

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Eine Eigenschaft der C. Neumannschen Konfigurationskonstante.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Dezember 1914.

Bei der Untersuchung der Konvergenz seiner für die Lösung der ersten (Dirichletschen) Randwertaufgabe der Potentialtheorie aufgestellten Reihen hat C. Neumann die Konfigurationskonstante λ eingeführt¹⁾. Sollen nämlich jene Reihen konvergieren, so muß die Begrenzungs- oder Randkurve (s) des ebenen Gebietes bzw. die Begrenzungs- oder Randfläche (S) des Raumgebietes, für das die Randwertaufgabe gelöst, d. h. die im Innern des Gebietes der Laplaceschen Differentialgleichung genügende und zugleich auf dem Rand vorgeschriebene Werte besitzende Funktion bestimmt werden soll, so muß die Konfigurationskonstante λ der Berandung kleiner als Eins sein.

Dabei ist

$$\lambda = 1 - \frac{\mu}{2h\pi} \begin{pmatrix} h = 1 \text{ für das ebene Problem} \\ h = 2 \text{ für das räumliche Problem} \end{pmatrix}$$

und

$$\mu = \text{Min}(J_1^I + J_2^{II}),$$

und es sind unter J_1^I und J_2^{II} die scheinbaren Größen zu verstehen, d. h. die Sehwinkel (im Raum durch Kegelöffnungen dargestellt), unter denen das Stück $s_I(S_I)$ der Berandung vom

¹⁾ Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential (Leipzig 1877), S. 172.

Randpunkt P_1 und das Reststück $s_{II}(S_{II})$ der Berandung vom Randpunkt P_2 aus erscheint. Die Erklärung verlangt, man soll P_1 und P_2 sowie die Einteilung des Randes so wählen, daß μ möglichst klein wird.

Später hat u. a. E. R. Neumann bewiesen, daß in der Ebene die Konfigurationskonstante λ der Berandung (Randkurve) sich bei Inversion (Transformation durch reziproke Radien) nicht ändert¹⁾ und damit gezeigt, daß die Methoden von C. Neumann auch noch auf ebene Gebiete anwendbar sind, deren Randkurve nicht überall konvex ist. Was dagegen die Konfigurationskonstante einer geschlossenen Fläche betrifft, so spricht er die Vermutung aus, daß in diesem Fall ein entsprechender Satz nicht mehr gilt, fügt aber hinzu, daß diese Frage noch nicht endgültig beantwortet sei und begründet „inwiefern diese Untersuchungen im Raum weit größere Schwierigkeiten darbieten“²⁾.

Im folgenden wird nun der Beweis für diese Vermutung erbracht, d. h. es wird gezeigt:

Die Konfigurationskonstante λ' jeder aus einer geschlossenen Fläche (S) mit der Konfigurationskonstanten λ durch Inversion entstehenden Fläche (S') ist im allgemeinen von λ verschieden.

Eine Ausnahme von diesem Satz bildet, weil alle zueinander ähnlichen Flächen dasselbe λ haben, selbstverständlich die Kugel, die einzige Fläche übrigens, deren Konfigurationskonstante bekannt ist³⁾.

Es genügt für den Beweis des Satzes, irgend ein Paar von Flächen anzugeben, die auseinander durch Inversion hervorgehen und deren Konfigurationskonstanten λ und λ' verschiedene Werte haben. Dem stellt sich aber ein Hindernis entgegen. So leicht es nämlich ist, für eine einfach gestaltete Fläche das gesuchte Minimum μ anzugeben, so schwer fällt jeder Versuch, in aller Strenge den Beweis zu erbringen, daß das unmittel-

¹⁾ Math. Annalen 55 (Leipzig 1902), S. 45 ff.

²⁾ A. a. O., S. 52.

³⁾ A. a. O., S. 39.

