Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein.

Von G. Mittag-Leffler.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 4. Dezember 1915.

Herr Serge Bernstein hat einen wichtigen Satz ausgesprochen, der in engem Zusammenhange mit den Resultaten meiner früheren Arbeiten steht. Sein Satz lautet:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion $F(z)$ der reellen Veränderlichen z auf einer Strecke AB analytisch ist, besteht darin, daß die Funktion in eine Reihe von Polynomen entwickelbar ist:

$$(1) \qquad F(z) = P_0(z) + P_1(z) + \cdots + P_n(z) + \cdots,$$

worin $P_n(z)$ ein Polynom bedeutet, das höchstens vom Grade n ist und auf der Strecke AB gleichmäßig der Ungleichung genügt:

$$(2) \qquad |P_n(z)| \leq M\varrho^n \; (\varrho < 1).\text{“}$$ [1]

---

[1] Comptes Rendus de l'Académ. des Sciences de Paris, 27 Février 1911.

Herr Bernstein hat dem Beweise seines Satzes die folgenden Arbeiten gewidmet:

„Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.“ Mémoire couronné par la classe des sciences de l'Acad. Royale de Belgique dans sa séance du 15 Décembre 1911. Bruxelles 1912.

„Sur une propriété des polynomes.“ Mitteilungen der math. Gesellschaft in Charkow.

„Über die beste Approximation der kontinuierlichen Funktionen durch Polynome gegebenen Grades.“ Mitteilungen der math. Gesellschaft in Charkow (2), 13, S. 49—194 (Russisch).

„Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle.“ Math. Ann., Bd. 75, S. 449—468.

Der erste Teil dieses Satzes, nämlich die Notwendigkeit der Bedingung, ist in den Formeln enthalten, die in den Noten 3[1]) und 4[2]) meiner Arbeit „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène" sowie in meinen früheren Veröffentlichungen"[3]) abgeleitet sind.

In der Tat habe ich gezeigt, daß es beliebig viele analytische Funktionen $f(u;\, \alpha)$ gibt, „erzeugende Funktionen", wie ich sie nannte (u bedeutet die Variable, α einen positiven Parameter), die folgende Eigenschaft besitzen:

„Die Funktion $v = f(u;\, \alpha)$ ist für $|u| \leqq R$, wobei $R > 1$, aber hinreichend nahe an 1 ist, eine reguläre Funktion von u, für welche $f(0;\, \alpha) = 0$, $f(1;\, \alpha) = 1$. Durchläuft u die Peripherie des Kreises $|u| = R$, so durchläuft v eine geschlossene Kurve — sie heiße V_α —, welche die Strecke (0, 1) umschließt und zu dieser Geraden symmetrisch ist. Diese Kurve umschmiegt die Strecke (0, 1) immer enger, wenn α nach Null strebt."

Eine solche Funktion ist[4])

$$(3) \qquad v = f(u;\, \alpha) = \frac{a u}{(1-\beta u)^{\alpha}}; \quad \beta = 1 - a^{\frac{1}{\alpha}}; \quad 0 < \alpha \leqq 1.$$

Eine andere ist die des Herrn Fredholm[5])

$$(4) \qquad v = f(u;\, \alpha) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)}; \quad \alpha = 1 - \beta; \quad 0 \leqq \beta < 1.$$

Ich habe früher auch noch andere Funktionen dieser Art untersucht.[6])

---

1) Acta Mathematica, Bd. 24, 1900.

2) Acta Mathematica, Bd. 26, 1902, S. 365, 366.

Siehe auch G. Mittag-Leffler, „Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion." Münchener Berichte, 6. März 1915, S. 133—137.

3) Siehe z. B. „Om en generalisering af potensserien." Öfversigt af Kgl. Svenska Vet. Akad. Handl. 9 Mars 1898"; „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion, 3: dje meddel."; Öfversigt af Kgl. Svenska Vet. Akad. Handl. 14 Sept. 1898.

4) Note 4, S. 365. Münchener Berichte, l. c., S. 134—136.

5) Note 4, S. 366. Münchener Berichte, l. c., S. 137.

6) A. a. O.

Wählt man in (3) und (4) $R < \frac{1}{\beta}$, wobei α dem Wert Null beliebig nahe kommen kann, so bleibt die Funktion $f(u; \alpha)$, wie man sieht, für $|u| = R$ regulär.

