II.

Ueber die

Anwendbarkeit der imaginären Zahlformen in der Geometrie

von

Franz Moth,

k. k. Professor.

Mit einer Figurentafel.

Ueber die

Anwendbarkeit der imaginären Zahlformen in der Geometrie

von

Franz Moth,

k. k. Professor.

Die positiven und negativen Zahlen sind schon seit Langem zur Darstellung des Gegensatzes der Grössen gebraucht worden. Wenn die Gegenstände dieser Art in eine Reihe geordnet sind, welche durch

$$\ldots W, P, O, \ldots$$

vorgestellt werden mag, und angenommen wird, dass die Relation des W zu P als der Relation des P zu O u. s. w. gleich betrachtet werden kann; wenn endlich der Uebergang (die Relation) von einem Gliede zum andern durch + 1 dargestellt wird; so muss der Uebergang vom letztern zum erstern durch — 1 vorgestellt werden. Zur Darstellung des Uebergangs von einem Gliede der Reihe zu einem andern derselben sind die beiden Einheiten + 1 und — 1 hinreichend. Wenn daher die Relationen von W zu P, von P zu O u. s. w. als *positiv* betrachtet werden, so sind die Relationen von O zu P, von P zu W u. s. w. als *negativ* anzusehen.

Wenn sich die Gegenstände nicht mehr in einer einzigen Reihe anordnen lassen, wenn sie sich *in Reihen von Reihen* dargestellt finden, und wenn es sich mit den Relationen dieser Reihen gegen einander selber wieder so verhält, wie vorher mit den Gliedern einer und derselben Reihe, so sind die Zeichen + 1, — 1 zur Darstellung der Relationen der Glieder von was immer für einer dieser Reihen zu den verschiedenen Gliedern jeder der andern Reihen unzureichend, und es bedarf hierzu noch zweier anderer Zeichen + i, — i, deren Gegenstände in eben demselben Verhältnisse des Gegensatzes sich befinden, in welchem die, durch die frühern Zeichen + 1, — 1 vorgestellten Gegenstände zu einander stehen. Um daher den Uebergang von einem Gliede einer der Reihen zu einem andern Gliede einer, von dieser verschiedenen, Reihe vorstellig zu machen, sind die vier Zeichen

$$+ 1; - 1; + i; - i$$

hinreichend. Diese verschiedenen Verhältnisse, welche unter den Gliedern gegebener Reihen obwalten, lassen sich durch eine räumliche Darstellung anschaulich machen (Fig. I.). Man stelle sich daher in einer unbegrenzten Ebene zwei Systeme von äquidistanten Parallelen vor, die einander rechtwinklicht durchkreuzen, und nehme ihre Durchschnittspunkte zu Symbolen für die verschiedenen, vorhin erwähnten Relationen an. Jeder Punkt, wie etwa P, hat vier benachbarte, durch W, O, N, S bezeichnete Punkte. Wenn man nun die Relation jenes Punktes P zu einem dieser vier Punkte, etwa zum Punkte N, durch + 1 bezeichnet, so ist die durch — 1 zu bezeichnende Relation, nämlich die zum Punkte S, von selbst bestimmt. Ueber die Bezeichnung der Relation des Punktes P zu den beiden andern benachbarten Punkten O und W ist hierdurch noch nichts verfügt, und man kann folglich einen derselben, welchen man will, wählen, und die Beziehung des Punktes P zu ihm durch + i bezeichnen. Wird daher die Beziehung des Punktes P zu dem Punkte O durch + i angedeutet, so ist hierdurch die durch — i zu bezeichnende Relation wieder von selbst bestimmt, nämlich die zum Punkte W. Hieraus wird es klar, dass es bloss von unserer Willkühr abhängt, festzusetzen, welche der beiden sich durchkreuzenden Reihen man als die erste Hauptreihe, und welche Richtung in ihr man als auf die positiven Zahlen sich beziehend ansehen wolle; und dass, wenn man hierüber bereits verfügt hat, eben hierdurch schon von selbst die andere der sich durchkreuzenden Reihen als diejenige signalisirt sey, welche sich auf die durch + i oder — i vorgestellten Zahlbegriffe bezieht. Wenn daher die Beziehung des Punktes P zu O durch + i angedeutet wird, so ist die des Punktes P zu W durch — i vorzustellen.

Es ist eine Folge dieser Voraussetzungen, dass, wenn die Relation des Punktes P zu O, die vorher durch + i bezeichnet worden ist, nunmehr für + 1 angenommen wird, man nothwendig die Relation des Punktes P zu S, die vorher durch — 1 bezeichnet wurde, jetzt für + i annehmen müsse. In der Sprache der Mathematik heisst diess aber, + i ist mittlere Proportionale zwischen + 1 und — 1, oder i entspricht dem Zeichen $\sqrt[2]{-1}$. Hieraus lässt sich erkennen, dass sich den sogenannten *imaginären* Zahlen, die man bisher immer den *reellen* entgegenzustellen pflegte, eben so ein reeller Gegenstand unterstellen lasse, wie diess schon seit Langem mit den *negativen* der Fall war. Diese ersten Ideen, den imaginären Zahlen ein reelles Substrat unterzulegen, gehören dem um die mathematischen und physicalischen Wissenschaften hochverdienten Herrn Hofrath *Gauss* in Göttingen an; und sie erscheinen um so merkwürdiger, als jene Grössen, wie schon der

Referent in den gel. Anz. vom 23. April 1831, bei Gelegenheit der Bekanntmachung jener Ideen bemerkt hat, in der Mathematik bisher noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet werden, und mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel erscheinen, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, den diess Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen. Seit jener Zeit ist über diesen Gegenstand meines Wissens nichts mehr bekannt geworden. Eine weitere Verfolgung desselben hat mich auf einige Resultate geführt, welche der Aufmerksamkeit der Mathematiker vielleicht nicht ganz unwerth seyn dürften, und welche ich daher in dieser Abhandlung zur öffentlichen Kenntniss zu bringen beabsichtige.

I. *Erklärungen.*

Man stelle sich in einer Ebene zwei auf einander senkrechte Linien N S, W O vor, welche sich in dem Punkte W schneiden (Fig. II.). Durch diese zwei Geraden wird der ganze Raum der Ebene in vier Partien abgetheilt. Die Richtungen P N, P O, P S, P W gehen von demselben Punkte P aus, welchen wir den *Pol* nennen. Insofern man nun eine gewisse Länge auf einer dieser vier *Hauptrichtungen* vom Pole P aus auftragen, und diess durch eigene Zeichen auf eine unzweideutige Weise vorstellig machen will, kann man die vier Zeichen

(1) . . . $+1$; $+i$; -1; $-i$

als eben so viele verschiedene *lineare Einheiten* betrachten, und diese Bezeichnung der gegebenen Länge beisetzen.

Wird daher mit a irgend eine gegebene absolute Länge einer geraden Linie bezeichnet; so soll durch die Zeichen:

(2) ... $a.(+1)$; $a.(+i)$; $a.(-1)$; $a.(-i)$,

welche auch respective durch die Zeichen:

(3) ... $+a$; $+a.i$; $-a$; $-a.i$

ersetzt werden können, angedeutet werden, dass jene Länge a im Systeme der beiden auf einander senkrechten Geraden N S, W O von P aus beziehungsweise auf den Richtungen

(4) ... PN; PO; PS; PW

aufzutragen sey. Eben diese Richtungen werden wir daher, in derselben Ordnung genommen, die Richtungen $+1$; $+i$; (-1); $(-i)$ nennen; stellt man sich vor, dass sich die Richtungslinie P N so um P dreht, dass sie successive die Richtungen P O, P S, P W erhält, so werden wir sagen, dass sich diese Linie *im positiven Sinne* drehe, widrigenfalls aber *im negativen Sinne.*

Wenn nun a die absolute Länge einer Geraden bezeichnet, so werden wir $+a$ die *positive,* und $-a$ die *negative Abscisse* schlechthin nennen; hingegen $+a.i$ die *positive laterale*, und $-a.i$ die *negative laterale Abscisse*, nach den Einheiten $+1$, -1, worauf sie sich beziehen, und welche *laterale Einheiten* heissen. Ferner sollen die Einheiten $+1$ und -1, so wie die Einheiten $+i$, $-i$ unter sich *gleichartige* genannt werden, hingegen $+1$ oder -1 in Bezug auf $+i$, $-i$ *ungleichartige*. Durch die Einheiten $+1$, -1 lassen sich die Orte aller auf der Geraden N S, durch die Einheiten $+i$, $-i$ hingegen die Orte aller in O W gelegenen Punkte bestimmen. Aus dem Gesagten ist es klar, dass Abscissen, welche sich auf gleichartige Einheiten beziehen, durch die Addition und Subtraction verbunden werden können; und dass das Resultat ihrer algebraischen Summe eine, auf eben diese gleichartige Einheit sich beziehende Länge seyn werde. Es ist daher, wenn a, b absolute Längen bedeuten,

$$a.(+1)+b.(-1)=(a-b).(+1), \text{ wenn } a>b;$$
$$a.(+1)+b.(-1)=(b-a).(-1), \text{ wenn } a<b;$$
$$a.(+i)+b.(-i)=(a-b).(+i), \text{ wenn } a>b;$$
$$a.(+i)+b.(-i)=(b-a).(-i), \text{ wenn } a<b;$$
$$a.(+i)-b.(-1)=(a+b).(+1);$$

u. s. w.

Im Allgemeinen, wenn j eine der Einheiten (1) vorstellt, hat man:

$$(5) \quad \ldots \quad a.j \pm b.j = (a \pm b).j;$$

und man muss bemerken, dass, wenn $a < b$, die Differenz

$$(6) \quad \ldots \quad a.j - b.j = (b-a).(-j)$$

seyn werde, worin $-j$ und j die entgegengesetzten gleichartigen Einheiten bedeuten.

II. *Ueber die Beziehungen unter den vier Hauptrichtungen, welche durch zwei auf einander senkrechte gerade Linien in einer und derselben Ebene gebildet werden.*

Jede der vier Hauptrichtungen (4), auf welchen die, mittelst der Zeichen (2) oder (3) vorgestellte Länge a aufgetragen werden soll, steht zu den drei übrigen in Beziehungen, welche sich bei jeder Richtung wiederholen. Es ist nützlich, diese Beziehungen besonders zu betrachten.

Wenn P N als eine erste (ursprüngliche, positive) Richtung angenommen wird, so erscheint ein Fortschreiten in der Richtung P S als ein *Rückschreiten* in Bezug auf die Richtung P N; ferner ein Fortschreiten in der Richtung P O als eine *rechte*, und ein Fortschreiten in der Richtung P W als eine *linke Seitenabweichung* von P N. Diese dreifache Beziehung kehrt bei jeder beliebigen Richtung in derselben Ebene zurück. Diese drei verschiedenen Richtungszustände, welche mit der ursprünglichen in der Ebene gleichzeitig bestimmt sind, verdienen durch eigene Benennungen von einander unterschieden zu werden. Wir wollen in Absicht auf P N die Richtung P S die *entgegengesetzte* von P N schlechthin nennen, und P O die *positiv laterale*, P W die *negativ laterale* zu P N. Diesem zu Folge erscheint nun jede der Richtungen (4) zu den drei übrigen in dieser dreifachen Beziehung. Es erscheint also, beziehungsweise genommen, ein Fortschreiten in der Richtung:

P N; P S; P O; P W;

1° als ein Rückschritt nach:

P S; P N; P W; P O;

2° als die positiv laterale (rechte Seiten-) Abweichung von

P W; P O; P N; P S;

3° als die negativ laterale (linke Seiten-) Abweichung von

P O; P W; P S; P N.

III. *Darstellung des Uebergangs von jeder der vier Hauptrichtungen zu den drei übrigen.*

Wir wollen in Bezug auf was immer für eine beliebige Richtung j, die von dem Pole P, dem gemeinschaftlichen Punkte der vier Hauptrichtungen P N, P O, P S, P W in derselben Ebene gezogen werden mag, die Richtung $(+1)$ von j die Richtung j selber, die Richtung (-1) von j aber die der Richtung j entgegengesetzte nennen, und die rechte Seitenabweichung von j durch: Richtung $(+i)$ von j; endlich die linke Seitenabweichung von j durch: Richtung (-1) von j bezeichnen, und durch die Zeichen

$$(7) \;\ldots\; (+1).j;\quad (-1).j;\quad (+i).j;\quad (-i).j$$

oder durch:

$$(8) \;\ldots\; +j;\quad -j;\quad +i.j;\quad -i.j$$

darstellen. Wenn daher in Fig. III. die beliebige Richtung P A durch j bezeichnet wird, so soll die ihr entgegengesetzte P C durch $-j$; die positiv laterale von P A, nämlich P B durch $+i.j$; die negativ laterale von P A, nämlich P D, durch $-i.j$ bezeichnet werden.

Wenn man in den Zeichen (7) oder (8) für j nach und nach die Zeichen (1) annimmt, so ergeben sich, in Absicht auf die Identität der Richtungen nachstehende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
(+1).(+1) = +1; & (+1).(-1) = -1; \\
(-1).(+1) = -1; & (-1).(-1) = +1; \\
(+i).(+1) = +i; & (+i).(-1) = -i; \\
(-i).(+1) = -i; & (-i).(-1) = +i;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(+1).(+i) = +i; & (+1).(-i) = -i; \\
(-1).(+i) = -i; & (-1).(-i) = +i; \\
(+i).(+i) = -1; & (+i).(-i) = +1; \\
(-i).(+i) = +1; & (-i).(-i) = -1.
\end{array}$$

Diese Gleichungen geben das allgemeine, sehr merkwürdige Resultat zu erkennen, dass die wirkliche Multiplication der beiden Factoren in jedem der Producte, welche in den ersten Theilen der vorstehenden Gleichungen erscheinen, eben dieselben Richtungen bestimmen, als durch die zweiten Theile dieser Gleichungen angezeigt werden. Man kann daher sagen, dass der Uebergang aus einer der Richtungen (4) in eine andere von denselben durch die Multiplication der beiden Zeichen bestimmt werden kann, denen sie in (1) entsprechen.

