

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1986

MÜNCHEN 1987

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen Satz von Möbius-Hjelmslev

von Georg Nöbeling

Vorgetragen in der Sitzung vom 12. Dezember 1986

Auf A. F. Möbius geht zurück der Satz: Ist eine glatte, geschlossene Kurve K ohne mehrfache Punkte in der projektiven, reellen Ebene P^2 lokal konvex, so ist sie auch global konvex.¹ J. Hjelmslev hat diesen Satz verallgemeinert: Ist eine glatte, geschlossene Kurve K ohne k -Sekanten im projektiven, reellen Raum $P^k (k \geq 2)$ lokal von der Ordnung k , so ist sie auch global von der Ordnung k .² M. a. W.: Ist K von einer Ordnung $> k$, so hat K mindestens einen Scheitel, d. h. einen Punkt von einer Ordnung $> k$. Wir geben hierfür einen Beweis und zeigen überdies, daß K im Fall $\text{ord}(K) > k$ noch mindestens einen zweiten Scheitel hat.³

A. Vorbereitungen⁴

Unser Operationsbereich ist der k -dimensionale, reelle, projektive Raum $P^k (k \geq 2)$.

Für jede Punktmenge $M \subseteq P^k$ bezeichne $|M|$ die Anzahl der Punkte von M : $0 \leq |M| \leq \infty$ und $L(M)$ die lineare Hülle von M . Die (lineare) Ordnung von M , in Zeichen $\text{ord}(M)$, ist die kleinste ganze Zahl $m \leq \infty$ mit $|M \cap L| \leq m$ für jede Hyperebene L . Ist x ein Punkt von M , so

¹ A. F. Möbius, „Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung“, Abh. Akad. Sächs. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1 (1852), 1–82. Ges. Werke Bd. 2, 89–176 (sp. 108). Erster Beweis bei A. Kneser, „Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven“, Math. Ann. 41 (1893), 349–376.

² J. Hjelmslev, „Ein Satz über monotone Raumkurven im $R_n \dots$ “, Acta Math. 87 (1952), 59–82. (Aus dem Nachlaß herausgegeben.)

³ Wir haben Schwierigkeiten, den Beweisüberlegungen I. c.² im einzelnen zu folgen, insbesondere was die verwendeten Tangentialhalbebenen betrifft. Wir führen unseren Beweis nach dem Konzept I. c.², vermeiden jedoch die Verwendung der Halbebenen.

⁴ Vgl. O. Haupt u. H. Künneth, „Geometrische Ordnungen“, Springer-Verlag 1967, Teil II.

ist die *Ordnung* von M in x , in Zeichen $\text{ord}(x; M)$, das Minimum von $\text{ord}(U \cap M)$ für alle Umgebungen U von x . Es ist $\text{ord}(x; M) \leq \text{ord}(M) \leq \infty$ für alle Punkte $x \in M$.

Unter einer Kurve bzw. einem Bogen verstehen wir das topologische Bild eines Kreises bzw. einer abgeschlossenen Strecke. Ist $B = B[p, q]$ ein Bogen mit den Randpunkten p und q , so ist $\underline{B} = B(p, q)$ der größte offene Teilbogen von B .

Nun sei K eine Kurve im P^k . Dann ist $\text{ord}(x; K) \geq k$ für jeden Punkt $x \in K$. Ein Punkt x von K heißt ein *Scheitel* von K , wenn $\text{ord}(x; K) > k$ ist.

Eine h -Ebene L^h ($h = 1, \dots, k-1$), d. h. ein h -dimensionaler Teilraum von P^k , heißt eine h -*Paratingente* (oder eine h -Schmiegeebene) von K im Punkt $x \in K$, in Zeichen $S^h(x)$, wenn L^h der Limes einer Folge (L_n^h) , $n = 1, 2, \dots$, von h -Ebenen $L_n^h = L(x_{0,n}, \dots, x_{h,n})$, aufgespannt durch Punkte $x_{0,n}, \dots, x_{h,n} \in K$ mit $x_{0,n}, \dots, x_{h,n} \rightarrow x$ ist. Wir setzen noch $S^{-1}(x) := \emptyset$ und $S^0(x) := \{x\}$. Die Kurve heiße *glatt*, wenn in jedem Punkt $x \in K$ für jedes $h = 1, \dots, k-1$ genau eine Paratingente $S^h(x)$ existiert. Es gilt dann $S^0(x) \subset S^1(x) \subset \dots \subset S^{k-1}(x)$.

