Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen.

Von **Edmund Landau.**

(Eingelaufen 8. Februar.)

Einleitung.

Man verdankt Herrn Nielsen eine Anzahl interessanter Arbeiten über Fakultätenreihen, d. h. Reihen von der Form

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

wo a_0, a_1, a_2, ... komplexe Konstanten sind und x eine komplexe Variable bezeichnet.[1]) Herr Nielsen hat seine Untersuchungen im dritten Teile des kürzlich erschienenen Werkes „Handbuch der Theorie der Gammafunktion"[2]) im Zusammenhang dargestellt.

Die wichtigste Grundlage der Theorie der Fakultätenreihen besteht im folgenden

Satz I: Wenn $\Omega(x)$ für einen Wert $x = x_0$ konvergiert, so konvergiert $\Omega(x)$ für jedes $x = x_1$, welches die Ungleichheitsbedingung

$$\Re(x_1) > \Re(x_0)$$

erfüllt.

---

[1]) Eine Reihe von der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ würde dasselbe bedeuten; es ist jedoch zweckmäßig, die Schreibweise (1) anzuwenden.

[2]) Leipzig (Teubner), 1906, S. 237 ff.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n};$$

Herr Nielsen, der auch über diese Reihen mehrere interessante Untersuchungen publiziert hat,[1]) war hier nicht bis zum Beweise des Analogons zum Satze I, also der Existenz der Konvergenzhalbebene, gelangt, obgleich ein solcher bereits auf ganz einfachem Wege von Herrn Bendixson[2]) geführt war. In § 6 behandle ich kurz zwei allgemeinere, schon von Herrn Jensen[3]) erwähnte Klassen von Reihen, nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_n)}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n), \tag{2}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Größen ist, für welche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert.[4]) Für die Reihen (2) hatte bereits Herr Bendixson[5]) die von Herrn Jensen ausgesprochene Existenz der Konvergenzhalbebene, sowie die gleichmäßige Konvergenz in der Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene bewiesen; doch ist der in § 6 des Folgenden hierfür gegebene Beweis etwas einfacher, und

---

[1]) Literatur s. „Handbuch etc.“, S. 124 ff. und 225 ff.

[2]) „Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss“, Acta mathematica, Bd. 9, 1887, S. 15—20. Herr Nielsen schreibt mir in einer nachträglichen Note auf S. 325 seines Buches irrtümlich diesen Satz zu.

[3]) l. c. (s. S. 153, Anm. 2), S. 71—72.

[4]) Es ist nicht allgemeiner, von einer Folge reeller, monoton ins Unendliche wachsender Größen zu sprechen, für welche die über alle (mit etwaiger Ausnahme von 0) erstreckte Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ divergiert.

[5]) l. c., S. 15—23.

ich beweise auch neue Sätze über diese Reihen. In § 7 behandle ich einige Eigenschaften der Integrale von der Gestalt

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt,$$

welche mit den Fakultätenreihen eng verwandt sind; diese Integrale sind schon mehrfach untersucht worden, und Herr Pincherle[1]) hat ihrer Theorie eine umfassende Darstellung gewidmet, zu welcher ich einige Bemerkungen und Zusätze mache.

§ 1.

Herr Dedekind[2]) hat folgenden Konvergenzsatz bewiesen und Herr Jensen[3]) hat ihn wiedergefunden:

Hilfssatz 1: Wenn $b_0, b_1, \ldots$ und $c_0, c_1, \ldots$ zwei Folgen komplexer Größen sind, und wenn die beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergieren, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n. \tag{3}$$

Beweis: Beide Autoren beweisen diesen Satz mit Hilfe des Abelschen Kunstgriffes der partiellen Summation folgendermaßen:

---

[1]) „Sur les fonctions déterminantes", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 22, 1905, S. 9—68.

[2]) Vgl. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 2. Aufl., 1871, S. 373. Für reelle Werte der Größen b_n, c_n war der Satz schon von du Bois-Reymond („Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen", Antrittsprogramm, Freiburg 1870, S. 10) bewiesen worden.

[3]) l. c. (s. S. 153, Anm. 2), S. 69.

Wenn

$$\sum_{n=0}^{t} b_n = B_t,\ B_{-1} = 0$$

gesetzt wird, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{t} b_n c_n = \sum_{n=0}^{t} (B_n - B_{n-1}) c_n$$

$$(4) \qquad = \sum_{n=0}^{t} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_t c_{t+1}.$$

Nach Voraussetzung konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |,$$

also auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n+1}),$$

so daß

$$\lim_{t=\infty} c_{t+1}$$

existiert; ferner existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} B_t,$$

so daß insbesondere für alle n

$$| B_n | < B$$

ist, wo B eine von n unabhängige Konstante bezeichnet. Wegen

$$| B_n (c_n - c_{n+1}) | \leq B | c_n - c_{n+1} |$$

ist also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n (c_n - c_{n+1})$$

konvergent; auf der rechten Seite von (4) nähern sich also beide Glieder für $t = \infty$ einem Grenzwert; damit ist die Konvergenz der Reihe (3), also der Hilfssatz 1 bewiesen.

Herr Dedekind[1]) beweist mit Hilfe der Transformationsformel (4) auch folgenden

Hilfssatz 2: Es sei erstens

$$\left|\sum_{n=0}^{t} b_n\right| = |B_t|$$

für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$ unterhalb einer endlichen Schranke B gelegen; es sei zweitens

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0,$$

und es sei drittens die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergent. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n. \tag{3}$$

Beweis: Wie oben ergibt sich wegen

$$|B_n(c_n - c_{n+1})| \leq B\,|c_n - c_{n+1}|,$$

daß das erste Glied auf der rechten Seite von (4) sich für $t = \infty$ einem Grenzwerte nähert, und wegen der beiden ersten Voraussetzungen ist

$$\lim_{t=\infty} B_t c_{t+1} = 0,$$

so daß aus (4) die Konvergenz der Reihe (3) folgt.

Jeder der beiden Hilfssätze 1 und 2 führt nun leicht zum

Satz I:[2]) Wenn eine Fakultätenreihe

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1}$$

---

[1]) l. c., S. 371. Für Reihen mit reellen Gliedern ist der Hilfssatz 2 auch schon von du Bois-Reymond (l. c., S. 10) bewiesen worden.

[2]) S. S. 151; x_0 und x_1 sollen weder Null noch ganzzahlig negativ sein.

für $x = x_0$ konvergiert und wenn

$$\Re(x_1) > \Re(x_0)$$

ist, so konvergiert die Reihe für $x = x_1$.

Wenn man den Beweis auf Grund des Hilfssatzes 2 führt — was hier geschehen soll —, so braucht man nicht die Konvergenz von $\Omega(x_0)$ vorauszusetzen; sondern es genügt, anzunehmen, daß für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left|\sum_{n=0}^{t} \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}\right| < B$$

ist.

Beweis: Es werde

$$b_n = \frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}, \quad c_n = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)}$$

gesetzt. Dann ist nach Voraussetzung für alle t

$$\left|\sum_{n=0}^{t} b_n\right| < B.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+1} &= \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} - \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n+1)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n+1)} \\ &= \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)}\left(1 - \frac{x_0+n+1}{x_1+n+1}\right) \end{aligned}$$

$$(5) \qquad = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \cdot \frac{x_1 - x_0}{x_1+n+1}.$$

Bekanntlich ist für jedes von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene x

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\, n^x = \Gamma(x)$$

eine endliche, von Null verschiedene Zahl; also erhält man, indem man die Gleichung (6) für x_0 und x_1 ansetzt und dividiert,

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} n^{x_1-x_0} = \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)},$$

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right|.$$

Aus (7) folgt zunächst wegen $\Re(x_1-x_0)>0$, daß

$$\lim_{n=\infty} |c_n| = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} c_n \quad = 0$$

ist, womit die zweite Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist. Ferner folgt aus (5) und (7), daß

$$\lim_{n=\infty} |c_n - c_{n+1}| \, n^{1+\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| |x_1 - x_0|$$

ist, also von einer gewissen Stelle an

$$|c_n - c_{n+1}| < 2 \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right| |x_1 - x_0| \, \frac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}};$$ cf p 482

hieraus ergiebt sich die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|,$$

so daß auch die dritte Voraussetzung des Hilfssatzes 2 erfüllt ist. Derselbe liefert also die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} = \Omega(x_1)$$

und damit den Satz I.

Aus Satz I folgt, wie schon in der Einleitung angegeben, die von Herrn Jensen entdeckte Tatsache:

Wenn eine Fakultätenreihe gegeben ist, so sind nur folgende drei Fälle möglich:[1])

---

[1]) Hierbei ist nur von den Zahlen die Rede, welche von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden sind.

1. Sie konvergiert überall.
2. Sie konvergiert nirgends.
3. Es gibt eine reelle Zahl λ, so daß die Reihe für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert, für $\Re(x) < \lambda$ divergiert.

Was das Verhalten der Reihe auf der „Grenzgeraden" oder „Konvergenzgeraden" $\Re(x) = \lambda$ betrifft, so gibt es Reihen, welche dort überall konvergieren, solche, die dort nirgends und solche, die weder nirgends, noch überall auf dieser Geraden konvergieren. Beispiele dieser Möglichkeiten werden weiter unten[1]) angegeben werden.

Hilfssatz 3:[2]) Es seien $b_0, b_1, \ldots$ Konstanten, $c_0, c_1, \ldots$ Funktionen einer komplexen Variabeln x, welche in einem gewissen Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär sind; es sei erstens für alle $t = 0, 1, 2 \ldots$

$$\left|\sum_{n=0}^{t} b_n\right| = |B_t| < B;$$

zweitens konvergiere in $\mathfrak{G}$ c_n gleichmäßig gegen 0; drittens sei in $\mathfrak{G}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

gleichmäßig konvergent. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n$$

gleichmäßig in $\mathfrak{G}$ konvergent.

Beweis: Aus der Gleichung

$$\sum_{n=0}^{t} b_n c_n = \sum_{n=0}^{t} B_n (c_n - c_{n+1}) + B_t c_{t+1} \tag{4}$$

---

[1]) S. S. 172–173.

