Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1943

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
Bibliothek
ZU BERLIN

München 1944
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Über gewisse Umordnungen von Permutationen II.*

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 9. Juli 1943.

§ 3. Zusammenschlüsse von Verbänden.

6. Eine in einer bestimmten Anordnung genommene echte oder unechte Teilmenge aus der Menge aller betrachteten N Elemente, wie sie durch (2) (vgl. Nr. **1**) dargestellt wird, möge ein „Block" heißen. Mit O werde der leere „Nullbock" bezeichnet. Wird aus zwei elementfremden Blocks A, B ein neuer Block gebildet, in dem zuerst die Elemente von A und dann jene von B (jeweils in ihrer Anordnung) kommen, so werde der entstandene Block mit[3] $[A, B]$ oder $A + B$ bezeichnet; im analogen Sinn sollen Summen von mehreren Summanden sowie das Summenzeichen Σ verwendet werden.

7. Ein Block, dessen Elemente eine einzige Linie bilden (vgl. Nr. **1**), möge als ein „Verband" bezeichnet werden.[4] Wie in Nr. **1** betrachten wir die in einem Block A enthaltenen vollständigen Linien, wobei wir sie in der Reihenfolge ihrer Anfangselemente angeordnet denken. Für jede dieser Linien bilden dann ihre (absteigend geordneten) Elemente einen einzigen Verband. Diese $l = l(A)$ Verbände mögen der Reihe nach mit $V_1^*, \ldots, V_l^*$ bezeichnet werden. Außer dem bereits in Nr. **2** eingeführten „konvertierten Block" $K(A) = \sum_{\lambda=1}^{l} V_{l+1-\lambda}^*$ werde noch der zu A gehörige „Linienblock" $L(A) = \sum_{\lambda=1}^{l} V_\lambda^*$ betrachtet.

---

* Vgl. die in der Sitzung vom 4. Juni 1943 vorgelegte gleichbetitelte Note I, S. 131–134.

[3] Vgl. Gleichung (7) in Nr. **3** (in Note I).

[4] Wenn ein solcher Verband V als Teilblock in einem anderen Block A enthalten ist ($A = B + V + C$, wo B und C auch $= O$ sein können), dann sprechen wir von einem „Verband in A" (in gleicher Bedeutung wie in Nr. **4**, wo von Verbänden nur in diesem letzteren Sinn gesprochen wurde).

Jeder in A vorkommende Verband gehört natürlich einer einzigen vollständigen Linie und daher einem einzigen V_λ^* an und findet sich daher als (vollständiger oder unvollständiger) Verband sowohl in $L(A)$ wie in $K(A)$.

8. In der Folge der aus einer Permutation P aller N Elemente abgeleiteten Permutationen

$$P,\ P^1,\ P^2,\ \ldots,\ P^\nu,\ \ldots. \tag{12}$$

wird für jedes $\nu \geqq 0$ (gemäß Nr. **3**, Gleichung (7), (8)) $P^{\nu+1}$ aus P^ν mittels des $(\nu+1)$-sten „Fundamental-Blocks" $F^\nu = F(P^\nu)$ vermöge

$$P^\nu = F^\nu + H^\nu, \qquad P^{\nu+1} = H^\nu + K(F^\nu)$$

gewonnen.[5] Dabei folgt aus der Definition von $F = F(P)$ (Nr. **3**), daß in $P = F + H$ der letzte vollständige Verband in F zusammen mit dem ersten in $H = H(P)$ niemals einen einzigen Verband bilden kann,[6] daß also $v(P) = v(F) + v(H)$ und analog

$$v(P^\nu) = v(F^\nu) + v(H^\nu) \tag{13}$$

ist.

Wir führen die (offenbar nicht-negativen) Zahlen ein:

$$z_1^\nu = v(F^\nu) - l(F^\nu) = v(F^\nu) - f, \tag{14}$$

$$z_2^\nu = l(F^\nu) - v\left(K(F^\nu)\right) = f - v\left(K(F^\nu)\right), \tag{15}$$

$$z_3^\nu = v(H^\nu) + v\left(K(F^\nu)\right) - v(P^{\nu+1}), \tag{16}$$

$$z^\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + z_3^\nu, \tag{17}$$

hierbei unter f wie oben (Nr. **1**) die Anzahl der Kategorien verstanden, auf die die Elemente aufgeteilt sind; $z_\varkappa^\nu$ werde als die Anzahl der Zusammenschlüsse $\varkappa$-ter Art beim Übergang von P^ν zu $P^{\nu+1}$ bezeichnet ($\varkappa = 1, 2, 3$). Dabei sprechen wir bei jeder vollständigen Linie in F^ν von $a-1$ Zusammenschlüssen erster Art, wenn diese Linie a vollständige Verbände aus F^ν

[5] Statt $P^{(\nu)}$ (wie in Note I) schreiben wir jetzt P^ν (wobei $P = P^0$ sei).

