausgangspunktes Bad Harzburg, Pendelpunkt mit $G_H = 981\,180,4$ mGal wird beibehalten. Alle Schweredifferenzen gelten als gleichgewichtig.

Ausgleichung II

Der bisherige Schwerewert des Ausgangspunktes Bad Harzburg, Pendelpunkt mit $G_H = 981\,180,4$ mGal wird beibehalten. Alle Schweredifferenzen erhalten die in Fig. 3 eingeschriebenen Gewichte.

Die Ausgangswerte und Ergebnisse der beiden Ausgleichungen sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Im einzelnen enthalten:

Spalte 1: die Punktnummer,

Spalte 2: die Punktbezeichnung,

Spalte 3: die angenommenen vorläufigen Schwerewerte G'_i der Knotenpunkte P_i ,

Spalte 4: die durch die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zu bestimmenden Zuschläge x_i ,

Spalte 5: die ausgeglichenen oder endgültigen Schwerewerte G_i ,

Spalte 6: die mittleren Unsicherheiten der Schwerewerte der Knotenpunkte gegenüber dem Ausgangspunkt Bad Harzburg. Diese mittleren Fehler sind auch gleich den mittleren Fehlern der Schwereunterschiede zwischen dem jeweiligen Knotenpunkt und dem Ausgangspunkt Bad Harzburg.

Die Fehlergleichungen besitzen unter Beachtung von

$$G_i = G'_i + x_i, \quad \Delta g'_{ik} = G'_k - G'_i \quad (1)$$

und

$$\Delta g_{ik} = \Delta g'_{ik} + v_{ik}$$

¹ KNEISSL, M., Niveau und Maßstab des vorläufigen europäischen Gravimeternetzes (Morelli-Martin-Netz 1956), Veröff. der DGK, Reihe A, Heft Nr. 21.

die allgemeine Form:

$$\begin{aligned} \Delta g'_{ik} + v_{ik} &= (G'_k + x_k) - (G'_i + x_i), \\ x_k - x_i &= \underbrace{G'_i - G'_k + \Delta g'_{ik}}_{+ l_{ik}} + v_{ik} \end{aligned} \quad (2)$$

oder

$$x_k - x_i = l_{ik} + v_{ik}, \quad v_{ik} = x_k - x_i - l_{ik}, \quad (3)$$

worin $\Delta g'_{ik}$ den vorläufigen Schwereunterschied zwischen P_i und P_k , v_{ik} seine durch die Ausgleichung zu bestimmende Verbesserung und, wie bereits oben angegeben, G'_k und G'_i die angenommenen Näherungswerte der Schwere in P_k und P_i , ferner x_k bzw. x_i die durch die Ausgleichung zu bestimmenden Zuschläge bedeuten, die die Näherungswerte in die endgültigen Werte überführen.

Damit ergeben sich in bekannter Weise die Normalgleichungen, die zur Ermittlung der Gewichtskoeffizienten $\left[\frac{\alpha_i \alpha_k}{p} \right]$ auch nach unbestimmten Absolutgliedern aufgelöst wurden. Die Auflösung nach bestimmten Absolutgliedern liefert die Zuschläge x_i für die Näherungswerte der Knotenpunkte, und nach Einsetzen der Zuschlagswerte erhält man die Verbesserungen v_{ik} der gemessenen Schwereunterschiede.

Andrerseits kann man mit Hilfe der Summe $[p v v]$ den mittleren Gewichtseinheitsfehler m_0 nach der Formel

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n - u}} \quad (4)$$

berechnen.

Die mittlere Unsicherheit eines ausgeglichenen Schwereunterschieds zwischen beliebigen Punkten ergibt sich schließlich nach folgender Formel:

$$m_{ik} = \pm m_0 \cdot \sqrt{\left[\frac{\alpha_i \alpha_i}{p} \right] - 2 \left[\frac{\alpha_i \alpha_k}{p} \right] + \left[\frac{\alpha_k \alpha_k}{p} \right]}. \quad (5)$$

Diese mittleren Unsicherheiten der Schwereunterschiede gegenüber dem Bezugspunkt Bad Harzburg sind in der letzten Spalte der Tabelle 2 aufgeführt.

