Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft II

Mai- bis Juli- und November- u. Dezembersitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Hyperbolische Raumgeometrie und geodätische Abbildungen der hyperbolischen Ebene.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 7. Mai 1921.

Zu den grundlegenden Sätzen der hyperbolischen (nichteuklidischen) Raumgeometrie gehört der Satz: Die Summe der Kantenwinkel im Paralleldreikant beträgt zwei Rechte (π). Aus ihm folgt dann die Giltigkeit der euklidischen Geometrie auf der Grenzkugel, woraus weiter J. Bolyai und N. J. Lobatschefskij ganz unabhängig voneinander die Trigonometrie der hyperbolischen Ebene abgeleitet haben. Neben dieser (jetzt zurückgetretenen) Bedeutung kommt ihr noch eine andere zu.

Man kann durch elementare Konstruktionen eine winkeltreue Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die Grenzkugel herstellen, wobei den Geraden Kreisbogen entsprechen[1]). Man kann aber auch, wie wir unten (§ 4, Nr. 1) sehen werden, durch eine andere, viel elementarere Konstruktion-Zentralprojektion vom unendlich fernen Mittelpunkt P_∞ der Grenzkugel aus die geodätische Abbildung gewinnen, bei der den Geraden der Ebene Grenzkreisbogen der Grenzkugel entsprechen. (Mit anderer Einführung sind diese Abbildungen als „Poincarésche Abbildung“ und „Cayley-Kleinsche Maßbestimmung“ bekannt.)

---

[1]) Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 24 (1914), S. 304—309.

Die vereinfachte Ableitung des Satzes über die Kantenwinkelsumme im Paralleldreikant und seiner wichtigsten Folgen, außerdem die erwähnte geodätische Abbildung bilden zusammen den Gegenstand der folgenden Ausführungen. Es folgt am Schluß noch der Hinweis auf eine paradoxe Erscheinung.

§ I. Sätze und Konstruktionen der hyperbolischen Geometrie[1]).

Die hier zu wählende Art der Begründung der Haupteigenschaft des Paralleldreikantes erfordert gewisse Vorkenntnisse, die zunächst zusammengestellt werden sollen. Dabei ist vor allem Wert darauf zu legen, daß späterhin niemals Konstruktionen verwendet werden, für die zugängliche und zuverlässige Beweise nicht vorliegen. Diese an sich selbstverständliche Forderung muß hier mit Rücksicht auf § 3, Nr. 3 ganz besonders betont werden.

1. Die Transitivität. Mit Hilbert sagen wir von zwei parallelen (stets in einer Ebene gelegenen) Halbstrahlen h_1, h_2: sie haben ein „Ende" P_∞ gemein. Dieses Wort wird voll gerechtfertigt durch die der Beziehung „parallel" zukommende Transitivität, das heißt durch den Satz: Sind h_1 und h_2, h_2 und h_3 parallel, dann sind auch h_1 und h_3 parallel. Diese Transitivität gilt auch im Raum, und es ist daran zu erinnern, daß die durch einen beliebigen Punkt P und die parallelen Halbstrahlen h_1 und h_2 gelegten Ebenen (P, h_1) und (P, h_2), wenn sie nicht gerade zusammenfallen, wenn also P nicht in der Ebene (h_1, h_2) liegt, einander nach einem zu h_1 und h_2 parallelen Halbstrahl schneiden.

2. Die geometrischen Grundaufgaben. Die folgenden drei Grundaufgaben können elementar geometrisch und insbesondere, ohne daß man für die Beweise der Konstruktionen die Raumgeometrie heranzuziehen braucht, gelöst werden.

Die Konstruktion des gemeinsamen Lotes zweier einander nicht schneidenden und nicht parallelen Geraden.

[1]) Vgl. hierzu den Abschnitt C (Elementare nicht-euklidische Geometrie) des Artikels III A B 9 (Zacharias) der Mathem. Enzyklopädie.

Das Parallelenziehen, also die Aufgabe, durch P den zu h parallelen Halbstrahl zu ziehen, wofür man in leicht verständlicher Ausdrucksweise (Nr. 1) auch sagen kann: P mit dem Ende P_∞ von h zu verbinden.

Die Aufgabe: Gegeben P und zwei von P ausgehende Halbstrahlen h und h_1. Es soll F_1 auf h_1 so bestimmt werden, daß der eine der beiden von F_1 ausgehenden zu $F_1 P$ senkrechten Halbstrahlen zu h parallel ist. In der Ausdrucksweise von Lobatschefskij heißt die Lösung dieser Aufgabe die Konstruktion des Lotes $p = PF_1$ zum vorgeschriebenen Parallelwinkel $\Pi(p)$, dem Winkel der Halbstrahlen h, h_1.