Es ist daher, wenn die rechte Seitenabweichung von P O bestimmt werden soll, nur $(+i).(+i)$ zu bestimmen, und da man -1 erhält, so ist P S die gesuchte Seitenabweichung von P O.

Eben so ist, wenn die linke Seitenabweichung von P O gefunden werden soll, nur das Product $(-i).(+i)$ zu bestimmen; und da man $+1$ erhält, so wird P N die gesuchte linke Seitenabweichung von P O seyn. Eben so wird ferner $(+i).(-i)=+1$ zu übersetzen seyn: Die rechte Seitenabweichung von P W ist die Richtung P N; und endlich $(-i).(-i)=-1$ die Bedeutung haben: P S ist die linke Seitenabweichung von P W.

Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass das Resultat der Richtungsübergänge, so wie das der Multiplication der Einheiten (1) nur ein vierfaches seyn könne, das wieder nur mit einer der Einheiten (1) coincidirt. Wir können folglich obige Gleichungen in nachstehende zusammenfassen:

$$(9)\quad \ldots\quad \left\{\begin{array}{l} (+1).(+1)=(-1).(-1)=(+i).(-i)=(-i).(+i)=+1; \\ (+1).(-1)=(-1).(+1)=(+i).(+i)=(-i).)-i)=-1; \\ (+1).(+i)=(-1).(-i)=(+i).(+i)=(-i).(-1)=+i; \\ (+1).(-i)=(-1).(+i)=(+i).(-i)=(-i).(+1)=-i. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen enthalten nun die Deutung des Productes

$$(10)\quad \ldots\quad j.J \text{ oder } J.j;$$

wenn j und J welche immer von den Zeichen (1) vorstellen.

Mittelst dieser Grundsätze wird es leicht seyn, die Richtung, auf welche man durch drei und mehrere successive Uebergänge kömmt, durch die Rechnung zu bestimmen, indem man nur nöthig hat, das Product, worin mehr als zwei Factoren zur Concurrenz kommen, zu bestimmen. So z. B. ist die Richtung, auf welche man kömmt, wenn man ursprünglich von der Richtung P S ausgeht, zur Linken abweicht, und in entgegengesetzter Richtung zu dieser fortschreitet, offenbar die Richtung (— i), und in der That findet man:

$$(-1).(-i).(-1) = -i.$$

Man kann noch bemerken, dass man immer auf dasselbe Resultat und auf dieselbe Richtung kömmt, in welcher Ordnung die Factoren genommen werden, oder die auf einander folgenden Abweichungen der Richtungen statt finden mögen.

IV. *Darstellung des Uebergangs von einer einfachen Abscisse zur andern.*

Wenn a eine absolute Länge bezeichnet, so stellen die Abscissen (2) oder (3) Linien vor, welche auf den Richtungen (4) aufgetragen sind, und die Länge a haben.

Die Richtungen dieser Linien (3) sind mit den Richtungen der Einheiten (1), worauf sie sich beziehen, identisch.

Ueberhaupt nun verstehe ich unter dem Ausdrucke: *Abscisse a.j* eine Linie von der Länge a, welche auf der Richtung j aufgetragen ist, und die Richtung der Abscisse aj ist mit der Richtung j identisch.

Wenn j eine der Einheiten (1) bedeutet, folglich a auf einer der Richtungen (4) aufzutragen ist, so werden wir eine solche Abscisse eine *einfache* nennen; es heisse sodann:

$+a$ die einfach positive, $-a$ die einfach negative Abscisse; ferner
$+a.i$ die einfach positive, $-ai$ die einfach negative laterale Abscisse.

Wenn nun für j und J jede der Einheiten (1) gesetzt werden darf, und wenn a die absolute Länge einer Geraden bezeichnet, so ist

$$(11) \quad \ldots \quad (a.j).J = (a.J).j = a.(j.J),$$

d. h. irgend eine einfache Abscisse a.j mit J multipliciren soll heissen, die Länge a auf der Richtung j.J, welche nach den Gleichungen (9) bestimmt werden kann, auftragen. Die Identität der Ausdrücke (11) in allen möglichen Fällen, wo man für die Zeichen j und J jede der Einheiten (1) unterstellt, ergibt sich aus den Sätzen des vorhergehenden Artikels. Nach denselben Gesetzen der Multiplication, nach welchen der Uebergang aus einer der vier Hauptrichtungen (4) in eine der übrigen bestimmt werden kann, lässt sich auch der Uebergang von einer einfachen Abscisse (3) zu einer andern finden. So z. B. ist $(-a).(+i) = a.(-i)$, oder $-a$ mit $+i$ multipliciren heisst, von der Richtung von $-a$ das ist von der Richtung PS rechts abweichen, und auf dieser letzten Richtung, das ist auf PW die Linie a auftragen, wodurch man offenbar die einfache Abscisse $-a.i$ erhält.

Unter denselben Voraussetzungen, unter welchen die Formel (11) bestehen soll, statuire man auch die Gleichung:

$$(12) \quad \ldots \quad j.(a.J) = a.(j.J).$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass j was immer für eine Richtung in der Ebene der vier Hauptrichtungen (4) bedeute, welche vom Pole P ausgeht, und dass a j eine auf dieser Richtung aufgetragene Abscisse sey.

Unter den Producten

(13) . . . $(a.j).(+1)$; $(a.j).(-1)$; $(a.j).(+i)$; $(a.j).(-i)$,

welche respective durch

(14) . . . $a.(+j)$; $a.(-j)$; $a(i.j)$; $a(-i.j)$

vorgestellt werden können, verstehe ich nun jene Abscissen, die man erhält, wenn man beziehungsweise entweder auf der Richtung j, oder auf der ihr entgegengesetzten Richtung, oder auf jener, welche die positiv laterale (rechte Seitenabweichung) zu j, oder endlich auf jener, welche die negativ laterale (linke Seitenabweichung) zu j ist, die Länge der Linie a aufträgt.

V. *Multiplication der Abscissen mit abstracten Zahlformen.*

Wir wollen mit m, n, p, . . . was immer für ganze oder gebrochene Zahlen, mit a aber die absolute Länge irgend einer geraden Linie bezeichnen. Ein Product aus einer Länge a und einer abstracten Zahl, wie z. B. a . m; a . mn; u. s. w. wird in der gewöhnlichen Bedeutung genommen. Wenn nun a.j die Abscisse bedeutet, welche auf der Richtung j aufgetragen ist, und die Länge a hat, so statuire ich die Gleichung

(15) . . . $(a.j).m = (a\,m).j$,

welche die Erklärung enthält, was es heissen soll, eine Abscisse a.j mit einer abstracten Zahl m multipliciren, und welche ausdrückt, dass das Resultat eine Abscisse sey, die man erhält, wenn man die Länge am auf derselben Richtung j aufträgt.

Wir wollen jetzt die abstracte Zahl m selber mit den Einheiten (1) verbinden, und die abstracten Zahlformen

(16) . . . $+m$; $-m$; $+m.i$; $-m.i$

bilden. Wenn nun eine dieser Formen durch $m.J$ angedeutet wird, so statuire ich ferner die Gleichung:

(17) . . . $(a.j).(m.J = (am).(j.J)$

Diese Gleichung enthält nun die Erklärung, was es heissen solle, eine Abscisse aj mit einer abstracten Zahlform $m.J$ multipliciren. Diese Gleichung drückt aus, dass man auf der Richtung $j.J$, welche nach Art. III. bestimmt wird, die Länge am auftrage.

Wenn nun j auch eine der Einheiten (1) bedeutet, folglich $a.j$ eine einfache Abscisse vorstellt, so stellen die Producte:

(18) . . . $(+a).m$; $(-a).m$; $(+a.i).m$; $(-a.i).m$,

die man auch noch so schreiben kann:

(19) . . . $(am).(+1)$; $(am).(-1)$; $(am).(+i)$; $(am).(-i)$,

oder:

(20) . . . $+am$; $-am$; $+am.i$; $-am.i$;

beziehungsweise jene Linien vor, die man erhält, wenn man auf den Hauptrichtungen

PN; PS; PO; PW;

die Länge $a.m$ aufträgt.

Wenn man in den Producten (18) für m die abstracten Zahlformen (16) setzt, so ist das Resultat eine der Formeln (20). Man hat z. B.

$$(21) \quad \ldots \quad a.(+m); \quad a.(-m); \quad a.(+m.i); \quad a.(-mi)$$

respective mit den Formeln (20) identisch zu nehmen.

Wenn daher in den Gleichungen (15), (17) die Zeichen j und J jede der Einheiten (1) bedeuten können, so wird das Resultat nur wieder eine einfache Abscisse seyn, welche auf der Richtung $j.J$ liegt, und die Länge $a.m$ hat. Diese Grundsätze lassen sich leicht auf Producte von mehr als zwei Factoren erstrekken. Wenn dann j was immer für eine Richtung ist, auf welcher die Länge a aufgetragen sey, und wenn J', J'', J''', ... was immer für eine der Einheiten (1) vorstellen können, so ist das Product

$$(22) \quad \ldots \quad (a.j).(m.J').n.J'').(p.J''') \ldots$$

eine Abscisse von der Länge

$$(23) \quad \ldots \quad a.mnp \ldots,$$

welche auf der Richtung

$$(24) \quad \ldots \quad j.J' J'' J''' \ldots$$

aufgetragen ist. Je nachdem das Product

$$J' J'' J''' \ldots$$

mit einer der Einheiten (1) übereinkömmt, wird die Richtung (24) mit der Richtung j übereinstimmen, oder die rechte Seitenabweichung von j seyn, oder der Richtung j entgegengesetzt, oder die linke Seitenabweichung von j seyn. Die Bestimmung der Richtung (24) ist nach den vorhergehenden Grundsätzen leicht. Wenn j ebenfalls eine der Hauptrichtungen ist, so wird sich die Richtung (24) wieder nur auf eine solche, und das Product (22) auf eine einfache Abscisse reduciren.

Man kann auch bemerken, und es ist leicht darzuthun, dass man immer auf eine und dieselbe Linie kommen werde, in welcher Ordnung man auch die Factoren des Productes (22) nehmen mag.

VI. *Von den complexen Abscissen.*

Wenn a und b zwei willkührliche Längen, und j, J zwei ungleichartige Einheiten bedeuten, welche, wegen dieser Ungleichartigkeit, senkrecht auf einander stehen, so verstehe ich unter der Summe

$$(25) \quad \ldots \quad a.j + b.J$$

jene Gerade in der Ebene der Richtungen j, J, welche, auf die Richtungen j und J projicirt, die Längen a und b hat. Man findet die durch die Summe (25) vorgestellte Linie, indem man vom Pole P aus zuerst in der Richtung j um die Länge a fortschreitet, und von diesem Endpunkte aus parallel zur Richtung J um die Länge b abweicht, endlich über die beiden Katheten a und b dieses so entstandenen rechtwinklichten Dreieckes die Hypotenuse zieht.

Es ist klar, dass die Formel

$$(26) \quad \ldots \quad b.J + a.j$$

auf eben dieselbe Linie führen werde. Man kann noch bemerken, dass diese Gerade auch noch erhalten werde, wenn man die Länge a auf der Richtung j, und b auf der Richtung J aufträgt, in den erhaltenen Endpunkten dieser Linien Perpendikel über die Richtungen j und J errichtet, welche sich in einem bestimmten Punkte der Ebene schneiden, und diesen Durchschnittspunkt mit dem Pole durch eine gerade Linie verbindet. Wir wollen diese Gerade, deren Grösse und Lage durch die Formel (25) bestimmt werden kann, eine *complexe Abscisse* nennen, zum Unterschiede von der einfachen Abscisse, für welche eine der Grössen a oder b sich auf Null reducirt. Die Richtung einer complexen Abscisse, welche immer zwischen je zwei der Richtungen (1) liegt, wollen wir eine *complexe Richtung* nennen.

Weil die Zeichen j und J ungleichartige Einheiten vorstellen, so wollen wir annehmen, dass j eine der Einheiten $+1$, -1, und J eine der Einheiten $+i$ und $-i$ bedeute. Sind nun a und b gegebene Längen, so werden in der complexen Abscisse (25) vier, wesentlich von einander verschiedene, Linien enthalten seyn. Diese sind nun:

$$(27) \quad \ldots \quad (+a+bi);\ (-a+bi);\ (-a-bi);\ (+a-bi).$$

Um diese Linien in einer Ebene darzustellen, trage man auf den Richtungen PN, PS, PO, PW (Fig. IV.), die Längen a und b gehörig auf, so dass man habe

$$PA = PB = a; \qquad PD = PC = b,$$

ziehe durch die Punkte A und B die zu WO, und durch die Punkte C, D die zu NS parallelen Geraden, welche sich in den Punkten E, F, G, H schneiden. Da nun:

$$ED = DF = HC = CG = a;$$
$$\text{und } AE = BF = AH = BG = b;$$

so ist klar, dass die Geraden

$$(28) \quad \ldots \quad PE; \quad PF; \quad PG; \quad PH;$$

respective die complexen Abscissen (27) vorstellen werden.