[2]) Dieser Hilfssatz ist von Herrn Cahen auf S. 79 seiner oben (auf S. 153, Anm. 4) zitierten Arbeit bewiesen worden. Herr Cahen stützt auf ihn den Nachweis seines Satzes, daß eine Dirichletsche Reihe in ihrem Konvergenzbereiche eine analytische Funktion darstellt.

folgt wegen

$$|B_n(c_n - c_{n+1})| \leqq B\,|c_n - c_{n+1}|,$$
$$|B_l c_{l+1}| \leqq B\,|c_{l+1}|$$

ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Satz II: Eine Fakultätenreihe ist in einer gewissen Umgebung jeder (von 0, -1, -2, ... verschiedenen) Stelle im Innern ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergent.

Es genügt offenbar zu beweisen: wenn $\Omega(x)$ für x_0 konvergiert, so konvergiert $\Omega(x)$ gleichmäßig für alle $x = u + vi$, welche die Ungleichungen erfüllen

$$x_0 + \gamma_1 \leqq u \leqq x_0 + \gamma_2, \quad -\gamma_3 \leqq v \leqq \gamma_3,$$ cf p 482

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ drei positive Größen bezeichnen ($\gamma_1 < \gamma_2$), die so klein gewählt sind, daß das obige Rechteck keinen der Punkte 0, -1, -2, ... im Innern oder auf dem Rande enthält. In der Tat läßt sich jede (von 0, -1, ... verschiedene) Stelle der Konvergenzhalbebene in ein solches Rechteck $\mathfrak{G}$ einschließen.

Beweis: Es werde

$$b_n = \frac{n!\,a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}, \quad c_n = \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}$$

gesetzt. Dann handelt es sich auf Grund des Hilfssatzes 3 lediglich darum, nachzuweisen, daß in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist, und daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert.

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der drei Zahlen $|x_0|$, $|x_0 + \gamma_1| + \gamma_3$ und $|x_0 + \gamma_2| + \gamma_3$ gewählt wird, so ist in $\mathfrak{G}$ überall p 482

$$|x| = |u + vi| \leqq |u| + |v| < \gamma,$$

ebenso

$$|x_0| < \gamma.$$

Es sei ferner β so gewählt, daß in $\mathfrak{G}$

$$\left| \prod_{\nu=0}^{2\gamma} \frac{x_0+\nu}{x+\nu} \right| < \beta \tag{8}$$

ist. Da für $|y| \leqq \frac{1}{2}$

$$1 + y = e^{y+\vartheta|y|^2} \quad (|\vartheta| \leqq 1)$$

ist,[1] erhält man für $\nu > 2\gamma$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\frac{x_0+\nu}{x+\nu} = \frac{1+\frac{x_0}{\nu}}{1+\frac{x}{\nu}} = e^{\frac{x_0}{\nu}+\vartheta_1\frac{|x_0|^2}{\nu^2}-\frac{x}{\nu}-\vartheta_2\frac{|x|^2}{\nu^2}},\text{[2]}$$

$$\left|\frac{x_0+\nu}{x+\nu}\right| \leqq e^{-\frac{\Re(x-x_0)}{\nu}+\frac{2\gamma^2}{\nu^2}} \leqq e^{-\frac{\gamma_1}{\nu}+\frac{2\gamma^2}{\nu^2}},$$

also für $n > 2\gamma$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\left| \prod_{\nu=2\gamma+1}^{n} \frac{x_0+\nu}{x+\nu} \right| < e^{-\gamma_1 \sum\limits_{\nu=2\gamma+1}^{n} \frac{1}{\nu} + 2\gamma^2 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt, daß für alle n von einer gewissen Stelle an und alle x in $\mathfrak{G}$

$$|c_n| = \left| \prod_{\nu=0}^{n} \frac{x_0+\nu}{x+\nu} \right| < e^{-\frac{\gamma_1}{2}\log n} = \frac{1}{n^{\frac{\gamma_1}{2}}} \tag{10}$$

ist. Dies liefert zunächst, daß in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0$$

ist. In Verbindung mit der Identität

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x - x_0}{x+n+1}$$

ergibt sich ferner aus (10), daß für alle n von einer gewissen Stelle an und alle x in $\mathfrak{G}$

---

[1]) Denn $|-y + \log(1+y)| = \left| -\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \right|$
$\leqq \frac{|y|^2}{2} + \frac{|y|^3}{2} + \frac{|y|^4}{2} + \dots = \frac{|y|^2}{2(1-|y|)} \leqq |y|^2.$

[2]) Hierin ist $|\vartheta_1| \leqq 1$, $|\vartheta_2| \leqq 1$.

$$|c_n - c_{n+1}| < \frac{1}{n^{\frac{\gamma_1}{2}}} \frac{2\gamma}{\frac{n}{2}} = \frac{4\gamma}{n^{1+\frac{\gamma_1}{2}}}$$

ist, so daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert. Damit ist der Satz II bewiesen.

Nun besagt ein bekannter Satz von Weierstraß:[1]) Wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... analytische Funktionen sind, welche in einem zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ der x-Ebene regulär sind, und wenn die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

in einer gewissen Umgebung jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert, so stellt diese Reihe in $\mathfrak{G}$ eine analytische Funktion $f(x)$ dar; ferner ist die durch k-maliges gliedweises Differentiieren ($k = 1, 2, \ldots$) gebildete Reihe

---

[1]) „Zur Funktionenlehre", Monatsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, S. 723—726; Abhandlungen zur Funktionenlehre, 1886, S. 73—78; Werke, Bd. 2, 1895, S. 205—209. Herr Morera folgerte im Jahre 1886 („Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa", Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Ser. 2, Bd. 19, S. 306 und „Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite", Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, Bd. 21, S. 894 bis 897) diesen Satz aus der von ihm entdeckten Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes. Herr Painlevé führte im Jahre 1887 („Sur les lignes singulières des fonctions analytiques", Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Bd. 2, S. 11—12) den Nachweis des Weierstraßschen Satzes mit Hilfe des Cauchyschen Satzes. Es ist jedenfalls überflüssig, daß Herr Cahen (l. c., S. 85—86) in der Theorie der Dirichletschen Reihen nach dem Beweise der gleichmäßigen Konvergenz in einer Umgebung jeder Stelle der Konvergenzhalbebene noch besonders beweist, daß die durch gliedweises Differentiieren entstehenden Reihen konvergieren. Weierstraß, Herr Morera und Herr Painlevé bemerken übrigens auch, daß die Reihe (11) in einer gewissen Umgebung jeder Stelle des gegebenen Gebietes gleichmäßig konvergiert.

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

in $\mathfrak{S}$ konvergent und $= f^{(k)}(x)$.

Aus diesem Satz folgt in Verbindung mit Satz II der

Satz III. Eine Fakultätenreihe stellt in ihrer Konvergenzhalbebene eine mit eventueller Ausnahme der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ reguläre analytische Funktion dar und darf dort beliebig oft gliedweise differentiiert werden.

Die in der Konvergenzhalbebene gelegenen Punkte $0, -1, -2, \ldots$ sind, wie leicht einzusehen ist, Pole erster Ordnung oder reguläre Stellen. Denn, wenn $x = -m$ $(m > 0)$ ein solcher Wert ist, so ist

$$(12) \quad x(x+1)\ldots(x+m)\left(\Omega(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right)$$
$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)(x+m+2)\ldots(x+n)},$$

falls

$$n - m - 1 = k,\ x + m + 1 = y,\ n!\, a_n = k!\, b_k$$

gesetzt wird, von neuem eine Fakultätenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, b_k}{y(y+1)\ldots(y+k)},$$

stellt also eine für $y = 1$ reguläre analytische Funktion dar, so daß nach (12) $(x+m)\,\Omega(x)$ für $x = -m$ regulär ist.

In ihrer Konvergenzhalbebene braucht eine Fakultätenreihe nicht absolut zu konvergieren. Es gilt der von Herrn Nielsen[1]) bereits auf dem natürlichsten Wege bewiesene

Satz IV. Das Gebiet der absoluten Konvergenz einer Fakultätenreihe ist — falls die Reihe weder überall noch nirgends absolut konvergiert — eine Halbebene, welche links durch eine Gerade $\Re(x) = \mu$ be-

[1]) „Recherches etc.", S. 415; „Handbuch etc.", S. 238.

grenzt ist, mit oder ohne Einschluß der ganzen Geraden $\Re(x) = \mu$ selbst.

Die Menge der Punkte, in welchen $\Omega(x)$ absolut konvergiert, hat also die Form $\Re(x) > \mu$ oder $\Re(x) \geqq \mu$.[1])

Beweis: Es braucht nur gezeigt zu werden, daß aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,|a_n|}{|x_0|\,|x_0+1|\ldots|x_0+n|}$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,|a_n|}{|x_1|\,|x_1+1|\ldots|x_1+n|}$$

folgt, falls

$$\Re(x_1) \geqq \Re(x_0)$$

ist. Dies ist eine unmittelbare Folge der Gleichung

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)} = \left| \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)} \right|$$

und des bekannten Satzes: Wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergiert und

$$\lim_{n=\infty} c_n$$

existiert,[2]) so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n.$$

In der Tat ergibt sich für

$$b_n = \frac{n!\,|a_n|}{|x_0|\,|x_0+1|\ldots|x_0+n|}, \quad c_n = \left| \frac{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}{x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \right|$$

nach (7), daß

$$\lim_{n=\infty} c_n = \begin{cases} \left|\dfrac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)}\right| & \text{für } \Re(x_1) = \Re(x_0) \\ 0 & \text{für } \Re(x_1) > \Re(x_0) \end{cases}$$

ist.

[1]) Hierbei sind natürlich die Punkte 0, − 1, − 2, ... auszuschließen.

[2]) Es genügt, daß alle $|c_n| < c$ sind.

Für jede Fakultätenreihe gibt es also, wenn man die beiden Sätze I und IV zusammennimmt, zwei charakteristische Zahlen λ und μ derart, daß $\lambda \leq \mu$ ist und (abgesehen von den Punkten $0, -1, -2, \ldots$) die Reihe

für $\Re(x) < \lambda$ divergiert,
für $\lambda < \Re(x) < \mu$ bedingt konvergiert,
für $\Re(x) > \mu$ absolut konvergiert.

Hierbei kann es sich allerdings ereignen, daß $\lambda = \mu$ ist, also der Streifen bedingter Konvergenz nicht vorhanden ist; ferner müssen für die Zahlen λ und μ auch die extremen Werte $-\infty$ und $+\infty$ zugelassen werden.

Es gilt noch der von Herrn Nielsen[1]) bewiesene

Satz V: Wenn eine Fakultätenreihe für x_0 konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0) + 1$ ist, so ist die Reihe für x_1 absolut konvergent.