[6] Hieraus und aus dem am Schluß von Nr. 7 über $K(A)$ Gesagten folgt, daß jeder vollständige Verband in P (bzw. P^ν) sich als vollständiger oder unvollständiger Verband in P^1 (bzw. $P^{\nu+1}$) wiederfindet, woraus wieder $v(P^1) \leqq v(P)$ und allgemein $v(P^{\nu+1}) \leqq v(P^\nu)$ folgt.

umfaßt; wir sprechen, wenn $V_1^*, V_2^*, \ldots$ (vgl. Nr. **7**) die den vollständigen Linien in F^ν entsprechenden Verbände sind, von $b-1$ Zusammenschlüssen zweiter Art jedesmal, wenn b in $K(F^\nu)$ aufeinanderfolgende unter diesen V_λ^* zusammen einen einzigen vollständigen Verband in $K(F^\nu)$ bilden; und wir sprechen von einem Zusammenschluß dritter Art, wenn der letzte vollständige Verband in H^ν zusammen mit dem ersten in $K(F^\nu)$ einen einzigen Verband in $P^{\nu+1}$ bildet.[7] Aus (14), (15), (16), (17) folgt somit wegen (13)

$$v(P^{\nu+1}) = v(P^\nu) - z^\nu.$$

§ 4. Aus Lage- und Platz-Nummern eines Leitelements sich ergebende Ungleichungen.

9. Wir greifen ein Element y als „Leitelement" heraus, bezeichnen mit Y^ν den vollständigen Verband in P^ν, dem y angehört (und der gemäß Anm. 6 notwendig in $Y^{\nu+1}$ als echter oder unechter Teil enthalten ist), und mit

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots. \tag{18}$$

diejenigen Werte von ν (die „Lage-Nummern" von y), für welche Y^ν zu $F^\nu = F(P^\nu)$ gehört. Ist dann (in der Bezeichnungsweise von Nr. **7**) $L(F^\nu) = \sum_{\lambda=1}^{f}{}' V_{\nu\lambda}^*$, dann ist Y^ν für $\nu = \nu_k$ in einem der Verbände $V_{\nu\lambda}^*$ als echter oder unechter Teil enthalten. Es sei dies etwa der Verband $V_{\nu_k t_k}^*$. Aus den „Platz-Nummern"

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots. \tag{19}$$

und den Unterschieden

$$u_k = \nu_{k+1} - \nu_k \tag{20}$$

aufeinanderfolgender Lage-Nummern lassen sich nun Abschätzungen für gewisse unter den Anzahlen $v(P^\nu)$ gewinnen (vgl. (27), (29), (31) in Nr. **11** und **12**).

10. Hierzu betrachten wir die Folge der F^ν und setzen P^ν in der Gestalt an[8]

[7] In diesem Fall ist $z_3^\nu = 1$, sonst $= 0$.

[8] Wir lassen dabei vorerst den trivialen Fall beiseite, daß P^ν abgeschlossen (s. Nr. **5**), somit $\sigma = 0$ und $F^\nu = P^\nu = R$ ist.

$$P^{\nu} = \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1}{}' F^{\nu+\alpha} + R, \tag{21}$$

wobei $R = R^{\nu}$ nicht leer ($R \neq O$) und $\sigma = \sigma(\nu)$ ($\geqq 1$) möglichst groß, also so gewählt sei, daß R entweder ein echter Teil von $F^{\nu+\sigma}$ oder $R = F^{\nu+\sigma}$ ist. Es ist also

$$P^{\nu+\sigma} = R + \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} K(F^{\nu+\alpha}) \tag{22}$$

und

$$F^{\nu+\sigma} = R + Q, \tag{23}$$

wobei Q entweder ein echter (allenfalls leerer) Teil von $K(F^{\nu})$ oder

$$Q = K(F^{\nu}) + G \tag{24}$$

ist. Unter Beachtung von (21), (14), bzw. von (22), (15), (16) erhält man dann, wenn $v(R) = \rho$ (ausführlicher: $v(R^{\nu}) = \rho(\nu)$) gesetzt wird:

$$v(P^{\nu}) = \sigma f + \rho + \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} z_1^{\nu+\alpha} \tag{25}$$

$$v(P^{\nu+\sigma}) = \sigma f + \rho - \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} (z_2^{\nu+\alpha} + z_3^{\nu+\alpha}). \tag{26}$$

11. Es werde nun speziell angenommen, daß $\nu = \nu_k$ sei, daß also y in F^{ν} (und dann natürlich in $K(F^{\nu})$, also sicher nicht in $F^{\nu+\alpha}$ für $0 < \alpha \leqq \sigma - 1$ vorkommt, so daß $\nu_{k+1} \geqq \nu + \sigma$ ist.[9] Der Fall $\nu_{k+1} = \nu + \sigma$ tritt natürlich immer dann ein, wenn (24) gilt, also $F^{\nu+\sigma}$ den ganzen Block $K(F^{\nu})$ umfaßt. Daher muß, falls $\nu_{k+1} > \nu + \sigma$ ist, $K(F^{\nu}) = Q + Q_1$ und dabei der Verband Y^{ν} in Q_1 enthalten sein. Aus $l(Q_1) \leqq v(Q_1) \leqq v\left(K(F^{\nu})\right) \leqq f$ ergibt sich dann, daß

$$F^{\nu+\sigma+1} = F(P^{\nu+\sigma+1}) = F\left(Q_1 + \sum_{\alpha=1}^{\sigma} K(F^{\nu+\alpha})\right) \tag{26a}$$

den ganzen Block Q_1 und also Y^{ν} umfassen, daß somit $\nu_{k+1} = \nu + \sigma + 1$ sein muß. Man erhält somit $\sigma \leqq u_k \leqq \sigma + 1$ und daher wegen $1 \leqq \rho$ und $v(Q_1) \leqq f$ gemäß (25), (26a):

$$v(P^{\nu_k}) \geqq (u_k - 1) f + 1, \quad v(P^{\nu_k+\sigma_k+1}) \leqq (u_k + 1) f. \tag{27}$$

[9] Die hier auftretende zu $\nu = \nu_k$ gemäß Nr. **10** gehörige Zahl $\sigma = \sigma(\nu_k)$ werde gelegentlich auch mit σ_k bezeichnet.