Die complexen Abscissen (27), z. B. die Abscisse $+a+bi$ oder PE können nun auf doppelte Art construirt werden. Man trage, nach der einen Construction, auf der Richtung PN die Länge $PA = a$, errichte im Punkte B über PN auf der rechten Seitenabweichung von PN, die Senkrechte $AE = b$, uud ziehe PE;

oder trage, nach der andern Construction, auf den Richtungen PN, PO die Längen PA = a, PD = b auf, errichte in den Punkten A und D die auf PN, PO Senkrechten, welche sich im Punkte E schneiden, und verbinde E mit P. Auf eben diese Art kann man die übrigen complexen Linien (28) construiren.

VII. *Darstellung des Uebergangs von einer complexen Abscisse zur andern.*

Wenn A eine der complexen Abscissen (27) bezeichnet, so soll durch die Producte

(29) . . . $A.(+1)$; $A.(+i)$; $A.(-1)$; $A.(-i)$,

welche auch respective durch die Zeichen:

(30) . . . $+A$; $+A.i$; $-A$; $-A.i$

ersetzt werden können, angedeutet werden, dass man die Länge der complexen Geraden A entweder auf ihrer Richtung unmittelbar, oder auf der, welche die positiv laterale (rechte Seiten-) Abweichung ist, oder auf der, der Richtung A entgegengesetzten, oder endlich auf der, welche die negativ laterale (linke Seiten-) Abweichung von A ist, auftragen solle. Hieraus wird nun klar, was es heisse, eine complexe Abscisse A mit den Einheiten (1) multipliciren.

Wenn man nun in den Producten (30) für A jede der complexen Abscissen (27) setzt; und hierauf die Multiplicationen der Binome wirklich verrichtet, so erhält man die nachstehenden Gleichungen:

$$(31)\ \ldots \begin{cases} (+a+bi).(+1) = +a+bi; & (+a+bi).(+i) = -b+a.i; \\ (-a+bi).(+1) = -a+bi; & (-a+bi).(+i) = -b-a.i; \\ (-a-bi).(+1) = -a-bi; & (-a-bi).(+i) = +b-a.i; \\ (+a-bi).(+1) = +a-bi; & (+a-bi).(+i) = +b+a.i; \end{cases}$$

$$(32)\ \ldots \begin{cases} (+a+bi).(-1) = -a-bi; & (+a+bi).(-i) = +b-ai; \\ (-a+bi).(-1) = +a-bi; & (-a+bi).(-i) = +b+ai; \\ (-a-bi).(-1) = -a+bi; & (-a-bi).(-i) = -b+ai; \\ (+a-bi).(-1) = -a+bi; & (+a-bi).(-i) = -b-ai. \end{cases}$$

Wendet man auf jeden der beiden Theile von was immer für einer dieser Gleichungen die im Vorhergehenden statuirten Erklärungen an, so findet sich jede derselben verificirt. In Fig. IV. und V. sind sie sämmtlich geometrisch dargestellt. Wenn $PE' = +a$; $PE'' = +b$, so ist PE die complexe Abscisse $+a+bi$. Der Erklärung zufolge ist das Product $(+a+bi).(+i)$ die auf der rechten Seitenabweichung von PE, d. i. auf der Richtung PF aufgetragene Länge PE. Denn, wegen der Congruenz der Dreiecke $PE'E$ und $PF'F$ hat man $PE' = PF''$; $PE'' = PF'$; die Gerade PF ist folglich auch noch durch die complexe Abscisse $-b+a.i$ vorgestellt, und diese ist in der That die Entwicklung des Productes $(+a+bi)(+i)$.

Auf eben diese Art lässt sich die Richtigkeit aller übrigen Gleichungen einsehen. Die Sätze, welche die Gleichungen (31), (32) enthalten, lassen sich kurz in folgenden Satz zusammenziehen:

Wenn A eine der complexen Abscissen (27) vorstellt; wenn ferner j eine der vier Einheiten (1) bedeutet, so ist die complexe Abscisse

$$(33)\ \ldots\ A.j$$

jene Gerade, welche man erhält, wenn man aus der complexen Richtung A in die Richtung j von ihr abweicht, und auf derselben die Länge der complexen Abscisse A aufträgt.

VIII. *Multiplication der complexen Abscissen mit abstracten Zahlformen.*

Wenn A eine der complexen Abscissen (27) bedeutet, so soll durch die Producte

(34) . . . $A.(+m)$; $A.(+m.i)$; $A.(-m)$; $A.(-mi)$,

worin m eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, und welche auch noch durch die Zeichen:

(35) . . . $+mA$; $+m.A.i$; $-mA$; $-m.A.i$

vorgestellt werden können, angedeutet werden, dass man die mfache Länge der complexen Abscisse A entweder auf ihrer Richtung unmittelbar, oder auf der, welche die positiv laterale (rechte Seiten-) Abweichung ist, oder auf der, der Richtung A entgegengesetzten, oder endlich auf der, welche die negativ laterale (linke Seiten-) Abweichung von A ist, auftragen soll. Hieraus wird es nun eben klar, was es heisse, eine complexe Abscisse A mit den abstracten Zahlformen (16) multipliciren. Es kann noch bemerkt werden, dass die Richtung der Abscisse m.A identisch sey mit der Richtung der complexen Abscisse A. Wenn daher j und J zwei ungleichartige Einheiten und a, b, a′, b′ vier absolute Längen bedeuten, so werden die durch

$$aj + bJ \quad \text{und} \quad a'j + b'J$$

vorgestellte complexe Abscissen einerlei Richtung haben, wenn man hat

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Wenn man in den Producten (34) für A jede der complexen Abscissen (27) setzt, und hierauf die Multiplication der Binome wirklich verrichtet, so erhält man die nachfolgenden Gleichungen:

$$(36) \ldots \left\{ \begin{array}{ll} (+a+bi).(+m)=+am+bm.i; & (+a+bi).(+mi)=-bm+am.i; \\ (-a+bi).(+m)=-am+bm.i; & (-a+bi).(+mi)=-bm-am.i; \\ (-a-bi).(+m)=-am-bm.i; & (-a-bi).(+mi)=+bm-am.i; \\ (+a-bi).(+m)=+am-bm.i; & (+a-bi).(+mi)=+bm+am.i; \end{array} \right.$$

$$(37) \ldots \left\{ \begin{array}{ll} (+a+bi).(-m)=-am-bm.i; & (+a+bi).(-mi)=+bm-am.i; \\ (-a+bi).(-m)=+am-bm.i; & (-a+bi).(-mi)=+bm+am.i; \\ (-a-bi).(-m)=+am+bm.i; & (-a-bi).(-mi)=-bm+am.i; \\ (+a-bi).(-m)=-am+bm.i; & (+a-bi).(-mi)=-bm-am.i; \end{array} \right.$$

Wendet man auf jeden der beiden Theile von was immer für einer dieser Gleichungen die im Vorhergehenden statuirten Erklärungen an, so findet sich jede derselben verificirt.

Die Abscisse $(+a+bi).m$ erhält man, wenn man die Abscisse $(a+bi)$ auf ihrer Richtung $m$mal aufträgt. Die Abscisse $+am+bm.i$ hingegen findet man, wenn man die Länge am auf der Richtung $+1$ aufträgt, im erhaltenen Endpunkte von dieser Richtung rechts um die Länge bm abweicht, und den letzt erhaltenen Punkt mit dem Pole verbindet. Beide complexe Abscissen $(a+bi).m$ und $am+bm.i$ stellen eine und dieselbe Gerade vor.

Die Abscisse $(+a+bi).(+mi)$ erhält man, wenn man im Pole über der Richtung $(+a+bi)$, in positiv lateraler Abweichung, eine Senkrechte errichtet und darauf die $m$fache Länge der Abscisse $+a+bi$ aufträgt. Die Abscisse $-bm+am.i$ hingegen findet man, wenn man die Länge bm auf der Richtung -1 aufträgt, die Länge am hingegen auf der Richtung $+i$, und über beide Katheten die Hypotenuse zieht. Beide complexe Abscissen

$(+a+bi).(+mi)$ und $-bm+am.i$ stellen offenbar eine und dieselbe Gerade vor.

Auf eben diese Art lässt sich die Richtigkeit jeder der Gleichungen (36), (37) darthun. Die Sätze, welche die Gleichungen (36), (37) enthalten, können kurz in folgenden zusammengezogen werden:

Wenn man mit A eine der complexen Abscissen (27) bezeichnet, wenn ferner j eine der vier Einheiten (1) bedeutet, und m eine abstracte, ganze oder gebrochene Zahl ist, so wird die complexe Abscisse

(38) . . . $A.(mj)$

jene Gerade seyn, die man erhält, wenn man aus der complexen Richtung A in die Richtung j von ihr abweicht, und darauf die mfache Länge der Abscisse A aufträgt.

IX. *Multiplication der einfachen Abscissen mit complexen Zahlen.*

Wenn m und n zwei abstracte, ganze oder gebrochene, Zahlen sind, und j, J zwei ungleichartige Einheiten vorstellen, so werden wir den Ausdruck

(39) . . . $mj+nJ$

eine *complexe Zahl* nennen. Es ist klar, dass es nur vier verschiedene Formen complexer Zahlen geben könne, und diese werden seyn:

(40) . . . $+m+ni$; $-m+ni$; $-m-ni$; $+m-ni$.

Wenn nun a eine absolute Länge bedeutet, so statuiren wir als Definition des Productes aus a in den complexen Zahlausdruck (39) die Gleichung:

$$(41) \quad \ldots \quad a.(mj + nJ) = am.j + an.J.$$

Dieses Product ist also eine complexe Linie, welche man findet, indem man die Länge am auf der Richtung j, an auf der Richtung J aufträgt, und (weil, wegen der Ungleichartigkeit der Einheiten j, J, ihre Richtungen auf einander senkrecht stehen) über die Katheten am, an die Hypotenuse zieht. Wenn man also im Producte (41) an die Stelle der complexen Zahl (39) die Formen (40) setzt, so wird man haben:

$$(42) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a.(+m+ni) = +am + an.i; \\ a.(-m+ni) = -am + an.i; \\ a.(-m-ni) = -am - an.i; \\ a.(+m-ni) = +am - an.i. \end{array} \right.$$

Wenn in der Gleichung (41) an die Stelle von a eine der einfachen Abscissen (3) gebracht wird, so gibt sie die Definition des Productes aus einer einfachen Abscisse in eine complexe Zahl. Durch diese Substitution erhält man:

$$(43) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{lcl} (+a).(mj+nJ) & = & +ma.j + na.J; \\ (+ai).(mj+nJ) & = & ma.(+ij) + na.(+iJ); \\ (-a).(mj+nJ) & = & ma.(-j) + na.(-J); \\ (-ai).(mj+nJ) & = & ma.(-ij) + na.(-iJ). \end{array} \right.$$

Eine einfache Abscisse, mit einer complexen Zahl multiplicirt, ist eine complexe Abscisse, welche mittelst dieser Formeln (43) leicht bestimmt werden kann. Nimmt man, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an der Stelle der complexen Zahl (39) die erste der Formen (40) an, so hat man an der Stelle der Gleichung (43):

$$(44) \ldots \begin{cases} (+a).(+m+ni) = +am+an.i; \\ (+ai).(+m+ni) = -an+am.i; \\ (-a).(+m+ni) = -am-an.i; \\ (-ai).(+m+ni) = +an-am.i. \end{cases}$$

Um das Product $(+a.i).(+m+ni)$ zu construiren, wird man auf der Richtung von $(+a.i)$, das ist auf der Richtung $(+i)$ oder P O die Länge a m, und auf der rechten Seitenabweichung von $(+ai)$, das ist auf P S die Länge a n auftragen, endlich die Hypotenuse über die beiden Katheten ziehen. Eben so wird man das Product $(-a.i).(m+ni)$ construiren, indem man auf der Richtung $(-ai)$, das ist auf P W die Länge a m, und hierauf die Länge a n auf der rechten Seitenabweichung von $(-ai)$, das ist auf P N, endlich über beide Katheten die Hypotenuse zieht.

Im Allgemeinen nun, wenn $a.J'$ irgend eine der einfachen Abscissen (3) bedeutet, so heisst die einfache Abscisse $a.J'$ mit der complexen Zahl $mj+nJ$ multipliciren, von der Richtung J' in die Richtung j von ihr abweichen, und darauf m a, ferner aus dieser letztern Richtung in die Richtung J von ihr abweichen, und darauf n a auftragen, und endlich über diese beiden Katheten die Hypotenuse ziehen. Diese letztere Gerade ist die Darstellung des Productes

$$(45) \ldots (a.J').(mj+nJ),$$

oder von dessen Entwicklung

$$(46) \ldots am.(J'j) + an.(J'J).$$

X. *Multiplication complexer Abscissen mit complexen Zahlen.*

Wenn man in den Gleichungen des vorhergehenden Artikels für die einfachen Abscissen complexe setzt, so ergeben sich dar-aus leicht die Constructionen der Producte aus complexen Abscissen und Zahlen.