Eine $(k-2)$ -Ebene L^{k-2} heißt eine k -*Sekante* von K , wenn es Punkte $x_1, \dots, x_s \in K$ (verschieden, wenn $s > 1$) mit Paratingenten $S^{h_1}(x_1), \dots, S^{h_s}(x_s)$ gibt derart, daß

$$h_1 + \dots + h_s + s \geq k \text{ und } S^{h_1}(x_1), \dots, S^{h_s}(x_s) \subset L^{k-2}.$$

Die Kurve K sei glatt und habe keine k -Sekanten. Es sei x_0 ein Punkt von K ; P^l ein Teilraum von P^k ($1 < l < k$), fremd zu $Z := S^{k-l-1}(x_0)$; π die Projektion aus Z in den P^l ; $K' := \pi(K)$ und $x' := \pi(x)$. Dann gilt:

- (a) π ist auf $P^k \setminus Z$ stetig; $\pi|K$ eine Injektion, also K' eine Kurve;
- (b) K' ist glatt und hat keine l -Sekanten;
- (c) $\pi(S^h(x)) = S^h(x')$, wenn $Z \cap S^h(x) = \emptyset$;
 $P^l \cap S^h(x) = S^{h+l-k}(x')$, wenn $Z \subseteq S^h(x)$;
- (d) ist $\text{ord}(K) = k$, so ist $\text{ord}(K') = l$;
- (e) ist $l = k-1$ und $\text{ord}(x_0; K) = k$, so ist $\text{ord}(x'_0; K') = k-1$;
- (f) ist $l = k-1$ und $x \neq x_0 \notin S^{k-1}(x)$, so ist $\text{ord}(x'; K') = k-1$.

Beweis. (a) – (c) trivial. – (d) Angenommen: $\text{ord}(K') > l$. Dann existiert eine $(l-1)$ -Ebene $L^{l-1} \subset P^l$, aufgespannt durch Punkte γ'_i ,

$\dots, \gamma'_{l+1} \in K'$. Weil K' keine l -Sekanten hat, kann L^{l-1} so gewählt werden, daß $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{l+1}$ Schnittpunkte und $\neq x'_0$ sind. Die Urbilder $\gamma_1, \dots, \gamma_{l+1}$ in K sind dann Schnittpunkte von K und L ($Z \cup L^{l-1}$) und sind $\neq x_0$. Für $k-l$ Punkte $x_1, \dots, x_{k-l}$ von K , hinreichend nahe bei x_0 , enthält die Hyperebene L durch $x_1, \dots, x_{k-l}, \gamma_1, \dots, \gamma_l$ noch einen $(k+1)$ -ten Punkt, nahe bei γ_{l+1} . Widerspruch zu $\text{ord}(K) = k$. – (e) Analog zu (d). – (f) Angenommen: $\text{ord}(x'; K') > k-1$. Dann existiert eine $(k-2)$ -Ebene $L^{k-2} \subset P^{k-1}$, aufgespannt durch $x'_1, \dots, x'_k \in K'$, beliebig nahe bei x' . Die Urbilder $x_1, \dots, x_k$ in K , zusammen mit x_0 , spannen eine $(k-1)$ -Ebene L^{k-1} auf. Für $x_1, \dots, x_k \rightarrow x$ gilt dann $L^{k-1} \rightarrow S^{k-1}(x)$. Es folgt $x_0 \in S^{k-1}(x)$. Widerspruch zur Voraussetzung.

Analog für Bogen.

B. Hjelmslev-Bogen

Im P^k liege vor ein glatter Bogen $B = B[p, q]$ ohne k -Sekanten. Wir nennen B einen *Hjelmslev-Bogen*, wenn:

- (1_q) $\text{ord}(q; B) = k$;
- (2_q) $S^{k-1}(q) \cap B = \{p, q\}$;
- (3_q) es existiert eine Hyperebene $L \supset S^{k-2}(q)$ mit $L \cap B = \{q\}$.

Es folgt:

- (4) B ist beschränkt.

Denn durch eine beliebig kleine Drehung von L um eine den Punkt q nicht enthaltende $(k-2)$ -Ebene $\subset L$ kann L übergeführt werden in eine Hyperebene L_u mit $L_u \cap B = \emptyset$.