Hiernach kann z. B. die folgende Aufgabe der Raumgeometrie gelöst werden: Gegeben zwei Punkte G, H und zwei von ihnen ausgehende Halbstrahlen $g\,(G\,G_\infty)$ und $h\,(HH_\infty)$; es soll die Gerade $G_\infty H_\infty$ konstruiert werden, d. h. die Gerade, die in einem Sinn durchlaufen zu g, im Gegensinn durchlaufen, zu h parallel ist. Um die Aufgabe zu lösen, hat man nur H mit G_∞ zu verbinden (Parallelenziehen!) durch h', dann den Winkel (h, h') zu halbieren (Halbierungslinie h_1) und dann die dritte Grundaufgabe zu lösen. Die auf HF_1 in F_1 senkrecht stehende Gerade verbindet G_∞ mit H_∞.

3. Korrespondierende Punktepaare. Mit Benützung von Winkelhalbierenden kann man den zwischen zwei Parallelen h_1, h_2 gelegenen, zu h_1 und h_2 parallelen „mittleren" Parallelhalbstrahl finden, zu dem h_1 und h_2 symmetrisch liegen. Mit Hilfe dieser Geraden, die man wohl als „Halbierungslinie des Nullwinkels, den h_1, h_2 in ihrem gemeinsamen Ende P_∞ einschließen, bezeichnen kann, können beliebig viele Paare korrespondierender Punkte $P_1\,P_2$ auf h_1 und h_2 gefunden werden, das sind Punkte auf h_1 und h_2, die zur Mittelparallelen symmetrisch liegen.

Was unter „Mittelstrahl" von h_1 und h_2 zu verstehen ist, wenn h_1, h_2 einander (in S) schneiden oder ein gemeinsames Lot $L_1\,L_2$ besitzen, leuchtet ein: Im ersten Fall die Halbierungslinie des Winkels (h_1, h_2), im zweiten Fall die Mittelsenkrechte von $L_1\,L_2$. Korrespondierend heißen auch dann

16*

zwei Punkte P_1 von h_1 und P_2 von h_2, wenn sie symmetrisch zum Mittelstrahl liegen.

Besonders hervorzuheben ist der von J. Bolyai bewiesene und mit so viel Erfolg in seiner absoluten Geometrie verwendete Satz von der Transitivität der Korrespondenzbeziehung: Es seien h_1, h_2, h_3 drei Halbstrahlen eines S-Büschels (Gerade durch S), eines l-Büschels (Gerade, die auf einer weiteren gegebenen Geraden l senkrecht stehen) oder P_∞-büschels (parallele Halbstrahlen). Es seien ferner $P_1 P_2$ korrespondierende Punkte auf h_1, h_2 und $P_2 P_3$ korrespondierende Punkte auf h_2, h_3; dann sind $P_1 P_3$ korrespondierende Punkte auf h_1 und h_3. (Bewiesen wird dieser grundlegende Satz durch Einführung der Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$).

§ 2. Ebenenpaare mit ihren Fallgeraden.

1. Einführung. Wenn zwei Ebenen E_1, E_2 gegeben sind, dann kann man von jedem Punkt P_1 der Ebene E_1 das Lot $P_1 F_2$ auf E_2 und wieder $F_2 F_1$ auf E_1 fällen. $P_1 F_1$ bestimmen dann ein Fallgerade (genauer gesagt, da $P_1 F_1$ einen Sinn des Durchlaufens vorschreibt, einen „Fallhalbstrahl") f_1, der durch P_1 und die Lage der Ebenen E_1, E_2 vollständig bestimmt ist, in der „Fallebene" E $(P_1 F_2 F_1)$ liegt, und der, senkrecht auf E_2 projiziert, als Grundriß einen korrespondierenden Fallhalbstrahl f_2 ergiebt.

Konstruiert man mit Hilfe zweier „Fallebenen" E', E'' von E_1, E_2 die Paare f_1', f_2'; f_1'', f_2'' von Fallgeraden, so erhält man ein Vierkant mit vier rechten Winkeln.

Diese äußerst einfache Beziehung wird uns später (§ 3, Nr. 1) den Satz von der Winkelsumme im Paralleldreikant liefern.

Liegen zwei Ebenen vor, so genügt ein Paar f_1', f_2' von Fallgeraden, um die Lagebeziehung von E_1, E_2 zu kennzeichnen. Den drei Möglichkeiten für die Lage von f_1', f_2'

(S-Paar, l-Paar, P_∞-Paar, § 1, Nr. 3) entsprechen drei Möglichkeiten für E_1, E_2, die der Reihe nach zu erörtern sind.

2. s-Paare. Schneiden f_1', f_2' einander in einem Punkt S', so haben E_1, E_2 die Gerade s gemein, die auf der Fallebene E' in S' senkrecht steht. Die Ebene bilden dann, wie wir sagen wollen, ein s-Paar. Es sei noch betont, daß es in diesem Fall in jeder der beiden Ebenen zwei Parallelenbüschel gibt, die Parallelen in der anderen Ebene besitzen, sie werden gebildet von den durch die Enden $R_\infty\, T_\infty$ von s gehenden Geraden.