Wenn daher A was immer für eine complexe Abscisse (27) bezeichnet, und wenn dieselbe durch eine complexe Zahl (39) multiplicirt wird, so hat man

$$(47) \quad \ldots \quad A.(mj + nJ) = mA.j + nA.J;$$

oder wenn man für die complexe Zahl (39) die Formen (40) setzt:

$$(48) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} A.(+m + ni) = +mA + nA.i; \\ A.(-m + ni) = -mA + nA.i; \\ A.(-m - ni) = -mA - nA.i; \\ A.(+m - ni) = +mA - nA.i. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (47), (48) sind insofern mit den Gleichungen (41), (42) identisch, als man in denselben A als eine ursprüngliche Linie annimmt. Dieselbe Construction, nach welcher wir aus + a die complexe, durch das Product (41) darzustellende Abscisse hergeleitet haben, wird sich unmittelbar anwenden lassen, um aus der complexen Abscisse A die andere complexe, durch das Product (47) darzustellende, Abscisse zu erhalten. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir die erste der Formen (40) als jene complexe Zahl an, mit der die complexe Abscisse A multiplicirt werden soll. Um also das Product

$$(49) \quad \ldots \quad A.(+m + n.i)$$

darzustellen, wird man auf der Richtung A die mfache Länge der complexen Abscisse A auftragen, von dieser Richtung A rechts abweichen, und auf dieser neuen Richtung die nfache Länge von A auftragen. Die über beide Katheten construirte Hypotenuse ist die geometrische Darstellung des Productes (49).

Im Allgemeinen, wenn die complexe Abscisse A mit der complexen Zahl $mj + nJ$ multiplicirt werden soll, so heisst diess, von der Richtung A in die Richtung j von ihr abweichen, und darauf die mfache Länge dieser Abscisse A auftragen, ferner aus dieser letzten Richtung in die Richtung J von ihr abweichen, und auf derselben die nfache Länge der Abscisse A auftragen, endlich über diese beiden Katheten die Hypotenuse ziehen.

Es ist leicht, sich in allen möglichen Fällen, welche man aus den Gleichungen (48) dadurch ableitet, dass man in jeder von ihnen für A die complexen Abscissen (27) setzt, von ihrer Richtigkeit zu überzeugen. In der That, wenn man das Product $(+a + bi) . (m + ni)$ vernimmt, so gibt die Entwicklung neuerdings eine complexe Linie, man hat nämlich:

$$(50) \quad \ldots \quad (+a+bi).(+m+ni) = (ma - nb) + (mb + na).i,$$

und nun lässt sich zeigen, dass jeder der hier verglichenen Ausdrücke, nach den im Vorhergehenden statuirten Grundsätzen construirt, zu derselben Geraden führe. Es stelle PA (Fig. VI.) die complexe Abscisse $(+a + bi)$ vor, indem man $PB = a$; $BA = b$ hat; das Product im ersten Theile der Gleichung (50) wird nun erhalten, indem man auf der Richtung PA die Länge $PA' = m.PA$ aufträgt, in A', auf der rechten Seite von dieser Richtung, eine Senkrechte errichtet, und auf ihr die Länge $A'E = n.PA$ nimmt, endlich die Hypotenuse PE zieht. Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Linie auch den Ausdruck im zweiten Theile der Gleichung (50) darstellt. Denn man ziehe A'D, EG senkrecht auf WO, und EF senkrecht auf A'D, so hat man wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinklichten Dreiecke A'DP und ACP die Gleichungen:

$$PD = m.b; \qquad A'D = m.a.$$

Eben so hat man, weil auch die beiden rechtwinklichten Dreiecke A′FE und ACP einander ähnlich sind, die Gleichungen:

$$EF + DG = n.a; \qquad A'F = n.b.$$

Man hat also:

$$PG = PD + DG = m.b + n.a;$$
$$GE = A'D - A'F = m.a - n.b,$$

und folglich stellt die Hypotenuse PE die complexe Linie

$$(m.a - n.b) + (m.b + n.a).i$$

vor.

Auf dieselbe Weise wird man sich von der Statthaftigkeit aller übrigen Fälle, welche die Gleichungen (48) noch darbieten können, überzeugen. Geht man also von den im Vorhergehenden statuirten Grundsätzen aus, so wird das Product aus einer complexen Abscisse in eine complexe Zahl, und dessen Entwicklung nach den Angaben der Multiplication immer nur durch eine und dieselbe complexe Abscisse dargestellt seyn.

XI. *Division der complexen Abscissen durch complexe Zahlen.*

Eie complexe Abscisse A durch eine complexe Zahl $mj + nJ$ dividiren heisst eine neue complexe Abscisse X von der Beschaffenheit finden, dass sie mit der gegebenen complexen Zahl $mj + nJ$ multiplicirt, die gegebene complexe Abscisse A zum Vorschein bringe.

Die Gleichung

$$(51) \quad \ldots \frac{A}{mj + nJ} = X,$$

ist also mit der Gleichung

$$(52) \quad \ldots \quad A = X.(mj + nJ)$$

identisch, insofern die eine dasselbe ausdrückt, als die andere.

Um von einem bestimmten Falle auszugehen, wollen wir annehmen, dass $+a+bi$ die gegebene complexe Abscisse A, $+m+ni$ die gegebene complexe Zahl, und $+x+y.i$ die gesuchte complexe Abscisse sey, so dass man habe:

$$(53) \quad \ldots \quad \frac{+a+bi}{+m+ni} = +x+y.i,$$

folglich:

$$(54) \quad \ldots \quad +a+bi = (+x+y.i).(+m+n.i).$$

Da der zweite Theil dieser letzten Gleichung mit

$$(mx - ny) + (nx + my).i$$

identisch ist, so erhält man zur Bestimmung von x und y die Bedingungen:

$$(55) \quad \ldots \quad mx - ny = a; \quad nx + my = b,$$

woraus für x und y nachstehende Werthe folgen:

$$(56) \quad \ldots \quad x = \frac{ma+nb}{m^2+n^2}; \quad y = \frac{mb-na}{m^2+n^2}.$$

Die gesuchte complexe Abscisse ist also:

$$(57) \quad \ldots \quad \frac{ma+nb}{m^2+n^2} + \frac{mb-na}{m^2+n^2}.i.$$

Man würde auf eben diesen Ausdruck gekommen seyn, wenn man den Zähler und Nenner des Bruches

$$(58) \quad \ldots \quad \frac{+a+bi}{+m+ni}$$

mit der complexen Zahl $m - ni$ multiplicirt hätte.

Im Allgemeinen nun, da

$$\frac{1}{mj + nJ} + \frac{mj - nJ}{(mj + nJ)\,(mj - nJ)} = \frac{mj - nJ}{m^2 + n^2},$$

so hat man

$$(59) \quad \ldots \quad \frac{A}{mj + nJ} = A \, . \left[\frac{m}{m^2 + n^2} \, . \, j + \frac{n}{m^2 + n^2} \, . \, (-J)\right].$$

Durch diese Formel findet sich die Construction des *Quotienten* (51) unmittelbar auf die eines *Productes* aus einer complexen Abscisse und einer complexen Zahl zurückgeführt, welche nach der Angabe des vorhergehenden Artikels vollzogen werden kann.

XII. *Von den auf einander folgenden Multiplicationen und Divisionen einer complexen Abscisse mit complexen Zahlen.*

Nachdem in den beiden vorhergehenden Artikeln gezeigt worden ist, dass jede complexe Abscisse, mit einer complexen Zahl multiplicirt oder dividirt, wieder eine complexe Abscisse, im Allgemeinen gesprochen, sey, und wie sie in jedem Falle zu construiren sey, so bleibt noch, der Vollständigkeit wegen, der Fall zu betrachten übrig, da eine complexe Linie, welche durch A vorgestellt seyn mag, mehrere mal hinter einander mit gegebenen complexen Zahlen, welche durch M, N, P, Q . . vorgestellt seyn mögen, multiplicirt oder dividirt werden soll.

Wenn man also hat

$$(60) \quad \ldots \quad A \, . \, MN = X,$$

so findet man die complexe Abscisse (60), indem man zuerst A . M = B, und hierauf B . N nach den Grundsätzen des Art. X. sucht. Es ist leicht darzuthun, dass man dieselbe Linie X wieder-finden werde, wenn man zuerst die Linie $A \,.\, N = B'$, und hierauf $B'.M$ sucht.

Ueberhaupt wird die successive Construction des Ausdruckes

$$(61) \quad \ldots \quad A \,.\, \frac{M \,.\, N \ldots}{P \,.\, Q \ldots} = X$$

immer auf dieselbe complexe Abscisse X führen, in welcher Ordnung auch die Multiplicationen mit den complexen Zahlen M, N…, und die Divisionen mit den complexen Zahlen P, Q… statt finden mögen, die erstern nach der Regel des Art. X., die andern nach der im vorhergehenden Artikel gegebenen Regel ausgeführt.

XIII. *Von dem Modul und Argument einer complexen Abscisse.*

Mit jeder complexen Abscisse (27) findet sich zugleich bestimmt:

1) ihre *Länge;*

2) der *Winkel,* welchen sie mit der Richtung $+1$ macht, ihn selbst in positivem Sinne (Art. I.) gerechnet.

Jene Länge soll der *Modul,* dieser Winkel das *Argument* der complexen Abscisse heissen.

Complexe Abscissen sind durch diese beiden Stücke vollkommen bestimmt; zwei solche, durch A und B vorgestellte Abscissen sind daher identisch, wenn ihre Module und Argumente einander gleich sind.

Wenn eine complexe Abscisse durch

$$(62) \quad \ldots \quad a\,.\,j + b\,.\,J$$

vorgestellt wird, worin j und J zwei ungleichartige Einheiten bedeuten, so liegt die complexe Richtung (62) stets zwischen den Richtungen

(63) . . . j und J.

In der That fallen die Richtungen der complexen Abscissen (27) respective zwischen die Richtungen:

(64) . . . $(+1)..(+i)$; $(-1)..(+i)$; $(-1)..(-i)$; $(+1)..(-i)$.

Wenn daher ein rechter Winkel mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird, so liegen die Werthe der Argumente eben dieser complexen Abscissen (27), in eben der Ordnung, zwischen den Grenzen:

(65) . . . $0..\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}..\pi$; $\pi..\frac{3}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi..2\pi$.

Bezeichnet daher h einen spitzigen Winkel, so werden sich die Werthe der Argumente der in Rede stehenden Abscissen (27) in derselben Ordnung unter folgenden Formen darstellen:

(66) . . , h; $\pi - h$; $\pi + h$; $2\pi - h$.

Die Grösse des Argumentes h wird bloss durch das Verhältniss der absoluten Längen a und b bestimmt. Dieser Winkel h ist, wie die Betrachtung der Fig. V. lehrt, durch die Formel

(67) . . . $h = \mathrm{Atg.}\left(\frac{b}{a}\right)$

gegeben, d. i. durch den kleinsten, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen, dessen trigonometrische Tangente dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ gleich ist. Bezeichnet man den Modul, welcher für alle complexe Abscissen (27) derselbe ist, mit r, so ist

(68) . . . $r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$.

Aus diesen Formeln erkennt man leicht, dass das Argument einer complexen Abscisse $aj + bJ$, wenn sich a und b in demselben Verhältnisse ändern, unverändert bleibe, und dass sich bloss der Modul der neuen complexen Abscisse in eben demselben Verhältnisse ändere, d. i. dass die Multiplication einer complexen Abscisse mit einer abstracten, ganzen oder gebrochenen, Zahl nur ihren Modul, nicht aber ihr Argument ändere. Da man hat:

$$(69) \quad \ldots \quad a = r \,.\, \cos.\, h; \quad b = r \,.\, \sin.\, h;$$

und da

$$(70) \quad \ldots \quad \mathrm{Cos.}\, h + i \,.\, \sin.\, h = e^{i.h}$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so kann man die complexen Abscissen (27) mittelst ihres Moduls und Arguments auf folgende Art ausdrücken:

$$(71) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} + a + b.i = r.e^{h.i} \\ - a + b.i = r.e^{(\pi - h).i} \\ - a - b.i = r.e^{(\pi + h).i} \\ + a - b.i = r.e^{(2\pi - h).i} \end{array} \right.$$

Im Allgemeinen nun, wenn r den Modul, ϑ das Argument einer complexen Abscisse (62) bedeutet, so hat man:

$$(72) \quad \ldots \quad aj + bJ = r \,.\, e^{\vartheta . i},$$

worin ϑ einer der Winkel (66) seyn wird, nach Beschaffenheit der Bedeutungen der ungleichartigen Einheiten j und J.

Um eine complexe Abscisse (72) mit

$$(73) \quad \ldots \quad + i; \quad - 1; \quad - i$$

zu *multipliciren* oder zu *dividiren*, hat man nur nöthig, ihr Argument um die Bögen

(74) . . . $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$

zu *vermehren* oder zu *vermindern*; mit andern Worten: diese Abscisse, bei unveränderter Länge im *positiven* oder *negativen* Sinne um die Winkel (74) zu drehen.

Will man eine complexe Abscisse (72) mit einem der Factoren

(75) . . . $(+ mi)$, $(- m)$, $(- mi)$,

worin m eine abstracte, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, *multipliciren*, so darf man ihre Richtung respective nur um die Winkel (74) im positiven Sinne drehen, und auf der neuen Richtung das mfache ihres Moduls auftragen.

XIV. *Eine andere Auflösung der Aufgabe von der Multiplication und Division complexer Abscissen mit complexen Zahlen.*

Die Aufgabe, eine complexe Abscisse A, vorgestellt durch den Ausdruck (72), mit einer complexen Zahl zu *multipliciren* oder zu *dividiren*, kann mittelst der Grundsätze des vorigen Artikels jetzt auch auf eine andere Art aufgelöst werden. Es sey M die complexe Zahl, ρ ihr Modul, μ ihr Argument, folglich

(76) . . . $\rho = (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}$; (77) . . . $M = \rho \,.\, e^{\mu \cdot i}$;

wenn M eine der Formen (40) ist, und

(78) . . . $A \,.\, M = X$; $A : M = Y$;

die gesuchte (complexe) Abscisse; so erhält man

(79) . . . $X = (r \,.\, e^{\vartheta \cdot i}) \,.\, (\rho \,.\, e^{\mu \cdot i}) = (\rho r) \,.\, e^{(\vartheta + \mu) \cdot i}$;

(80) . . . $Y = (r \,.\, e^{\vartheta \cdot i}) : (\rho \,.\, e^{\mu i}) = (r : \rho) \,.\, e^{(\vartheta - \mu) \cdot i}$.