Nach Abschluß der Ausgleichung wurden noch die nachstehenden Gravimeter- und Pendelhauptpunkte durch polare Anhängung unserem Netz angefügt:

Edinburgh, Royal Observ., an Glasgow, Prestwick,

Bagnères, nouv. cave, an Toulouse, Observ.

Rocca di Papa, Osserv., an Rom I. N. G.

und Paris-Sèvres, Pfeiler, an Paris C.

Die Differenzen II-I (Spalte 10, Tab. 2) zeigen, daß die Einführung von Gewichten das Ergebnis der Ausgleichung jeweils nur um wenige Hundertstel mGal, im Maximum in München um +0,15 mGal verändern. Die gewählten Gewichtszahlen werden daher für

Tabelle 2. Ausgleichung des Pendelnetzes

Nr.	Station	Vorläufiger Schwerewert G'_i mGal	Ausgleichung I (Gleichgewichtig)			Ausgleichung II (Ungleichgewichtig)			Differenz II - I mGal
			Zuschlag x mGal	Ausgeglich. Schwerewert G_i mGal	Mittl. Fehler m_i mGal	Zuschlag x mGal	Ausgeglich. Schwerewert G_i mGal	Mittl. Fehler m_i mGal	
			4)	5)	6)	7)	8)	9)	
1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
A	Bad Harzburg	981 180,40	—	981 180,40	—	—	981 180,40	—	
1	Teddington	981 196,40	+0,26	981 196,66	$\pm 0,15$	+0,23	981 196,63	$\pm 0,13$	—0,03
2	Oslo	981 927,50	+0,14	981 927,64	$\pm 0,19$	+0,11	981 927,61	$\pm 0,17$	—0,03
3	Kopenhagen	981 557,60	+0,04	981 557,64	$\pm 0,18$	+0,02	981 557,62	$\pm 0,15$	—0,02
4	München	980 743,80	—0,29	980 743,51	$\pm 0,15$	—0,14	980 743,66	$\pm 0,13$	+0,15
5	Genf	980 588,70	—0,18	980 588,52	$\pm 0,18$	—0,12	980 588,58	$\pm 0,22$	+0,06
6	Bagnères	980 287,00	+0,14	980 287,14	$\pm 0,21$	+0,17	980 287,17	$\pm 0,26$	+0,03
7	Paris	980 940,10	+0,08	980 940,18	$\pm 0,14$	+0,08	980 940,18	$\pm 0,16$	0,00

Angehängte Stationen

Edinburgh		981 585,02		981 584,99
Bodö		982 387,32		982 387,29
Hammerfest		982 632,27		982 632,24
Rom		980 362,11		980 362,26

die weiteren Berechnungen beibehalten. Zunächst wollen wir aber in Tab. 3 noch die Verbesserungen zusammenstellen, die die beobachteten Schweredifferenzen der einzelnen Linien durch die beiden Ausgleichungen erhalten. Die Differenzen in Spalte 4, Tab. 3 stimmen mit den Differenzen in Spalte 10, Tab. 2 größtmäßig gut überein.

Tabelle 3

Linie	Verbesserungen		Differenzen II - I mGal
	Ausgleichung I mGal	Ausgleichung II mGal	
1)	2)	3)	4)
1	+0,13	+0,10	—0,03
2	—0,06	—0,07	—0,01
3	+0,06	+0,04	—0,02
4	+0,06	+0,04	—0,02
5	—0,10	—0,10	$\pm 0,00$
6	—0,19	—0,22	—0,03
7	+0,29	+0,14	—0,15
8	—0,18	—0,34	—0,16
9	+0,11	+0,20	+0,09
10	—0,07	—0,14	—0,07
11	+0,04	+0,07	+0,03
12	—0,04	—0,07	—0,03

4. LINEARE ABBILDUNG DES MORELLI-MARTIN-GRAVIMETERNETZES (1956) AUF DAS PENDELGRUNDNETZ

Zur endgültigen Festlegung der Eichwerte für die Hauptpunkte der Europäischen Gravimereichbasen soll das Morelli-Martin-Gravimeternetz (1956) benutzt werden, das in vereinfachter Form bereits endgültig ausgeglichen wurde.¹ Der Veröffentlichung¹ entnehmen wir das Netzbild (Fig. 4) und die Werte der Tabelle 4.