Auch ist auf die Umkehrung hinzuweisen: Es sei P_1 irgend ein Punkt in E_1, P_2 irgend ein Punkt in E_2. Wenn es dann durch P_1 in E_1 zwei Halbstrahlen gibt ($P_1 R_\infty$, $P_1 T_\infty$), zu denen in E_2 durch P_2 parallele Halbstrahlen vorhanden sind ($P_2 R_\infty$, $P_2 T_\infty$), dann liegt die nach § 1, Nr. 2 zu konstruierende Gerade $R_\infty T_\infty$ in beiden Ebenen, die Ebenen haben also eine Gerade s gemein, woraus dann folgt, daß korrespondierende Fallgeraden einander auf s schneiden.

3. l-Paare. Haben f_1', f_2' ein gemeinsames Lot $L_1 L_2$, dann ist $L_1 L_2$ zugleich das gemeinsame Lot der beiden Ebenen E_1, E_2. Man kann in diesem Fall E_1, E_2 durch Drehung von f_1' und f_2' um die Gerade l, die Trägerin von $L_1 L_2$ erzeugen. Ein solches Paar soll „l-Paar" heißen.

Wenn E_1, E_2 ein l-Paar bilden, so gibt es kein Paar paralleler Geraden g_1 (in E_1), g_2 (in E_2). In der Tat, es müssen g_1, g_2 in einer Ebene liegen, die sowohl E_1 wie E_2 schneidet. Fällt man auf diese Ebene E von L_1 und L_2 aus die Lote, so folgt weiter durch Verwendung von Symmetrie-Eigenschaften, daß die Verbindungslinie der Fußpunkte dieser Lote g_1 und g_2 senkrecht schneidet, daß also g_1, g_2 ihrerseits ein l-Paar von Geraden sind, nicht parallel sein können.

4. P_∞-Paare. Zu besonderen Erörterungen gibt die dritte Möglichkeit Anlaß: f_1', f_2' haben ein Ende S_∞' gemein. Es sei dann P_1' ein nicht auf f_1' gelegener Punkt von E_1, so kann der von P_1'' ausgehende Fallhalbstrahl f_1'' mit f_1' zusammen weder ein S-Paar noch ein l-Paar bilden; denn im ersten Falle

würden die beiden Ebenen ein l-Paar, im zweiten ein s-Paar bilden. Also ist f_1'' entweder zu f_1' und f_2' parallel, geht durch S_∞', oder f_1'' ist zu dem im Gegensinn zur Fallrichtung durchlaufenen f_1' parallel, verbindet also, wie wir sagen können, P_1'' mit dem Gegenende G_∞' von f_1'.

Daß dies unmöglich ist, leuchtet ein, muß aber noch begründet werden. Durch jeden Punkt P_1 von E_1 ginge dann ein zu f_1' paralleler Halbstrahl $P_1 S_\infty'$ und ein zu f_1'' paralleler Halbstrahl $P_1 G_\infty'$. Ebenso ginge dann durch jeden Punkt P_2 von E_2 ein zu f_1' paralleler Halbstrahl $P_2 S_\infty'$ und ein zu f_2'' paralleler Halbstrahl $P_2 G_\infty'$. Die Ebenen hätten also nach Nr. 2 dieses Paragraphen die Gerade $S_\infty' G_\infty'$ gemein, besäßen eine gemeinsame Gerade, was unmöglich ist.

Ein solches Ebenenpaar soll „P_∞-Paar" heißen.

5. Übersicht. Die Ergebnisse von Nr. 2—4 dieses Paragraphen können wir zusammenfassen und erweitern: Zwei Ebenen haben entweder eine Gerade s gemein, oder sie besitzen ein gemeinsames Lot, oder sie sind ein P_∞-Paar. Die zu den beiden Ebenen senkrechten Ebenen (Fallebenen) stehen im ersten Fall sämtlich auf s senkrecht, im zweiten Fall gehen sie sämtlich durch $L_1 L_2$, im dritten Fall gehen sie alle durch P_∞.

Wir können das Ergebnis auch so fassen: Zu jedem Achsenbüschel (s-Büschel) von Ebenen gehört ein Büschel von Orthogonalebenen, die alle Ebenen des ersten Büschels, daher auch seine Achse s senkrecht schneiden, umgekehrt gehört zu jedem „Lotbüschel" ein orthogonales „Achsenbüschel".

Der Begriff der P_∞-Büschel, den wir jetzt besprechen, bedarf einiger Bemerkungen.