- (5) $\text{ord}(B) > k$.

Denn ist q' ein zu q hinreichend benachbarter Punkt von B , so hat die Hyperebene $L' := L(\{q'\} \cup S^{k-2}(q))$ zufolge (4) mit B noch mindestens einen Punkt $p' \neq q'$ gemein. Sind nun $q_1, \dots, q_{k-1}$ Punkte von B , hinreichend benachbart zu q , so hat die Hyperebene $L(\{q_1\} \cup \dots \cup \{q_{k-1}\} \cup \{q'\})$ mit B noch einen $(k+1)$ -ten (zu p' benachbarten) Punkt gemein.

Hilfssatz 1. In jedem Hjelmslev-Bogen $B = B[p, q]$ gilt für jeden Punkt $\gamma_0 \in \underline{B}$, welcher nahe genug bei q liegt: Zu jedem Punkt $\gamma \in B(\gamma_0, q)$ existiert ein Punkt $x \in B(p, \gamma)$ derart, daß $B[x, \gamma]$ ein Hjelmslev-Bogen ist.

Beweis. Für $k = 2$ ist die Behauptung trivial. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß sie richtig ist für $k-1$ statt k .

(1_γ). Aus (1_q) folgt $\text{ord}(\gamma; B) = k$ für jeden zu q hinreichend benachbarten Punkt $\gamma \in \underline{B}$ und sodann $\text{ord}(\gamma; B[x, \gamma]) = k$ für jeden Punkt $x \in B(p, \gamma)$.

(2_γ). 1. Schritt. Wir projizieren aus q in einen $P^{k-1} \subset P^k$, welcher q nicht enthält. Zufolge A, (a)–(d) mit B statt K ist das Bild B' von B ein Hjelmslev-Bogen im P^{k-1} . Also können wir die Induktionsvoraussetzung auf B' anwenden. Demzufolge gilt für jeden Punkt $\gamma'_0 \in \underline{B}'$, welcher nahe genug bei q' liegt: erstens existiert zu jedem Punkt $\gamma' \in B'(\gamma'_0, q')$ ein Punkt $z' \in B'(p', \gamma')$ derart, daß $S^{k-2}(\gamma') \cap B'[z', \gamma'] = \{z', \gamma'\}$ ist; zweitens existiert eine $(k-2)$ -Ebene $L' \supset S^{k-3}(\gamma')$ im P^{k-1} mit $L' \cap B' = \{\gamma'\}$. Dies liefert unter Verwendung von A, (b) mit B statt K : Erstens hat jeder Punkt $\gamma_0 \in \underline{B}$, hinreichend nahe bei q , die Eigenschaft, daß zu jedem Punkt $\gamma \in B(\gamma_0, q)$ ein Punkt $z \in B(p, \gamma)$ derart existiert, daß

$$(6) \quad L(\{q\} \cup S^{k-2}(\gamma)) \cap B[z, \gamma] = \{z, \gamma\};$$

zweitens gilt:

$$(7) \quad \text{es existiert eine Hyperebene } L \supset S^{k-3}(\gamma) \text{ mit } L \cap B[z, \gamma] = \{\gamma\}.$$

2. Schritt. Wir wählen einen Punkt $\gamma \in B(\gamma_0, q)$ und projizieren aus $S^{k-3}(\gamma)$ in einen dazu fremden $P^2 \in P^k$. Dann gilt, wenn γ_0 nahe genug bei q liegt:

- (8) das Bild B'' von B in P^2 ist ein glatter Bogen (zufolge A, (a)–(b) mit B statt K);
- (9) $B''[\gamma'', q'']$ ist konvex (wegen (1_q) zufolge A, (d) mit B statt K);
- (10) für die Gerade G durch z'' und γ'' ist $G \cap B''[z'', \gamma''] = \{z'', \gamma''\}$ (denn es ist $G = L(\{q\} \cup S^{k-2}(\gamma)) \cap P^2$ und es gilt (6));
- (11) es existiert eine Gerade H durch γ'' mit $H \cap B''[z'', \gamma''] = \{\gamma''\}$ (dies leistet $H := L \cap P^2$, wobei L wie in (7) gewählt wird).

