BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1987

MÜNCHEN 1988

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Transformationssatz für Idealbasen holomorpher Funktionen

Von **Manfred Klein** und **Karl Josef Ramspott**

in Mannheim

Vorgelegt von Otto Forster
in der Sitzung am 15. Mai 1987

In seiner Arbeit über Matrizenheftung [2] behandelt H. Cartan u. a. die Frage, wann sich zwei gleich lange Erzeugendensysteme eines Ideals holomorpher Funktionen durch eine invertierbare holomorphe Matrix ineinander transformieren lassen. In [4] wird dieses Problem aufgegriffen und in dem sehr viel allgemeineren Rahmen der kohärenten analytischen Garben auf Steinschen Räumen untersucht. Als Spezialfall bekommt man eine Transformationsaussage für Idealbasen in Ringen holomorpher Funktionen einer Veränderlichen. In der vorliegenden Note wird für diese Aussage ein elementarer Beweis gegeben. Einzige Hilfsmittel sind die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß auf nicht-kompakten Riemannschen Flächen. Der Beweis läuft darauf hinaus, ein n-tupel holomorpher Funktionen, die keine gemeinsamen Nullstellen haben, zu einer invertierbaren holomorphen $n \times n$-Matrix zu ergänzen. Man kann diese Matrix im Fall $n \geq 2$ sogar so finden, daß sie ein Produkt von Elementarmatrizen und damit einshomotop ist.

Wir danken Herrn O. Forster für den Hinweis auf den Begriff „generalized euclidean ring" in [1] und für den Vorschlag, Hilfssatz 3 mit Hilfe von holomorphen Elementarmatrizen zu beweisen. Auf diese Weise läßt sich zugleich zeigen, daß der Ring aller holomorphen Funktionen auf einer nicht-kompakten Riemannschen Fläche ein verallgemeinert euklidischer Ring ist.

I

Sei also X eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche und A der Ring aller holomorphen Funktionen auf X. Wir stellen zunächst einige bekannte Eigenschaften von A zusammen [3, 5, 6, 7]. Wichtig ist die folgende Aussage, die mit Hilfe des Satzes von Mittag-Leffler bewiesen werden kann.

(1) *Zu zwei Funktionen $f, g \in A$, die auf X keine gemeinsamen Nullstellen haben, gibt es Funktionen $\varphi, \psi \in A$ mit $\varphi f + \psi g = 1$.*

Zusatz. Man kann die Funktion φ außerdem so wählen, daß sie keine Nullstellen auf X hat und im Fall $g \neq 0$ einen holomorphen Logarithmus besitzt.

Dieser Zusatz, der für die folgenden Überlegungen entscheidend ist, wird in [6] für Gebiete in der komplexen Ebene bewiesen, wiederum unter Benutzung des Satzes von Mittag-Leffler (vgl. die Bemerkungen zu Chapter 6 in [6]). Der Beweis läßt sich auf nicht-kompakte Riemannsche Flächen übertragen.

Im Integritätsring A ist der Begriff des größten gemeinsamen Teilers erklärt. Aus dem Satz von Weierstraß über die Lösbarkeit von Nullstellenverteilungen kann man folgern:

(2) *Jede nicht-leere Teilmenge von A besitzt einen größten gemeinsamen Teiler.*

Einheiten im Ring A sind alle holomorphen Funktionen auf X, die keine Nullstellen haben. Teilerfremd sind holomorphe Funktionen auf X genau dann, wenn sie keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

Der Ring A ist kein Hauptidealring, aber jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.

(3) *Für Funktionen $d, f_1, \ldots, f_n \in A$ gilt: Das von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugte Ideal von A wird genau dann von d erzeugt, wenn d ein größter gemeinsamer Teiler von $f_1, \ldots, f_n$ ist.*

II

Die Gruppe aller invertierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen wird wie üblich mit $GL(n, \mathbf{C})$, die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1 mit $SL(n, \mathbf{C})$ und die n-reihige Einheitsmatrix mit I_n bezeichnet. I sei das abgeschlossene Einheitsintervall der reellen Achse. Eine invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrix auf X ist eine holomorphe Abbildung $X \to GL(n, \mathbf{C})$. Eine solche Matrix T heißt einshomotop auf X, falls es eine stetige Abbildung $X \times I \to GL(n, \mathbf{C})$ gibt, die für jedes feste $t \in I$ als Abbildung $X \to GL(n, \mathbf{C})$ holomorph ist und für $t = 0$ die Matrix T sowie für $t = 1$ die Matrix I_n liefert.