Hierbei wird x_1 von $0, -1, \ldots$ verschieden angenommen. Aus diesem Satz folgt, daß für endliche λ, μ stets

$$\lambda \leqq \mu \leq \lambda + 1$$

ist, ferner, daß für $\lambda = -\infty$ auch $\mu = -\infty$ ist und daß für $\mu = +\infty$ auch $\lambda = +\infty$ ist.

Beweis: Wie Herr Nielsen wohl bemerkt hat, folgt die Behauptung, auch wenn man an Stelle der Konvergenz von $\Omega(x_0)$ nur voraussetzt, daß für alle n

$$\left|\frac{n!\, a_n}{x_0(x_0+1)\ldots(x_0+n)}\right| < A \tag{13}$$

ist, unmittelbar aus (7); denn alle Glieder von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,|a_n|}{|x_1(x_1+1)\ldots(x_1+n)|}$$

liegen nach (7) und (13) von einem gewissen n an unterhalb

[1]) „Recherches etc.", S. 415; „Les séries etc.", S. 358; „Handbuch etc.", S. 238.

$$2A\left|\frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_0)}\right|\frac{1}{n^{\Re(x_1)-\Re(x_0)}}.$$

Herr Nielsen hat nicht entschieden, ob die Differenz $\mu-\lambda$ wirklich zwischen 0 und 1 (mit Ausschluß der Grenzen) gelegen sein kann. Auf Grund der Betrachtungen von § 2 wird es leicht[1]) sein, diese Frage — durch Konstruktion eines passenden Beispiels — in bejahendem Sinne zu beantworten.

§ 2.

Das Konvergenzgebiet einer Fakultätenreihe

(1) $$\Omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

ist nach Satz I in demselben Sinne eine Halbebene wie das einer Dirichletschen Reihe

(14) $$\Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

oder einer allgemeineren Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\gamma_n x}$$

(wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine monoton ins Unendliche wachsende Folge reeller Größen bezeichnen) auf Grund des von Herrn Jensen[2]) gegebenen Beweises.

Wenn man zu einer gegebenen Fakultätenreihe (1) die zugehörige Dirichletsche Reihe (14) mit denselben Koeffizienten a_n $(n \geqq 1)$ betrachtet, so gilt der merkwürdige

Satz VI: Die Konvergenzhalbebenen der beiden Reihen $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ stimmen überein, und, was noch mehr besagt,[3]) für jedes (von $0, -1, \ldots$ verschiedene)

---

[1]) S. S. 171, Nr. 3.

[2]) l. c., S. 70.

[3]) Es ist nämlich nicht nur die charakteristische Zahl λ für beide Reihen dieselbe, sondern es konvergieren bezw. divergieren auch in jedem Punkt der Geraden $\Re(x)=\lambda$ beide Reihen gleichzeitig.

x konvergieren beide Reihen oder divergieren beide Reihen gleichzeitig.

Beweis: 1. Es sei x eine (von 0, $-1, \ldots$ verschiedene) Zahl, für welche $\Psi(x)$ konvergiert, und es werde für $n \geqq 1$

$$b_n = \frac{a_n}{n^x}, \quad c_n = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

gesetzt; ich behaupte, daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind, d. h. daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

konvergiert. Es ist

$$c_n - c_{n+1} = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \frac{(n+1)!\,(n+1)^x}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}$$

$$= \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \left(1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1}\right).$$

Da nach (6)

$$(15) \qquad \lim_{n=\infty} |c_n| = \lim_{n=\infty} \left|\frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right| = |\Gamma(x)|$$

ist, so genügt es, zu zeigen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} \right|$$

konvergiert. Dies folgt tatsächlich daraus, daß für alle n, welche > 1 und $> |x+1|$ sind,

$$1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x+1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x+1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x+1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_3}{n^3} + \ldots$$

ist, also für alle $n \geqq 1$

$$\left| 1 - \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{x+n+1} \right| < \frac{\gamma}{n^2},$$

wo γ eine von n unabhängige Größe bezeichnet. Nach dem Hilfssatz 1 ist also die Reihe

$$\frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n = \Omega(x)$$

konvergent.

2. Es sei $\Omega(x)$ konvergent und es werde für $n \geqq 1$

$$\bar{b}_n = \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \quad \bar{c}_n = \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n!\, n^x}$$

gesetzt. Dann ist

$$\bar{c}_n - \bar{c}_{n+1} = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} = -\frac{1}{c_n c_{n+1}}(c_n - c_{n+1}),$$

so daß wegen (15) auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{c}_n - \bar{c}_{n+1}|$$

konvergiert, da die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$$

soeben gezeigt wurde. Daher ist nach dem Hilfssatz 1 die Dirichletsche Reihe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \bar{c}_n$$

konvergent.

Der bewiesene Satz VI scheint bei oberflächlicher Betrachtung schon von Herrn Kluyver[1]) ausgesprochen zu sein. Wie

[1]) „Over de ontwikkeling van eene functie in eene faculteitenreeks", Nieuw archief voor wiskunde, Ser. 2, Bd. 4, 1899, S. 74.

indessen aus Herrn Kluyvers Begründung hervorgeht, meint er nur den leichter beweisbaren

Satz VII: Die Punkte absoluter Konvergenz sind für die beiden Reihen

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1}$$

und

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{14}$$

dieselben.

Beweis: Dies folgt ohne weiteres aus

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\, n^x = \Gamma(x) \tag{6}$$

nach dem auf S. 165 angewendeten bekannten Konvergenzsatz.

Für Fakultätenreihen wie für Dirichletsche Reihen [1]) hat man zur Bestimmung der Konvergenzhalbebene nur die Grenzstelle der Konvergenz für reelle x zu bestimmen; da dies bei dem einfacheren Bau der Dirichletschen Reihen oft für diese leichter ist, sind die Sätze VI und VII von großem Nutzen für die Konstruktion spezieller Fakultätenreihen mit vorgeschriebenen Konvergenzeigenschaften.

Folgende Beispiele veranschaulichen die schon in § 1 [2]) für λ und μ unterschiedenen Fälle und zeigen, daß jeder derselben vorkommen kann.

---

[1]) Der Jensensche Satz von der Existenz der Konvergenzhalbebene einer Dirichletschen Reihe $\Psi(x)$ folgt natürlich seinerseits aus den Sätzen I und VI. Aber sein direkter Beweis ist ganz einfach und beruht bloß auf dem Hilfssatz 1 und der für $\Re(x) > 0$ gültigen Ungleichung

$$\left| \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right| = \left| x \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} \right| \leqq \frac{|x|}{n^{\Re(x)+1}}$$

oder statt dieser, was auch ausreicht, auf der Ungleichung

$$\left| \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right| = \frac{1}{n^{\Re(x)}} \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \right| = \frac{1}{n^{\Re(x)}} \left| \frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots \right| < \frac{a}{n^{\Re(x)+1}}.$$

[2]) S. S. 166.

1. Es ist $\lambda = -\infty$, $\mu = -\infty$ für $a_n = \frac{1}{n!}$. In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, n^x}$$

für jedes reelle x absolut konvergent.

2. Es ist λ endlich und $\mu = \lambda$ für $a_n = 1$.[1]) In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

für $x \leqq 1$ divergent, für $x > 1$ absolut konvergent, so daß $\lambda = 1$, $\mu = 1$ ist.

3. Es ist λ endlich und $\lambda < \mu < \lambda + 1$ für die Fakultätenreihe, deren Koeffizienten folgendermaßen definiert sind:

für ungerade nichtquadratische n ist $a_n = 1$,
für gerade nichtquadratische n ist $a_n = -1$,
für ungerade quadratische n ist $a_n = 2$,
für gerade quadratische n ist $a_n = 0$.

In der Tat ist erstens die Reihe

$$(16) \quad 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

für $x \leqq 0$ divergent, für $0 < x \leqq 1$ bedingt konvergent, für $x > 1$ absolut konvergent; zweitens ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{16^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$$

für $x < \frac{1}{2}$ divergent, für $x > \frac{1}{2}$ absolut konvergent. Die durch Addition beider Reihen entstehende Reihe

$$2 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} - \frac{1}{8^x} + \frac{2}{9^x} - \frac{1}{10^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

ist daher für $x \leqq \frac{1}{2}$ divergent, für $\frac{1}{2} < x \leqq 1$ bedingt kon-

[1]) Für Reihen mit positiven Koeffizienten ist natürlich stets $\mu = \lambda$.

vergent und für $x > 1$ absolut konvergent, so daß $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, also $\mu = \lambda + \frac{1}{2}$ ist.

4. Es ist λ endlich und $\mu = \lambda + 1$ für $a_n = (-1)^{n+1}$; denn für die Reihe (16) ist $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

5. Es ist $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ für $a_n = n!$ In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^x}$$

für jedes reelle x divergent.

Folgende Beispiele zeigen unter Anwendung des Satzes VI, daß für das Verhalten einer Fakultätenreihe auf der Grenzgeraden die verschiedenen denkbaren Fälle [1]) möglich sind.

1. $\Omega(x)$ konvergiert in keinem Punkte der Grenzgeraden für $a_n = 1$. In der Tat ist bekanntlich [2])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+vi}}$$

für jedes reelle v divergent.

2. $\Omega(x)$ konvergiert in allen Punkten der Grenzgeraden für

$$a_n = \frac{1}{\log^2 n} \quad (n \geqq 2).$$

In der Tat ist die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log^2 n}$$

für $x < 1$ divergent, für $x = 1 + vi$ (absolut) konvergent.

3. $\Omega(x)$ konvergiert weder in allen Punkten der Grenzgeraden noch in keinem Punkte derselben, falls

---

[1]) S. S. 160.