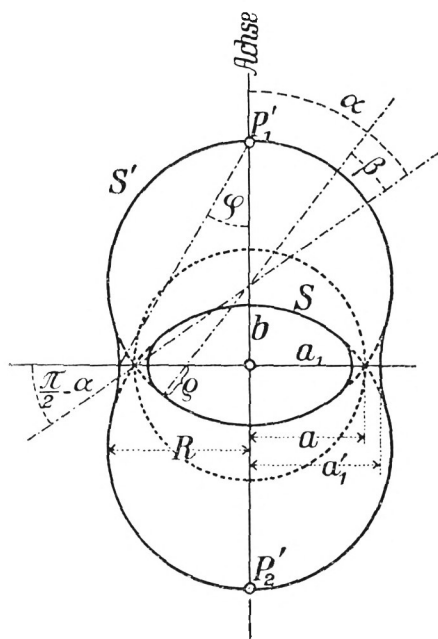
bar durch die Anschauung gefundene Punktepaar $P_1 P_2$ mit der zugehörigen Gebietsteilung S_I , S_{II} der Randfläche nun auch wirklich das Minimum μ liefert. So unterliegt es z. B. keinem Zweifel, daß man beim dreiachsigen Ellipsoid¹⁾ für P_1 und P_2 die Endpunkte der größten Achse zu wählen hat und als Grenze zwischen S_I und S_{II} den zur größten Achse senkrechten Hauptschnitt, wobei sich dann μ als Summe der Öffnungen der beiden Kegel ergibt, welche jenen Hauptschnitt enthalten und P_1 und P_2 als Spitzen. Aber schon der Versuch eines Nachweises, daß auf diese Weise auch nur ein relatives Minimum gewonnen wird, stößt auf große rechnerische Schwierigkeiten.

Man kann aber einen anderen Weg einschlagen, indem man nämlich für eine geeignet gewählte Fläche (S) eine untere Schranke (m) von $J_1^I + J_2^{II}$ und damit auch von μ angibt, für die durch richtig gewählte Inversion daraus abgeleitete Fläche aber eine obere Grenze oder Schranke (M') für das Minimum μ' . Ergibt sich, daß m größer als M' ist, so sind μ und μ' und damit λ und λ' sicher verschieden.

Dieses Verfahren können wir in der Tat durchführen, und zwar nehmen wir als Fläche S die Berandung des linsenförmigen konvexen Rotationskörpers, welche die Figur im Meridianschnitt darstellt. Diese Fläche besteht aus zwei Kugelhäuben, welche durch die Zone einer Ringfläche verbunden sind, und hat als Symmetrieebene noch die Ebene des Schnittkreises der beiden kongruenten Kugeln, denen die Häuben angehören.

Diese Linsenfläche hat drei wesentliche Konstanten, nämlich den Radius a des Schnittkreises der Kugeln, die Länge $2b$ der Achse und den Radius ϱ des Meridiankreises der Ringfläche. Führt man statt b und ϱ die in der Figur angegebenen

¹⁾ A. a. O., S. 31–34 wird die Konfigurationskonstante der Ellipse bestimmt. Man erhält sie, indem man für P_1 und P_2 die Endpunkte der großen Achse nimmt und P_1 und P_2 mit den Endpunkten der kleinen Achse verbindet.



Winkel α und β ein, so ergeben sich, wenn noch der Radius der Kugeln mit R bezeichnet wird, die Zusammenhänge:

$$R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$b = a \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$R - b = a \cot \alpha$$

$$\varrho = R - \frac{R - b}{\cos(\alpha - \beta)} = a \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cot \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \right).$$

Ist β gleich Null, so wird auch ϱ zu Null und aus der Linsenfläche wird die erweiterte (scharfrandige) Linsenfläche, die nur mehr aus zwei erweiterten Kugelhauben besteht.

Wir suchen nunmehr die verlangte untere Schranke m und stellen zuvor fest:

1. Die scheinbare Größe

$$dJ = dS \frac{\cos(n, r)}{r^2}$$

des Flächenelementes dS , gesehen von einem Randpunkt P aus, der den Abstand r von dS hat, ist bei einer konvexen Fläche immer positiv. Demnach verkleinern wir die Summe $J_1^I + J_2^{II}$ sicher, wenn wir bei der Schätzung dieser Summe für die Linsenfläche die Ringzone fortlassen.

2. Beschreibt man um dS als Mittelpunkt eine Kugel, so ist die scheinbare Größe dJ des Elementes, gesehen von einem Punkt der Kugel aus, um so kleiner, je kleiner der Abstand des Punktes von der Ebene des Elementes ist.

3. Die scheinbare Größe dJ des Elementes dS , gesehen von einem Punkte einer Kugel aus, die das Element enthält, ist um so kleiner, je weiter der Punkt von dS entfernt ist. Ist nämlich R der Radius der Kugel,

$$r = 2R \sin \varphi$$

der Abstand des Punktes P von dS , so wird

$$dJ = \frac{dS}{r^2} \cos(n, r) = \frac{dS \cdot \sin \varphi}{4R^2 \sin^2 \varphi} = \frac{dS}{4R^2 \sin \varphi},$$

nimmt also ab, wenn φ wächst und erreicht sein Minimum für den Gegenpunkt $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ des Elementes dS .

Dies alles ist bei der Abschätzung zu berücksichtigen.