Beispiel. Jede Elementarmatrix auf X ist einshomotop.

Dabei wird unter einer n-reihigen Elementarmatrix auf X eine Matrix verstanden, die sich von der Einheitsmatrix I_n an höchstens einer Stelle außerhalb der Hauptdiagonalen unterscheidet. An dieser Stelle steht ein beliebiges Element von A. Ersetzt man dieses Element a durch $(1 - t)a$, $t \in I$, so ist die neue Matrix für jedes feste t holomorph. Für $t = 0$ bekommt man die gegebene Elementarmatrix und für $t = 1$ die Matrix I_n.

Hilfssatz 1. *Jede holomorphe Diagonalmatrix $X \to SL(2, \mathbf{C})$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Beweis. Für $a, b \in A$ gelte $ab = 1$. Man bestätigt durch Ausrechnen die folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Aussage ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes, den H. Bass in [1] als Whitehead Lemma bezeichnet.

Hilfssatz 2. *Jede holomorphe Matrix $X \to SL(2, \mathbf{C})$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen, falls wenigstens ein Element der Matrix eine Einheit ist.*

Beweis. Für $a, b, c, d \in A$ gelte $ad - bc = 1$; ferner sei d eine Einheit. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cd & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Auf die rechts stehende Matrix wende man Hilfssatz 1 an. Die drei anderen Fälle beweist man analog.

Hilfssatz 3. *Zu zwei teilerfremden holomorphen Funktionen f und g auf X gibt es eine einshomotope holomorphe Matrix $T: X \to SL(2, \mathbf{C})$ mit*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach dem Zusatz zu Aussage (1) gibt es holomorphe Funktionen φ und ψ auf X, so daß φ keine Nullstellen auf X hat und $\varphi f + \psi g = 1$ gilt. Die holomorphe Matrix

$$T := \begin{pmatrix} f & -\psi \\ g & \varphi \end{pmatrix}$$

hat die Determinante 1 und ist nach Hilfssatz 2 ein Produkt von Elementarmatrizen, also einshomotop. Es gilt

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

III

Aus Hilfssatz 3 gewinnt man mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage.

Satz 1. *Sei d ein größter gemeinsamer Teiler der holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ auf X und $n \geq 2$. Dann gibt es eine einshomotope holomorphe Matrix $T: X \to SL(n, \mathbf{C})$ mit*

$$T\begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Verschwinden im Fall $n = 2$ die Funktionen f_1 und f_2 identisch, so ist auch d die Nullfunktion; man wähle dann für T die Matrix I_2. Andernfalls wende man Hilfssatz 3 auf die beiden teilerfremden Funktionen f_1/d, f_2/d an. Sei $n \geq 3$ und die Behauptung für $n-1$ Funktionen richtig. Ist b ein größter gemeinsamer Teiler der Funktionen $f_2, \ldots, f_n$, so ist d ein größter gemeinsamer Teiler der Funktionen f_1, b. Sind M und N einshomotope holomorphe Matrizen mit Determinante 1, für die

$$M\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ b \end{pmatrix}$$

gilt, so hat die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

die gewünschten Eigenschaften.

Corollar. *Jeder Vektor von n teilerfremden holomorphen Funktionen auf X läßt sich im Fall $n \geq 2$ zu einer einshomotopen holomorphen Matrix mit Determinante 1 ergänzen.*

Aus Satz 1 läßt sich sofort der angekündigte Transformationssatz für Idealbasen herleiten.

Satz 2. *Zwei n-tupel $f_1, \ldots, f_n$ und $g_1, \ldots, g_n$ holomorpher Funktionen auf X erzeugen im Fall $n \geq 2$ genau dann dasselbe Ideal von A, wenn es eine einshomotope holomorphe Matrix $T: X \to SL(n, \mathbf{C})$ mit*

$$T\begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{pmatrix}$$

gibt.

Beweis. Ein größter gemeinsamer Teiler der Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ ist nach (3) auch ein größter gemeinsamer Teiler von $g_1, \ldots, g_n$. Die Existenz von T folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 1. Die andere Richtung ist trivial.

Im Fall $n \geq 2$ sind also insbesondere zwei n-gliedrige Erzeugendensysteme desselben Ideals von A über lauter Idealbasen der Länge n dieses Ideals ineinenader deformierbar.