12. Wir machen die zusätzliche Voraussetzung

$$z_1^{\nu+\alpha} = 0 \quad \text{für } 0 \leqq \alpha \leqq \sigma + 1. \tag{28}$$

Dann ist

$$L(F^\nu) = F^\nu = \sum_{\lambda=1}^{f} V_{\nu\lambda}^*, \qquad Y^\nu = V_{\nu t}^*, \text{ wo } \nu = \nu_h,\ t = t_h$$

$$K(F^\nu) = \sum_{\lambda=1}^{f} V_{\nu, f+1-\lambda}^*$$

und wenn

$$S = V_{\nu f}^* + \ldots + V_{\nu t}^*, \qquad T = R + S$$

gesetzt wird, dann ist

$$v(T) = t_{h+1} \text{ oder } = f + t_{h+1},$$

je nachdem $\nu_{h+1} = \nu + \sigma$ oder $= \nu + \sigma + 1$ ist; es ist also allemal

$$v(T) = t_{h+1} + (u_h - \sigma) f.$$

Andererseits ist

$$v(T) = v(R) + v(S) - z_3^\nu \text{ und } 0 \leqq f + 1 - t - v(S) \leqq z_2^\nu,$$

woraus unter Beachtung von (25), (28), (26) und Anm. 9 sich

$$v(P^{\nu_h}) \geqq \tau_h \geqq v(P^{\nu_h + \sigma_h}) \tag{29}$$

ergibt, wenn

$$\tau_h = \tau_h(y) = (u_h - 1) f + (t_h + t_{h+1} - 1) \tag{30}$$

gesetzt wird.[10] Wird $k \geqq 1$ angenommen, und beachtet man, daß ν_h entweder $= \nu_{h-1} + \sigma_{h-1}$ oder $= \nu_{h-1} + \sigma_{h-1} + 1$ (vgl. Nr. **11**), also $\nu_h \geqq \nu_{h-1} + \sigma_{h-1}$ und somit

$$v(P^{\nu_{h-1} + \sigma_{h-1}}) \geqq v(P^{\nu_h})$$

ist, so ergibt sich aus (29) und der Ungleichung, die sich aus (29) für $k - 1$ anstatt k ergibt, daß

$$\tau_{h-1} \geqq v(P^{\nu_h}) \geqq \tau_h \tag{31}$$

ist. Aus (29) und (31) erhält man die Aussagen:

(A) Wenn $v(P^{\nu_h}) = v(P^{\nu_h + \sigma_h})$ ist, dann ist der gemeinsame Wert dieser beiden Zahlen durch (30) gegeben. Insbesondere für stationäres P ist $v(P) = \tau_h(y)$ (bei beliebigem y und k).

[10] Im Falle eines abgeschlossenen P^ν (vgl. Anm. 8) ist $\nu_{h+1} = \nu + \sigma + 1 = \nu + 1$, $u_h = 1$, $t_{h+1} = f + 1 - t_h$, $v(P^\nu) = v(P^{\nu+\sigma}) = f$ und die Ungleichungen (29) gelten mit dem Gleichheitszeichen.

(B) Wenn für ein Element y die gemäß (30) gebildeten Zahlen $\tau_{h-1}(y)$ und $\tau_h(y)$ einander gleich ausfallen, dann gibt ihr gemeinsamer Wert den Wert von $v(P^\nu)$ für $\nu = \nu_h(y)$.

§ 5. Aufspaltung einer Permutation in gewisse Teilblocks und die darauf bezüglichen Verbands-Bedingungen für periodische Wiederkehr.

13. Sind $V_1, \ldots, V_m$ die vollständigen Verbände eines Blocks $A = \sum_{\mu=1}^{m} V_\mu$, so werde $-A$ definiert durch

$$-A = \sum_{\mu=1}^{m} V_{m+1-\mu}$$

und für $B + (-A)$ werde auch $B - A$ geschrieben. Es ist $-A \neq A$ oder $= A$, je nachdem $m > 1$ oder $m = 1$ ist.

14. Für jede Zahl $m \geqq f$ definieren wir q, r durch

$$m = qf + r, \quad 0 \leqq r < f \tag{32}$$

und $\pi(m)$ durch:

$\pi(m) = q(q+1)$ für $r = 1$, q ungerade, desgleichen für $r = f - 1 > 0$, q gerade; $\pi(m) = 2q(q+1)$ in allen anderen Fällen mit $r > 0$; $\pi(m) = q$ bzw. $2q$ für $r = 0$ und $f = 1$ bzw. $f > 1$.