Wir setzen fest, daß α kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. dJ wird dann wegen (2) verkleinert, wenn man statt P , falls dieser Punkt nicht auf derselben Kugelhaube liegt wie dS , einen Punkt Q nimmt, der auf derselben Kugelhaube oder ihrer Erweiterung liegt. Die Erweiterung kommt dann in Betracht, wenn P der Ringzone angehört. Nach (3) verkleinert man dJ weiter, wenn

man statt dS und Q ein Element und einen Punkt nimmt, die auf dieser Kugelhaube liegen, aber weiter voneinander entfernt sind, als dies für die betrachtete Fläche eintreten kann.

Demnach ist für P und dS , wenn P irgend ein Punkt der betrachteten Fläche und dS ein Element einer der beiden Kugelhauben ist, welche der Fläche angehören,

$$dJ > \frac{dS \sin \alpha}{4a^2}.$$

Jede der beiden Kugelhauben hat den Flächeninhalt

$$2\pi \cdot R^2(1 - \cos(\alpha - \beta)) = 2\pi \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} (1 - \cos(\alpha - \beta)).$$

Mit Rücksicht auf (1) folgt hieraus

$$J_1^I + J_2^{II} > \frac{4\pi a^2(1 - \cos(\alpha - \beta))}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{4a^2}$$

oder

$$(I) \quad \mu > \frac{\pi(1 - \cos(\alpha - \beta))}{\sin \alpha} = m(\alpha, \beta).$$

Wir betrachten jetzt die durch Inversion aus der Linsenfläche (S) abgeleitete Fläche (S'), wobei als Inversionszentrum der Mittelpunkt der Linsenfläche, als Inversionsradius a dient. S' besteht dann aus zwei Kugelhauben, die den schon beim Aufbau von S verwendeten Kugeln angehören, und dazu kommt eine konkave Ringzone. Für P_1' und P_2' werden die Endpunkte der Achse von S gewählt, als Trennungslinie zwischen S_1' und S_{II}' der Kehlkreis.

Der Radius des Kehlkreises ist bestimmt durch

$$a_1' = \frac{a^2}{a_1},$$

und es ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= \varrho + (R - b) \operatorname{tang}(a - \beta) \\
&= a \left(\frac{1}{\sin a} - \frac{\cot a}{\cos(a - \beta)} + \cot a \operatorname{tang}(a - \beta) \right) \\
&= a \left(1 - \frac{\sin \beta + \cos a - \cos(a - \beta)}{\sin a \cos(a - \beta)} \right) \\
&= a \left(1 - \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} (1 - \sin a) + \sin \frac{\beta}{2} \cos a \right)}{\sin a \cos(a - \beta)} \right).
\end{aligned}$$

Nimmt man β hinreichend klein an, so ergibt sich

$$a_1 > a(1 - \beta k), \quad k = \frac{1}{\sin a \cdot \cos a}.$$

Es wird also

$$a_1' < \frac{a}{1 - \beta k}$$

und für den halben Öffnungswinkel φ (s. Figur) ergibt sich

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a_1' \cdot b}{a^2} < \frac{\operatorname{tang} \frac{a}{2}}{1 - \beta k},$$

also

$$\cos \varphi > \frac{\cos \frac{a}{2} (1 - \beta k)}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{a}{2} (-2\beta k + \beta^2 k^2)}} > \cos \frac{a}{2} (1 - \beta k)$$

und demnach

$$(J_1^I)' + (J_2^{II})' = 4\pi(1 - \cos \varphi)$$

und

$$(II) \quad \mu' < 4\pi \left(1 - \cos \frac{a}{2} + \beta k \right) = M'(a, \beta).$$

Vergleichen wir jetzt die Werte m und M' , so erhalten wir für $\beta = 0$

$$m(a, 0) = \pi \left(\frac{1 - \cos a}{\sin a} \right) = \pi \cdot \operatorname{tang} \frac{a}{2}$$

$$M'(a, 0) = 4\pi \left(1 - \cos \frac{a}{2} \right).$$

Nimmt man jetzt für a einen hinreichend kleinen Winkel (z. B. $a = \frac{\pi}{3}$), so wird:

$$m(a, 0) > M'(a, 0)$$

und es kann nachträglich β so klein gewählt werden, daß auch

$$m(a, \beta) > M'(a, \beta)$$

wird, also

$$\mu > \mu' \quad \text{und} \quad \lambda < \lambda'.$$

Die untersuchten Flächen haben also bei geeigneter Wahl von β sicher voneinander verschiedene Konfigurationskonstanten, was bewiesen werden sollte.