Hierzu werden die Schwerewerte der identischen Punkte des Pendelnetzes (Tab. 2 Ausgl. II) und des Gravimeternetzes (Tab. 4) verglichen, wobei wir uns auf diejenigen Pendelpunkte beschränken müssen, die tatsächlich in die Netzausgleichung eingeführt wurden.

Es besteht also die Aufgabe:

1. Aufstellung der Transformationsgleichung für die Umrechnung der einzelnen Schwerewerte des Gravimeternetzes.
2. Bestimmung der Transformationskonstanten x (Niveauänderung) und y (Eich- oder Maßstabsfaktor) aus einer Ausgleichung, bei der die Transformationsgleichungen der beiden Netzen gemeinsamen Punkte als Fehlergleichungen benutzt werden.

Im folgenden bedeuten:

g'_i = vorläufiger Schwerewert des Punktes P_i im Gravimeternetz,

g_i = Schwerewert des Punktes P_i im Pendelnetz,

g''_i = endgültiger Schwerewert des Punktes P_i im transformierten Gravimeternetz.

Durch Vergleich der Pendel- und Gravimeterwerte erhalten wir die Unterschiede

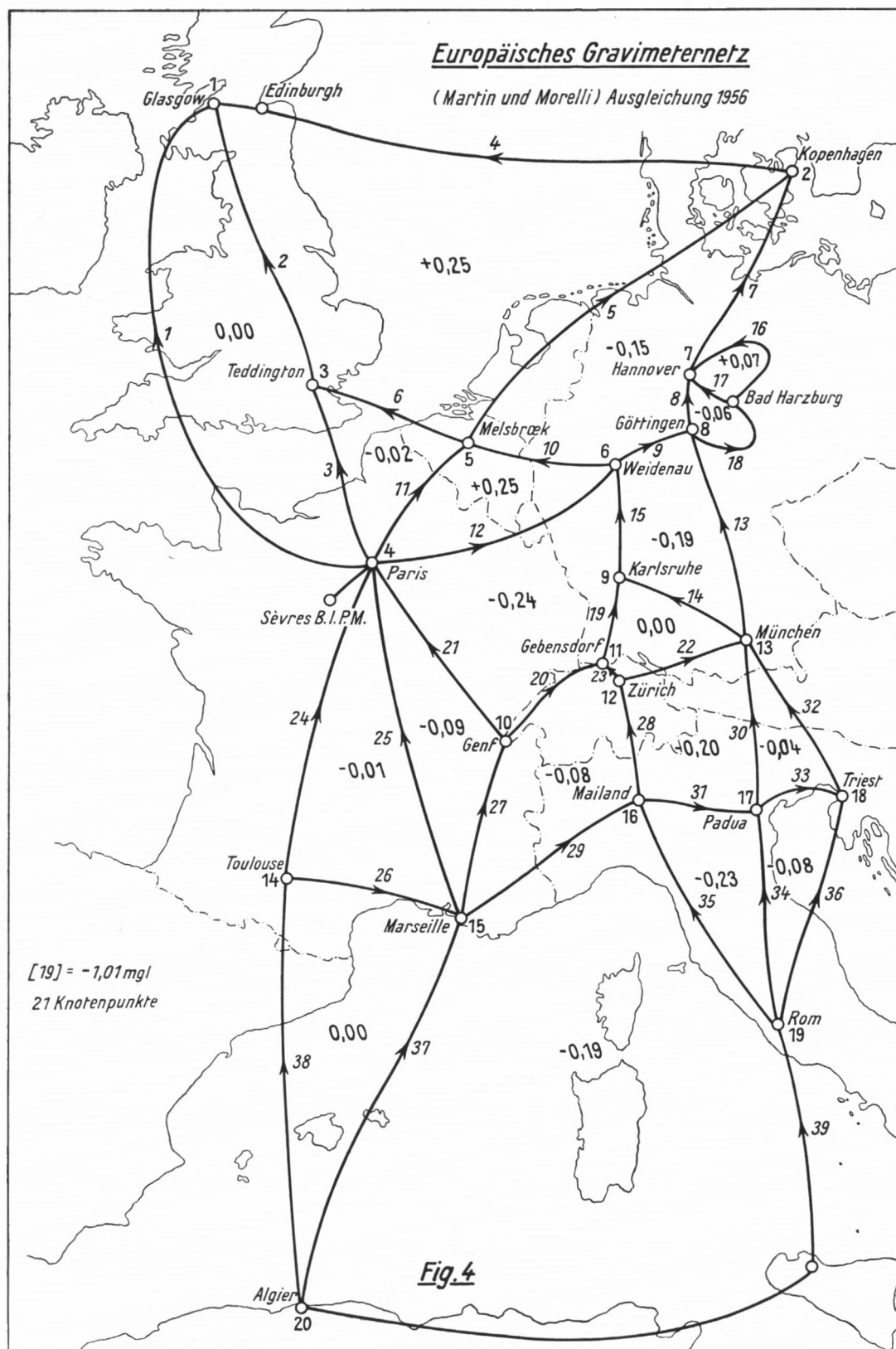
$$g'_i - g_i = k' = -k,$$

und nun sollen die aus den Gravimetermessungen gefundenen Schwerewerte g'_i durch eine Niveauänderung x und eine Maßstabsänderung y so geändert werden, daß sie in die Pendelwerte g_i übergehen. Es muß also sein

$$g_i = g'_i + x + b_i y = g''_i. \quad (6)$$

Dabei bedeutet b_i den gravimetrischen Schwereunterschied des Punktes P_i gegenüber einem beliebig gewählten Bezugspunkt P_0 . Das Ergebnis der Transformation ist von der Wahl des Bezugspunktes unabhängig, dagegen läßt sich die Rechenarbeit bei geeigneter Wahl von P_0 – man nimmt zweckmäßig den Schwerpunkt der Vergleichspunkte – etwas vereinfachen. Die Niveauänderung x hängt von der Wahl des Bezugspunktes P_0 ab, dagegen ist y , das als Neigung einer ausgleichenden Geraden aufgefaßt werden kann, davon unabhängig.

¹ KNEISSL, M., Niveau und Maßstab des vorläufigen europäischen Gravimeternetzes (Morelli-Martin-Netz 1956), Veröff. d. DGK, Reihe A, Heft Nr. 21 (1956) S. 25.



Wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den Pendel- und in den Gravimetermessungen wird sich die Bedingung $g_i'' = g_i$ im allgemeinen nicht einhalten lassen, sondern es werden restliche Differenzen δg bleiben. Damit gehen unsere Transformationsgleichungen in Fehlergleichungen über und man erhält:

$$g_i' + x + b_i y - g_i = \delta g_i. \quad (7)$$

Tabelle 4. MORELLI-MARTIN-Gravimeternetz 1956

Vorläufige und endgültige Schwerewerte

Nr.	Punktbezeichnung	Beobachteter Wert mGal	Verbesserung x mGal	Endgültiger Wert mGal	mittlerer Fehler mGal
1)	2)	3)	4)	5) ¹	6) ²
	Harzburg	981 180,4		981 180,40	
1	Glasgow/Prestwick	981 577,9	—0,06	981 577,84	±0,15
2	Kopenhagen, Buddinge, Pfeiler I	981 557,5	—0,09	981 557,41	±0,13
3	Teddington, N. P. L.	981 196,4	—0,01	981 196,39	±0,15
4	Paris, C	980 944,1	—0,26	980 943,84	±0,14
5	Melsbroeck, Chaufferie	981 161,4	+0,05	981 161,45	±0,14
6	Weidenau	981 120,1	—0,06	981 120,04	±0,13
7	Hannover	981 227,3	—0,01	981 227,29	±0,08
8	Göttingen	981 156,4	+0,11	981 156,51	±0,10
9	Karlsruhe	980 957,4	—0,32	980 957,08	±0,15
10	Genf, Observ.	980 581,8	—0,38	980 581,42	±0,16
11	Gebensdorf	980 720,3	—0,37	980 719,93	±0,16
12	Zürich, Kloten	980 687,4	+0,03	980 687,43	±0,16
13	München-Nymphenburg	980 744,7	+0,01	980 744,71	±0,14
14	Toulouse, Observ.	980 443,4	—0,38	980 443,02	±0,16
15	Marseille, Marignane	980 489,2	—0,42	980 488,78	±0,15
16	Mailand, Pol. int.	980 565,4	—0,06	980 565,34	±0,16
17	Padua, Osserv.	980 659,6	—0,28	980 659,32	±0,16
18	Triest, Osserv. Geof.	980 666,1	—0,21	980 665,89	±0,16
19	Rom, I. N. G.	980 362,8	—0,06	980 362,74	±0,16
20	Algier, Mais.-Bl.	979 907,7	—0,53	979 907,17	±0,17
	Angehängte Punkte:				
21	Bagnères, Nouv. Cave			980 287,67	
22	Edinburgh, Royal Obs.			981 583,44	
23	Rocca di Papa, Oss. Geof.			980 194,04	
24	Paris-Sèvres, Pfeiler			980 940,81	