Diese letzten Ausdrücke enthalten nun eine sehr einfache Construction der Grössen X und Y.

Um also eine complexe Abscisse A mit einer complexen Zahl M zu *multipliciren*, drehe man die Abscisse A im *positiven* Sinne um das Argument μ der complexen Zahl M, und trage auf dieser letzten Richtung die Länge von A, mit dem Modul ρ der Zahl M multiplicirt, auf. Die so erhaltene Linie ist das gesuchte Produkt X.

Um eine complexe Abssisse A durch eine complexe Zahl M zu *dividiren*, drehe man die Abscisse A im *negativen* Sinne um das Argument μ der complexen Zahl M, und trage auf dieser letzten Richtung die Länge von A, durch den Modul ρ der Zahl M dividirt, auf. Die so erhaltene Linie ist der gesuchte Quotient Y.

Eben so leicht kann man eine complexe Abscisse A mit mehreren complexen Zahlen M, M′, M″, ... nach einander multipliciren oder dividiren. In der That, wenn $\rho\ \rho'\ \rho''$ ... die Module dieser Zahlen, $\mu\ \mu'\ \mu''$ ... ihre Argumente bedeuten, und wenn der Ausdruck

$$\frac{A\ .\ M'\ M''}{M'''} = X$$

zu construiren wäre, so hat man offenbar

$$X = \left(\frac{\rho' \rho'' r}{\rho'''}\right) .\ e^{(\vartheta + \mu' + \mu'' - \mu''')\ .\ i}$$

Man wird daher nur nöthig haben, die Linie A um die Winkel μ' und μ'' im positiven Sinne, und hierauf um den Winkel μ''' im negativen Sinne zu drehen, und endlich auf der letzterhaltenen Richtung die, durch die Formel $\frac{\rho'\ \rho''\ r}{\rho'''}$ bestimmte Länge aufzutragen.

XV. *Aufgabe. Wenn A eine gegebene complexe Abscisse, und M eine gegebene complexe Zahl ist, die Ausdrücke M.A; M^2.A; M^3.A u. s. w. zu construiren.*

Aufl. Es sey r der Modul, ϑ das Argument von A; ferner ρ der Modul, μ das Argument von M; endlich

$$(81) \quad \ldots \quad M.A = A'; \quad M^2.A = A''; \quad M^3.A = A'''; \text{ u. s. w.}$$

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir

$$M = + m + ni$$

annehmen, so dass

$$(82) \quad \ldots \quad \rho = (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \mu = \text{Atg.}\left(\frac{n}{m}\right).$$

Da nun

$$(83) \quad \ldots \quad A = r.e^{\vartheta.i}; \quad M = \rho.e^{\mu.i};$$

so hat man:

$$(84) \ldots \quad A' = (\rho r).e^{(\vartheta+\mu).i}; \quad A'' = (\rho^2 r).e^{(\vartheta+2\mu)i}; \quad A''' = (\rho^3 r).e^{(\vartheta+3\mu)i};$$
u. s. w.

Um vorerst die Module

$$(85) \quad \ldots \quad \rho\, r; \quad \rho^2 r; \quad \rho^3 r; \quad \ldots$$

der gesuchten complexen Abscissen

$$(86) \quad \ldots \quad A'; \quad A''; \quad A'''; \quad \ldots$$

zu erhalten (Fig. VII.), trage man auf der Richtung PN eine willkürliche Linie PE = E auf, und nehme PA = m . E; PB = n . E, so ist PB = ρE, und der Winkel APB das Argument μ der complexen Zahl M. Dieses vorausgesetzt, sey PC = r. Zieht man nun CE zu EB parallel, so ist PR = PD = ρ.r. Denn man hat, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke PEB PCR, die Gleichung:

$$PE : PB = PC : PR,$$

das ist

$$E : (\rho \,.\, E) = r : PR,$$

woraus offenbar

$$PR = \rho \,.\, r$$

folgt.

Um jetzt die übrigen Linien (85), und hieraus die complexen Abscissen (86) zu finden, trage man auf der Linie PN die Länge $\rho . r$ auf. Ist nun PA die complexe Linie A (Fig. VIII.), so nehme man $PB = PB'$, und ziehe BC' zu AB' parallel; nehme ferner $PC = PC'$, und ziehe CD' zu BC' parallel; nehme eben so wieder $PD = PD'$, und ziehe DE' zu CD' parallel; u. s. w.

Die Linien

(87) . . . PB'; PC'; PD' . . .

stellen nun successive die Ausdrücke (85) dar.

Denkt man sich endlich um P einen Kreis beschrieben, und dreht die Linie PE im positiven Sinne um die gleichen Winkel μ, wobei man successive die Längen $PA' = PB'$, $PA'' = PC'$, $PA''' = PD'$ u. s. w. aufträgt, so werden die Linien

(88) . . . PA'; PA''; PA'''; . . .

die successiven complexen Abscissen (86) oder (81) darstellen.

Denn man hat

$$PA : PB' = PB : PC' = PC : PD' = \text{u. s. w.},$$

das ist

$$r : \rho r = \rho r : \rho^2 r = \rho^2 r : \rho^3 r = \text{u. s. w.},$$

Die Module dieser Abscissen (88) sind folglich die Linien (85). Die Argumente eben dieser Abscissen sind überdiess respective

$$\vartheta + \mu; \quad \vartheta + 2\mu; \quad \vartheta + 3\mu; \quad \ldots$$

Folglich sind die Linien (88) identisch mit den complexen Abscissen (84) oder (81).

XVI. Addition zweier oder mehrerer complexer Abscissen.

Nachdem wir in den vorhergehenden Artikeln die Grundsätze festgestellt haben, um eine complexe Abscisse, wenn sie mit einer oder mehreren complexen Zahlen multiplicirt oder dividirt wird, geometrisch darzustellen, wollen wir jetzt zur Betrachtung der Fälle übergehen, da complexe Abscissen selber durch rationelle oder selbst irrationelle Operationen in einem Ausdrucke unter einander verbunden, und da ein solcher Ausdruck construirt werden soll.

Der einfachste Fall ist der, da zwei oder mehrere complexe Abscissen *addirt* werden sollen. Es seyen nun A und B zwei gegebene complexe Abscissen, und

$$(89) \quad \ldots \quad A + B = X$$

zu construiren. Um bestimmte Fälle zu haben, wollen wir annehmen, dass a' a'' b' b'' absolute Längen seyen, und

$$(90) \quad \ldots \quad A = + a' + b' \,.\, i; \quad B = + a'' + b'' \,.\, i,$$

so wird man haben

$$(91) \quad \ldots \quad X = (a' + a'') + (b' + b'') \,.\, i.$$

Setzt man daher $a' + a'' = a$; $b' + b'' = b$, so ist $X = a + b\,i$; das heisst, die Summe zweier complexer Abscissen A und B ist eine neue complexe Abscisse X; sie ist so beschaffen, dass ihre

Projectionen auf den Richtungen $+1$ und $+i$ den respectiven algebraischen Summen der Projectionen der Abscissen A und B auf eben diesen Richtungen gleich sind. Es lässt sich überdiess leicht zeigen, dass diese Gerade X die *Diagonale* des über den Seiten A und B construirten Parallelogramms sey (Fig. IX.). In der That, wenn PA und PB die graphischen Darstellungen der complexen Abscissen A, B (90), also

$$PC = a'; \quad PD = b'; \quad PE = a''; \quad PF = b''$$

sind; und wenn man über APB das Parallelogramm PAXB vollendet, so ist es leicht, sich zu versichern, dass, nach Herablassung der Senkrechten XU, XV auf die Richtungen PN, PO, die Gleichungen

$$CU = PE; \quad FV = PD$$

bestehen werden, und folglich

$$PU = a' + a''; \quad PV = b' + b''$$

seyn werde. Die Diagonale PX ist daher die Darstellung der Linie (91), das ist der Summe der complexen Abscissen (90).

Für die Differenzform

$$(92) \quad \ldots \quad A - B = Y$$

bleibt die Construction dieselbe, wie für die Summe (89), indem man für jene Differenz schreiben kann:

$$(93) \quad \ldots \quad A + (-B) = Y.$$

Man suche daher zwischen A und — B die Diagonale. Die Linie — B erhält man, indem man die Länge der complexen Abscisse B auf ihrer Verlängerung über den Pol P hinaus aufträgt.

Wenn A, B gegebene complexe Linien sind, so stellen sich manchmal die Ausdrücke

$$(94) \;\ldots\; A + B \,.\, i = X, \text{ und } A - B \,.\, i = Y$$

zur Construction dar. Es seyen PA und PB die geometrischen Darstellungen der complexen Abscissen A und B (Fig. X.); man ziehe durch den Pol P die auf PB Senkrechte, und trage auf ihr die Länge von B zu beiden Seiten von P auf, so dass man habe:

$$PB' = PB'' = PB.$$

Die Diagonale PX über PA und PB' ist die Darstellung der Summe $A + Bi$; die Diagonale PY über PA und PB'' ist die Darstellung der Differenz $A - Bi$.

Es unterliegt nun keiner weitern Schwierigkeit, die algebraische Summe von mehr als zwei complexen Linien durch geometrische Construction zu bestimmen. In der That, wenn A, B, C, D, was immer für complexe Linien sind, und

$$(95) \;\ldots\; A + B + C + D + \ldots = X,$$

so wird man A und B zu einer ersten Diagonale, diese mit C zu einer zweiten Diagonale, diese mit D zu einer dritten Diagonale verbinden, und diese Constructionen so weit fortsetzen, bis alle Glieder der Summe (95) in dieselben einbezogen sind. Die letzte Diagonale, auf welche man solchergestalt kömmt, ist die geometrische Darstellung der complexen Abscisse X oder der Summe der gegebenen complexen Abscissen.

XVII. Analogie der Addition complexer Abscissen mit der Zusammensetzung der auf einen Punkt wirksamen Kräfte.

Wenn man sich an dem Punkte P in den Richtungen der complexen Abscissen A, B, C, ... Kräfte wirkend vorstellt, deren Intensitäten den Modulen oder Längen jener Abscissen respective proportional sind, so wird für diese Kräfte eine einzige mittlere Kraft, welche in einer bestimmten Richtung auf den Punkt P wirkt, gesetzt werden können. Die Intensität dieser Mittlern wird dem Modul der Summe der complexen Abscissen A, B, C, ... gleich seyn, und ihre Richtung wird mit der Richtung + 1 einen Winkel bilden, welcher dem Argumente eben dieser Summe gleich ist. Auf eben diese Art also, auf welche zwei oder mehrere, an dem Punkte P nach verschiedenen Richtungen, und in verschiedenen Intensitäten wirksame Kräfte, mittelst des Princips vom Kräfte-Parallelogramm, in eine einzige Mittelkraft zusammengesetzt werden, wird die Summe zweier oder mehrerer complexer Abscissen, durch welche jene Kräfte ihrer Intensität und Richtung nach dargestellt werden, in eine einzige complexe Abscisse zusammengesetzt werden können.

Die Aufgabe also von der Addition zweier oder mehrerer complexer Abscissen und ihre Auflösung ist daher mit dem Probleme der Statik analog, zwei oder mehrere, in einer Ebene an demselben Punkte P wirksame Kräfte in eine einzige Mittelkraft zusammenzusetzen; wir werden daher die *Addition* zweier oder mehrerer complexer Abscissen auch eine *Zusammensetzung* dieser Abscissen in eine *Mittlere* nennen können.

Wenn jetzt $A_0\ A_1\ A_2 \ldots A_{n-1}\ A_n$ complexe Abscissen sind, und mit x eine complexe Zahl bezeichnet wird, so wird jede Wurzel der Gleichung

$$(96) \quad \ldots \quad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n = 0$$

die Beschaffenheit besitzen, dass, wenn man aus ihr nach dem XV. Art. die complexen Linien

$$(97) \quad \ldots \quad xA_1;\quad x^2A^2;\quad \ldots\quad x^{n-1}A_{n-1};\ x^nA_n;$$

welche wir respective mit

$$(98) \quad \ldots \quad A'; \quad A''; \quad A'''; \ldots . \; A^{(n-1)}; \quad A^{(n)}$$

bezeichnen wollen; und wenn man an dem Punkte P in den Richtungen der complexen Abscissen (98) und A_0 Kräfte wirken lässt, welche den Längen dieser Abscissen proportionell sind, sämmtliche Kräfte um den Punkt P im Gleichgewichte sind. Da die Gleichung (96) im Allgemeinen n Wurzeln hat, so wird es n Systeme von Kräften geben, welche, nach dem Gesetze (97) aus den complexen Abscissen

$$A_1 \; A_2 \; A_3 \; \ldots \; A_{n-1} \; A_n$$

bestimmt, mit A_0 am Punkte P Gleichgewicht machen.

XVIII. Aufgabe. Wenn A und B zwei gegebene complexe Linien bedeuten, E aber eine absolute Länge bezeichnet, welche auf der Richtung + 1 aufzutragen ist, den Ausdruck

$$(99) \quad \ldots \quad \frac{A.B}{E} = X$$

zu construiren.