Im Fall $n = 1$ bleiben die beiden Sätze richtig, wenn man von der holomorphen Matrix T nur verlangt, daß sie invertierbar, also eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen ist. Eine solche Funktion ist im allgemeinen nicht einshomotop auf X. Sie ist es aber sicher dann, wenn X einfach zusammenhängend ist. Denn in diesem Fall kann man eine holomorphe Funktion f auf X, die auf X keine Nullstellen hat, in der Form $f = \exp \circ h$ mit einer holomorphen Funktion h schreiben. Die Abbildung

$$X \times I \to \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad (x,t) \mapsto e^{(1-t)\,h(x)},$$

ist für jedes $t \in I$ holomorph. Sie liefert für $t = 0$ die Funktion f und für $t = 1$ die konstante Funktion 1.

Aus Satz 2 folgt noch eine Aussage über die Transformierbarkeit verschieden langer Erzeugendensysteme eines Ideals von A.

Corollar. *Seien $1 \leq n < r$ natürliche Zahlen und $f_1, \ldots, f_n \in A$ sowie $g_1, \ldots, g_r \in A$ zwei Erzeugendensysteme desselben Ideals von A. Dann gibt es eine holomorphe $n \times r$-Matrix S und eine holomorphe $r \times n$-Matrix T auf X, so daß gilt:*

(a) $$T\begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_r \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}.$$

(b) *S und T haben an jeder Stelle von X den Rang n.*

(c) *S und T lassen sich durch Hinzunahme von $r - n$ Zeilen* bzw. *Spalten zu einshomotopen holomorphen $r \times r$-Matrizen* mit *Determinante* 1 *ergänzen.*

Zum Beweis ergänze man $f_1, \ldots, f_n$ durch Hinzunahme von $r - n$ Nullen zu einem r-gliedrigen Erzeugendensystem des Ideals. Dann gibt es eine einshomotope holomorphe Matrix $M : X \to SL(r, \mathbf{C})$ mit

$$M \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_r \end{pmatrix},$$

wobei $f_i := 0$ für $n < i \leq r$.

T und S entstehen aus M bzw. M^{-1} durch Weglassen der letzten $r - n$ Spalten bzw. Zeilen.

IV

Bemerkungen.

Die einshomotopen Matrizen in Hilfssatz 3 und Satz 1 können als Produkte von Elementarmatrizen konstruiert werden, wie der Beweis zeigt. Daraus läßt sich durch wiederholte Anwendung von Satz 1 folgern, daß jede invertierbare holomorphe $n \times n$-Matrix M auf X ein Produkt von Elementarmatrizen und der Matrix

$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \det M \end{pmatrix}$ ist. Insbesondere wird die Gruppe der holomorphen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 von den Elementarmatrizen erzeugt. Diese letzte Eigenschaft bedeutet für den Ring aller auf X holomorphen Funktionen, daß er ein verallgemeinert euklidischer Ring im Sinn von H. Bass [1] ist.

Die Tatsache, daß jede invertierbare holomorphe Matrix auf X ein Produkt von Elementarmatrizen und einer Diagonalmatrix ist, folgt auch aus dem Elementarteilersatz für holomorphe Matrizen von Wedderburn ([8], [6], Chapter 6).

Daß die Matrix T im Beweis von Hilfssatz 3 einshomotop ist, läßt sich ohne Zerlegung in Elementarmatrizen sehen. Ersetzt man nämlich f durch $t\varphi^{-1} + (1 - t)f$ und g durch $(1 - t)g$, so hat die neue Matrix ebenfalls die Determinante 1. Für $t = 0$ bekommt man T und für $t = 1$ die Matrix

$\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & -\psi \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$, die zu der Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$

homotop ist. Diese läßt sich mittels der Matrix

$\begin{pmatrix} \varphi^{-1} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \varphi \cos t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq \pi/2$, in die konstante Matrix

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ deformieren, die ihrerseits zu I_2 homotop ist.

Literatur

[1] H. BASS: Algebraic K-Theory. New York-Amsterdam: Benjamin 1968.
[2] H. CARTAN: Sur les matrices holomorphes de *n* variables complexes. J. Math, Pures Appl. 19, 1–26 (1940).
[3] O. FORSTER: Riemannsche Flächen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977.
[4] O. FORSTER und K. J. RAMSPOTT: Homotopieklassen von Idealbasen in Steinschen Algebren. Inventiones Math. 5, 255–276 (1968).
[5] O. HELMER: Divisibility properties of integral functions. Duke Math. J. 6, 345–356 (1940).
[6] R. NARASIMHAN: Complex analysis in one variable. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1985.
[7] O. F. G. SCHILLING: Ideal theory on open Riemann surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 52, 945–963 (1946).
[8] J. H. M. WEDDERBURN: On matrices whose coefficients are functions of a single variable. Trans. Amer. Math. Soc. 16, 328–332 (1915).