[2]) Literatur s. in meiner Arbeit „über die zu einem algebraischen Zahlkörper etc.", S. 105—107.

$$a_n = 1 \text{ für Primzahlen,}$$
$$a_n = 0 \text{ für zusammengesetzte } n$$

ist. In der Tat ist die über alle Primzahlen (in wachsender Reihenfolge) erstreckte Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+vi}}$$

bekanntlich[1]) für $v = 0$ divergent, für alle anderen reellen v konvergent. Es gibt natürlich einfachere Beispiele; ich wählte das vorliegende, da es an sich von Interesse erscheint; zu den nicht zahlreichen, mit der Verteilung der Primzahlen zusammenhängenden Reihen, deren bedingte Konvergenz man beweisen kann, gehört nämlich jetzt z. B. die Reihe

$$\Omega(1+i) = \frac{2!}{(1+i)(2+i)(3+i)} + \frac{3!}{(1+i)(2+i)(3+i)(4+i)}$$
$$+ \frac{5!}{(1+i)\ldots(6+i)} + \ldots + \frac{p!}{(1+i)\ldots(p+1+i)} + \ldots$$

Das folgende Beispiel zeigt endlich, daß — im Gegensatz zu einer früher von Herrn Nielsen[2]) gemachten Bemerkung — aus der Konvergenz einer Fakultätenreihe für $x_0 = u_0 + v_0 i$ nicht die absolute Konvergenz in allen Punkten folgt, deren Abstand von der Geraden $\Re(x) = u_0$ „nicht kleiner als 1" ist. Die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^x \log n}$$

ist für $x = 1$ konvergent und konvergiert trotzdem für $x = 2$ nur bedingt, nicht absolut. Absolute Konvergenz ist also — durch

---

[1]) Literatur s. ebenda, S. 108—109.

[2]) „Recherches etc.", S. 429; in seiner Arbeit „sur la multiplication de deux séries de factorielles" (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Ser. 5, Bd. 13_1, 1904, S. 71) spricht Herr Nielsen gleichfalls noch (mit vermeintlichem Beweis) den Satz aus: „Wenn $\Omega(x)$ konvergiert, so konvergiert $\Omega(x+1)$ absolut."

den Satz V — nur für $\Re(x-x_0) > 1$, nicht für $\Re(x-x_0) \geq 1$ gesichert.

Die durch Satz VI gelieferte Beziehung zwischen einer Fakultätenreihe und der zugehörigen Dirichletschen Reihe gestattet, die Abszisse λ der Grenzgeraden einer Fakultätenreihe (und damit auch die Abszisse μ der Grenzgeraden ihrer absoluten Konvergenz) in ähnlicher Weise mit Hilfe eines limes superior in geschlossener Form durch die Koeffizienten auszudrücken, wie Cauchy und Herr Hadamard es für Potenzreihen getan haben. Diese Darstellung folgt unmittelbar aus dem von Herrn Cahen[1]) bewiesenen Satz:

Wenn die Abszisse λ der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe

$$(17) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

≥ 0 ist,[2]) so ist

$$(18) \qquad \lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\log t}.$$

Folgendes ist der Cahensche Beweis der wichtigen Formel (18)[3]) in unwesentlich abgeänderter Gestalt.

1. Es ist nachzuweisen: wenn $\varkappa$ den Ausdruck auf der rechten Seite von (18) bezeichnet, wenn $\varkappa$ endlich und $\delta > 0$ ist, so ist die Reihe (17) für $x = \varkappa + \delta$ konvergent. Es werde

---

[1]) l. c., S. 89 und 102.

[2]) Durch eine lineare Transformation der Variablen $x = x' - c$ läßt sich dies stets erreichen, falls die Grenzgerade überhaupt im Endlichen gelegen ist.

[3]) Für die allgemeineren Dirichletschen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\gamma_n x}$ beweist Herr Cahen (für $\lambda > 0$) analog die Formel

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\gamma_t}.$$

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = A_t$$

gesetzt. Dann ist wegen

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log |A_t|}{\log t} = \varkappa$$

von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\log t} < \varkappa + \frac{\delta}{2},$$

$$|A_t| < t^{\varkappa+\frac{\delta}{2}};$$

also ist wegen

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{A_n - A_{n-1}}{n^x}$$

$$= \sum_{n=\varrho}^{\sigma} A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) - \frac{A_{\varrho-1}}{\varrho^x} + \frac{A_\sigma}{(\sigma+1)^x}$$

für $x = \varkappa + \delta$

$$\left|\sum_{n=\varrho}^{\sigma} \frac{a_n}{n^{\varkappa+\delta}}\right| < \sum_{n=\varrho}^{\sigma} n^{\varkappa+\frac{\delta}{2}} \frac{a}{n^{1+\varkappa+\delta}} + \frac{a(\varrho-1)^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}{\varrho^{\varkappa+\delta}} + \frac{a \cdot \sigma^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}}{(\sigma+1)^{\varkappa+\delta}},$$

wo a von ϱ und σ unabhängig ist; hierin hat wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

die rechte Seite für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ den Grenzwert 0, so daß, wie behauptet, die Reihe (17) für $x = \varkappa + \delta$ konvergiert.

2. Es ist zu zeigen: wenn die Reihe (17) für ein reelles $x > 0$ konvergiert und $\delta > 0$ ist, so ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |A_t|}{\log t} < x + \delta,$$

d. h.

$$|A_t| < t^{x+\delta}.$$

In der Tat ist, falls

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{n^x} = B_t, \; B_{-1} = 0$$

gesetzt wird,

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{n^x} n^x = \sum_{n=1}^{t} (B_n - B_{n-1}) n^x$$

$$= \sum_{n=1}^{t} B_n (n^x - (n+1)^x) + B_t (t+1)^x,$$

also, da $|B_t|$ für alle t unterhalb einer Schranke B gelegen ist,

$$|A_t| < B \sum_{n=1}^{t} ((n+1)^x - n^x) + B(t+1)^x < 2B(t+1)^x,$$

also von einer gewissen Stelle an

$$|A_t| < t^{x+\delta}.$$

Damit erhalte ich also für Fakultätenreihen den

Satz VIII: Falls die Abszisse λ der Konvergenzgeraden einer Fakultätenreihe > 0 ist, ist

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\log t}; \tag{18}$$

falls die Abszisse μ ihrer Grenzgeraden absoluter Konvergenz $\geqq 0$ ist, ist

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t}. \tag{19}$$ [1]

(Offenbar folgt aus dem vorigen Beweise, daß diese Formeln auch in den Fällen $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ richtig sind.)

Beispielsweise ist für die auf S. 171, Nr. 3 angegebene Fakultätenreihe

[1] Ohne Benutzung des entsprechenden Cahenschen Satzes über Dirichletsche Reihen läßt sich der Satz VIII direkt auf dem Wege beweisen, der im § 6 für den Satz VIII' angewendet werden wird.

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = \frac{1+(-1)^{t+1}}{2} + [\sqrt{t}],$$

also

$$\lim_{t=\infty} \frac{\left|\sum\limits_{n=1}^{t} a_n\right|}{\sqrt{t}} = 1$$

und a fortiori

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum\limits_{n=1}^{t} a_n\right|}{\log t} = \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum\limits_{n=1}^{t} a_n\right|}{\log t} = \frac{1}{2},$$

ferner

$$\sum_{n=1}^{t} |a_n| = t \cancel{+ [\sqrt{t}]}, \quad = t + \frac{1}{2}\left\{1-(-)^{[\sqrt{t}]}\right\}$$

also

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{t} |a_n|}{t} = 1,$$

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = \lim_{t=\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = 1.$$

Auf Grund des Satzes VIII lassen sich leicht Beispiele bilden, in welchen $\mu - \lambda$ jeden zwischen 0 und 1 gelegenen Wert hat.

Ich muß bei dieser Gelegenheit erwähnen, daß Herr Pincherle[1]) die Zahl μ auch mit einem limes superior in Verbindung gebracht hat; allerdings ist er nicht bis zur genauen Gleichung (19) gelangt, sondern er hat nur die leicht beweisbaren Ungleichungen

$$k < \mu \leq k+1$$

gefunden, wo

---

[1]) „Sulle serie di fattoriali", Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Ser. 5, Bd. 11_1, 1902, S. 140—141.

$$k = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t}$$

gesetzt ist. Herr Pincherle bewies nämlich, daß $\Omega(x)$ für $\Re(x) < k$ divergiert, für $\Re(x) > k + 1$ absolut konvergiert; daraus folgen die obigen Ungleichungen und, wenn λ eingeführt wird, die Ungleichungen

$$k \leqq \lambda \leqq \mu \leqq k + 1.$$

Dagegen begeht Herr Pincherle einen Irrtum,[1]) indem er meint, die Gleichung

$$\mu = k + 1$$

bewiesen zu haben. Dieselbe braucht gar nicht erfüllt zu sein, wie folgendes einfache Beispiel zeigt: es sei $a_n = 1$ für quadratische n, $a_n = 0$ für nichtquadratische n; dann ist offenbar

$$k = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t} = 0,$$

und die durch den Satz VIII bestimmte Abszisse der Grenzgeraden absoluter Konvergenz

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t} = \limsup_{t=\infty} \frac{\log [\sqrt{t}]}{\log t} = \frac{1}{2}.$$

§ 3.

Die Beziehung zwischen einer Fakultätenreihe und der zugehörigen Dirichletschen Reihe reicht noch tiefer als bloß bis zu der in Satz VI festgestellten Tatsache der gemeinsamen Konvergenzhalbebene und der gleichzeitigen Konvergenz bezw. Divergenz in allen Randpunkten. Es gilt nämlich in Bezug auf das analytische Verhalten der durch die Reihen definierten Funktionen der

[1]) l. c., S. 143—144, „Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali“, ebenda, Bd. 12_2, 1903, S. 340, und „Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche“, Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. 2, Bd. 8, 1904, S. 13.

Satz IX: Jede (von 0, -1, ... verschiedene) Stelle der Konvergenzgeraden $\Re(x) = \lambda$ der Reihen

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

und

$$(14) \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

ist für beide (in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ durch $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ definierten) Funktionen regulär oder für beide singulär.

Es braucht natürlich keinen auf der Grenzgeraden gelegenen singulären Punkt zu geben.

Dem Beweise des Satzes IX schicke ich folgenden Hilfssatz aus der Theorie der Gammafunktion voraus:

Hilfssatz 4: Es sei für jedes komplexe x und jedes ganzzahlige $n \geq 1$ eine Funktion $\varphi(x, n)$ durch die Gleichung

$$(20) \qquad \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\dots(x+n)} = 1 - \frac{x+x^2}{2n} + \frac{\varphi(x,n)}{n^2}\;^{1)}$$

definiert. Wenn $\mathfrak{G}$ ein im Endlichen gelegenes Gebiet der x-Ebene ist, ist $|\varphi(x, n)|$ für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n = 1, 2, \dots$ unterhalb einer endlichen (von x und n unabhängigen) Schranke A gelegen.