1. *Aufl.* Offenbar ist $\frac{B}{E}$ eine complexe Zahl. Wir wollen sie $= m + ni$ annehmen, so dass man habe

$$B = m.E + n.E.i,$$

so wird das Produkt

$$(100) \quad \ldots \quad A.(m + n.i) = X$$

nach den im X. oder XIV. Artikel statuirten Grundsätzen construirt werden können.

Wir wollen noch den besondern Fall betrachten, da

$$A = a - bi; \quad B = a + bi,$$

und

$$a = m.E; \quad b = n.E.$$

Die Gleichung (99) gibt dann:

$$\frac{(m.E - n.E.i).(m.E + n.E.i)}{E} = X;$$

oder:

$$(101) \quad \ldots \quad (a-bi).(m+ni) = (m^2+n^2).E = X = \frac{a^2+b^2}{E}.$$

Wenn also $PE = E$; $PD = m.E = a$; $DA = n.E = b$ gesetzt wird (Fig. XI.), und l den Modul von A bezeichnet, das ist $PA = l$; wenn ferner PA verlängert, und $PC = m.l$ genommen wird; wenn überdiess CF senkrecht auf PC steht, und $CF = n.l$ angenommen wird, so wird $PF = X$ seyn. Die zweite der Formeln (101) lässt erkennen, dass die Richtung der Abscisse X mit der Hauptrichtung PN zusammenfalle. Da nun das Dreieck PCF dem Dreiecke PDA ähnlich ist, so folgt

$$PA : PD = PF : PC$$

das ist

$$l : m.E = X : m.l,$$

woraus noch

$$(102) \quad \ldots \quad X = \frac{l^2}{E}.$$

Die Verbindung der Ausdrücke (101) und (102) für X gibt endlich

$$(103) \quad \ldots \quad l^2 = a^2 + b^2.$$

Diese Gleichung enthält den bekannten Satz des Pythagoras, auf welchen sich die Formeln zur Bestimmung der Moduln der complexen Abscissen stützen.

2. *Aufl.* Eine einfachere Construction des Ausdrucks (99) ergibt sich, wenn man für die complexen Abscissen A und B ihre Module und Argumente einführt. Es seyen also r' r'' die Module, ϑ' ϑ'' die Argumente, so ist

$$(104) \quad \ldots \quad X = \frac{r'\, r''}{E} \cdot e^{(\vartheta' + \vartheta'') \cdot i}.$$

Dieser Formel zufolge ist X eine complexe Abscisse, deren Modul $r = \frac{r'\, r''}{E}$, und Argument $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$. Hieraus ergibt sich folgende Construction der complexen Abscisse X, (99).

Es seyen PA und PB (Fig. XII.) die geometrischen Darstellungen der complexen Abscissen A und B, folglich $PA = r$, $PB = r'$, $APN = \vartheta'$, $BPN = \vartheta''$, $PE = E$. Man verbinde A mit E, nehme $PB' = PB$, ziehe $B'C$ zu EA parallel, und ziehe endlich $PX = PC$ so, dass der Winkel $NPX = \vartheta = \vartheta' + \vartheta''$. Denn man hat, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke APE, CPB', offenbar:

$$PE : PA = PB' : PC,$$

das ist

$$E : r' = r'' : r,$$

folglich

$$r = \frac{r'\, r''}{E}.$$

Ueberdiess ist das Argument von PX der Winkel $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$; folglich entspricht PX der complexen Abscisse (104) oder (99).

Wenn $A = B$, so geht die Formel (99) über in

$$(105) \quad \ldots \quad \frac{A^2}{E} = X.$$

Um diese Linie zu construiren, hat man also nur nöthig, $PB' = A$, und $\vartheta = 2\vartheta'$ zu nehmen.

Wiederholt man diese Construction nach einander, und nimmt als Argumente die successiven Winkel

$$3\vartheta'; \quad 4\vartheta'; \quad \text{u. s. w.},$$

so erhält man die Linien

$$(106) \quad \ldots \quad \frac{A^3}{E^2}; \ \frac{A^4}{E^3} \ \text{u. s. w.}$$

Eben so leicht kann man durch fortgesetzte Anwendung der Construction der Formel (104) nach und nach die durch die Formeln

$$(107) \quad \ldots \quad \frac{A.B.C}{E^2}; \quad \frac{A.B..C.D}{E^3}; \ \text{u. s. w.}$$

erhalten.

XIX. Aufgabe. Es seyen A, B, C gegebene complexe Abscissen, man soll den Ausdruck

$$(108) \quad \ldots \quad \frac{A.B}{C} = X$$

construiren.

Aufl. Es seyen r' r'' r''' die Module, ϑ' ϑ'' ϑ''' die Argumente der gegebenen complexen Abscissen A, B, C, und $r\,\vartheta$ Modul und Argument der gesuchten Abscisse X, so ist

$$(109) \quad \ldots \quad X = \frac{r'\,r''}{r'''}.e^{(\vartheta' + \vartheta'' - \vartheta''').i},$$

folglich

$$(110) \quad \ldots \quad r = \frac{r'\,r''}{r'''}; \quad \vartheta = \vartheta' + \vartheta'' - \vartheta'''.$$

Aus diesen Formeln erhält man nun nachstehende Construction für (108): Es seyen PA, PB, PC (Fig. XIII.) die geometrischen

Darstellungen der complexen Abscissen A, B, C, so ist $PA = r'$, $PB = r''$, $PC = r'''$; und $NPA = \vartheta'$, $NPB = \vartheta''$, $NPC = \vartheta'''$. Diess vorausgesetzt, verbinde man C mit A, nehme auf PC die $PB' = PB$ und ziehe $B'R$ zu CA parallel, so ist $PR = \frac{r' r''}{r'''} = r$. Denn man hat, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke APC und RPB' die Gleichung

$$PA : PC = PR : PB', \text{ das ist } r' : r''' = PR : r''.$$

Zieht man nun die Linie PL so, dass der Winkel $NPL = \vartheta$ dem Winkel $\vartheta' + \vartheta'' - \vartheta'''$ gleich ist, und trägt man auf PL die Länge $PX = PR = r$ auf, so wird PX die gesuchte complexe Abscisse X seyn.

Wenn man AB annimmt, so hat man an der Stelle des Ausdruckes (108) die Formel

$$(111) \ldots \frac{A^2}{C} = X,$$

deren Construction von der vorhergehenden sich nicht unterscheidet. Die successive Anwendung derselben führt auf die complexen Abscissen

$$(112) \ldots \frac{A^3}{C^2}; \frac{A^4}{C^2}; \ldots$$

Die zwei- oder mehrmalige Wiederholung der Construction der Formel (108) führt endlich noch auf die complexen Abscissen, welche durch die Formeln

$$(113) \ldots \frac{A.B.C}{D.E}; \frac{A.B.C.D}{E.F.G}; \text{ u. s. w.}$$

oder durch die Formeln:

$$(114) \quad \ldots \quad \frac{A^2.B}{C^2}; \ \frac{A.B.C}{D^2}; \ \frac{A^2.B}{C.D}; \text{ u. s. w.}$$

bestimmt sind.

XX. Aufgabe. Es seyen A und B was immer für gegebene complexe Abscissen; man soll den Ausdruck:

$$(115) \quad \ldots \quad X = \sqrt[2]{(A.B)}$$

construiren.

Aufl. Es seyen r' r'' die Module, und ϑ' ϑ'' die Argumente der complexen Linien A, B, und r ϑ Modul und Argument der gesuchten Abscisse X, so hat man

$$(116) \quad \ldots \quad X = (r' \, r'')^{\frac{1}{2}} . e^{\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'').i};$$

folglich

$$(117) \quad \ldots \quad r = \sqrt[2]{(r' \, r'')}; \quad \vartheta = \frac{\vartheta' + \vartheta''}{2}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich nun nachstehende Construction des Ausdruckes (115):

Es seyen PA und PB die geometrischen Darstellungen der Linien A, B (Fig. XIV.); über der längern derselben, PA, beschreibe man einen Halbkreis, nehme $PB' = PB$, errichte in B' eine Senkrechte über PA, welche den Halbkreis im Punkte R schneide, so ist $PR = (r' \, r'')^{\frac{1}{2}} = r$. Zieht man nun aus P eine Linie, welche mit PN den Winkel $\frac{\vartheta' + \vartheta''}{2} = \vartheta$ bildet, und trägt darauf $PX = PR$ auf, so wird PX die gesuchte complexe Abscisse seyn. Man kann noch bemerken, dass ϑ noch durch eine der Formeln

$$(118) \quad \ldots \quad \vartheta' + \frac{\vartheta'' + \vartheta'}{2} \text{ oder } \vartheta'' + \frac{\vartheta' - \vartheta''}{2};$$

vorgestellt werden kann.

Wenn daher $\vartheta'' > \vartheta'$, so drehe man PA um den halben Winkel BPA, um die Richtung von PX zu erhalten. Wenn hingegen $\vartheta' > \vartheta''$, so drehe man PB um den halben Winkel APB, um die Richtung von PX zu erhalten. In beiden Fällen geschieht die Drehung der Linien im positiven Sinne. Die Linie PX halbirt also den Bogen BB′.

Wenn sich der eine Faktor B in der Formel (115) auf eine absolute Länge E bezieht, so dass man habe

$$(119) \quad \ldots \quad X = \sqrt[2]{(\text{E}.\text{A})};$$

so ist

$$(120) \quad \ldots \quad r = \sqrt{(\text{E}.r')}; \quad \vartheta = \tfrac{1}{2}\vartheta'.$$

Wenn daher PE = E, und PA die complexe Abscisse A vorstellt (Fig. 15), so nehme man darauf PE′ = PE, errichte in E′ über PA die Senkrechte, welche den über PA beschriebenen Halbkreis in R schneidet, halbire den Bogen EE′ in C, und trage auf der aus P durch C gezogenen Geraden die Länge PR = PX auf, so ist PX die gesuchte complexe Abscisse (119).

XXI. Aufgabe. Es seyen A und B was immer für gegebene complexe Abscissen; man soll die Ausdrücke:

$$(121) \quad \ldots \quad X = \sqrt[2]{(A^2 + B^2)}; \qquad (122) \quad \ldots \quad Y = \sqrt[2]{(A^2 - B^2)}$$

construiren.

Aufl. Diese beiden Ausdrücke lassen sich durch folgende Formen:

$$X = \sqrt[2]{(A + Bi)\,(A - B.i)}\,; \qquad Y = \sqrt[2]{(A + B)\,(A - B)}$$

ersetzen.

Sucht man also die Diagonalen $A' = A + Bi$; $B' = A - Bi$, nach (94); und die Diagonalen $A + B = A''$; $A - B = B''$ nach (89), (92), so ist X die mittlere Proportionale zwischen A' und B', nämlich $\sqrt[2]{(A'.B)}$, und Y die mittlere Proportionale zwischen A'' und B'', nämlich $\sqrt[2]{(A''.B'')}$, welche man nach (115) erhält.

Es ist nun auch leicht, die zusammengesetztere Formel

$$(123) \quad \ldots \quad X = \sqrt[2]{(A^2 \pm B^2 \pm C^2 \pm D^2 \pm \ldots)}$$

zu construiren. Man darf nur successive die complexen Abscissen:

$$A' = \sqrt[2]{(A^2 \pm B^2)}\,; \quad B' = \sqrt[2]{(A'^2 \pm C^2)}\,; \quad C' = \sqrt[2]{(B'^2 \pm D^2)}\,; \text{ etc.}$$

bestimmen, um in der letzten Geraden die complexe Abscisse X zu haben.

XXII. Aufgabe. Es seyen A und B was immer für gegebene complexe Abscissen; man soll die Ausdrücke

$$(124) \quad \ldots \quad X = \sqrt[2]{(A^2 + B^2.i)}\,;$$

$$(125) \quad \ldots \quad Y = \sqrt[2]{(A^2 - B^2.i)}$$

construiren.

Aufl. Diese beiden Ausdrücke lassen sich durch folgende Formen ersetzen:

$$X = \sqrt[2]{(A + B.i^{\frac{3}{2}})\,(A - B.i^{\frac{3}{2}})}\,; \quad Y = \sqrt[2]{(A + B.i^{\frac{1}{2}})\,(A - B.i^{\frac{1}{2}})}.$$

Nun ist

$$i^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{4}\pi . i}; \quad i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}\pi . i};$$

daher erhält man $B . i^{\frac{3}{2}}$ und $B . i^{\frac{1}{2}}$, wenn man B respective um die Winkel $\frac{3}{4}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ im positiven Sinne dreht. Bezeichnet man diese complexe Abscissen in ihren neuen Stellungen mit B_1 und B_2, so darf man nur die Summen

$A + B_1$; $A - B_1$ in die mittlern Diagonalen A' und B';
und $A + B_2$; $A - B_2$ „ „ „ „ A'' und B''

nach (89), (92) zusammensetzen, und hierauf die Formeln

$$X = \sqrt[2]{(A' . B')}; \quad Y = \sqrt[2]{(A'' . B'')}$$

nach (115) construiren, um die complexen Abscissen (124), (125) zu erhalten.

Es ist nun leicht, die zusammengesetztere Formel

$$(126) \quad \ldots \quad X = \sqrt[2]{(A^2 . j' + A^2 . j'' + C^2 . j''' + D^2 . j^{\text{IV}} + \ldots)}$$

zu construiren, worin j' j'' j''' j^{IV} ..., welche immer von den Einheiten (1) bezeichnen. Man darf nur successive die complexen Abscissen

$$A' = \sqrt[2]{(A^2 . j' + B^2 . j'')}; \quad B' = \sqrt[2]{(A'^2 + C^2 . j''')}; \quad C' = \sqrt[2]{(B'^2 + D^2 . j^{\text{IV}})}; \text{ etc.}$$

bestimmen, um in der letzten Geraden die complexe Abscisse Y zu haben.