In (7) kann nun die Differenz $(g_i' - g_i)$ als Absolutglied betrachtet und gleich k_i' gesetzt werden. Bezeichnen wir die Koeffizienten $+1$ von x noch mit a_i , so geht die Gleichung (7)

¹ Diese Werte wurden aus der Ausgleichung des Gravimeternetzes erhalten.

² Mittlere Fehler gegenüber Harzburg.

in die von MORELLI angegebene Form

$$a_i x + b_i y + k'_i = \delta g_i \quad (8)$$

über.

Durch Quadrieren und Addieren von (8) über alle Vergleichspunkte erhalten wir die Quadratsumme der Restdifferenzen

$$[\delta g_i \delta g_i] = [a_i a_i] x^2 + [b_i b_i] y^2 + [k'_i k'_i] + 2[a_i b_i] xy + 2[a_i k'_i] x + 2[b_i k'_i] y, \quad (9)$$

die mit Hilfe von

$$\frac{\partial [\delta g_i \delta g_i]}{\partial x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial [\delta g_i \delta g_i]}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

zu einem Minimum gemacht wird und zu den Normalgleichungen für die Berechnung der Transformationskonstanten x und y führt.

Aus (10) erhält man:

$$\text{I. } [a_i a_i] x + [a_i b_i] y + [a_i k'_i] = 0 \quad (11)$$

$$\text{und II. } [a_i b_i] x + [b_i b_i] y + [b_i k'_i] = 0.$$

Da $a_i = 1$ ist, wird $[a_i a_i] = n$ = der Zahl der Vergleichspunkte und $[a_i b_i] = [b_i]$, und hier liegt nun die Möglichkeit für eine günstige Wahl des Transformationsnullpunktes. Bezieht man nämlich die b_i auf den Schwerpunkt der Vergleichspunkte (im vorläufigen Gravimeternetz), indem man

$$g'_s = \frac{[g'_i]}{n}$$

bildet, und setzt man $b_i = \Delta g'_{s,i}$, so wird $[b_i] = 0$, und die Normalgleichungen zerfallen in

$$\text{I. } x_s = \frac{-[k'_i]}{n}, \quad (12)$$

$$\text{II. } y_s = \frac{-[b_i k'_i]}{[b_i b_i]}.$$

Andernfalls hat man die beiden Normalgleichungen (11), die man etwas vereinfacht mit

$$n x + [b_i] y + [k'_i] = 0$$

$$\text{und } [b_i] x + [b_i b_i] y + [b_i k'_i] = 0$$

anschreiben kann, in bekannter Weise aufzulösen:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{+ [k'_i] [b_i b_i] - [b_i] [b_i k'_i]}{[b_i] [b_i] - n [b_i b_i]}, \\
 y_0 &= \frac{+ n [b_i k'_i] - [b_i] [k'_i]}{[b_i] [b_i] - n [b_i b_i]}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Weiter geben uns die Restdifferenzen δg noch die Möglichkeit, die Genauigkeit der Angleichung zu untersuchen.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, d. i. ein in die Angleichung eingeführter Schwerewert, wird

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[\delta g \delta g]}{n - 2}}$$

bei n Vergleichspunkten und zwei Unbekannten. Weiter findet man damit (bezogen auf g'_i) für

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

und

$$m_y = \pm \frac{m_0}{\sqrt{[b_i b_i]}},$$

oder allgemein

$$\begin{aligned}
 m_x &= \pm \frac{m_0}{\sqrt{n - \frac{[b_i] [b_i]}{[b_i b_i]}}}, \\
 m_y &= \pm \frac{m_0}{\sqrt{[b_i b_i]}}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Sind auf diese Weise die Niveauänderung x und die Verbesserung y des Eichfaktors gefunden, so können die g'_i -Werte aller Punkte des Gravimeternetzes (nicht nur die Vergleichspunkte) in die verbesserten endgültigen Werte g''_i umgerechnet werden. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$g''_i = g'_i + x_i + b_i y_i. \tag{16}$$