Um ein P_∞-Büschel von Ebenen zu charakterisieren, braucht man eine Ebene E_1 und in ihr ein Büschel paralleler Halbstrahlen, das wir kurz mit P_∞ bezeichnen dürfen. Will man durch einen Punkt P_ν die dem Büschel angehörige Ebene E_ν bestimmen, so hat man P_ν aus einerseits das Lot $P_\nu F_1$ auf E_1 zu füllen, anderseits P_ν mit P_∞ zu verbinden (§ 1, Nr. 2). Die auf der Ebene $(P_\nu F_1 P_\infty)$ längs $P_\nu P_\infty$ senkrechte Ebene ist die gesuchte E_ν. Die hier benützte „Fallebene“ $E(P_\nu F_1 P_\infty)$ bestimmt zusammen mit P_∞ das zum ersten Büschel orthogonale P_∞-Büschel.

6. Korrespondierende Punkte auf Fall-Linien. Es seien f_1', f_2' korrespondierende Fallhalbstrahlen auf E_1, E_2 (§ 2 Nr. 1), ferner f_3', f_4' .... die korrespondierenden Fallhalbstrahlen auf den weiteren Ebenen des durch E_1, E_2 bestimmten Ebenenbüschels. Die f' bilden dann ihrerseits ein in der Fallebene E' gelegenes Halbstrahlenbüschel, und wir können zu einem beliebigen Punkt P_1' auf f_1' die zugehörigen korrespondierenden Punkte (§ 1, Nr. 3) P_2', P_3' ... auf f_2', f_3' ... konstruieren, wissen auch, daß wenn P_1', P_2' und $P_1 P_2$ einander auf f_1', f_2' und f_1', f_3' zugeordnet sind, $P_2' P_3'$ zugeordnete Punkte auf $f_2' f_3'$ sein müssen (Transitivität, § 1, Nr. 3). Genau so können wir zu P_1' auf den Fallebenen E'', E''' ... des Paares E_1, E_2 die korrespondierenden Punkte bestimmen.

7. Drehzylinder und Grenzkugel. Im allgemeinen Falle, dann nämlich, wenn eines der beiden Büschel ein s-Büschel ist, das andere ein l-Büschel, gehören die durch Fortsetzung der Konstruktionen gewonnenen Reihen korrespondierender Punkte einem Drehzylinder an, dessen Achse s und dessen Radius $r = P_1' S_1'$ ist und jede Reihe korrespondierender Punkte gehört entweder einem Kreis vom Radius r an ($P_1' P_2' P_3'$ ...) oder einer Abstandslinie (P', P'', P''' ...).

Da auf einem Drehzylinder die Parallelkreise — Schnitte der Ebenen senkrecht zur Achse — und Meridiane — Schnitte der durch die Achse gehenden Ebenen (hier Abstandslinien, in der euklidischen Geometrie die (geraden) Mantellinien einander senkrecht durchsetzen und je zwei Parallelkreise auf den Meridianen gleiche Stücke abschneiden, ebenso je zwei Meridiane auf den Parallelkreisen, so ergibt sich, daß auf den Drehzylinder des hyperbolischen Raumes die euklidische Geometrie gilt. Den Geraden der Ebene entsprechen Schraubenlinien.

Diese Betrachtung ist leicht tiefer zu begründen[1]).

Das ist hier nicht die Aufgabe, vielmehr soll dies nur ein Wegweiser sein, zu dem später (§ 3, Nr. 2) zu beweisenden Satz, daß auf der Grenzkugel die euklidische Geometrie gilt.

Wenn nämlich die beiden zueinander orthogonalen Ebenenbüschel P_∞-Büschel sind, so werden aus den Meridianen und Parallelkreisen Grenzkreise (Orte korrespondierender Punkte auf Parallelen) aus dem Drehzylinder eine Fläche, die die Gesamtheit der jetzt sämtlich ein gemeinsames Ende enthaltenden Fallgeraden senkrecht schneidet. Die Drehzylinder haben zwei Büschel von Symmetrieebenen, die Ebenen durch die Achse und die Ebenen senkrecht zur Achse. [Wesentlich für die beschriebene Ausartung des Drehzylinders, die Grenzkugel, wird sein, daß alle Ebenen durch P_∞ Symmetrieebenen sind (vgl. § 3, Nr. 2) und nicht nur die Meridiane und Parallelkreise, sondern auch die Schraubenlinien zu Grenzkreisen ausarten.] Die Vermutung, daß auch dann noch die euklidische Geometrie gelten wird, liegt sehr nahe.

§ 3. Die Geometrie auf der Grenzkugel.

1. Die Winkelsumme im Paralleldreikant. Die in § 2, Nr. 1 eingeführten rechtwinkligen Vierkante können jetzt benützt werden, um zu beweisen, daß die Summe der Kantenwinkel im Paralleldreikant zwei Rechte (π) beträgt.

Wir beginnen mit dem an der Kante g_2 rechtwinkligen Paralleldreikant (g_1, g_2, g_3), dessen Ebenen mit E_{12}, E_{23}, E_{31} bezeichnet werden mögen. Auf der zu E_{12} längs g_1 senkrechten Ebene E_{14} ist g_1 korrespondierende Fallgerade zu g_2 auf E_{23} (§ 2, Nr. 4). Zu g_3, einem Fallhalbstrahl der Ebene E_{23} . . . konstruiert man dann den korrespondierenden g_4 auf E_{14} und hat damit ein rechtwinkliges Parallelvierkant (g_1, g_2, g_3, g_4) erhalten.

