

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1985

MÜNCHEN 1986

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Physikalisches zum Kontinuumsbegriff

Von Fritz Bopp

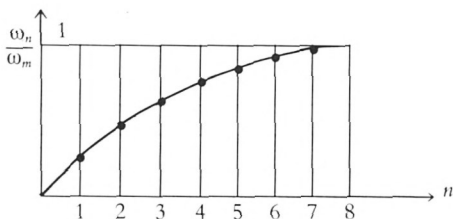
Sitzung vom 25. Oktober 1985

Einige physikalische Beispiele werden betrachtet, die mit dem gegenwärtigen Kontinuumsbegriff der Mathematik in Konflikt geraten. Anschließend versuchen wir einen Kontinuumsbegriff zu formulieren, der mit den Beispielen verträglich ist.

1. Beispiel aus der klassischen Physik

Physiker pflegen Wellen durch Schwingungsformen von Oszillatorketten zu veranschaulichen. Mathematiker sagen, das sei falsch, weil es keinen Grenzübergang von der Oszillatorkette zur schwingenden Saite gebe. Wir wollen zeigen, warum die Kritik berechtigt und warum die negative Aussage nur die halbe Wahrheit ist.

Längs einer Kreislinie gebe es Ω äquidistante Oszillatoren, die transversal zum Kreise schwingen, und die mit ihren Nachbarn elastisch verkoppelt sind. Die Bewegungsgleichungen kann man leicht formulieren und integrieren. Das Frequenzspektrum der Eigenschwingungen kann man bei passender Skalenwahl aus folgender für alle Ω gültigen Figur entnehmen.



Die Kurve ist ein Viertelsinusbogen. Die Ordinaten stellen die Frequenzen ω_n relativ zur Maximalfrequenz ω_m dar. Die Abszisse liefert die Nummern der Eigenfrequenzen.

Teilt man die Abszisse bei Ω Oszillatoren (in der Figur ist $\Omega = 8$) in Ω gleiche Teile, so liefern die Ordinaten über den Teilpunkten die Frequenzen. Das Diagramm liefert also auf einen Blick die Frequenzen für beliebige Ω .

Das vergleichen wir mit dem Frequenzspektrum von Wellen längs des Kreises. Es ergeben sich mit dem gleichen n wie oben äquidistante Frequenzen $\omega_n = n \cdot \omega_0$. Sie liefern also als Funktion von n eine gerade Linie. Klarerweise gibt es keinen Grenzübergang vom Viertelbogen zur Geraden. Das ist mit der Kritik der Mathematiker im Einklang.

Doch verhüllt diese Aussage einen wesentlichen Punkt. Sei N eine natürliche Zahl, für die $N \leq \sqrt{\Omega} < N + 1$ ist, so gilt für $\Omega \rightarrow \infty$

$$N \rightarrow \infty, \frac{N}{\Omega} \rightarrow 0.$$

Alle Eigenschwingungen unterhalb N liegen also im Bereich der Anfangstangente. Darum gilt folgender Konvergenzsatz: *Die Eigenfrequenz der schwingenden Kreislinie mit der Nummer n wird durch die Eigenfrequenz gleicher Nummer der Oszillatorkette beliebig genau approximiert, wenn nur Ω hinreichend groß ist.* Es gibt also keine Eigenfrequenz der schwingenden Kreislinie, die man nicht beliebig genau, die man nicht mit einer Oszillatorkette aus hinreichend vielen Gliedern erreichen könnte.

Daraus folgt ein bemerkenswerter Satz, der zunächst allerdings auf das Beispiel beschränkt ist. Betrachtet man die Folge aller Oszillatorketten, so erfaßt man mit ihr auch das Kontinuum der schwingenden Kreislinie. Somit gilt zumindest in dem speziellen Fall: *Das Kontinuum wird durch eine Folge von immer feiner werdenden Punktgittern vollständig ausgeschöpft.*

Was auch immer das Kontinuum sonst noch sein mag, hier reicht die Vorstellung, das Kontinuum sei eine *Grenzidee*, die man mit einer Gitterfolge in den Griff kriegt. Das so als werdend definierte Kontinuum heiße *Exhaustionskontinuum*.