XXIII. *Aufgabe. Es seyen A eine gegebene complexe Abscisse, und α ein gegebener Winkel; man soll die Formeln*

$$(127) \quad \ldots \quad X = A . \sin \alpha; \qquad (128) \quad \ldots \quad X = A . \cos \alpha$$

construiren.

1. *Aufl.* Man hat

$$\sin\alpha = +\tfrac{1}{2}[e^{-\alpha i} - e^{\alpha i}];\quad \cos\alpha = +\tfrac{1}{2}[e^{-\alpha i} + e^{\alpha i}];$$

daher

$$X = \tfrac{1}{2}[A.e^{-\alpha i}.i - A.e^{\alpha i}] = \tfrac{1}{2}[A.e^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)i} + A.e^{(\pi+\alpha)i}]$$

und

$$Y = \tfrac{1}{2}[A.e^{-\alpha i} + A.e^{\alpha i}] = \tfrac{1}{2}[A.e^{(2\pi-\alpha).i} + A.e^{\alpha i}]$$

Hieraus ergibt sich nun folgende Construction.

Man drehe die complexe Abscisse A im positiven Sinne um die Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\pi + \alpha$, und setze sie in diesen neuen Stellungen in eine Diagonale zusammen, so erhält man die complexe Linie 2X.

Man drehe die complexe Abscisse A im positiven Sinne um die Winkel $2\pi - \alpha$ und α, und setze sie in diesen neuen Stellungen in eine Diagonale zusammen, so erhält man die complexe Linie 2Y.

Halbirt man noch in dem einen und andern Falle die erhaltenen complexen Linien, so hat man die gesuchten complexen Abscissen X, Y, (127), (128).

Es ist nun leicht, die zusammengesetztere Formel:

$$(129)\ldots X = \sqrt[2]{\left[A^2.j'.\binom{\sin}{\cos}^2.\alpha + B^2.j''.\binom{\sin}{\cos}^2.\beta + C^2.j'''.\binom{\sin}{\cos}^2.\gamma + \ldots\right]}$$

zu construiren, worin j', j'', j''', ... welche immer von den Einheiten (1) bezeichnen; α, β, γ, ... gegebene Winkel sind, und das

Zeichen $\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}^2$ bedeutet, dass man entweder $\sin^2$ oder $\cos^2$ des gegebenen nebenstehenden Winkels nehmen könne.

Man kann noch bemerken, dass sich bei der Reduction dieser Formel (129) auf frühere die Gleichungen

$$(120) \quad \ldots \quad -1 = e^{\pi . i}; \quad +i = e^{\frac{\pi}{2} . i}; \quad -i = e^{\frac{3\pi}{2} . i}$$

benützen lassen.

2. *Aufl.* Wenn man Modul und Argument von A mit $r\,\vartheta$ bezeichnet, so hat man an der Stelle der beiden Formeln (127), (128) folgende:

$$(131) \quad \ldots \quad X = r . \sin \alpha . e^{\vartheta . i};$$
$$(132) \quad \ldots \quad Y = r . \cos \alpha . e^{\vartheta . i}.$$

Hieraus ergibt sich folgende einfachere Construction derselben Formeln (127), (128):

Vom Endpunkte der complexen Abscisse A, der man das Argument α gegeben hat, lasse man auf die Hauptrichtungen, die wir bisher mit NS, WO bezeichnet haben, senkrechte Linien herab, und drehe die auf NS, WO erhaltenen Projectionen um den Winkel ϑ, welchen ursprünglich die Richtung der gegebenen complexen Abscisse A mit der Richtung $+1$ oder PN gemacht hat, oder trage diese Projectionen im positiven oder negativen Sinne auf der Richtung von A auf, je nach Beschaffenheit des gegebenen Winkels α.

XXIV. *Aufgabe. Es sey α ein gegebener Winkel, A eine gegebene complexe Abscisse; man soll die Formeln:*

$$(133) \quad \ldots \quad X = \frac{A}{\sin \alpha}; \quad (134) \quad \ldots \quad Y = \frac{A}{\cos \alpha}$$

construiren.

Aufl. Sind r ϑ Modul und Argument von A, so hat man aus (133), (134):

$$X = \frac{r}{\sin \alpha} . e^{\vartheta . i}; \quad Y = \frac{r}{\cos \alpha} . e^{\vartheta . i}$$

Man stelle also die complexe Abscisse A unter dem Winkel α gegen PN oder gegen die Hauptrichtung + 1, errichte so in ihrem Endpunkte eine Senkrechte, welche von den beiden Hauptrichtungen, zwischen welchen jene Gerade liegt, in Punkten trifft, deren Entfernungen von dem Pole P die Längen der durch $\frac{r}{\sin \alpha}$ $\frac{r}{\cos \alpha}$ ausgedrückten Linien sind. Trägt man diese hierauf auf der Richtung der gegebenen complexen Linie A, oder auf der ihr entgegengesetzten (nach Beschaffenheit des Winkels α) auf, so hat man die beiden complexen Abscissen X, Y.

XXV. *Aufgabe. Es seyen A und B zwei gegebene complexe Linien, p, q zwei gegebene abstracte, ganze oder gebrochene, Zahlen; man soll die Formel*

$$(135) \quad \ldots \quad X = \frac{p.A + q.B}{p + q}$$

construiren.

Aufl. Es seyen PA und PB die geometrischen Darstellungen der complexen Abscissen A und B. Man verbinde A mit B, theile die Länge AB im Punkte X im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen p, q, so dass man habe

$$(136) \quad \ldots \quad AX : BX = q : p; \quad \text{oder } p.AX = q.BX$$

und ziehe PX; so ist diese die gesuchte complexe Abscisse.

Denn zieht man von den Punkten A, B, X auf WO die Senkrechten AA′, BB′, XX′, so wie von den Punkten B, X auf AA′ die Senkrechten BC, XD, und nimmt man, um den Fall der Figur zu betrachten

$$A = + a + bi; \quad B = + a' + b'i;$$

so dass

$$AA' = a; \quad PA' = b; \quad BB' = a'; \quad PB' = b';$$

setzt man ferner

$$PX = + x + y.i,$$

so dass $XX' = x$; $PX' = y$; so hat man, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ADX, XEB mit dem Dreiecke ACB, die Gleichungen:

$$(137) \quad \ldots \quad AD : DX : AX = XE : EB : XB = AC : CB : AB,$$

und aus den Formeln (136), (137) findet man:

$$(a - x) : (a - a') = q : (p + q);$$
$$(y - b) : (b' - b) = q : (p + q);$$

woraus sich

$$x = \frac{pa + qa'}{p + q}; \quad y = \frac{pb + pb'}{p + q},$$

mithin

$$x + y.i = \frac{p.(a + bi) + q\,(a' + b'i)}{p + q},$$

das ist

$$PX = \frac{p.A + q.B}{p + q}$$

ergibt.

Auf eben diese Art findet man die Construction des zusammengesetzteren Ausdruckes

$$(138) \quad \ldots \quad X = \frac{m.A + m'.A' + m''.A'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots},$$

worin $A, A', A'', \ldots$ gegebene complexe Linien, und $m, m', m'', \ldots$ gegebene abstracte (ganze oder gebrochene) Zahlen bedeuten.

Verbindet man die Endpunkte der Linien A, A' durch eine Gerade, die man im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen m, m' in einem Punkte C' theilt; verbindet man hierauf den Punkt C' mit dem Endpuncte der dritten Linie A'' durch eine Gerade, und theilt sie wieder im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen $m + m'$ und m'' in dem Puncte C'', und setzt auf diese Art die Bestimmung der Theilungspuncte fort, indem man immer den Endpunct einer neuen complexen Abscisse mit dem letzterhaltenen Theilpuncte verbindet, um durch Theilung dieser Verbindungslinie der beiden letzten Puncte einen neuen Theilungspunct zu erhalten, so wird man, nachdem der Endpunct der letzten gegebenen complexen Abscisse in die laufende Construction einbezogen worden ist, einen letzten Theilpunct erhalten; die Verbindungslinie zwischen diesem letzten Puncte und dem Pole P gibt die gesuchte complexe Abscisse (138).

XXVI. *Aufgabe. Es seyen A und B zwei gegebene complexe Abscissen, durch deren Endpuncte eine Gerade gezogen sey; man soll den Ausdruck für das vom Pole auf diese Gerade gefällte Perpendikel bestimmen.*

Aufl. (Fig. XVII.) Es seyen PA, PB die geometrischen Darstellungen der complexen Abscissen A und B, und um einen bestimmten Fall zu haben, sey

$$A = +a + b.i; \quad B = +a' + b'.i;$$

so dass, wenn man von A und B auf WO die Senkrechten AA', BB' herablässt,

$$AA' = a; \quad BB' = a'; \quad PA' = b; \quad PB' = b'$$

sey. Diess vorausgesetzt, ziehe man durch die Puncte A und B eine Gerade, welche die Axen in C, D schneidet, und auf diese Gerade die Linie PX senkrecht, so ist dieses Perpendikel die zu bestimmende Linie.

Wir wollen die Linien PO, PD zu coordinirten Axen der x und y annehmen, so ist die Gleichung der Geraden CD bekanntlich

$$(139) \quad \ldots \quad y = -\frac{a - a'}{b' - b}.x + \frac{ab' - a'b}{b' - b},$$

folglich die Gleichung der auf dieser senkrechten Geraden PX:

$$(140) \quad \ldots \quad y = +\left(\frac{b' - b}{a - a'}\right).x$$

Die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes X seyen

$$PX' = v; \quad X'X = u;$$

und man wird sie finden, wenn man in den Gleichungen (139), (140) $x = v$, $y = u$ setzt, und diese Gleichungen nach u, v auflöst. Setzt man abkürzend

$$(141) \quad \ldots \quad l^2 = (a - a')^2 + (b' - b)^2;$$

so findet man:

$$(142) \quad \ldots \quad u = \frac{(b' - b).(ab' - a'b)}{l^2};\; v = \frac{(a - a').(ab' - a'b)}{l^2}.$$

Hieraus ist nun

$$(143) \quad \ldots \quad PX = u + v.i = \frac{(ab' - a'b).[(b' - b) + (a - a').i]}{l^2},$$

oder endlich

$$(144) \quad \ldots \quad PX = \frac{[(a - a') + (b - b').i].(ab' - a'b).i}{(a - a')^2 + (b - b')^2}.$$

Um diesen Ausdruck für PX zu transformiren, bemerke man, dass

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 = [(a - a') + (b - b').i]\,[(a - a') - (b - b')\,i].$$

Da sich dadurch im Zähler und Nenner des Ausdrucks (144) ein Faktor, nämlich $(a - a') + (b - b').i$ hebt, so hat man

$$PX = \frac{(ab' - a'b).i}{(a - a') - (b - b')\,i},$$

oder

$$(145) \quad \ldots \quad PX = \frac{(ab' - a'b).i}{(a - bi) - (a' - b'i)}.$$

Die Abscissen $a - bi$ und $a' - b'i$ nennt man die zu $a + bi$ und $a' + b'i$ *conjugirten* Abscissen. Setzt man

$$A' = a - bi; \quad B' = a' - b'i,$$

und bemerkt man, dass

$$(ab' - a'b).i = \frac{A'B - A.B'}{2};$$

so geht endlich der Ausdruck (145) über in folgenden:

$$(146) \quad \ldots \quad PX = \tfrac{1}{2}.\frac{A'.B - A.B'}{A' - B'}.$$

Die zu A und B conjugirten Abscissen A' und B' findet man leicht, wenn man jene Abscissen um dieselben spitzigen Winkel, welche sie mit den Hauptrichtungen $+1$, oder -1 machen, aus eben diesen Richtungen $+1$ oder -1, nach entgegengesetzten Sinne drehen lässt. Wird der Ausdruck (146) nach den, in den Artikeln XVI. und XIX. statuirten Principien construirt, so findet man dieselbe complexe Abscisse, welche durch das Perpendikel PX bestimmt ist.

XXVII. *Constructionen zusammengesetzter Formen.*

Die Formeln (89), (92), (94), (99), (105), (108), (111), (115), (119), (121), 122), (124) und (125), für welche in den vorhergehenden Artikeln die ihnen entsprechenden Constructionen angegeben worden sind, lassen sich als *elementäre* Ausdrücke betrachten, auf welche sich eine grosse Anzahl anderer zusammengesetzter Formeln bringen lässt. Genau genommen, sind schon die Formeln (89), (108) und (115), das ist die Ausdrücke:

$$(147) \quad \ldots \quad A + B;\quad \frac{A.B}{C};\quad \sqrt[2]{(A.B)}$$

mit ihren Constructionen hinreichend, um die übrigen, oben angezeigten, und viele andere zusammengesetzte Ausdrücke mittelst derselben construiren zu können.

So z. B. kann man die Formeln (111) oder (124), das ist

$$\sqrt[2]{(A^2 + B^2)};\quad \sqrt[2]{(A^2 + B^2 . i)},$$

wenn man ihnen die Formen

$$\sqrt[2]{\left[A.\left(A + \frac{B}{A}\right)\right]};\quad \sqrt[2]{\left[A.\left(A + \frac{B.Bi}{A}\right)\right]}$$

ertheilt, auf die elementaren Formen (147) zurückbringen.