Bei der Abbildung des MORELLI-MARTIN-Netzes (1956) auf das ausgeglichene Pendelnetz (Tab. 2, Ausgleichung II) erhalten wir mit den in Tab. 5 aufgeführten Vergleichspunkten und den Unterschieden k'_i zwischen den Pendel- und Gravimeterwerten die Fehlergleichungen (Tab. 6), die Verbesserungen δg_i für die Pendelwerte der Vergleichspunkte (Tab. 7) sowie die mittleren Fehler der Gewichtseinheit und der Transformationskonstanten (Niveauänderung und Maßstabsfaktor) (Tab. 8).

Tabelle 5. Vergleich der Pendel- und Gravimeterwerte

Nr.	Station	Pendelwert g_i	Gravimeterwert g'_i	$k'_i = g'_i - g_i$
1	Teddington	981 196,63	981 196,39	— 0,24
2	Bad Harzburg	981 180,40	981 180,40	0,00
3	Kopenhagen	981 557,62	981 557,41	— 0,21
4	München	980 743,66	980 744,71	+ 1,05
5	Bagnères	980 287,17	980 287,67	+ 0,50
6	Paris	980 940,18	980 940,81	+ 0,63
	Schwerpunkt		980 984,56	

Tabelle 6. Fehlergleichungen bezogen auf den Schwerpunkt

Nr.		a x_s	b y_s	k	
1	Teddington	+ 1	+ 0,2118	— 0,24	[aa] = + 6,00
2	Bad Harzburg	+ 1	+ 0,1958	0,00	
3	Kopenhagen	+ 1	+ 0,5728	— 0,21	[ab] = 0
4	München	+ 1	— 0,2399	+ 1,05	
5	Bagnères	+ 1	— 0,6969	+ 0,50	[ak] = + 1,73
6	Paris	+ 1	— 0,0438	+ 0,63	
					[bb] = + 0,9564
		[b]	— 2		
					[bk] = — 0,7991
					[kk. 2] = 0,6846

$$x_s = - \frac{[ak]}{[aa]} = - 0,288 \text{ mGal}$$

$$y_s = - \frac{[bk]}{[bb]} = + 0,8355 \cdot 10^{-3}$$

Tabelle 7. Berechnung der Verbesserungen

Nr.		$a_i x$	$b_i y$	k_i	δg_i
1	Teddington	— 0,288	+ 0,177	— 0,240	— 0,351
2	Bad Harzburg	— 0,288	+ 0,164	0,000	— 0,124
3	Kopenhagen	— 0,288	+ 0,479	— 0,210	— 0,019
4	München	— 0,288	— 0,200	+ 1,050	+ 0,562
5	Bagnères	— 0,288	— 0,582	+ 0,500	— 0,370
6	Paris	— 0,288	— 0,037	+ 0,630	+ 0,305

$$[\delta g_i] = + 0,003$$

$$[\delta g_i \delta g_i] = 0,6847$$

$$[kk. 2] = 0,6846$$

Tabelle 8

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[\delta g_i \delta g_i]}{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{0,6847}{4}} = \pm 0,413 \text{ mGal}$$

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{[aa]}} = \pm \frac{0,413}{\sqrt{6}} = \pm 0,169 \text{ mGal}$$

$$m_y = \pm \frac{m_0}{\sqrt{[bb]}} = \pm \frac{0,413}{\sqrt{0,9564}} = \pm 0,423 \cdot 10^{-3}$$

Wir finden somit für das MORELLI-MARTIN-Netz 1956 die

Niveauverschiebung: $x_s = -0,29 \pm 0,17 \text{ mGal}$

die Änderung des Eichfaktors: $y_s = (+0,84 \pm 0,42) \cdot 10^{-3}$

und schließlich in Tabelle 9 die umgeformten Werte (1957).