15. Für eine Permutation $P = \sum_{\mu=1}^{m} V_\mu$ mit $v(P) = m$ vollständigen Verbänden V_μ definieren wir die Blocks[11] $C^\nu_{*\alpha}$, $D^\nu_{*\alpha}$ für $\nu \geqq 0$ durch

$$C_\alpha = \sum_{\mu=1}^{r} V_{\alpha f - f + \mu} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq q+1), \tag{33}$$

$$D_\alpha = \sum_{\mu=r+1}^{f} V_{\alpha f - f + \mu} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq q), \tag{34}$$

$$C^0_{*\alpha} = C_\alpha, \qquad D^0_{*\alpha} = D_\alpha, \tag{35}$$

$$C^{\nu+1}_{*\alpha} = C^\nu_{*\alpha+1} \text{ für } 1 \leqq \alpha \leqq q, \quad C^{\nu+1}_{*q+1} = -C^\nu_{*1}, \tag{36}$$

$$D^{\nu+1}_{*\alpha} = D^\nu_{*\alpha+1} \text{ für } 1 \leqq \alpha \leqq q-1, \quad D^{\nu+1}_{*q} = -D^\nu_{*1} \tag{37}$$

und die Permutation P^ν_* durch

---

[11] Die Blocks $C^\nu_{*\alpha}$ entfallen (sind durch O zu ersetzen), wenn $r = 0$ ist.

$$P_*^{\nu} = \sum_{\alpha=1}^{q} (C_{*\alpha}^{\nu} + D_{*\alpha}^{\nu}) + C_{*q+1}^{\nu}, \tag{38}$$

wobei für $\nu = 0$ offenbar $P_* = P$ wird. Dabei ist die Folge

$$P_*, P_*^1, P_*^2, \ldots, P_*^{\nu}, \ldots$$

periodisch und der kleinste Wert ρ, für den

$$P_*^{\nu+\rho} = P_*^{\nu} \qquad (\nu \geqq 0) \tag{39}$$

gilt, ist gegeben durch[12] $\rho = \pi(m)$ (vgl. Nr. **14**). Dabei kommt, wenn λ, μ den Ungleichungen $1 \leqq \lambda \leqq q+1$, $1 \leqq \mu \leqq q$ entsprechend, sonst jedoch beliebig, ferner die Vorzeichen $\gamma = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ unabhängig gewählt werden, jede Kombination

$$\gamma C_\lambda + \delta D_\mu \tag{40}$$

in der Folge der

$$C_{*1}^{\nu} + D_{*1}^{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{41}$$

vor, und zwar genau einmal, wenn wir uns in (41) auf $0 \leqq \nu < \pi(m)$ beschränken. Und wenn $C_{*1}^{\nu} + D_{*1}^{\nu}$ durch (40) gegeben ist, dann ist[13] $C_{*2}^{\nu} = \gamma C_{\lambda+1}$ oder $= -\gamma C_1$, je nachdem $\lambda < q+1$ oder $= q+1$ ist.

16. Wir fragen, wann

$$F(P_*^{\nu}) = C_{*1}^{\nu} + D_{*1}^{\nu} \tag{42}$$

also $= \gamma C_\lambda + \delta C_\mu$ ist. Dazu erweist es sich als notwendig und hinreichend, daß unter den vollständigen Verbänden in $\gamma C_\lambda + \delta D_\mu$ kein später auftretender einem früheren dem Rang nach von unten benachbart[14] und daß auch der erste vollständige Ver-

[12] Hierzu und für das Folgende vgl. die näheren Ausführungen in § 6, Nr. 63–71 der in Anm. 2 genannten Arbeit im Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 53, Jahrgang 1943. Man hat dabei zu beachten, daß $-C_{*\alpha}^{\nu} = C_{*\alpha}^{\nu}$ dann und nur dann gilt, wenn $r = 1$ oder 0 ist, sowie $-D_{*\alpha}^{\nu} = D_{*\alpha}^{\nu}$ dann und nur dann, wenn $r = f - 1$ ist (vgl. den Schlußsatz von Nr. **13**).

[13] Den Fall eines abgeschlossenen $P = D_1$ (mit $q = 1$, $r = 0$), wo C_1 und die C_{*2} entfallen, lassen wir hier beiseite.

[14] Von zwei Verbänden gleicher Kategorie

$$V = [a_\beta^{(i)}, \ldots, a_{\beta-s+1}^{(i)}], \quad U = [a_\gamma^{(i)}, \ldots, a_{\gamma-t+1}^{(i)}]$$

heißt U dem Range nach von unten benachbart zu V, wenn $\gamma = \beta - s$ ist. Es heißen U, V dem Rang nach benachbart, wenn entweder U dem V oder V dem U von unten benachbart ist.

band von C_{*2}^{ν} keinem der Verbände in $\gamma C_\lambda + \delta D_\mu$ dem Rang nach von unten benachbart ist. Man erkennt dann, daß die Gleichungen (42) für $0 \leqq \nu < \pi(m)$ und dann wegen (39) von selbst für jedes ν gelten, wenn die C_α, D_α die folgenden „Verbands-Bedingungen" $\mathfrak{B}$ erfüllen[15]:

1) In keinem D_μ, desgleichen in keinem C_λ kommen zwei einander dem Rang nach benachbarte vollständige Verbände vor; 2) kein vollständiger Verband, der in einem C_λ an erster oder letzter Stelle steht, ist einem vollständigen Verband eines D_μ dem Rang nach von unten benachbart; 3) kein vollständiger Verband eines D_μ ist einem vollständigen Verband eines C_λ dem Rang nach von unten benachbart; 4) der Block C_1 bzw. ein Block C_λ mit einem $\lambda > 1$ enthält weder als ersten noch als letzten seiner vollständigen Verbände einen Verband, der einem vollständigen Verband von C_{q+1} bzw. von $C_{\lambda-1}$ dem Rang nach von unten benachbart ist.