Es werde nun vorausgesetzt, daß die Funktion $F(z - A)$, gleichviel, ob $z - A$ reell ist oder nicht, auf der von den Punkten A und B begrenzten Strecke mit Einschluß der Endpunkte regulär ist.

Bezeichnet x einen beliebigen Punkt der Strecke AB und setzt man $z - A = (x - A) f(u; \alpha)$, so wird $F(z)$ bei hinreichend kleiner Wahl von α für $|u| \leqq R$ eine reguläre Funktion von u sein. Als Funktion von z betrachtet ist die Funktion $F(z)$ im Inneren und auf der Begrenzung des Bereiches $(B - A) \cdot V_\alpha$ regulär.

Es ist folglich

$$(5) \qquad \begin{aligned} &F((x - A) f(u; \alpha)) \\ &= F(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^\nu F((x - A) f(u; \alpha))}{\partial u^\nu} \right)_{u=0} \frac{u^\nu}{\nu!} = \mathfrak{P}(u), \end{aligned}$$

wobei die Reihe $\mathfrak{P}(u)$ für $|u| \leqq R$ konvergiert.

Andererseits ist in genügend kleiner Umgebung des Punktes A

$$(6) \qquad F(z - A) = \overline{\mathfrak{P}}(z - A),$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}(z - A)$ eine nach positiven Potenzen von $(z - A)$ fortschreitende Reihe bedeutet. Hieraus folgt, wenn man $f(0; \alpha) = 0$ berücksichtigt, für genügend kleines $|u|$ die Gleichung

$$(7) \qquad \mathfrak{P}(u) = F((x - A) f(u; \alpha)) = \overline{\mathfrak{P}}((x - A) f(u; \alpha)).$$

Der Weierstraßsche Satz über iterierte Reihen[1]) liefert nun die Entwicklung

$$(8) \qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{P}}((x - A) f(u; \alpha)) = P_0(x) + P_1(x) u \\ + \cdots + P_n(x) u^n + \cdots, \end{aligned}$$

[1]) Werke, Bd. 2, S. 205—208.

in der $P_n(x)$ ein Polynom von höchstens n-tem Grade[1]) vorstellt und die in der Umgebung des Punktes $u=0$ konvergent ist.

Die Gleichung (5) liefert also in der Umgebung des Punktes $u=0$

$$(9)\qquad \begin{aligned} F((x-A)f(u;a)) = \mathfrak{P}(u) = P_0(x) + P_1(x)u \\ + \cdots P_n(x)u^n + \cdots \end{aligned}$$

Die Reihe $\mathfrak{P}(u)$ konvergiert, wie wir gesehen haben, für $|u| < R$. Dasselbe gilt also von der Reihe (8).

Verstehen wir nun unter g die Größe $\overline{\lim\limits_{\substack{|u|=R \\ A<x<B}}} |\mathfrak{P}(u)|$, so ist nach dem Satz von Cauchy-Weierstraß

$$(10)\qquad |P_n(x)| < g R^{-n} = g\varrho^n;\ \ \varrho < 1.$$

Andererseits ist wegen $f(1;a) = 1$

$$(11)\qquad F(x-A) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots P_n(x) + \cdots$$

Durch die Aufstellung der Formeln (10) und (11) ist der Beweis für den ersten Teil des Bernsteinschen Satzes erbracht.

---

[1]) Im Falle der erzeugenden Funktion

$$(3)\qquad f(u;a) = \frac{au}{(1-\beta u)^a};\ \beta = 1 - a^{\frac{1}{a}};\ 0 < a \leq 1$$

ist $$P_n(x) = F^{(n)}(A)\frac{(a(x-A))^n}{n!} + \frac{a(n-1)}{1!}F^{(n-1)}(A)\beta\frac{(a(x-A))^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{a(n-2)(a(n-2)+1)}{2!}F^{(n-2)}(A)\beta^2\frac{(a(x-A))^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots$$

$$+ \frac{a(a+1)\cdots(a+n-2)}{(n-1)!}F''(A)\beta^{n-1}\frac{a(x-A)}{1!}.$$

Im Falle

$$(4)\qquad f(u;a) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)};\ \ a = 1-\beta;\ \ 0 \leq \beta < 1$$

erhält man dagegen

$$P_n(x) = \frac{\beta^n}{n!}\left[F^{(n)}(A)\left(\frac{x-A}{H}\right)^n + C_1^{(n)}F^{(n-1)}(A)\left(\frac{x-A}{H}\right)^{n-1} + \cdots \right.$$
$$\left. + C_{n-1}^{(n)}F^{(1)}(A)\frac{x-A}{H}\right]$$

wobei $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1) = \lambda^n + C_1^{(n)}\lambda^{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{(n)}\lambda$

$$H = \log\frac{1}{1-\beta}.$$

Um auch den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, muß man Betrachtungen anderer Art zu Hilfe nehmen, die, wie mir scheint, mit ihrem eigentlichen Kerne einem elementaren, längst bekannten Teile der Theorie der analytischen Funktionen angehören.[1])