Erster (direkter) Beweis des Hilfssatzes 4: Es ist, falls C die Eulersche Konstante bezeichnet,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{Cx} x \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+\nu}{\nu} e^{-\frac{x}{\nu}} \cdot \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}},$$

$$(21) \qquad \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x) x(x+1)\dots(x+n)} = e^{x\left(C + \log n - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)} \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}}.$$

---

[1]) Die linke Seite von (20) stellt für jedes n eine ganze transzendente Funktion von x dar, $\varphi(x, n)$ also gleichfalls.

Eine Konstante c sei so gewählt, daß für alle x in $\mathfrak{G}$

$$|x| < c$$

ist. Da für $|y| \leqq \frac{1}{2}$

$$1 + y = e^{y - \frac{1}{2} y^2 + \vartheta |y|^3} \qquad (|\vartheta| \leqq 1)$$

ist,[1]) so ergibt sich für $\nu > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\nu^2} + \vartheta \frac{|x|^3}{\nu^3}},$$

also für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(22) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{x^2}{2} \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} + \vartheta_1 c^3 \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3}} \qquad (|\vartheta_1| \leqq 1).$$

Nun ist

$$(23) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \int_n^{\infty} \frac{dz}{z^2} - \frac{\vartheta_2}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{\vartheta_2}{n^2} \qquad (0 < \vartheta_2 < 1)$$

und

$$(24) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} < \int_n^{\infty} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2n^2};$$

aus (22), (23) und (24) ergibt sich für $n > 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$(25) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{x^2}{2n} + \vartheta_3 (c^2 + c^3) \frac{1}{n^2}} \qquad (|\vartheta_3| \leqq 1).$$

Ferner ist bekanntlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{1}{2n} - \frac{\vartheta_4}{n^2} \qquad (0 < \vartheta_4 < 1),$$

---

[1]) Denn

$$\left| -y + \frac{1}{2} y^2 + \log(1+y) \right| = \left| \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \right| \leqq \frac{1}{2} (|y|^3 + |y|^4 + \cdots)$$

$$= \frac{|y|^3}{2(1 - |y|)} \leqq |y|^3.$$

also

$$(26) \qquad e^{x\left(C+\log n-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\right)}=e^{-\frac{x}{2n}+\frac{\vartheta_5 c}{n^2}} \qquad (|\vartheta_5|<1).$$

Aus (21), (25) und (26) folgt für alle $n>2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\dots(x+n)}=e^{-\frac{x+x^2}{2n}+\vartheta_6(c+c^2+c^4)\frac{1}{n^2}} \qquad (|\vartheta_6|<1).$$

Mit anderen Worten, es ist

$$\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\dots(x+n)}=e^{-\frac{x+x^2}{2n}+\frac{\eta}{n^2}},$$

wo $|\eta|$ für alle $n>2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Daraus folgt

$$(20) \qquad \frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\dots(x+n)}=1-\frac{x+x^2}{2n}+\frac{\varphi(x,n)}{n^2},$$

wo $|\varphi(x,n)|$ für $n>2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Für die endlich vielen $n\leqq 2c$ und alle x in $\mathfrak{G}$ liegt das durch (20) bestimmte $\varphi(x,n)$ gleichfalls unterhalb einer endlichen Schranke, womit der Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Zweiter Beweis des Hilfssatzes 4: Aus bekannten Eigenschaften der Gammafunktion läßt sich der Hilfssatz auf vielfache Arten als Korollar herleiten. Ich gehe z. B. von dem Satze[1]) von Stieltjes aus: „für nicht negative $y=|y|e^{\omega i}$ ist

$$(27) \qquad \log\Gamma(y)=\left(y-\frac{1}{2}\right)\log y-y+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12y}+R(y),$$

wo

$$|R(y)|<\frac{1}{360\,|y|^3\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4}$$

ist“. Nach (27) ist für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n>c$[2])

[1]) Literatur s. Nielsen, „Handbuch etc.“, S. 208.

[2]) c bezeichnet eine Zahl, welche größer als die absoluten Beträge aller x in $\mathfrak{G}$ ist; alsdann ist sicher $x+n$ nicht negativ.

$$\log \Gamma(x+n) = \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) - x - n + \log \sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_1}{n^3},$$

wo η_1 (desgl. in der Folge $\eta_2, \eta_3, \ldots$) eine Größe bezeichnet, die für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > c$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke gelegen ist. Außerdem ist nach dem schon von Stirling bewiesenen Spezialfall $y = n$ der Formel (27)

$$\log n! = \log n + \log \Gamma(n)$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + \frac{\eta_2}{n^3},$$

folglich

$$\log \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1) \ldots (x+n)} = \log \frac{n!\, e^{x \log n}}{(x+n)\Gamma(x+n)}$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + x\log n - \log(x+n)$$
$$- \left(x+n-\frac{1}{2}\right)\log(x+n) + x + n - \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_3}{n^3}$$
$$= x - \left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(x+n)} + \frac{\eta_3}{n^3}$$
$$= x - \left(n+x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{\eta_4}{n^3}\right) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n} + \frac{\eta_5}{n^2}$$
$$= x - x - \frac{x(2x+1)}{2n} + \frac{x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2} = -\frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2},$$

$$\frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = e^{-\frac{x+x^2}{2n} + \frac{\eta_6}{n^2}} = 1 - \frac{x+x^2}{2n} + \frac{\varphi(x,n)}{n^2},$$

wo $|\varphi(x,n)|$ für alle x in $\mathfrak{G}$ und $n > c$, also auch für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n \geq 1$ unterhalb einer endlichen Schranke liegt.

Beweis des Satzes IX: Wenn man die Gleichung (20) mit $\frac{a_n}{n^x}$ multipliziert und über alle $n = 1, 2, \ldots$ summiert, so ergibt sich für $\Re(x) > \lambda$

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

$$= \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^x} - \frac{(x+x^2)\, a_n}{2\, n^{x+1}} + \frac{\varphi(x, n)\, a_n}{n^{x+2}} \right);$$

da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \Psi(x)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x+1}} = \Psi(x+1)$$

für $\Re(x) > \lambda$ konvergieren, so ist

$$(28) \quad \frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} + \Psi(x) - \frac{x+x^2}{2} \Psi(x+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x, n)\, a_n}{n^{x+2}}.$$

Hierin ist

$$\frac{a_0}{x\,\Gamma(x)} - \frac{x+x^2}{2} \Psi(x+1)$$

für alle Punkte der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$, also gewiß für $\Re(x) = \lambda$ regulär. Ferner ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x, n)\, a_n}{n^{x+2}}$$

in jedem endlichen im Innern der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$ gelegenen Gebiete $\mathfrak{G}$[1]) gleichmäßig konvergent; denn in $\mathfrak{G}$ ist nach dem Hilfssatz 4

---

[1]) Es sollen also alle Punkte von $\mathfrak{G}$ den zwei Bedingungen $\Re(x) \geqq \lambda - 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ und $|x| < c$ genügen.

$$|\varphi(x,n)| < A,$$

$$\left|\frac{\varphi(x,n)\,a_n}{n^{x+2}}\right| \leqq \frac{A\,|a_n|}{n^{\Re(x)+2}} \leqq \frac{A\,|a_n|}{n^{\lambda+1+\varepsilon}},$$

und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\lambda+1+\varepsilon}}$$

konvergiert bekanntlich.[1] Die Gleichung (28) lehrt also, daß die für $\Re(x) > \lambda$ durch die Differenz

$$\Omega(x) - \Gamma(x)\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} - \Gamma(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

definierte analytische Funktion in der Halbebene $\Re(x) > \lambda - 1$, also insbesondere auf der Geraden $\Re(x) = \lambda$ regulär ist, mit etwaigem Ausschluß der Punkte $0, -1, \ldots$, welche Pole erster Ordnung oder reguläre Punkte sind. Folglich ist jeder Punkt $\lambda + vi$ (mit etwaigem Ausschluß von λ, falls $\lambda = 0, -1, \ldots$ ist) für beide durch $\Omega(x)$ und $\Psi(x)$ definierten Funktionen regulär oder für beide singulär, womit der Satz IX bewiesen ist.[2])

Die Analogie zwischen beiden Funktionen läßt sich aber noch weiter verfolgen. Beide Beweismethoden des Hilfssatzes 4 zeigen, daß für jedes ganzzahlige positive k eine Gleichung

$$(29)\qquad \begin{aligned}&\frac{n!\,n^x}{\Gamma(x)\,x(x+1)\ldots(x+n)}\\ &= F_0(x) + \frac{F_1(x)}{n} + \cdots + \frac{F_k(x)}{n^k} + \frac{\varphi(x,n)}{n^{k+1}}\end{aligned}$$

besteht, wo

$$F_0(x) = 1,\ F_1(x) = -\frac{x+x^2}{2},\ F_2(x), \ldots,\ F_k(x)$$

---

[1]) Nach den Sätzen V und VII oder nach dem (vgl. Cahen, l. c., S. 92) direkt leicht beweisbaren Satze, daß die Breite des Streifens bedingter Konvergenz bei einer Dirichletschen Reihe $\leqq 1$ ist.

[2]) Wenn der Punkt λ für $\Psi(x)$ singulär ist, so ist er es auch für $\Omega(x)$.

ganze rationale Funktionen von x sind und wo für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n = 1, 2, \ldots$

$$|\varphi(x, n)| < A$$

ist.

In der Tat folgt dies z. B. nach der ersten Methode aus der Gleichung (21), wenn man für $\nu > 2c$

$$\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\nu^3} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\nu^{k+1}} + \vartheta \frac{|x|^{k+2}}{\nu^{k+2}}}$$

setzt, wo $|\vartheta| < 1$ ist, und die Relationen berücksichtigt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{C_1}{n} + \cdots + \frac{C_k}{n^k} + \frac{\vartheta_1 C_{k+1}}{n^{k+1}} \qquad (|\vartheta_1| < 1),$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^l} = \frac{A_{l,l-1}}{n^{l-1}} + \frac{A_{l,l}}{n^l} + \cdots + \frac{A_{l,k}}{n^k} + \frac{\vartheta_2 A_{l,k+1}}{n^{k+1}} \qquad (|\vartheta_2| < 1),$$

wo die C und die A gewisse von n unabhängige Konstanten sind und l eine der Zahlen $2, 3, \ldots, k+2$ bezeichnet. So ergibt sich zunächst eine Gleichung

$$(30) \quad \log \frac{n!\, n^x}{\Gamma(x)\, x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{G_1(x)}{n} + \cdots + \frac{G_k(x)}{n^k} + \frac{\eta}{n^{k+1}},$$

wo $G_1(x), \ldots, G_k(x)$ ganze rationale Funktionen sind und für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle $n > 2c$

$$|\eta| < B$$

ist; aus (30) folgt das Bestehen von (29).