Tabelle 9. Überführung der MORELLI-MARTIN-Schwerewerte in die Minimallage zum Pendelnetz

Nr.	Station	Schwerewert mGal	Abstand vom Schwer- punkt des Vergleichs- netzes Gal	Parallel- ver- schiebung mGal	Maßstabs- änderung mGal	Verbesserter Schwerewert mGal	MORELLI- MARTIN Schwerewert 1957 bezogen auf Bad Harzburg mGal
1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
	Bad Harzburg	981 180,40	+0,196	-0,29	+0,16	981 180,27	981 180,40
1	Glasgow (Prestwick)	981 577,84	+0,593	-0,29	+0,50	981 578,05	981 578,18
2	Kopenhagen-Buddinge	981 557,41	+0,573	-0,29	+0,48	981 557,60	981 557,73
3	Teddington N. P. L.	981 196,39	+0,212	-0,29	+0,18	981 196,28	981 196,41
4	Paris C	980 943,84	-0,041	-0,29	-0,03	980 943,52	980 943,65
5	Melsbroeck, Chauff.	981 161,45	+0,177	-0,29	+0,15	981 161,31	981 161,44
6	Weidenau	981 120,04	+0,135	-0,29	+0,11	981 119,86	981 119,99
7	Hannover	981 227,29	+0,243	-0,29	+0,20	981 227,20	981 227,33
8	Göttingen	981 156,51	+0,172	-0,29	+0,14	981 156,36	981 156,49
9	Karlsruhe	980 957,08	-0,027	-0,29	-0,02	980 956,77	980 956,90
10	Genf, Observatorium	980 581,42	-0,403	-0,29	-0,34	980 580,79	980 580,92
11	Gebensdorf	980 719,93	-0,265	-0,29	-0,22	980 719,42	980 719,55
12	Zürich, Kloten	980 687,43	-0,297	-0,29	-0,25	980 686,89	980 687,02
13	München, Nymphenburg	980 744,71	-0,240	-0,29	-0,20	980 744,22	980 744,35
14	Toulouse, Observ.	980 443,02	-0,542	-0,29	-0,45	980 442,28	980 442,41
15	Marseille, Marignane	980 488,78	-0,496	-0,29	-0,41	980 488,08	980 488,21
16	Mailand, Pol. int.	980 565,34	-0,419	-0,29	-0,35	980 564,70	980 564,83
17	Padua, Osserv.	980 659,32	-0,325	-0,29	-0,27	980 658,76	980 658,89
18	Triest, Osserv. Geof.	980 665,89	-0,319	-0,29	-0,27	980 665,33	980 665,46
19	Rom, I. N. G.	980 362,74	-0,622	-0,29	-0,52	980 361,93	980 362,06
20	Algier, Mais.-Bl.	979 907,17	-1,077	-0,29	-0,90	979 905,98	979 906,11
Angehängte Punkte							
21	Bagnères, Nouv. Cave	980 287,67	-0,697	-0,29	-0,58	980 286,80	980 286,93
22	Edinburgh, Royal Obs.	981 583,44	+0,599	-0,29	+0,50	981 583,65	981 583,78
23	Rocca di Papa, Osserv.	980 194,04	-0,791	-0,29	-0,66	980 193,09	980 193,22
24	Paris-Sèvres, Pfeiler	980 940,81	-0,044	-0,29	-0,04	980 940,48	980 940,61

Abschließend werden für die 12 benutzten Linien des Pendelvergleichsnetzes in Tab. 10 die Eichwerte (MORELLI-MARTIN-Gravimeternetz 1957) und die Pendelwerte (Tab. 1) einander gegenübergestellt.

Tabelle 10

Nr.	Linie	Beobachtete Pendelwerte (Mittelwerte)	MORELLI-MARTIN 1957	Differenz 2) - 1)
		mGal 1)	mGal 2)	mGal 3)
1	Bad Harzburg - Teddington	16,13	16,01	-0,12
4	Bad Harzburg - Kopenhagen	377,18	377,33	+0,15
5	Paris - Bad Harzburg	240,32	239,79	-0,53
6	Paris - Teddington	256,68	255,80	-0,88
7	München - Bad Harzburg	436,60	436,05	-0,55
8	München - Paris	196,85	196,26	-0,59
12	Bagnères - Paris	653,07	653,68	+0,61
	Extrapolierte Linien:			
	Teddington - Edinburgh	388,36	387,37	-0,99
	München - Rocca di Papa	550,91	551,13	+0,22