In dem durch E_{14} und E_{23} bestimmten Büschel von P_∞-Ebenen (§ 2, Nr. 4) gibt es eine Symmetrieebene, zu der E_{14},

[1]) Vgl. auch die Betrachtung über das Krümmungsmaß, § 4, Nr. 4.

E_{23} symmetrisch liegen, ebenso besitzen E_{12} und E_{43} eine Symmetrieebene durch P_∞. Diese beiden Symmetrieebenen schneiden einander senkrecht nach einer Geraden, die ebenfalls durch P_∞ geht, das heißt zu g_1, g_2, g_3, g_4 parallel ist und die außerdem im Mittelpunkt M des aus vier korrespondierenden Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ gebildeten symmetrischen Vierecks auf der Ebene des Vierecks senkrecht steht. Da $P_1 P_\infty$, d. i. g_1 und g_2, g_3, g_4 sämtlich zu $M P_\infty$ parallel sind, so folgt weiter aus

$$P_1 M = P_2 M = P_3 M = P_4 M$$

und

$$\sphericalangle P_\infty M P_1 = \sphericalangle P_\infty M P_2 = \sphericalangle P_\infty M P_3 = \sphericalangle P_\infty M P_4 = \frac{\pi}{2}$$

daß auch P_1 und P_3, P_2 und P_4 Paare korrespondierender Punkte (§ 1, Nr. 2) auf den Parallelen g_1 und g_3, g_2 und g_4 sind.

(Im allgemeinen Fall, § 2, Nr. 2 und 3, sind $g_3 g_1$, $g_2 g_4$ zueinander windschief!)

Hieraus folgt dann die Kongruenz der Tetraeder $(P_1 P_2 P_3 P_\infty)$ und $(P_3 P_4 P_1 P_\infty)$, also die Kongruenz der Paralleldreikante (g_1, g_2, g_3) und (g_3, g_4, g_1), deren jedes also die Winkelsumme $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ besitzt.

Ist das Paralleldreikant nicht rechtwinklig und etwa bei g_1 der größte Kantenwinkel, so zerspaltet man in zwei an der Kante h_1 rechtwinklige Paralleldreikante (g_1, g_2, h_1) und (g_1, g_3, h_1), wobei h_1 die senkrechte Projektion von g_1 auf die Ebene (g_2, g_3) ist. Für (g_1, g_2, g_3) ergibt sich dann die Summe der Kantenwinkel

$$\pi + \pi - 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Damit ist der allgemeine Satz bewiesen.

Die Summe der Kantenwinkel im Paralleldreikant beträgt zwei Rechte.

2. Die Symmetrie-Eigenschaft der Grenzkugel. Die Grenzkugel ist hier zunächst definiert durch einen Punkt P_1 und einen von P_1 ausgehenden Halbstrahl g_1 (Hauptachse) $P_1 P_\infty$.

Alle weiteren Punkte P_2, P_3 . . . sind definiert als korrespondierende Punkte zu P_1 (§ 1, Nr. 3) auf den zu g_1 parallelen (Nebenachsen) g_2, g_3 . . .

Wir wollen zeigen, daß diese Nebenachsen mit der Hauptachse gleichberechtigt sind, d. h. daß P_3 auch der zu P_2 (auf g_2) korrespondierende Punkt von g_3 ist. Diese erweiterte Transitivität der Korrespondenzbeziehung folgt leicht aus der für die Ebene in § 1, Nr. 3 erwiesenen. Man braucht nur, wie am Schluß der vorigen Nummer g_1 auf $(g_2\, g_3)$ zu projizieren und den zu P_1 korrespondierenden Punkt Q_1 auf dieser Projektion h_1 zu beachten, desgleichen den zu P_2 im Sinne von § 2, Nr. 6 korrespondierenden Q_2', der auf der zu g_2 korrespondierenden, zur „Fallebene" (g_1, h_1) längs g_1 senkrechten Ebene liegt. Es bilden dann $P_1\, Q_1\, P_2\, Q_2$ ein symmetrisches Viereck korrespondierender Punkte, also sind insbesondere

	Q_1, P_2	korrespondierende Punkte auf	h_1, g_2,
ebenso	Q_1, P_3	„ „ „	h_1, g_3.

Daher sind (§ 1, Nr. 3) die Punkte $P_2\, P_3$ ebenfalls korrespondierend auf g_2, g_3.

Wenn man also, von P_2 und g_2 ausgehend, dieselbe Konstruktion ausführt, wie zuvor von P_1 und g_1 aus, so erhält auf jedem zu g_1 und g_2 parallelen Halbstrahl g_ν wieder denselben Punkt P_ν.

Alle Achsen sind also gleichberechtigte Symmetrieachsen (Drehachsen) der Grenzkugel.