Es ist leicht einzusehen, daß in (30)

$$(31) \qquad G_\nu(x) = \frac{(-1)^\nu}{\nu(\nu+1)} \varphi_{\nu+1}(x+1)$$

ist, wo $\varphi_\nu(x)$ das sogenannte Bernoullische Polynom ν^{ten} Grades

$$\varphi_\nu(x) = x^\nu - \frac{\nu}{2} x^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} B_1 x^{\nu-2} - \binom{\nu}{4} B_2 x^{\nu-4} + \ldots{}^{1)}$$

---

[1]) Die Reihe ist so lange fortzusetzen, als der Exponent > 0 ist.

ist (in welchem $B_1, B_2, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen bezeichnen). In der Tat ist für ganzzahlige positive x bekanntlich

$$\varphi_\nu(x) = \nu(1^{\nu-1} + 2^{\nu-1} + \cdots + (x-1)^{\nu-1}),$$

also für ganzzahlige positive x und $n > x$

$$\log \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \log \frac{n!\,n^x}{(x+n)!}$$

$$= \log \frac{n \cdot n \cdots n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+x)} = -\sum_{\varrho=1}^{x} \log\left(1+\frac{\varrho}{n}\right)$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{x}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varrho^\nu}{\nu n^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu n^\nu}\sum_{\varrho=1}^{x}\varrho^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{n^\nu}\frac{\varphi_{\nu+1}(x+1)}{\nu(\nu+1)}.$$

Damit ist (31) für ganzzahlige positive x, also für alle x bewiesen. Übrigens läßt sich dieser Zusammenhang der semikonvergenten Entwickelung (30) mit den Bernoullischen Funktionen auch aus den bekannten Formeln des Herrn Sonin[1]) ablesen.

Was die Polynome $F_k(x)$ betrifft, so hängen sie eng mit den sogenannten Stirlingschen Polynomen k^{ten} Grades $\psi_k(x)$ zusammen, deren Theorie von Herrn Nielsen sehr übersichtlich im fünften Kapitel seines Handbuches dargestellt worden ist. Wenn die Ausdrücke $\mathfrak{C}_n^k$ durch die für ganzzahlige positive x und $|n| > x$ gültige Potenzreihe

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\mathfrak{C}_{x+1}^k}{n^{x+1+k}},\text{ [2])}$$

definiert sind, so ist

$$\mathfrak{C}_{x+1}^0 = 1$$
$$\mathfrak{C}_{x+1}^k = (-1)^{k+1}x(x+1)\ldots(x+k)\,\psi_{k-1}(-x-1)\ (k>0).\text{ [3])}$$

---

[1]) „Bernoullische Polynome und ihre Anwendungen" (russisch), Warschauer Universitätsnachrichten, 1888; „Sur les polynômes de Bernoulli", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 116, 1896, S. 137.

[2]) Es ist dies die Gleichung (9) auf S. 68 des Handbuchs, wenn in dieser n statt x, $x+1$ statt n, k statt s geschrieben wird.

[3]) l. c., S. 74, (16).

Da nun für ganzzahlige positive x und $n > x$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{n!\,n^x}{(x+n)!} = \frac{n^{x+1}}{n(n+1)\dots(n+x)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathfrak{C}_{x+1}^k}{n^k}$$

ist, so ist für ganzzahlige $x > 0$, also allgemein die in (29) auftretende Funktion

$$F_k(x) = -x(x+1)\dots(x+k)\psi_{k-1}(-x-1) \quad (k > 0).$$

Für meinen Zweck kommt es nur darauf an, daß die $F_k(x)$ in (29) überhaupt ganze rationale Funktionen sind. Die Relation (29) ergibt, wenn man mit $\frac{a_n}{n^x}$ multipliziert und über alle $n = 1, 2, \dots$ summiert, für $\Re(x) > \lambda$

$$(32)\qquad \begin{aligned} \frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{a_0}{x\Gamma(x)} + F_0(x)\Psi(x) + F_1(x)\Psi(x+1) \\ &+ \dots + F_k(x)\Psi(x+k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)a_n}{n^{x+k+1}}; \end{aligned}$$

hierin ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,n)a_n}{n^{x+k+1}}$$

für eine gewisse Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(x) > \lambda - k$ gleichmäßig konvergent. Falls also z. B. die durch $\Psi(x)$ definierte Funktion für $\Re(x) > \lambda - 10$ existiert und regulär ist, so lehrt die Gleichung (32), daß die durch $\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)}$ definierte Funktion für $\Re(x) > \lambda - 10$ existiert und regulär ist. Falls $\Psi(x)$ eine ganze transzendente Funktion definiert, definiert also $\Omega(x)$ eine in der ganzen Ebene existierende eindeutige analytische Funktion, welche keine anderen singulären Punkte haben kann als Pole erster Ordnung in $0, -1, -2, \dots$ Ein Beispiel hierfür liefern die beiden wohlbekannten Funktionen, welche den Werten

$$a_n = (-1)^n$$

entsprechen und für $\Re(x) > 0$ durch die Reihen

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -1 + \frac{1}{2^x} - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} - \cdots,$$

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

definiert sind. In der Tat ist bekanntlich einerseits die durch

$$\Psi(x) = -\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)\left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots\right) \qquad (\Re(x) > 1)$$

definierte Funktion

$$-\left(1 - \frac{2}{2^x}\right)\zeta(x)$$

eine ganze transzendente Funktion, und andererseits ist[1])

$$\Omega(x) = \int_0^1 \frac{z^{x-1}}{2-z}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{x+n},$$

wo der letztere Summenausdruck eine bis auf die Pole erster Ordnung $0, -1, \ldots$ in der ganzen Ebene reguläre Funktion darstellt.

§ 4.

Auf S. 179 ist schon bemerkt worden, daß auf der Konvergenzgeraden einer Fakultätenreihe kein singulärer Punkt der durch sie definierten analytischen Funktion zu liegen braucht. Diese Tatsache war bereits von Herrn Pincherle[2]) beachtet worden. Um so mehr Interesse beansprucht der

Satz X: Wenn alle Koeffizienten einer Fakultätenreihe mit endlicher Grenzgeraden $\Re(x) = \lambda$ von einer gewissen Stelle an reell und $\geqq 0$ sind, so ist der Punkt $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion.

Erster (direkter) Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda > 0$ angenommen werden; denn anderenfalls braucht man statt

---

[1]) Vgl. z. B. Nielsen, „Handbuch etc.", S. 246.

[2]) S. die auf S. 178, Anm. 1 zuletzt genannte Arbeit.

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1}$$

nur die Fakultätenreihe

$$\begin{aligned} & x(x+1)\ldots(x+m)\left(\Omega(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right) \\ & \qquad = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)\ldots(x+n)}, \end{aligned} \tag{12}$$

wo m eine ganze Zahl $> -1 - \lambda$ ist, als Funktion von $x + m + 1 = y$ zu betrachten und auf die Reihe

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+m+1)\ldots(x+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\, b_k}{y(y+1)\ldots(y+k)}$$

mit der Grenzgeraden $\Re(y) = \lambda + m + 1 > 0$ den Satz anzuwenden. Auf Grund von (12) kann man auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gleich von Anfang an, also für alle $n \geqq 0$ die Ungleichung

$$a_n \geqq 0$$

erfüllt ist.

Da die Reihe (1) nach Satz III in der Konvergenzhalbebene beliebig oft gliedweise differentiiert werden darf, ergibt sich für $\Re(x) > \lambda$

$$\begin{aligned} \Omega'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \Bigg(& -\frac{1}{x^2(x+1)\ldots(x+n)} \\ & - \frac{1}{x(x+1)^2\ldots(x+n)} - \cdots - \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)^2}\Bigg), \end{aligned}$$

$$\Omega''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \left(\frac{2}{x^3(x+1)\ldots(x+n)} + \frac{1}{x^2(x+1)^2\ldots(x+n)} + \cdots\right)$$

u. s. f. Man sieht, daß in $\Omega^{(k)}(x)$ für reelle $x > \lambda$ die Glieder das Vorzeichen $(-1)^k$ oder 0 haben, je nachdem $a_n > 0$ oder $= 0$ ist; jedenfalls treten in $(-1)^k\, \Omega^{(k)}(x)$ keine negativen Glieder auf. Wäre nun $x = \lambda$ eine reguläre Stelle der Funktion, so würde die in der Umgebung von $x = \lambda + 1$ gültige Potenzreihe

(33) $$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{(k)}(\lambda+1)}{k!} (x-\lambda-1)^k$$

einen Konvergenzradius $r > 1$ haben. Es sei p so gewählt, daß

$$p > 0, \quad p < \lambda, \quad p < r-1$$

ist; wegen $p < r-1$ würde die Reihe auf der rechten Seite von (33) für $x = \lambda - p$ konvergieren; diese Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega^{(k)}(\lambda+1)}{k!} (1+p)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n (-1)^k \left(\frac{d^k \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}}{dx^k} \right)_{x=\lambda+1}$$

ist eine Doppelreihe, deren Glieder sämtlich $\geqq 0$ sind. Daher konvergiert auch die durch Vertauschung der Summationsfolge entstehende Reihe

(34) $$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-p)^k}{k!} \left(\frac{d^k \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}}{dx^k} \right)_{x=\lambda+1}.$$

Nun ist für jedes n, wenn die rationale Funktion von x

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = f(x)$$

gesetzt wird, für $|x-\lambda-1| < \lambda+1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\lambda-1)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda+1),$$

also speziell für $x = \lambda - p$

$$\frac{1}{(\lambda-p)(\lambda-p+1)\ldots(\lambda-p+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-p)^k}{k!} f^{(k)}(\lambda+1),$$

so daß die mit (34) identische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(\lambda-p)(\lambda-p+1)\ldots(\lambda-p+n)} = \Omega(\lambda-p)$$

konvergieren würde, gegen die Voraussetzung, daß $\Re(x) = \lambda$ die Konvergenzgerade von $\Omega(x)$ ist.