Aus (11) folgt, daß $B'' [z'', y'']$ beschränkt ist; denn wegen (9) können wir H durch eine beliebig kleine Drehung um einen Punkt $\neq y''$ von H in eine zu $B'' [z'', y'']$ fremde Gerade überführen. Sodann folgt aus (9) und (10), daß die Tangente $S^1(y'')$ an B'' im Punkt y'' den Bogen $B''(z'', y_0'')$ trifft. Wegen $S^1(y'') = S^{k-1}(y) \cap P^2$ trifft daher $S^{k-1}(y)$ den Bogen $B(z, y_0)$. Schließlich sei x der dem Punkt y auf $B(z, y_0)$ nächstgelegene Punkt von $S^{k-1}(y) \cap B(z, y)$. Dann gilt $S^{k-1}(y) \cap B[x, y] = \{x, y\}$.

(3_y). Für die Hyperebene $L := L(S^{k-3}(y) \cup H)$ gilt $L \supset S^{k-2}(y)$ und $L \cap B[x, y] = \{y\}$.

Hilfssatz 2. Es sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Hjelmslev-Bogen $B_n = B[p_n, q_n]$ im glatten Bogen B ohne k -Sekanten. Der Durchschnitt $\cap B_n$ sei mehrpunktig, also ein Bogen $B_0^* = B[p_0^*, q_0]$. Es sei $\text{ord}(q_0; B) = k$. Dann enthält B_0^* einen Hjelmslev-Bogen $B_0 = B[p_0, q_0]$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt (1_{q_0}) . – Wegen $p_n \in S^{k-1}(q_n)$ für alle n und wegen der Stetigkeit von S^{k-1} gilt $p_0^* \in S^{k-1}(q_0)$. Es sei p_0 der dem Punkt p_0^* auf B am nächsten gelegene Punkt von $S^{k-1}(q_0) \cap B_0^*$. Dann gilt (2_{q_0}) . – Nach (3_{q_1}) ist B_1 enthalten in einem affinen Raum $R^k \subset P^k$. Wegen (3_{q_n}) existiert im P^k für jedes n eine Hyperebene L_n mit $S^{k-2}(q_n) \subset L_n \subset S^{k-1}(q_n)$ derart, daß für einen der vier räumlichen Winkel, in welche $R^k \setminus (S^{k-1}(q_n) \cup L_n)$ zerfällt, er heiße W_n , folgendes gilt: es ist $B_n \subset \bar{W}_n$, $(B_n \setminus \{q_n\}) \cap L_n \neq \emptyset$; alle Punkte $\neq q_n$ von $B_n \cap L_n$ sind Stützpunkte. Einer der Punkte von $(B_n \setminus \{q_n\}) \cap L_n$ heiße s_n . Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge der n übergehen, können wir annehmen, daß die Folge der L_n gegen eine Hyperebene L_0 und die Folge der s_n gegen einen Punkt s_0 konvergiert. Dann gilt zunächst $S^{k-2}(q_0) \subset L_0$ und $s_0 \in B_0 \cap L_0$. Weil $\text{ord}(q_0; B) = k$ und jeder Punkt s_n Stützpunkt ist, gilt $s_0 \neq q_0$. Weil B keine k -Sekanten hat, ist weiter $s_0 \notin S^{k-2}(q_0)$. Wegen (2_{q_0}) ist endlich $s_0 \notin S^{k-1}(q_0)$. Es folgt $L_0 \neq S^{k-1}(q_0)$. Also gilt für einen der vier räumlichen Winkel, in welche $R^k \setminus (S^{k-1}(q_0) \cup L_0)$ zerfällt, er heiße W_0 und es ist $\bar{W}_0 = \lim W_n$, folgendes: es ist $B_0 \subset \bar{W}_0$; $(B_0 \setminus \{q_0\}) \cap L_0 \neq \emptyset$; alle Punkte $\neq q_0$ von $B_0 \cap L_0$ sind Stützpunkte. Folglich können wir L_0 durch eine beliebig kleine Drehung um $S^{k-2}(q_0)$ überführen in eine Hyperebene $L \supset S^{k-2}(q_0)$ mit $L \cap B_0 = \{q_0\}$. Es gilt also auch (3_{q_0}) .

Hilfssatz 3. Es sei K eine glatte Kurve im P^k ohne k -Sekanten. Es sei q ein Punkt von K mit $\text{ord}(q; K) = k$. Die Hyperebene $S^{k-1}(q)$ habe mit K noch mindestens einen Punkt $\neq q$ gemein. Dann enthält K einen Hjeltslev-Bogen $B[p, q]$.