Hieraus in Verbindung mit dem Satz von der Winkelsumme im Paralleldreikant, der sich auf das von drei (durch P_∞ enthaltende Diametralebenen ausgeschnittene) Grenzkreisbogen gebildete Dreieck überträgt, folgt die Giltigkeit der euklidischen Geometrie auf der Grenzkugel.

3. Rückblick. Die Verwendung der Eigenschaften der aus Fallgeraden gebildeten rechtwinkligen Vierkante, der P_∞-Büschel von Ebenen (§ 2, Nr. 5) und die gehörige Heranziehung von Spiegelbildern (Symmetrien) gibt einen viel natürlicheren Zugang zu den Fundamentalsätzen als die klassische

auch in die Lehrbücher übergegangenen Beweise, die, mit Schopenhauers temperamentvollem Wort zu reden, an die „Mausefallenbeweise des Euklid" erinnern.

Die Bedeutung der P_∞-Büschel hat, wie ich nachträglich feststellte, auch Max Simon[1]) voll gewürdigt, indessen sind seine Betrachtungen, die mit der „absoluten Geometrie" des Johann Bolyai zwar meist die orakelhafte Kürze, nirgends jedoch die bindende Beweiskraft gemein haben, in der Fachliteratur unbemerkt geblieben. Simon verfügte gewiß über eine bedeutende, den von Gauß sehr scharf „Böotier" benannten, die die Kongruenzsätze vom euklidischen Parallelenpostulat nicht trennen können, unzugängliche nichteuklidische Vorstellungskraft. Es ist daher sehr zu bedauern, daß nur das genannte „Bruchstück aus einer größeren Arbeit, deren Druck 1892 durch den Tod Kroneckers unterblieben ist", an die Öffentlichkeit kam. Das ist um so mehr zu bedauern, als um dieselbe Zeit das Journal für reine und angewandte Mathematik (Bd. 112, 1893) einem „Beweis des Parallelenpostulates" von H. Schmidt (?) seine Spalten geöffnet hat! Dieser Beweis segelt unter harmloser Flagge, das ist zuzugeben, und sucht sein erhabenes Ziel ein wenig zu verstecken.

§ 4. Gnomonische Abbildung der Grenzkugel.

1. Eigenschaften der Abbildung. Eine gegebene, die Grenzkugel F in P_0 berührende Tangentialebene T, eine Ebene also, die in P_0 auf der Achse $P_0 P_\infty$ senkrecht steht, wollen wir mit F durch „gnomonische Projektion von P_∞ aus" in Beziehung setzen, wir wollen also jedem Punkt Q von T den Schnittpunkt P des Halbstrahls $Q P_\infty$ mit F zuordnen.

Die Bilder P der Q füllen dann nicht F vollständig aus, sondern liegen innerhalb eines Fundamentalkreises (Fk), auf den die folgende Konstruktion führt. Wir betrachten in

[1]) Die Geometrie der Zwischenebene und der Grenzfläche. Jahresbericht d. D. Math. Ver. 7 (1899), S. 67—76. Gleich der Beweis des ersten Satzes ist unverständlich.

T einen Halbstrahl $P_0 Q_\infty$ und beachten die gnomonischen Projektionen der Punkte dieses Halbstrahls auf F. Sie liegen sämtlich innerhalb des Grenzkreisbogens (Diametralschnittes) von F, der durch P_0 und die Spur P' der Geraden $P_\infty Q_\infty$ auf F begrenzt ist, und dessen Länge, nebenbei bemerkt, gerade die nichteuklidische Streckeneinheit ist (die Quadratwurzel aus dem absoluten Betrag des negativen Krümmungsmaßes). Diese Konstruktion lehrt also: Die Bilder der Punkte Q auf F liegen alle innerhalb eines Kreises (Fk) mit dem Mittelpunkt P_0 und dem Halbmesser $P_0 P' = 1$. Dabei ist die Strecke $P_0 P'$ selbstverständlich auf F zu messen, die Sehne $(P_0 P')$ ist kleiner als 1.

Den Geraden (h) in T entsprechen bei der gnomonischen Projektion auf F Schnitte mit Ebenen durch P_∞, also Grenzkreisbogen (g), die auf dem Fk enden in den Schnittpunkten $R' S'$ der Verbindungsgeraden von P_∞ mit den Enden $R_\infty S_\infty$ von h. Einem R_∞-Büschel von Geraden in T entspricht auf F ein Büschel von Grenzkreisbogen g, die den Punkt R' des Fk gemein haben.