Zweiter Beweis: Der Satz X ergibt sich unmittelbar, wenn ich meinen kürzlich publizierten[1]) analogen Satz als bekannt voraussetze: der reelle Punkt der Konvergenzgeraden einer Dirichletschen Reihe mit reellen, nicht negativen Koeffizienten ist eine singuläre Stelle der Funktion. Wenn dieser Satz mit dem Satz IX verbunden wird, so ergibt sich daraus ohne weiteres der zu beweisende Satz; denn $x = \lambda$ ist eine singuläre Stelle der durch die zugehörige Dirichletsche Reihe definierten Funktion.

Ich will noch bemerken, daß im Falle der Divergenz von $\Omega(\lambda)$ der Satz X leichter zu beweisen ist. Wenn alle $a_n \geqq 0$ angenommen werden und $\lambda > 0$ ist, könnte $\Omega(\lambda)$ nur gegen $+\infty$ divergieren, und es ist nicht schwer, analog zu einer bekannten Eigenschaft der Potenzreihen zu beweisen, daß alsdann bei Annäherung von rechts

$$\lim_{x=\lambda} \Omega(x) = +\infty$$

ist, also λ keine reguläre Stelle der Funktion sein kann. Aber die obigen beiden Beweise gelten auch im Falle der Konvergenz von $\Omega(\lambda)$.

Eine letzte Anwendung des Satzes IX will ich zu dem Zwecke machen, eine Fakultätenreihe zu konstruieren, welche über ihre Grenzgerade nicht fortsetzbar ist. Hierzu genügt es offenbar nach Satz IX, eine Dirichletsche Reihe mit dieser Eigenschaft anzugeben; aber in der Literatur habe ich noch kein solches Beispiel erwähnt gefunden. Es läßt sich analog der durch Herrn Lerch bekannten nicht fortsetzbaren Potenzreihe

$$x + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2^k}$$

leicht eine Dirichletsche Reihe der verlangten Art bilden; ich behaupte nämlich, daß die Dirichletsche Reihe

[1]) „Über einen Satz von Tschebyschef", Mathematische Annalen, Bd. 61, 1905, S. 536.

$$\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{16^x}+\frac{1}{256^x}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{2^k})^x}$$

über ihre Grenzgerade $\Re(x)=0$ nicht fortsetzbar ist. Hierzu ist es hinreichend, nachzuweisen, daß alle Punkte $\frac{1}{\log 2}\frac{l\pi}{2^m}i$ (l ganz, $m \geqq 0$ ganz) singulär sind, da diese auf der Grenzgeraden dicht verteilt liegen. Und hierfür reicht es hin, zu zeigen, daß für jeden solchen Punkt vi, wenn $x=vi+x'$ gesetzt wird, die entstehende Dirichletsche Reihe in x' (mit der Konvergenzgeraden $\Re(x')=0$) von einer gewissen Stelle an positive Koeffizienten hat. Dies ist der Fall; denn das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{1}{2^{2^k(vi+x')}}=\frac{e^{-\frac{1}{\log 2}\frac{l\pi}{2^m}2^k\log 2\cdot i}}{(2^{2^k})^{x'}},$$

und der Exponent von e ist für alle $k \geqq m+1$ ein Multiplum von $2\pi i$.

§ 5.

Über Binomialkoeffizientenreihen

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}{}^{1)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{x-1}{n}$$

lassen sich durchweg die analogen Eigenschaften zu denen der Fakultätenreihen mit den in §§ 1—4 angewandten Mitteln beweisen. Herr Nielsen behandelt die Reihen $W(x)$ auf S. 125—127 seines Handbuches, gelangt jedoch dort nicht zu dem Satz, welcher dem Satz I entspricht, sondern beweist nur die Analoga zu den Sätzen IV und V über absolute Konvergenz. Tatsächlich findet man genau wie in den §§ 1—4 mit den näher anzugebenden Abänderungen in den Beweisen die 10 Sätze, welche den Sätzen I bis X entsprechen und mit I' bis X' numeriert sein mögen.

---

[1]) Unter dem ersten Gliede wird a_0 verstanden.

Zunächst gilt der bereits 1884 von Herrn Jensen[1]) ohne Ausführung des Beweises publizierte

Satz I': Wenn $W(x_0)$ konvergiert und x_0 von 1, 2, ... verschieden ist, so konvergiert $W(x_1)$ für $\Re(x_1) > \Re(x_0)$.

Der Beweis verläuft ganz wie der des Satzes I; nur ist hier

$$b_n = a_n \frac{(x_0-1)\dots(x_0-n)}{n!}, \quad c_n = \frac{(x_1-1)\dots(x_1-n)}{(x_0-1)\dots(x_0-n)} = \frac{(-x_1+1)\dots(-x_1+n)}{(-x_0+1)\dots(-x_0+n)}$$

zu setzen und die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} |c_n| \, n^{\Re(x_1-x_0)} = \lim_{n=\infty} \left| \frac{(-x_1+1)\dots(-x_1+n)}{(-x_0+1)\dots(-x_0+n)} \right| n^{\Re(x_1-x_0)}$$

$$(35) \qquad = \frac{|x_0 \Gamma(-x_0)|}{|x_1 \Gamma(-x_1)|} \text{ [2])}$$

nebst

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x_1 - x_0}{-x_0 + n + 1}$$

zu verwenden.

Aus Satz I' folgt die Existenz der Konvergenzhalbebene im Sinne von S. 159—160; nur sind hier die außerhalb derselben etwa gelegenen Punkte 1, 2, ... den Konvergenzpunkten zuzuzählen.

Satz II' lautet wie Satz II und wird ebenso bewiesen. Er besagt, daß eine Binomialkoeffizientenreihe in einer gewissen Umgebung jeder Stelle in ihrer Konvergenzhalbebene gleichmäßig konvergiert. Dies gilt auch von den in der Konvergenzhalbebene gelegenen ganzen positiven Zahlen $x = m$, da die Reihe

$$\frac{1}{(x-1)\dots(x-m)} \left(W(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \frac{(x-1)\dots(x-n)}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{(x-m-1)\dots(x-n)}{n!}$$

---

[1]) l. c., S. 71—72.

[2]) Für $x_0 = 0$ bezw. $x_1 = 0$ ist unter dem Zähler bezw. Nenner der rechten Seite von (35) der Wert 1 zu verstehen.

wieder eine Binomialkoeffizientenreihe mit der Variablen $x-m=y$ und der Konvergenzhalbebene $\Re(y) > \lambda - m$ darstellt.

Aus Satz II' folgt unmittelbar der Satz III', nach welchem die Reihe $W(x)$ in ihrer Konvergenzhalbebene eine reguläre Funktion darstellt und beliebig oft gliedweise differentiiert werden kann.

Satz IV' ergibt sich wie Satz IV; er besagt, daß das Gebiet der absoluten Konvergenz eine Halbebene (mit oder ohne Einschluß der Grenzgeraden) ist.

Die Sätze I', II', III', IV' sind schon von Herrn Bendixson[1]) bewiesen worden, da sie in seinen entsprechenden Sätzen[2]) über die Reihen von der Gestalt (2) enthalten sind.

Satz V', nach welchem die Breite des Streifens bedingter Konvergenz ≤ 1 ist, ergibt sich wie Satz V.

Satz VI' lautet: In jedem (von 1, 2, ... verschiedenen) Punkte sind die Binomialkoeffizientenreihe

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-1)\dots(x-n)}{n!}$$

und die Dirichletsche Reihe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^x}$$

gleichzeitig konvergent oder gleichzeitig divergent.

Dieser Satz wird wie Satz VI bewiesen, wenn man im ersten Teil des Beweises berücksichtigt, daß für

$$c_n = \frac{(-1)^n (x-1)\dots(x-n) n^x}{n!}$$

$$c_n - c_{n+1} = c_n \left(1 + \frac{(x-n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{n+1}\right) \tag{36}$$

[1]) l. c., S. 19, 22, 23, 24.

[2]) S. § 6 des Folgenden.

ist. Denn der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (36) ist für $n \geqq 2$ in die Reihe entwickelbar

$$1 + \frac{-1 + \frac{x-1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \left(-1 + \frac{x-1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_3}{n^3} + \cdots$$

Analog verläuft der Beweis des zweiten Teiles im Anschluß an S. 169.

Ohne Mühe ergibt sich Satz VII', nach welchem die Punkte absoluter Konvergenz für $W(x)$ und $\Psi(x)$ (abgesehen von $1, 2, \ldots$) dieselben sind.

Aus Satz VI' folgt[1]) der

Satz VIII': Falls die Abszisse λ der Konvergenzgeraden von $W(x)$ nicht negativ ist, so ist

$$\lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} (-1)^n a_n \right|}{\log t};$$

falls die Abszisse μ der Grenzgeraden absoluter Konvergenz $\geqq 0$ ist, so ist

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\log t}.$$

Herr Pincherle[2]) ist auch hier[3]) der irrtümlichen Ansicht, es sei

$$\mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log |a_t|}{\log t} + 1 = k + 1,$$

---

[1]) Der Satz VIII' läßt sich auch direkt durch die Schlüsse beweisen, welche auf S. 203 ff. für den Satz VIII'' angewendet werden.

[2]) l. c. (s. S. 177, Anm. 1), S. 419.

[3]) Vgl. S. 178.

und er nennt die Halbebene $\Re(x) > k + 1$ den (absoluten) Konvergenzbereich von $W(x)$.