Es ist klarerweise von dem als seiend betrachteten, *mengentheoretisch konzipierten Kontinuum* verschieden.

2. Anwendung auf die Quantenphysik

Wie man die klassische Physik aus der Vorstellung ableiten kann, daß Körper und am Ende auch Materiepunkte bei Bewegungen ihre Identität bewahren, so ergibt sich die Quantenphysik aus der Vorstellung, alles physikalische Geschehen sei ein Zusammenspiel von lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen.

Gibt es nur ein Paar von Elementarprozessen, so kann man leicht zeigen, daß sein Verhalten durch unitäre Transformationen im zweidimensionalen Hilbertraum beschrieben wird. In diesem Falle ist die Anzahl der Quantenzustände gleich der Dimension des Hilbertraums. Die Gleichheit ist im Elementarprozeß verankert und sollte ein fundamentales Axiom der Quantenphysik sein.

Tatsächlich bleibt dieses Axiom auch bei endlich vielen Paaren von Elementarprozessen erhalten. Bei Ω Paaren ist die Anzahl der Quantenzustände und die Dimension des Hilbertraumes gleich 2^Ω . Im Grenzfall unendlich ist die Zahl der Quantenzustände und die Dimension des Hilbertraumes unendlich. Doch kann jene abzählbar und diese überabzählbar unendlich sein.

Denkt man z. B. an die Schrödingergleichung für Bewegungen auf einer Kreislinie, so ergibt sich eine abzählbare Menge von Quantenzuständen. Doch ist die Menge der Punkte auf der Kreislinie, der Sitze für Elementarprozesse, nicht mehr abzählbar. Die Gleichheit der beiden Mengen ist zerstört. Das fundamentale Axiom der Quantenphysik ist im mengentheoretisch konzipierten Kontinuum nicht mehr gültig. Darum ist dieses Kontinuumskonzept quantenphysikalisch unhaltbar.

Im Exhaustionskontinuum wird der unendlichdimensionale Hilbertraum durch eine Folge endlich dimensionaler Hilberträume ersetzt, deren Dimension über alle Grenzen wächst. Da die Gleichheit in jedem Hilbertraum der Folge erhalten bleibt, gilt sie auch im Exhaustionskontinuum. Dieses ist also quantenphysikalisch zulässig. Das ermutigt dazu, das Exhaustionskontinuum genauer zu betrachten.

3. Das Exhaustionskontinuum

Es gibt zwei Eigenschaften der Quantenphysik, die zu unendlich dimensionalen Hilberträumen geführt haben. Erstens lassen Operatoren für Bosonen unendlich viele Teilchen in einem Punkt zu. Zweitens kann die unendliche Zahl der Punkte im Raum zu einem unendlich dimensionalen Hilbertraum führen. Das Verhalten der Bosonen kann man leicht exhaustionsanalytisch beschreiben. Darum gehen wir hier darauf nicht ein. Wir fragen nur, wie wir von Räumen mit endlich vielen Punkten zum exhaustionsanalytischen Raumkontinuum gelangen. Fürs erste genügt es, eindimensionale Kontinua, z. B. das der Zahlengeraden zu betrachten.

Wir gehen von einem Gitter äquidistanter rationaler Zahlen aus. Sei Ω eine natürliche und h eine ganze Zahl, so lauten die Zahlen des Ω -Gitters

$$x = h \cdot \Omega!^{-1}, \quad -\Omega!^2 \leq h < +\Omega!^2 \equiv -\Omega!^2 \pmod{2\Omega!^2}.$$

Die Gitterkonstante $\varepsilon = 1/\Omega!$, und der Gitterhalbmesser $R = \Omega!$. Die Gleichung $R \cdot \varepsilon = 1$ bedeutet, daß die Gitter mit wachsendem Ω : zugleich und in gleichem Maße unendlich fein und unendlich lang werden, so daß wir mit der Folge die ganze Zahlengerade ausschöpfen. Jedes Gitter geht aus dem vorhergehenden durch Teilung der Gitterkonstante und eine gleichgroße Vervielfachung der Gitterlänge hervor. Jedes enthält die Punkte aller vorhergehenden Gitter.