Beweis. Es seien p_1 und p_2 die beiden dem Punkt q am nächsten gelegenen Punkte $\neq q$ von K , die auf $S^{k-1}(q)$ liegen (es kann $p_1 = p_2$ sein). Von den beiden Teilbogen von K mit $\underline{B}_1 \cap \underline{B}_2 = \emptyset$, dem gemeinsamen Endpunkt q und den Anfangspunkten p_1 und p_2 behaupten wir, daß (mindestens) einer von ihnen ein Hjeltslev-Bogen ist. – Die Bedingungen (1_q) und (2_q) sind für beide Bogen B_1 und B_2 erfüllt. Es ist also nur zu zeigen, daß (3_q) für mindestens einen von ihnen gilt. Und hierzu genügt es zu zeigen: Es gibt eine Hyperebene $L \supset S^{k-2}(q)$ derart, daß $B_1 \cap L = \{q\}$ oder $B_2 \cap L = \{q\}$ ist. Die Projektion aus $S^{k-3}(q)$ in einen dazu fremden $P^2 \subset P^k$ führt diese Aufgabe auf den Fall $k = 2$ zurück. Es sei also $k = 2$. – Wir machen die Annahme, daß jede Gerade $\neq S^1(q)$ durch q sowohl mit B_1 als auch mit B_2 einen Punkt $\neq q$ gemein hat. Um zu einem Widerspruch zu kommen, führen wir in der affinen Ebene $R^2 := P^2 \setminus S^1(q)$ mit der „uneigentlichen“ Geraden $S^1(q)$ affine Koordinaten x, y ein derart, daß q der „uneigentliche“ Punkt der x -Achse ist. Zuzufolge der Annahme hat einerseits jede Parallele zur y -Achse sowohl mit $\underline{B}_1$ als auch mit $\underline{B}_2$ einen nichtleeren Durchschnitt. Da aber q nach A, (d) mit B statt K ein Konvexpunkt von $B_1 \cup B_2$ ist, so gilt (nach eventueller Vertauschung der Nummern 1 und 2) andererseits zweierlei: Für jedes hinreichend große $\epsilon > 0$ hat die Gerade $x = \epsilon$ mit $\underline{B}_1$ genau einen Punkt (ϵ, y_1) gemein und für jeden Punkt $(\epsilon, y_2) \in \underline{B}_2$ ist $y_1 < y_2$; für jedes $\epsilon < 0$ mit hinreichend großem $|\epsilon|$ hat die Gerade $x = \epsilon$ mit $\underline{B}_2$ genau einen Punkt (ϵ, y_2) gemein und für jeden Punkt $(\epsilon, y_1) \in \underline{B}_1$ ist $y_2 < y_1$. Hieraus folgt $\underline{B}_1 \cap \underline{B}_2 \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Wahl von B_1 und B_2 .

C. Scheitelsätze

Satz 1. *Ist B ein Hjelmslev-Bogen im P^k , so existiert in $\underline{B}$ ein Scheitel von B .*

Beweis. Angenommen, es wäre $\text{ord}(x; B) = k$ für jeden Punkt $x \in \underline{B}$. Dann folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 die Existenz einer Folge (B_n) , $n = 1, 2, \dots$, von Hjelmslev-Bogen $B_n = B[p_n, q_n]$ mit $B_{n+1} \subset B_n$ für jedes n , welche sich auf einen Punkt $\xi \in \underline{B}$ zusammenzieht. Nach (5) folgt $\text{ord}(\xi; B) > k$.

Satz 2. *Es sei K eine glatte Kurve ohne k -Sekanten im P^k . Ist $\text{ord}(K) > k$, so hat K mindestens einen Scheitel (J. Hjelmslev).*