2. Bilder der l-Büschel. Um zu zeigen, daß auch den l-Büscheln von Geraden der T-Ebene, den Geraden (h) also, die alle auf einer Geraden l senkrecht stehen, bei der Abbildung wieder Büschel von g entsprechen, führen wir folgende Konstruktion aus: Wir fällen auf l von P_0 aus das Lot $P_0 L = q$, errichten in L die Senkrechte auf T und erteilen ihr (vgl. die dritte Grundaufgabe, § 1, Nr. 2) eine solche Länge $L L_1 = q'$, daß die Verbindungslinie von L_1 mit P_∞, die übrigens in der Ebene $P_\infty P_0 L L'$ liegt, auf $L L_1$ senkrecht steht. Die außerhalb des Fk gelegene Spur von $L_1 P_\infty$ auf F wollen wir mit $\bar{L}$ bezeichnen und den „darstellenden Punkt von l" benennen.

Dann kann man über die Bilder der zu l senkrechten in T gelegenen Geraden auf F aussagen, daß sie auf Grenzkreisen liegen, die durch $\bar{L}$ gehen. In der Tat schneiden die durch die Achse $L_1 \bar{L} P_\infty$ gelegten Ebenen, die die gnomonische Abbildung vermitteln, F nach Grenzkreisen durch $\bar{L}$, und T entweder überhaupt nicht oder nach Geraden, die auf l senkrecht stehen. Einem l-Büschel in T entspricht also ein g-Büschel auf F, dessen Grundpunkt L außerhalb des Fk liegt.

Die Bilder der Enden K_∞ M_∞ von l auf F sind, wie wir schon wissen, zwei Punkte K', M' des Fk (Nr. 1 am Schluß), und die beiden L mit K' und M' verbindenden Grenzkreisbogen auf F können den Fk nicht zum zweiten Mal treffen, denn ihre im Innern des Fk gelegenen Teile wären dann die Bilder von Geraden der Ebene T, die auf l senkrecht stehen und mit l ein Ende K_∞ oder M_∞ gemein haben. Da es solche Geraden nicht gibt, müssen die L mit K' und M' verbindenden Grenzkreisbogen Tangenten des Fundamentalkreises sein.

Hieraus folgt also:

Sind K' und M' die Bilder der Enden K_∞, M_∞ von l auf F, so ist L der Schnittpunkt der auf F an den Fk in K' und M' gelegten g-Tangenten, also der Pol der S-Kante $K'M'$ des Fk, die das Bild von l ist.

Insbesondere folgt daraus auch: Wenn zwei Gerade in T einander senkrecht schneiden, dann haben ihre Bilder auf F die Eigenschaft, daß jedes über den Fk hinaus verlängert den Pol der andern hinsichtlich des Fundamentalkreises enthält.

3. Analytische Darstellung[1]. Es sei $P_0 Q = r$ der Abstand eines Punktes Q in T von P_0 — dem Berührungspunkt von T und Anfangspunkt eines (ebenen) Polarkoordinatensystems — und $P_0 P = \varrho$ der geodätische, auf der Grenzkugel zu messende Abstand des Punktes P (Bildpunkt von Q) von P_0, dann ist

1) $$\varrho = th\, r = \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}}.$$

Es sei q die Länge des von P_0 auf die Gerade l gefällten Lotes $P_0 L$, ferner L im Sinne von Nr. 2 der „darstellende

[1] Vgl. hierzu außer dem bei § 1 genannten Artikel von Zacharias z. B. Kap. III und V von Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, zweite Auflage (Leipzig 1912).

Punkt“ dieser Geraden auf F. Dann kann man den Grenzkreisbogen $\bar{\varrho} = \overline{P_0 L}$ durch q ausdrücken, indem man das Lot $P_0 L_2 = t$ auf die Achse fällt und anderseits berücksichtigt, daß t einem Viereck mit drei rechten Winkeln $P_0 L L_1 L_2$ angehört, indem man die Seiten $P_0 L = q$ und

$$L L_1 = q' \left(\Pi(q) + \Pi(q') = \frac{\pi}{2} \right)$$

kennt. Man erhält

$$\bar{\varrho} = sh\, t = sh\, q : ch\, q = \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} = cth\, q. \tag{2}$$

Führt man nun noch auf T und F die Polarwinkel ein, φ für Punkte, ψ für die von P_0 auf die Geraden gefällten Lote, so sind die Weierstraßschen Punktkoordinaten eines Punktes $Q\,(r, \varphi)$:

$$p = ch\, r, \quad x = sh\, r \cos\varphi, \quad y = sh\, r \sin\varphi, \tag{3}$$

und die Weierstraßschen Linienkoordinaten einer durch $P_0 L = \eta$ und den Winkel ψ dieses Lotes mit der Anfangsrichtung bestimmten Geraden:

$$w = sh\, q, \quad u = ch\, q \cos\psi, \quad v = ch\, q \sin\psi. \tag{4}$$

Als rechtwinklige Koordinaten des zugeordneten P erhält man dann

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\varphi = th\, r \cos\varphi = \frac{x}{p}, \\ \eta &= \varrho \sin\varphi = th\, r \sin\varphi = \frac{y}{p}, \end{aligned} \tag{5}$$

und die rechtwinkligen Koordinaten des darstellenden Punktes L einer Geraden (Nr. 2 dieses Paragraphen) werden

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \bar{\varrho} \cos\psi = cth\, q \cdot \cos\psi = \frac{u}{w}, \\ \bar{\eta} &= \bar{\varrho} \sin\psi = cth\, q \cdot \sin\psi = \frac{v}{w}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Formeln 5) und 6) stehen an der Spitze der analytischen Behandlung der Cayley-Kleinschen Maßbestimmung.