17. Nun ist das Bestehen der Gleichung $F(P) = F(P_*) = C_{*1} + D_{*1} = C_1 + D_1$ offenbar notwendig und hinreichend dafür, daß $P^1 = P_*^1$ gilt; und ebenso ist das Bestehen von (42) für jedes ν gleichbedeutend mit $P^\nu = P_*^\nu$. Die Bedingungen $\mathfrak{B}$ sind also sicher hinreichend dafür, daß $P^{\nu+\pi(m)} = P^\nu$ für jedes $\nu \geqq 0$, daß somit P stationär (und daher finit) ist. Die Überlegungen, die zur Aufstellung der Bedingungen $\mathfrak{B}$ führen, zeigen aber auch, daß, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, notwendig für wenigstens ein $\nu < \pi(m)$ sich $v(P^{\nu+1}) < v(P^\nu)$ und daher $v(P^{\pi(m)}) < v(P)$ ergeben muß, P also nicht finit sein kann. Somit:

(C) Die Bedingungen $\mathfrak{B}$ von Nr. **16** sind notwendig und hinreichend sowohl dafür, daß P finit, als auch dafür, daß P stationär ist, woraus zugleich ersichtlich ist, daß sich die Begriffe finit und stationär decken.

---

[15] Im Falle $r = 0$ (vgl. Anm. 11) verbleibt von Bedingung 1) nur der auf die D_μ bezügliche Teil 1*, es entfallen die Bedingungen 2), 3) sowie der auf die C_λ bezügliche Teil von 1), während 4) zu ersetzen ist durch: 4*) Der Block D_1 bzw. ein Block D_μ mit $\mu > 1$ enthält weder als ersten noch als letzten seiner vollständigen Verbände einen Verband, der einem vollständigen Verband von D_q bzw. von $D_{\mu-1}$ dem Rang nach von unten benachbart ist.

18. Die genannten Überlegungen zeigen aber auch, daß aus dem Bestehen der Gleichungen

$$v\,(P^{\nu+1}) = v\,(P^{\nu}) \quad \text{für } 0 \leqq \nu < \pi\,(m) \tag{43}$$

(wo $m = v\,(P)$) das Erfülltsein der Verbands-Bedingungen $\mathfrak{B}$ folgt. Wegen $m = v\,(P)$ und $v\,(P^{\nu+1}) \leqq v\,(P^{\nu})$ ist aber (43) gleichbedeutend mit

$$v\,(P^{\rho}) = v\,(P) \quad \text{für } \rho = \pi\,(v\,(P)) \tag{44}$$

sodaß wir sagen können:

(D) Aus (44) folgt, daß P stationär ist.

§ 6. Das Auftreten eines Leitelements in den Fundamentalblocks F^{ν} einer stationären Permutation.

19. Für den Fall einer stationären Permutation P sollen die gemäß Nr. **15** definierten Blocks $C^{\nu}_{*\alpha}$, $D^{\nu}_{*\alpha}$ ($\nu \geqq 0$) einfacher mit C^{ν}_{α}, D^{ν}_{α} bezeichnet werden und es gelten dann wegen $P^{\nu}_{*} = P^{\nu}$ für die C^{ν}_{α}, D^{ν}_{α}, P^{ν} dieselben Gleichungen, die für die $C^{\nu}_{*\alpha}$, $D^{\nu}_{*\alpha}$, P^{ν}_{*} durch (38) und (42) gegeben sind. Wir wollen nun ein Element y (als Leitelement) betrachten, das in $F = F\,(P) = C_1 + D_1$ auftritt, und wir fragen, in welchen $F^{\nu} = F\,(P^{\nu}) = C^{\nu}_1 + D^{\nu}_1$ das Element y wiederkehrt.[16] Dabei wird zu unterscheiden sein, ob y in C_1 oder in D_1 auftritt, ob also die Platz-Nummer t_0 (vgl. (19). Nr. **9**), die dem Element y in $F = L\,(F)$ zukommt, $\leqq r$ oder $> r$ ist,

20. Im ersten Fall erkennt man aus (36), daß $\nu = q + 1$ der kleinste Wert $\nu > 0$ ist, für welchen F^{ν} das Element y wieder enthält, und zwar wegen $F^{q+1} = F\,(P^{q+1}) = C^{q+1}_1 + D^{q+1}_1$ und[17] $C^{q+1}_1 = -C_1$ mit der Platz-Nummer $t_1 = r + 1 - t$. Im zweiten Fall erkennt man aus (37), daß $\nu = q$ der kleinste Wert $\nu > 0$ ist, für welchen F^{ν} das Element y wieder enthält, und zwar wegen $F^{q} = F\,(P^{q}) = C_{q+1} - D_1$ mit der Platz-Nummer $t_1 = f + r + 1 - t$. Daraus ergibt sich:

---

[16] Daß P stationär ist, hat zur Folge (vgl. die in § 5 besprochenen Überlegungen), daß für jedes ν sich $L\,(F^{\nu}) = F^{\nu}$ und $K\,(F^{\nu}) = -F^{\nu} = -D^{\nu}_1 - C^{\nu}_1$ ergibt.