Beweis. Ist $\text{ord}(K) = \infty$, so ist die Behauptung trivial (auch dann, wenn K nicht glatt ist und (oder) k -Sekanten hat). Sei also $\text{ord}(K) < \infty$. Wir beweisen durch Induktion. $k = 2$. Zunächst zeigen wir die Existenz eines Punktes q in K derart, daß die Paratingente $S^1(q)$ mit K noch mindestens einen Punkt $\neq q$ gemein hat. Wegen $\text{ord}(K) > 2$ existiert eine Gerade, welche mit K mindestens drei verschiedene Punkte x_1, x_2, x_3 gemein hat. Ist x_1 kein Punkt q , so sei B der den Punkt x_1 nicht enthaltende Bogen $\subset K$ mit den Randpunkten x_2 und x_3 . Weiter sei π die Projektion aus x_1 in eine x_1 nicht enthaltende Gerade $P^1 \subset P^2$. Dann ist erstens $\pi(x_2) = \pi(x_3)$. Zweitens ist $\pi(x_1) \notin \pi(B)$; weil $\pi(B)$ mehrpunktig ist wegen $\text{ord}(B) < \infty$, so ist also $\pi(B) =: B'$ ein Bogen $\subset P^1$. Ist nun q' ein Randpunkt $\neq \pi(x_2) = \pi(x_3)$ von B' , so hat der Punkt $q \in \underline{B}$ mit $\pi(q) = q'$ die verlangte Eigenschaft. Nach Hilfssatz 3 enthält nun K einen Hjelmslev-Bogen und dieser nach Satz 1 einen Scheitel. — $k > 2$. Wegen $\text{ord}(K) > k$ existiert eine Hyperebene, welche mit K mindestens $k + 1$ verschiedene Punkte $p, \dots$ gemein hat. Wir projizieren K aus p in einen p nicht enthaltenen $P^{k-1} \subset P^k$. Das Bild K' von K ist nach A, (a)–(d) eine glatte Kurve ohne $(k-1)$ -Sekanten und mit $\text{ord}(K') > k-1$. Zuzufolge der Induktionsvoraussetzung existiert in K' ein Punkt q' mit $\text{ord}(q'; K') > k-1$. Nach A, (e) ist $\text{ord}(p'; K') = k-1$, also $p' \neq q'$. Für das Urbild q von q' in K gilt dann $p \in S^{k-1}(q)$ nach A, (f). Nach Hilfssatz 3 folgt weiter, daß K einen Hjelmslev-Bogen enthält, und sodann nach Satz 1, daß es in K einen Scheitel gibt.

Korollar. *K hat mindestens zwei Scheitel.*

Beweis durch Induktion. $k = 2$. Es sei x_0 ein fester Punkt von K ; kein Punkt $x \neq x_0$ von K sei ein Scheitel. Nach Satz 2 genügt es zu zeigen, daß dann auch x_0 kein Scheitel ist. Für jede Gerade $G \subset P^2$ durch x_0 gilt: 1) kein Punkt $x \neq x_0$ von $G \cap K$ ist ein Häufungspunkt von $G \cap K$; denn jeder solche Häufungspunkt wäre ein Scheitel von K ; 2) kein Punkt $x \neq x_0$ von G ist Stützpunkt von G und K ; denn jeder solche Stützpunkt würde nach Hilfssatz 3 und Satz 1 einen Scheitel $\neq x_0$ liefern. Für jede Gerade G durch x_0 ist also 3) jeder Punkt $\neq x_0$ von $G \cap K$ ein Schnittpunkt von G und K . Es sei nun π die Projektion von K aus x_0 in eine x_0 nicht enthaltende Gerade $H \subset P^2$. Wegen 3) ist π in jedem Punkt $\neq x_0$ von K lokal eineindeutig. Auf $H \setminus (\pi(x_0))$ ist daher die (endliche) Anzahl der π -Urbilder konstant. Folglich ist π auch im Punkt x_0 lokal eineindeutig. Somit ist 4) x_0 ein Stützpunkt von $S^1(x_0)$ und K . Nun ist jeder hinreichend kleine offene Teilbogen von K mit x_0 als Anfangs- oder Endpunkt x_0 konvex, weil er keinen Scheitel enthält. Hieraus und aus 4) folgt, daß x_0 kein Scheitel ist, was zu zeigen war. — $k > 2$. Es existiert ein Hjelmslev-Bogen $B = B[p, q] \subset K$ mit einem Scheitel $r \in B(p, q)$ (vgl. den Beweis von Satz 2). Wir projizieren aus r in einen r nicht enthaltenden $P^{k-1} \subset P^k$. Angenommen, es wäre bereits bewiesen, daß für das Bild K' von K gilt $\text{ord}(K') > k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung hat K' einen Scheitel $t' \neq r'$. Für das Urbild t in K von t' gilt $t \neq r \in S^{k-1}(t)$. Ist t ein Scheitel, so sind wir fertig. Ist aber $\text{ord}(t; K) = k$, so enthält K nach Hilfssatz 3 einen Hjelmslev-Bogen $B[s, t]$ mit $r \notin B(s, t)$. Nach Satz 1 enthält $B(s, t)$ einen Scheitel von K .