Es besteht nämlich folgender Satz:

„Es bezeichne

$$z = \xi + i\eta = a\cos\varphi + ib\sin\varphi \tag{12}$$

einen Punkt der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 - b^2 = 1) \tag{13}$$

mit den Brennpunkten $+1$ und -1. Dann ist der absolute Wert der Funktion

$$\psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{14}$$

(die Wurzel sei so bestimmt, daß sie für reelle $z > 1$ positiv ist) konstant und gleich $a + b$, wenn z die Ellipse beschreibt. Auf der Strecke $(-1, +1)$ ist $|\psi(z)| = 1$."

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar. Er ist in den folgenden Formeln enthalten:

$$(15)\left\{\begin{aligned}
\psi(z) &= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + \\
&\qquad \sqrt{a^2\cos^2\varphi + 2iab\cos\varphi\sin\varphi - b^2\sin^2\varphi - 1} \\
&= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + \\
&\qquad \sqrt{a^2\cos^2\varphi + 2iab\cos\varphi\sin\varphi - b^2\sin^2\varphi - a^2 + b^2} \\
&= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + \\
&\qquad \sqrt{b^2\cos^2\varphi + 2iab\cos\varphi\sin\varphi - a^2\sin^2\varphi} \\
&= a\cos\varphi + ib\sin\varphi + b\cos\varphi + ia\sin\varphi \\
&= (a+b)e^{i\varphi} \\
|\psi(z)| &= a + b \\
\psi(z) &= z + \sqrt{z^2 - 1} = z + i\sqrt{1 - z^2} \\
|\psi(z)| &= 1; \; -1 \leq z \leq +1.
\end{aligned}\right.$$

[1]) Siehe außer den Arbeiten des Herrn Bernstein die bemerkenswerte Vereinfachung, die Herr Marcel Riesz vor kurzem dem Beweis des Fundamentalsatzes gegeben hat, aus dem bei Herrn Bernstein der zweite Teil seines Satzes fließt (Acta Mathematica, Bd. 40).

Man setze nun zur größeren Einfachheit

$$A = -1;\ B = +1, \tag{16}$$

was der Allgemeinheit des Beweises keinen Eintrag tut, und betrachte die Funktion:

$$\frac{P_n(z)}{(\psi(z))^n} = \varphi(z). \tag{17}$$

Sie ist in dem von der Doppellinie $(-1, +1)$ begrenzten Bereich regulär. Da nun $P_n(z)$ ein Polynom ist, $(\psi(z))^n$ dagegen nicht, so kann $\varphi(z)$ sich nicht auf eine Konstante reduzieren. Der größte Wert von $|\varphi(z)|$ befindet sich also auf der Linie $(-1, +1)$. Wie wir gesehen haben, ist $|\psi(z)|$ hier gleich 1.

Ferner setzten wir voraus

$$|P_n(z)| < M\varrho^n;\ -1 \leq z \leq +1;\ \varrho < 1. \tag{2}$$

Also ist

$$|\varphi(z)| \leq M\varrho^n;\ -1 \leq z \leq +1. \tag{18}$$

Es möge nun z die Ellipse (13) durchlaufen. Bekanntlich kommt $a + b$, das größer als 1 ist, dem Werte 1 beliebig nahe, wenn man die Ellipse hinreichend schmal wählt. Setzt man also

$$(a + b)\varrho < r < 1, \tag{19}$$

so erhält man

$$|P_n(z)| < Mr^n, \tag{20}$$

so lange z im Inneren oder auf der Ellipse bleibt.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$ ist folglich in diesem Bereich für z gleichmäßig konvergent. Die in dem Bereiche durch die Reihe dargestellte Funktion ist also hier analytisch und regulär, womit auch der zweite Teil des Bernsteinschen Satzes bewiesen ist.