[17] Nebenbei ist $D^{q+1}_1 = -D_2$ bzw. $= +D_1$, je nachdem $q > 1$ oder $q = 1$ ist.

(E) Bei einer stationären Permutation gehört ein Element y zu den Blocks C_α oder zu den Blocks D_α, je nachdem bei zwei aufeinander folgenden, das Element y enthaltenden Fundamentalblocks F^ν die Summe $t + t_1$ der Platz-Nummern von y sich $\leqq f$ oder $> f$ ergibt.

Übrigens ist im ersten Fall $u = \nu_1 - \nu_0 = \nu_1 = q + 1$, im zweiten $= q$ und daher in beiden Fällen $qf + r = (u - 1)f + t + t_1 - 1$, wie schon aus (A), Nr. **12** erhellt.

§ 7. Aus dem Gang eines Leitelements ablesbares Stabilitäts-Kriterium.

21. Aus der Endlichkeit der Anzahl $(= N!)$ aller möglichen Permutationen unserer N Elemente ergibt sich, daß in der Folge (12) (Nr. **8**) Wiederholungen auftreten müssen, derart, daß $P^{\mu+\rho} = P^\mu$ und dann in periodischer Wiederkehr

$$P^{\nu+\rho} = P^\nu \quad \text{für } \nu \geqq \mu$$

ist, daß also (12) von einer gewissen Stelle $\nu = \mu$ an nur mehr stationäre Permutationen enthält. Je nachdem dann $v\,(P^\mu) = f$ oder $> f$ ist, hat man es dabei mit abgeschlossenen oder mit stabilen Permutationen zu tun (vgl. Nr. **5**, Note I) und die Ausgangs-Permutation P soll im ersten Fall vom „Ω-Typus", im zweiten Fall vom „St-Typus" heißen.[18] Während aber die abgeschlossenen Permutationen sofort daran kenntlich sind, daß von jeder Kategorie alle Elemente in einem einzigen Verband auftreten,[19] ist einer stabilen Permutation ihre Stabilität nicht so unmittelbar anzusehen; und den Anlaß zu unseren Untersuchungen hat gerade die Frage gegeben nach einem Kriterium dafür, daß eine vorgelegte Permutation zum *St*-Typus gehört, also ein P^μ aus der Folge (12) stabil ist; und zwar nach einem solchen Kriterium, das allein aus der Untersuchung der Folge der Fundamentalblocks $F^\nu = F\,(P^\nu)$ bzw. der zugehörigen Linienblocks $L\,(F^\nu)$ eine Entscheidung ermöglicht.[20]

---

[18] In der in Anm. 2 und 12 erwähnten Arbeit wird vom Fall des Gelingens bzw. Mißlingens gesprochen (vgl. Anm. 1).

[19] Der Ω-Typus führt also zu einem in der Folge der F^ν leicht erkennbaren Endergebnis.

[20] Gerade ein solches aus den $L\,(F^\nu)$ ablesbares Kriterium kommt bei dem

22. Ein solches Kriterium verschaffen wir uns nun durch Betrachtung eines Leitelements y. Vorerst beachten wir jedoch noch Folgendes.

Die Frage, welchem Typus eine Permutation P angehört, bezieht sich auf diejenigen P^{ν} der Folge (12), die stationär sind, so daß wir für die genannte Frage die Permutation P durch irgend eine spätere P^{μ} (die dann wieder mit P bezeichnet werden kann) aus der Folge (12) ersetzen und diese Permutation von vorneherein als stationär voraussetzen können. Nun treten beim Übergang von F^{ν} zu $L(F^{\nu})$ die Zusammenschlüsse erster Art unmittelbar in Erscheinung und es ist P^{ν} (und dann auch P) gewiß nicht stationär, wenn nicht $z_1^{\nu} = 0$ ist. Wir wollen also voraussetzen, es sei $z_1^{\nu} = 0$ für alle jene Werte $\nu \geqq 0$, bis zu denen wir die Betrachtungen führen werden.