Wenn gegebene complexe Abscissen in einem Ausdrucke wie immer *durch die rationalen* Operationen unter einander verbunden sind, so werden die beiden ersten der Formeln (147) hinreichend seyn, um, auf dieselben den gegebenen zusammengesetzten Ausdruck reducirend, dessen Construction zu finden. Bei diesem Geschäfte der Reduction einer zusammengesetzten Formel auf die elementaren Formeln wird man sich von denselbeu Grundsätzen leiten lassen, nach welchen die Zerlegung eines rationalen und reellen algebraischen Ausdrucks zum Behufe ihrer Construction zu geschehen hat. Wenn im gegebenen zusammengesetzten Ausdrucke complexe Abscissen auch unter Quadratwurzelzeichen, oder allgemeiner unter Wurzelzeichen erscheinen, deren Wurzel-Exponenten Potenzen von 2 sind, so wird man auch die dritte der Formeln (147) benöthigen. Wenn der zu construirende Ausdruck noch kein linearer ist, so wird man ihn leicht, durch Annahme einer willkührlichen Linieneinheit E, in einen linearen nach bekannten Regeln verwandeln können.

XXVIII. *Anwendung der Constructionen imaginärer Formen zur Construction der reellen Ausdrücke.*

Jede imaginäre Zahlform kann auf die allgemeine Form

$$(148) \quad \ldots \quad P + Q.i$$

zurückgeführt werden, worin P und Q reelle Zahlen sind.

Wenn man nun einen, wie immer zusammengesetzten imaginären Ausdruck X nach den, in den vorhergehenden Artikeln statuirten Grundsätzen construirt hat, so werden seine Projectionen auf den auf einander senkrechten Hauptrichtungen, die Werthe von P und Q geben. Mittelst dieses Princips kann man zuweilen sehr einfache Constructionen für oft sehr verwickelte Ausdrücke erhalten. Auf diese Anwendung wollen wir nur in einigen besondern Fällen hinweisen.

In der Formel (105) sey $A = a + b\,i$, so ist durch die Construction derselben, indem man vom Endpuncte der gefundenen complexen Abscisse auf die auf einander senkrechten Hauptrichtungen Perpendikel herablässt, in den Projectionen zugleich die Construction der beiden Formeln:

$$(150) \quad \ldots \quad \frac{a^2 - b^2}{E} \text{ und } \frac{2\,a\,b}{E}$$

erhalten. Wenn daher

$$X = \frac{A^2}{E} = \frac{(a + bi)^2}{E}; \text{ so ist } P = \frac{a^2 - b^2}{E}; \quad Q = \frac{2ab}{E}.$$

Auf ähnliche Art lassen sich die reellen Formeln finden, deren Construction man mit der Construction der complexen Abscissen der vorigen Art gewonnen hat.

Wenn

$$(111) \ \ldots \ X = \frac{A^2}{C} = \frac{(a + bi)^2}{a' + b'i};$$

so hat man

$$P = \frac{(a^2 - b^2).a' + 2abb'}{a'^2 + b'^2}; \quad Q = \frac{2aa'b - (a^2 - b^2)b'}{a'^2 + b'^2}.$$

Wenn

$$(108) \ \ldots \ X = \frac{A.B}{C} = \frac{(a + bi)(a' + b'i)}{a'' + b''i},$$

so ist

$$P = \frac{(aa' - bb').a'' + (ab' + a'b).b''}{a''^2 + b''^2}; \quad Q = \frac{(ab' + a'b)a'' - (aa' - bb')b''}{a''^2 + b''^2}.$$

Wenn

$$(115) \ \ldots \ X = \sqrt[2]{(A.B)} = \sqrt[2]{(a + bi)(a' + b'i)};$$

so ist

$$P = \sqrt{\left[\frac{\sqrt[2]{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)} + (aa'-bb')}{2}\right]}$$

$$Q = \sqrt{\left[\frac{\sqrt[2]{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)} - (aa'-bb')}{2}\right]}$$

Zuweilen kann ein Ausdruck, der complexe Abscissen enthält, in einen andern mit complexen Abscissen transformirt werden, welcher weit zusammengesetzter ist, als der erstere. In diesem Falle enthält die Construction des einen zugleich die des andern Ausdruckes, z. B.

$$(151) \;\ldots\; \sqrt[2]{(A^2 \pm B^2.i)} = \left[\frac{(A^4+B^4)^{\frac{1}{2}}+A^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \pm \left[\frac{(A^4+B^4)^{\frac{1}{2}}-A^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.i$$

Aus dieser Gleichung findet man nun

$$(152) \begin{cases} \dfrac{\sqrt[2]{(A^2+B^2.i)} + \sqrt[2]{(A^2-B^2i)}}{2} = \left[\dfrac{(A^4+B^4)^{\frac{1}{2}}+A^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{\sqrt[2]{(A^2+B^2.i)} - \sqrt[2]{(A^2-B^2i)}}{2} = \left[\dfrac{(A^4+B^4)^{\frac{1}{2}}-A^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.i. \end{cases}$$

Die Constructionen der ersten Theile dieser Gleichungen sind leicht, indem nur die halben Diagonalen über den complexen Abscissen $\sqrt[2]{(A^2 + B^2.i)}$ und $\sqrt[2]{(A^2 - B^2 i)}$ zu zeichnen sind. Diese sind zugleich die complexen Abscissen für die Ausdrücke in den zweiten Theilen der Gleichung (152).

Wir wollen diese Formeln nicht weiter verfolgen, da es nicht schwer ist, eine grosse Menge derselben zu produciren, die mit-unter sehr einfache Constructionen gestatten, obgleich die Ausdrücke selbst sehr verwickelt sind.

XXIX. *Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades.*

Es sey

$$(153) \quad \ldots \quad x^2 + A.x + B^2 = 0$$

eine vorgelegte Gleichung des zweiten Grades, worin A und B complexe Abscissen sind, so wird x ebenfalls eine complexe Abscisse seyn, deren Werth durch Construction gefunden werden soll. Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind in der Formel

$$(154) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}.[\pm \sqrt[2]{(A^2 - 4B^2)} - A]$$

enthalten, worin von den beiden Zeichen des obern und untern successive zu nehmen ist.

Da $A^2 - 4B^2 = (A + 2B)(A - 2B)$, so sind die, in (154) enthaltenen Wurzeln der Gleichung (153):

$$(155) \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}.[\sqrt[2]{(A + 2B)(A - 2B)} - A]$$

$$(156) \quad \ldots \quad - \tfrac{1}{2}.[\sqrt[2]{(A + 2B)(A - 2B)} + A]$$

Aus diesen beiden Formeln ergibt sich nun folgende Construction der beiden Wurzeln der Gleichung (153):

Ueber den complexen Linien A und 2 B construire man, nach (89), (92) die Diagonalen

$$A + 2B = D' \text{ und } A - 2B = D'';$$

und suche nach (115) die complexe Abscisse

$$D = \sqrt[2]{(D'.D'')};$$

diese letzte Linie setze man mit A nach denselben Formeln (89), (92) in die Diagonalen

$$D - A = X'; \quad D + A = X''$$

zusammen, so stellen die Linien

$$\tfrac{1}{2}.X'; \quad -\tfrac{1}{2}X''$$

die beiden Wurzeln der Gleichung (153) vor.

Der Gleichung des zweiten Grades kann man noch die Form $x^2 + Ax + B.E = o$ geben, worin A, B complexe Abscissen, E eine absolute Länge ist, die man $= 1$ setzen kann. Dann sind die Wurzeln durch die Formel

$$x = \tfrac{1}{2}.\left[\pm \sqrt[2]{E\left(\frac{A^2}{E} - B\right)} - A\right],$$

ausgedrückt, deren Construction leicht ausgeführt werden kann.

XXX. *Auflösung der Gleichungen von höheren Graden.*

Die Wurzeln der Gleichungen, welche den zweiten Grad übersteigen, lassen sich bekanntlich durch die Gerade und den Kreis nicht construiren. Nur in einigen speciellen Fällen ist eine geometrische Construction der Wurzeln möglich, von welchen wir folgende zwei betrachten wollen.

Die n Wurzeln der Gleichung

$$(157) \quad \ldots \quad x^n - A^n = o,$$

worin A eine complexe Abscisse ist, sind:

$$(158) \quad \ldots \quad A.e^{1.\frac{2\pi}{n}.i};\ A.e^{2.\frac{2\pi}{n}.i};\ A.e^{3.\frac{2\pi}{n}.i};\ldots;\ A.e^{n.\frac{2\pi}{n}.i}.$$

Man theile also die Peripherie des Kreises in n gleiche Theile und rücke die complexe Abscisse A successive immer um einen solchen Winkel im positiven Sinne fort, so wird man ausser der ursprünglichen Lage von A noch n — 1 andere erhalten, welche, mit jener ursprünglichen vereinigt, die, den n Wurzeln der Gleichung (157) entsprechenden complexen Abscissen geben.

Es sey

$$(158) \quad \ldots \quad x^{2n} - 2A^n x^n.\cos\alpha + A^{2n} = o$$

eine gegebene Gleichung, worin A eine gegebene complexe Abscisse, α einen gegebenen Winkel bedeutet.

Die 2n Wurzeln ergeben sich aus den Formeln

$$(159) \quad \ldots \quad e^{r.\frac{2\pi}{n}.i}.e^{+\frac{\alpha}{n}.i}A;$$

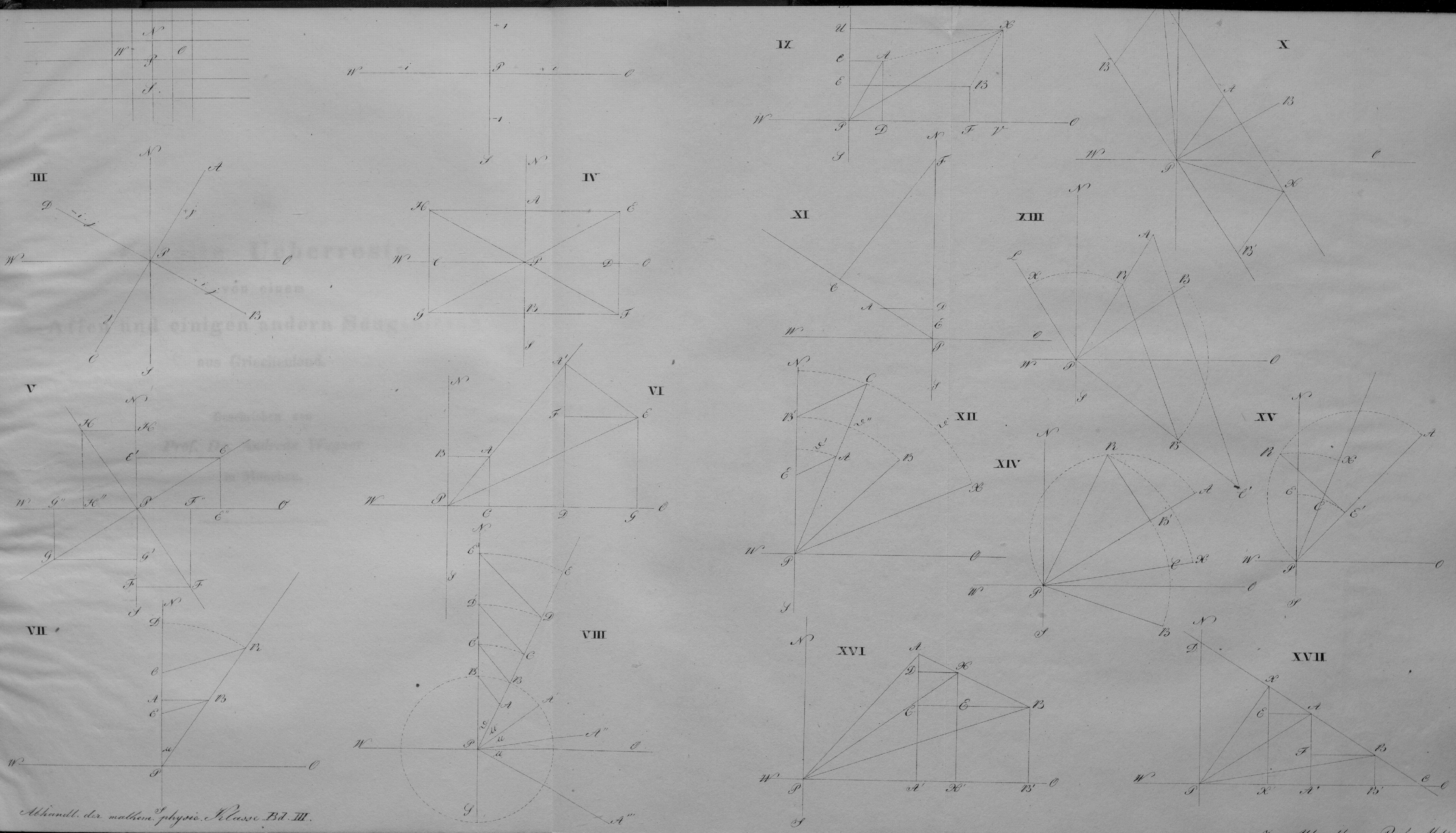
$$(160) \quad \ldots \quad e^{r.\frac{2\pi}{n}.i}.e^{-\frac{\alpha}{n}.i}A;$$

in welchen man für r alle ganze Zahlen:

$$1, 2, 3, \ldots n$$

zu setzen hat.

Man theile also den Winkel α in n gleiche Theile, und drehe die gegebene complexe Abscisse A im *positiven* und im *negativen* Sinne um diesen Winkel $\frac{\alpha}{n}$. Dadurch erhält man zwei neue Stellungen der complexen Abscisse A. Dreht man die eine wie die andere successive um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$; so erhält man 2n Lagen complexer Abscissen, welche die gesuchten Wurzeln der Gleichung (158) darstellen.


III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
XV
XVI
XVII