Die Gleichung, welche die Koordinaten (x, y, p) der Punkte der Geraden (u_0, v_0, w_0) erfüllen, lautet

$$x u_0 + y v_0 - p w_0 = 0,$$

oder also nach 5) und 6)

$$\xi \xi_0 + \eta \eta_0 - 1 = 0,$$

und bringt in dieser Form zum Ausdruck, daß $\bar{L}$ der Pol des Bildes der Geraden l ist hinsichtlich des durch

$$\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$$

dargestellten Fundamentalkreises.

4. **Konvexe Flächen mit negativem Krümmungsmaß.** Zum Schluß sei noch eine Bemerkung über das Krümmungsmaß von Flächen im hyperbolischen oder pseudosphärischen Raum gestattet mit Rücksicht auf § 2 Nr. 7.

Das aus der quadratischen Differentialform für das Linienelement

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

berechnete Gaußsche Krümmungsmaß verliert im pseudosphärischen Raum die bekannte durch die Formel

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

ausgedrückte Bedeutung, die dieser Invariante der $E_1 F_1 G$ im euklidischen Raum zukommt.

Man erhält vielmehr nach Bianchi[1]) für Flächen im Raume konstanter negativer Krümmung $(-1 : a^2)$ die Beziehung

$$K = \frac{1}{a^2}\left(cht\frac{R_1}{a}\, cht\frac{R_2}{a} - 1\right),$$

die, wie Bianchi auch hervorhebt, daran geknüpft ist, daß die Hauptnormalschnitte im Bezugspunkt wirklich Krümmungs-

[1]) Vgl. hierzu Bianchi (Lukat), Differentialgeometrie (Leipzig 1899), Kap. XXII, S. 623.

radien besitzen. Wird der „Zykl“, der den Hauptnormalschnitt im Bezugspunkt oskuliert, eine Abstandslinie, eine Kurve also, die der Ort der Endpunkte gleichlanger Strecken R ist, die auf einer Geraden senkrecht stehen, so ist in K einzusetzen

$$cth\left(\frac{\bar{R}}{a}+\frac{i\pi}{2}\right)=th\,\frac{R}{a}.$$

Danach enthält man z. B. bei einem Drehzylinder vom Radius r:

$$K=\frac{1}{a^2}\left(cth\,\frac{r}{a}\,th\,\frac{r}{a}-1\right)=0$$

und bei der Grenzkugel wegen

$$R_1=R_2=\infty$$

und

$$cth\,\infty=1$$

ebenfalls $K=0$. Wir erkennen in Ergänzung von § 2, Nr. 7 die Abwickelbarkeit der genannten Flächen auf die euklidische Ebene jetzt auch daraus, daß das Krümmungsmaß zu Null wird.

Ganz allgemein können wir über die Flächen vom Krümmungsmaß $K=0$ im pseudosphärischen Raum auf Grund der mitgeteilten Beziehungen aussagen: Sie sind konvex und es muß sein

$$cth\,\frac{R_1}{a}\cdot th\,\frac{\bar{R}_2}{a}=1,\ \text{d. h.}\ \bar{R}_2=R_1,$$

der eine Hauptschnitt wird also von einem Kreis (Radius R_1), der andere von einer Abstandslinie oskuliert, deren Nullachse im Mittelpunkt des genannten Kreises auf der Flächennormale senkrecht steht.

Den von Gauß „gefürchteten“ Gegnern der pseudosphärischen Geometrie, die, wie eine in den letzten Jahren geführte Diskussion zeigt, noch nicht ausgestorben sind, möchte ich eine Paradoxie unterbreiten.

Die Abstandsflächen (Örter der Endpunkte von Strecken konstanter Länge l, die auf einer gemeinsamen „Nullebene“ senkrecht stehen) sind in der euklidischen Raumgeometrie selbstverständlich Ebenen. Im pseudosphärischen Raum aber erhält man ganz gewiß konvexe Flächen (Hypersphären), deren Dupinsche Indicatrix wegen der Rotationssymmetrie der Fläche um jede Normale ein Kreis, deren Tangentialebenen Stützebenen sind, nicht Schnittebenen wie bei Flächen negativer Krümmung im euklidischen Raum.

Die Berechnung des Krümmungsmaßes gibt aber den konstanten negativen Wert

$$K = \frac{1}{a^2}\left(th^2 \frac{l}{a} - 1\right) = -\frac{1}{a^2\, ch^2 \frac{l}{a}}.$$

Die Hypersphären sind also konvexe Flächen mit negativem Krümmungsmaß.