23. Weiters nehmen wir irgend ein Element y, das etwa für $\nu = \nu_{k-1}$ $(k \geqq 1)$ in $F^{\nu}(P) = F^{\nu}$ vorkommt, als Leitelement[21] und bestimmen die Lage-Nummer $\nu = \nu_k$ (vgl. Nr. **9**) des nächsten sowie die Lage-Nummer $\nu = \nu_{k+1}$ des übernächsten Fundamentalblocks F^{ν}, der y enthält, sowie außerdem die zugehörigen Platz-Nummern t_{k-1}, t_k, t_{k+1}. Berechnen wir dann τ_{k-1} und τ_k aus (30), dann muß bei stationärem P gemäß (A), Nr. **12**,

$$\tau_{k-1} = \tau_k, \tag{45}$$

allgemein

$$\tau_{k+\rho-1} = \tau_{k+\rho} \quad \text{für jedes } \rho \geqq 0 \tag{46}$$

sein. Wir wollen also voraussetzen, daß $\tau_k = \tau_{k-1}$ ausfalle, da andernfalls P gewiß nicht stationär sein kann. Gemäß Satz (B), Nr. **12**, ist dann $\tau_k = v(P^{\nu_k})$ (im Falle eines stationären P also

---

Spiel in Frage, das in Anm. 1 (Note I) erwähnt wurde, da hier nur die $L(F^{\nu})$, nicht aber die vollständigen Permutationen (12) in Erscheinung treten. An Hand der P^{ν} selbst würde es ja genügen, P^{ν} bis zum Werte $\nu = N!$ zu bilden und von der (notwendig stationären) Permutation $P^{N!}$ festzustellen, ob sie abgeschlossen oder stabil ist, — bei einigermaßen großem N freilich ein praktisch unausführbares Verfahren.

[21] Es wird sich weiterhin zeigen, daß nur die Differenzen (20) eine Rolle spielen, daß man also mit der Numerierung der Fundamentalblocks an irgend einer Stelle, wo y auftritt, neu (und mit beliebiger Anfangsnummer ν_k) beginnen könnte.

auch gleich dem Wert von $v(P) = m$). Dem entsprechend setzen wir gemäß (32) $\tau_k = qf + r = m$ und bestimmen $\pi(m)$ gemäß Nr. **14**.

24. Das weitere Verfahren zielt nun darauf ab, festzustellen, ob $P^{\nu_{k-1}}$ stationär ist, und stützt sich dabei auf Satz (D), Nr. **18**. Man kann dabei das Verfahren in zwei Gestalten weiterführen: bei einem ersten Modus wird nur von (D) Gebrauch gemacht, bei einem zweiten Modus außerdem noch von Satz (E), § 6.

25. Bei dem Verfahren nach dem ersten Modus bilden wir mit dem eben errechneten $\pi(m)$ für $h = k-1$, k und $k+1$ die Zahlen

$$\nu_h' = \nu_h + \pi(m). \tag{47}$$

Falls P^ν für $\nu = \nu_{k-1}$ stationär ist, müssen dann gemäß § 5 die Gleichungen $P^{\nu_h} = P^{\nu_h}$ $(h = k-1,\ k,\ k+1)$ gelten und es muß y in jedem der drei Blocks F^ν für $\nu = \nu_{k-1}', \nu_k', \nu_{k+1}'$ vorkommen. Setzt man also das Verfahren der Bildung der F^ν bis zu den Werten (47) von ν fort, so können wir weiterhin die Annahme machen, daß y in den genannten drei Blocks auftritt (und daß es sich dabei um drei aufeinander folgende unter denjenigen Blocks F^ν handelt, die y enthalten), da andernfalls $P^{\nu_{k-1}}$ gewiß nicht stationär ist. Unter der gemachten Annahme sind also durch (47) drei aufeinander folgende Zahlen der Folge (18) gegeben — sie mögen dementsprechend auch mit

$$\nu_{k^*-1},\ \nu_{k^*},\ \nu_{k^*+1}$$

bezeichnet werden, — und mit Hilfe der zu diesen Lage-Nummern gehörigen Platz-Nummern t_{k^*-1}, t_{k^*}, t_{k^*+1} läßt sich feststellen, ob die gemäß (30) gebildeten zugehörigen Zahlen τ_{k^*-1} und τ_{k^*} einander gleich sind. Ist dies nicht der Fall, so ist dies gemäß § 4 wieder ein Zeichen dafür, daß P^ν für $\nu \leqq \nu_{k^*-1}$ nicht stationär sein kann.

Demgemäß setzen wir weiterhin $\tau_{k^*-1} = \tau_{k^*}$ voraus. Analog wie in Nr. **23** gibt dann τ_{k^*} gemäß Satz (B) den Wert von $v(P^\nu)$ für $\nu = \nu_{k^*} = \nu_k + \pi(m)$. Fällt nun dieser Wert verschieden von $v(P^{\nu_k}) = m$ aus (und zwar dann notwendig kleiner), dann kann P^{ν_k} nicht finit, also auch nicht stationär sein. Ergeben sich aber gleiche Werte von $v(P^\nu)$ für $\nu = \nu_k$ und $\nu = \nu_{k^*}$, dann

folgt daraus gemäß Satz (D), Nr. **18**, daß P^{ν_k} stationär ist. Und da wir natürlich annehmen, daß P^{ν_k} nicht abgeschlossen ist (weil nach dem in Nr. **21** Gesagten diese Abgeschlossenheit unmittelbar erkennbar wäre und jede Weiterführung unseres Verfahrens über P^{ν_k} hinaus überflüssig gemacht hätte), so ist dann die Stabilität von P^{ν_k} und die Zugehörigkeit von P zum *St*-Typus festgestellt.[22]