Mit der Gitterfolge erfassen wir das Kontinuum durch Exhaustion. Erstens kommt jede rationale Zahl von einem bestimmten Ω an in jedem Gitter vor. Zweitens können wir mit konvergenten Folgen rationaler Zahlen jeden Punkt auf der Zahlengeraden approximieren. Wir erfassen also alle Punkte auf der Geraden, ohne auf die Frage eingehen zu müssen, ob und in welchem Sinne der Grenzwert existiert. Damit entfallen gerade diejenigen Fragen, die die Existenz eines Mengenkontinuums erzwingen. Im übrigen bleibt alles beim Alten. Insbesondere definieren die Bildpunkte der Elemente einer Folge rationaler Zahlen nach den Axiomen der Geometrie über Zwischenpunkte irrationale Bildpunkte, denen wir uns aber arithmetisch nur unbegrenzt nähern können. Die Hypothese arithmetischer Grenzwerte ist entbehrlich.

Die Verschiedenheit der beiden Kontinuumskonzepte hat eine wichtige Folge. In der Exhaustionsanalysis kommen explite nur rationale Zahlen und rationale Folgen vor. Darum sind rationale Funktionen von x (und Folgen von solchen) zunächst nur für rationale Zahlen definiert. Sei ε die Nullfolge der Gitterkonstanten, so ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x stetig, wenn

$$f(x + \varepsilon) - f(x) \rightarrow 0$$

eine Nullfolge ist. Sei Ferner $[x_n]$ eine konvergente rationale Folge, so ist bei stetigen Funktionen auch $[f(x_n)]$ konvergent. Damit ist $f(x)$ auch für irrationale Punkte auf der Zahlengeraden, und zwar eindeutig definiert. In der Exhaustionsanalysis gibt es also keine unendlich krausen Funktionen. Die von Physikern pathologisch genannten Funktionen kommen nicht vor.

Die bekannten Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung kann man auch exhaustionsanalytisch beweisen, wenn man Ableitungen durch

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

und Integrale durch

$$\int_a^b f(x) dx = \varepsilon \sum_I f(x), \quad I: a \leq x < \int b$$

definiert, worin wegen ε auf der rechten Seite der Definitionen Folgen stehen. Das vollständig zu zeigen, ist Sache der Mathematiker.

Ich habe mich aber davon überzeugt, daß sich alle Sätze im Lehrbuch von Courant exhaustionsanalytisch beweisen lassen. Bei den meisten ist das fast selbstverständlich, in einigen Fällen muß man die Sätze neu formulieren, ohne daß sich an den Beweisen etwas ändert. Beispielsweise lautet der Nullstellensatz hier: *Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ beschränkt und stetig, und kommen im Intervall positive und negative Funktionswerte vor, so gibt es mindestens eine konvergente Folge $[x_n]$ (samt ihren äquivalenten), für die $[f(x_n)]$ eine Nullfolge ist.*

Exhaustionsanalytisch kann man nur in diesem Sinne von Nullstellen u. dgl. sprechen. Dadurch ändern sich die herkömmlichen Beweise überhaupt nicht, weil auch sie mit Folgen geführt werden. Der Unterschied besteht allein darin, daß die geometrisch wohldefinierten Grenzen arithmetisch als unerreichbar betrachtet werden.

Für die Quantenphysik ist die Exhaustionsanalysis unentbehrlich, für die klassische Physik mindestens zweckmäßig, klarerweise auch für die Numerik. Analytische Rechnungen werden einfacher, weil man, – da in den Gittern alles endlich ist, – in Zwischenrechnungen nicht mehr auf Konvergenzen achten muß. Dieses von Physikern oft intuitiv zuverlässig benutzte und als heuristisch abgewertete Verfahren gilt hier in Strenge.

Solange man sagt, Axiome seien willkürlich wählbar, kann man mit keinem der beiden Konzepte beweisen, jeweils das andere sei falsch. Ob man das Willkürpostulat wirklich glauben darf, steht hier nicht zur Diskussion.