Es ist nun noch zu zeigen, daß $\text{ord}(K') > k-1$ ist. Wir setzen $L(\{r\} \cup S^{k-2}(q)) =: L$ und untersuchen folgende drei Fälle.

1. Fall: $|L \cap K| = \infty$. Für $L' := L \cap P^{k-1}$ ist dann $|L' \cap K'| = \infty$ und folglich $\text{ord}(K') = \infty$.

2. Fall: r ist ein Schnittpunkt von $B(p, q)$ und L . Weil $r \in B(p, q)$, wegen (2_q) also $r \notin S^{k-1}(q)$ ist, existiert wegen (3_q) noch ein weiterer Schnittpunkt s von $B(p, q)$ und L . Ist nun $\bar{q}$ ein zu q hinreichend benachbarter Punkt von K , so schneidet die Hyperebene $L(\{r\} \cup \{\bar{q}\} \cup S^{k-3}(q))$ den Bogen $B(p, q)$ in einem zu s beliebig benachbarten Punkt $\bar{s}$. Der Durchschnitt dieser Hyperebene mit P^{k-1} ist wegen

A, (b) die $(k-2)$ -Ebene $L(\{\bar{q}'\} \cup S^{k-3}(q'))$ und schneidet K' im Punkt $\bar{s}'$. Sind schließlich $q'_1, \dots, q'_{k-2}$ Punkte von K' , hinreichend benachbart zu q' , so schneidet die $(k-2)$ -Ebene durch $\bar{q}'$ und die $k-2$ Punkte die Kurve K' in einem zu $\bar{s}'$ beliebig benachbarten Punkt. Sie hat also mit K' mindestens k Punkte gemein.

3. Fall: r ist ein Stützpunkt von $B(p, q)$ und L . Nun ist $S^1(r) \cap S^{k-3}(q) = \emptyset$, weil K keine k -Sekanten hat, also $S^1(r) \notin L(\{r\} \cup S^{k-3}(q))$. Ist daher $\bar{q} \neq q$ ein Punkt von B , hinreichend benachbart zu q , so schneidet $L(\{r\} \cup \{\bar{q}\} \cup S^{k-3}(q))$ den Bogen $B(p, q)$ in einem zu s beliebig benachbarten Punkt $\bar{s}$ (dies zeigt die Projektion aus $S^{k-3}(q)$ in einen dazu fremden P^2). Nun weiter wie im 2. Fall.

Beispiele von Kurven K im P^k von der Ordnung $k+2$, glatt, ohne k -Sekanten, mit genau 2 Scheiteln.

$k=2$. K eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve in der euklidischen Ebene, von der Ordnung 4, mit 2 Wendepunkten.

$k=3$. Der P^3 sei dargestellt als der projektive Abschluß des euklidischen $x_1x_2x_3$ -Raumes R^3 . Die Punkte $y = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ von K seien definiert durch:

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad x_3 = tg^3(t/2) - a tg(t/2) \\ (-\pi < t < \pi; 1 < a \text{ fest} < 6).$$

Genau ein Punkt y_0 von K in der uneigentlichen Ebene $P^3 \setminus R^3$. (In allen Punkten $y \in R^3$ von K ist K glatt, weil y' und y'' linear unabhängig sind. Die Funktionaldeterminante verschwindet in genau zwei Punkten $y_1, y_2 \in R^3$ von K ; also ist K in allen anderen Punkten $y \in R^3$ von der Ordnung 3. Jede hinreichend kleine, vordere oder hintere Umgebung in K von y_0 hat die Ordnung 3, weil es andernfalls darin Scheitel $\neq y_0$ gäbe nach dem Kontraktionssatz l. c. ⁴⁾, S. 47; hieraus folgt nach l. c. ⁴⁾, S. 257, 3. Satz, daß K im Punkt y_0 die Ordnung 3 hat und nach l. c. ⁴⁾, S. 262, daß K im Punkt y_0 glatt ist. Folglich sind y_1 und y_2 die einzigen Scheitel von K .)