26. An Stelle des in Nr. **25** angegebenen ersten Modus ergibt sich beim zweiten Modus eine Fortsetzung unseres Verfahrens, wobei auch Satz (E), Nr. **20**, herangezogen wird. Unter der Annahme, es sei P (oder wenigstens P^{ν} für $\nu = \nu_{k-1}$) stationär, läßt sich nämlich gemäß Satz (E) entscheiden, ob y in den Blocks C_α oder in den Blocks D_α vorkommt: das erstere oder das letztere trifft zu, je nachdem $t_{k-1} + t_k \leqq f$ oder $> f$ ausfällt. Aus der gemäß Nr. **23** aus $\tau_k = \tau_{k-1} = v\,(P^{\nu_k}) = m$ bestimmten Zahl m gewinnen wir sowohl q gemäß (32), als $\pi\,(m)$ gemäß Nr. **14**. Nun wissen wir aus Nr. **20**, daß bei stationärer Permutation die in einem Block C_α bzw. D_α enthaltenen Elemente, wenn sie in einem F^{ν} sich vorfinden, dann das nächste Mal in $F^{\nu+q+1}$ bzw. in $F^{\nu+q}$ wieder auftreten. Für die Lage-Nummern (18) gilt also im ersten Fall (y in einem C_α)

$$\nu_{k+1} = \nu_k + q + 1,$$

im zweiten Fall (y in einem D_α)

$$\nu_{k+1} = \nu_k + q,$$

woraus für die in Nr. **25** mit $\nu_{k^*} = \nu_k + \pi\,(m)$ bezeichnete Lage-Nummer im ersten Fall

$$k^* = k + \frac{\pi\,(m)}{q+1}, \qquad (48, C)$$

[22] An verschiedenen Stellen des in Nr. 22–25 geschilderten Verfahrens können sich die betrachteten P^{ν} als nicht-stationär erweisen, z. B. bei Auftreten von Zusammenschlüssen erster Art ($z_1^{\nu} > 0$), oder wenn $\tau_k \neq \tau_{k-1}$, $\tau_{k^*} \neq \tau_{k^*-1}$ oder $\tau_{k^*} \neq \tau_k$ ausfällt. Die Frage, zu welchem Typus P gehört, ist dann dadurch zur Entscheidung zu bringen, daß man das Verfahren (nötigenfalls mehrmals) mit einem späteren P^{ν} an Stelle von P wiederholt (natürlich mit einem solchen P^{ν}, das sich nicht schon als nicht-stationär erwiesen hat). Man muß dann mit einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ziel kommen.

im zweiten Fall

$$k^* = k + \frac{\pi(m)}{q} \tag{48, D}$$

folgt. Statt also, wie dies dem Modus von Nr. **25** entspricht, alle F^ν durchzuzählen und gemäß (47) von den Nummern ν_h ($h = k-1, k, k+1$) zu den um $\pi(m)$ größeren Nummern fortzuschreiten, kann man sich zufolge der gemachten Bemerkung nur um die Folge jener F^ν kümmern, in denen y auftritt; man wird dann nur diese Teilfolge numerieren und von den drei aufeinander folgenden Nummern $k-1, k, k+1$ zu den gemäß (48, C) bzw. (48, D) vergrößerten Nummern k^*-1, k^*, k^*+1 fortschreiten. Die mit den Blocks F^ν für $\nu = \nu_h$ ($h = k^*-1, k^*, k^*+1$) vorzunehmenden Feststellungen sind im übrigen ganz die gleichen, wie sie in Nr. **25** beschrieben wurden.[23]

Zusatz bei der Korrektur. Bei Herleitung von Gleichung (26) beachte man, wenn abkürzend

$$R + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K(F^{\nu+\beta}) = G^{\nu+\alpha} \quad (0 \leqq \alpha \leqq \sigma) \tag{49}$$

gesetzt wird, daß $v(G^{\nu+\alpha}) + v\big(K(F^{\nu+\alpha})\big) - v(G^{\nu+\alpha+1}) = v(H^{\nu+\alpha}) + v\big(K(F^{\nu+\alpha})\big) - v(P^{\nu+\alpha+1})$ für $0 \leqq \alpha \leqq \sigma - 1$ ist wie aus der evidenten allgemeinen Formel

$$\begin{aligned} v(B) + v(C) - v(B+C) = v(A+B) + v(C+D) - \\ - v(A+B+C+D) \end{aligned} \tag{50}$$

für $A = \sum_{\beta=\alpha+1}^{\sigma-1} F^{\nu+\beta}$, $B = G^{\nu+\alpha}$, $C = K(F^{\nu+\alpha})$, $D = O$ folgt.

Gemäß (16) ist also

$$v(G^{\nu+\alpha}) + v\big(K(F^{\nu+\alpha})\big) - v(G^{\nu+\alpha+1}) = z_3^{\nu+\alpha} \tag{51}$$

und wegen $G^\nu = R$, $G^{\nu+\sigma} = P^{\nu+\sigma}$ folgt daraus

$$v(P^{\nu+\sigma}) = v(R) + \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \Big(v\big(K(F^{\nu+\alpha})\big) - z_3^{\nu+\alpha} \Big).$$

Gemäß (15) gilt also (26).

[23] Wegen eines Materials von Beispielen vgl. l. c. [12].