Ferner gilt der Satz IX', nach welchem jeder (von 1, 2, ... verschiedene) Punkt der Grenzgeraden für $W(x)$ und $\Psi(x)$ beidemal regulär oder beidemal singulär ist. Dies folgt aus der Relation, welche sich aus (20) durch Vertauschung von x mit $-x$ ergibt und

$$\frac{1}{-x\,\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n n!}{(x-1)\ldots(x-n)}\,\frac{1}{n^x} = 1 + \frac{x-x^2}{2n} + \frac{\varphi_1(x,n)}{n^2}$$

lautet; denn dies liefert

$$\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!} = \frac{1}{-x\cdot\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n}{n^x}\,\frac{1}{1+\frac{x-x^2}{2n}+\frac{\varphi_1(x,n)}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{-x\,\Gamma(-x)}\,\frac{(-1)^n}{n^x}\left(1-\frac{x-x^2}{2n}+\frac{\varphi_2(x,n)}{n^2}\right),$$

wo $|\varphi_2(x,n)|$ in jedem endlichen, die Punkte 1, 2, ... im Innern und auf dem Rande nicht enthaltenden Gebiet unterhalb einer endlichen, von x und n unabhängigen Schranke liegt. Für $\Re(x) > \lambda$ ist also

$$W(x) = a_0 + \frac{1}{-x\,\Gamma(-x)}\,\Psi(x) + \frac{1-x}{2\,\Gamma(-x)}\,\Psi(x+1)$$
$$-\frac{1}{x\,\Gamma(-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\varphi_2(x,n)\,a_n}{n^{x+2}},$$

was die Behauptung enthält, wenn man die Überlegungen von S. 183—184 anstellt.[1])

Satz X' endlich besagt, daß der reelle Punkt $x = \lambda$ auf der Grenzgeraden von $W(x)$ singulär ist, falls $(-1)^n a_n$ von einer gewissen Stelle an ≥ 0 ist und λ keine positive ganze Zahl ist. Dies folgt ohne weiteres aus Satz IX' und aus der auf S. 191 zitierten Eigenschaft der Dirichletschen Reihen. Für

[1]) Wenn der Punkt λ für $\Psi(x)$ regulär ist, so ist er es auch für $W(x)$.

ganzzahliges $\lambda > 0$ gilt der Satz nicht, wie das einfache Beispiel der Binomialkoeffizientenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{x-1}{n} = 1-(x-1)+\frac{(x-1)(x-2)}{2!}-\dots$$

mit der Grenzgeraden $\Re(x) = 1$ zeigt, welche in ihrer Konvergenzhalbebene die ganze transzendente Funktion 0 darstellt.

§ 6.

Es mögen nun kurz die verallgemeinerten Fakultätenreihen

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{(x+\gamma_1)\dots(x+\gamma_n)}$$

und die verallgemeinerten Binomialkoeffizientenreihen

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n)$$

behandelt werden; hierin sollen $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ positive, monoton ins Unendliche wachsende Größen bezeichnen, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert.[1])

Aus dieser Annahme folgt leicht, daß nach Annahme einer positiven Größe δ für alle hinreichend großen n

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu^2}<\delta\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu} \tag{37}$$

ist. Denn für alle $\nu \geqq \nu_0$ ist

$$\gamma_\nu > \frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{\gamma_\nu^2}<\frac{\delta}{2\gamma_\nu},$$

---

[1]) Man kann auch andere lohnende Annahmen über die γ_n machen. Herr Jensen hat solche Fälle a. a. O. (S. 72) noch besonders erwähnt, und Herr Bendixson hat einige derselben (l. c.) behandelt.

also für alle $n \geqq \nu_0$

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} \leqq \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \frac{1}{\gamma_\nu^2},$$

und für alle hinreichend großen n ist hierin

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0-1} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

so daß (37) erfüllt ist.

Es gilt nun zunächst der

Satz I*: Wenn $F(x)$, bezw. $G(x)$, für $x = x_0$ konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist, so konvergiert $F(x_1)$, bezw. $G(x_1)$. (Hierbei werden für $F(x)$ die Stellen $-\gamma_n$, für $G(x)$ die Stellen γ_n von der Betrachtung ausgeschlossen.)

Beweis: 1. Für $F(x)$ werde

$$b_n = \frac{A_n}{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}, \quad c_n = \frac{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}{(x_1+\gamma_1)\ldots(x_1+\gamma_n)}$$

gesetzt, so daß

$$c_n - c_{n+1} = c_n \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_{n+1}}$$

ist. Nach dem Hilfssatz 1 handelt es sich lediglich um den Nachweis der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |;$$

also genügt es a fortiori, die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\gamma_n}$$

zu beweisen. Es ist

$$\Re \log \left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right) = \Re \left(-\frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu} + \frac{\eta_1}{(x_1 + \gamma_\nu)^2}\right),$$

wo $|\eta_1|$[1]) für alle ν unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Daher ist

$$\Re \log \left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right) = -\frac{\Re (x_1 - x_0)}{\gamma_\nu} + \frac{\eta_2}{\gamma_\nu^2},$$

$$|c_n| = \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{x_0 + \gamma_\nu}{x_1 + \gamma_\nu}\right| = \prod_{\nu=1}^{n} \left|1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right| = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \Re \log \left(1 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 + \gamma_\nu}\right)}$$

$$(38) \qquad = e^{-\Re (x_1 - x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} + \eta_3 \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2}}.$$

Nach (37) ist für alle hinreichend großen n

$$\eta_3 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu},$$

also

$$(39) \qquad |c_n| < e^{-\frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}},$$

und es reicht für unseren Zweck aus, zu beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{-\frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}$$

konvergiert, oder, falls

$$\frac{1}{2} \Re (x_1 - x_0) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} = \beta_n$$

gesetzt wird, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta_{n-1}) e^{-\beta_n}$$

konvergiert. Dies folgt tatsächlich aus

---

[1]) Desgl. in der Folge $|\eta_2|$ für alle ν und $|\eta_3|$ für alle n.

$$(\beta_n - \beta_{n-1})\, e^{-\beta_n} < \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_n^2} < \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_n \beta_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n-1}} - \frac{1}{\beta_n}.$$

2. Wird

$$b_n = A_n (x_0 - \gamma_1) \ldots (x_0 - \gamma_n),$$

$$c_n = \frac{(x_1 - \gamma_1) \ldots (x_1 - \gamma_n)}{(x_0 - \gamma_1) \ldots (x_0 - \gamma_n)} = \frac{(-x_1 + \gamma_1) \ldots (-x_1 + \gamma_n)}{(-x_0 + \gamma_1) \ldots (-x_0 + \gamma_n)}$$

gesetzt, so ist wegen $\Re(-x_0) > \Re(-x_1)$ der Nachweis des Satzes I* für $G(x)$ analog dem obigen Nachweise für $F(x)$.

Für die Reihen $G(x)$ hat Herr Bendixson[1]) den Satz I* und ebenso die bezüglichen Teile der Sätze II*, III*, IV* schon bewiesen, wenn auch unnötigerweise unter Heranziehung der Weierstraßschen ganzen transzendenten Funktion

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\gamma_n}\right) e^{\sum\limits_{\nu=1}^{m_n} \frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{\gamma_n}\right)^\nu},$$

welche die γ_n zu Nullstellen besitzt.

Aus Satz I* folgt die Existenz einer Konvergenzhalbebene.

Satz II*. In einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Konvergenzhalbebene konvergiert $F(x)$ bezw. $G(x)$ gleichmäßig.[2])

Beweis: Es genügt (vgl. den Beweis des Satzes II), für $F(x)$ zu zeigen: Wenn die Reihe in x_0 konvergiert, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$, welches der Halbebene $\Re(x) \geq \Re(x_0) + p$ angehört (wo p eine positive Größe bezeichnet) und keinen der Punkte $-\gamma_n$ enthält (auch nicht auf dem Rande). In der Tat bezeichnet in

$$\Re \log\left(1 - \frac{x - x_0}{x + \gamma_\nu}\right) = \Re\left(-\frac{x - x_0}{x + \gamma_\nu} + \frac{\eta}{(x + \gamma_\nu)^2}\right)$$

η eine für alle x in $\mathfrak{G}$ und alle ν dem absoluten Betrage nach

---

[1]) l. c., S. 19, 22, 23, 24.

[2]) Für $F(x)$ sind hierbei die Stellen $-\gamma_n$ auszuschließen.

unterhalb einer endlichen Schranke gelegene Größe. Die Formeln auf S. 199 ergeben offenbar, wenn x statt x_1 gesetzt wird, daß für

$$c_n = \frac{(x_0 + \gamma_1) \dots (x_0 + \gamma_n)}{(x + \gamma_1) \dots (x + \gamma_n)}$$

und alle hinreichend großen n

$$| c_n | < e^{-\frac{1}{2} p \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}$$

ist, welches x in $\mathfrak{G}$ auch gewählt sei. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{| c_n |}{\gamma_n},$$

also von

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n | \left| \frac{x - x_0}{x + \gamma_{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} | c_n - c_{n+1} |$$

in $\mathfrak{G}$. Der Hilfssatz 3 ergibt also für $F(x)$ — und ganz ebenso für $G(x)$ — den Satz II'.

Aus Satz II' folgt Satz III', nach welchem $F(x)$ und $G(x)$ in ihrer Konvergenzhalbebene (nach etwaigem Ausschluß der Punkte $-\gamma_n$ für $F(x)$) reguläre analytische Funktionen darstellen und beliebig oft gliedweise differentiiert werden dürfen.

Aus der in (39) enthaltenen Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{(x_0 + \gamma_1) \dots (x_0 + \gamma_n)}{(x_1 + \gamma_1) \dots (x_1 + \gamma_n)} \right| = 0 \qquad (\Re(x_1 - x_0) > 0)$$

folgt der Satz IV', nach welchem für $F(x)$ und $G(x)$ auch das Gebiet der absoluten Konvergenz eine Halbebene ist.

Satz V hat kein Analogon, nach welchem die Breite des Streifens bedingter Konvergenz stets unterhalb einer endlichen Schranke gelegen oder auch nur endlich wäre. Vielmehr lautet der entsprechende

Satz V': Wenn λ und μ die Abszissen der Grenzgeraden bedingter und absoluter Konvergenz von $F(x)$ (bezw. $G(x)$) sind und

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log t}{\sum\limits_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}} = \tau$$

endlich ist, so ist

$$\mu - \lambda \leqq \tau.^{1)}$$

Beweis: Es sei $F(x_0)$ (bezw. $G(x_0)$) konvergent und

$$\Re(x_1) - \Re(x_0) = \tau + 3p, \; p > 0.$$

Dann ist zu zeigen, daß $F(x_1)$ (bezw. $G(x_1)$) absolut konvergiert. Der Quotient der allgemeinen Glieder für x_1 und x_0 ist

$$c_n = \frac{(x_0+\gamma_1)\ldots(x_0+\gamma_n)}{(x_1+\gamma_1)\ldots(x_1+\gamma_n)}, \text{ bezw. } c_n = \frac{(-x_1+\gamma_1)\ldots(-x_1+\gamma_n)}{(-x_0+\gamma_1)\ldots(-x_0+\gamma_n)},$$

und es genügt, die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

nachzuweisen. Nach (37) und (38) ist von einem gewissen n an

$$|c_n| < e^{-(\tau+3p)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu} + p\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}} = e^{-(\tau+2p)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}};$$

nach der Definition von τ ist für alle hinreichend großen n

$$\frac{\log n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}} < \tau + p;$$

also ist von einem gewissen n an

$$|c_n| < e^{-\frac{\tau+2p}{\tau+p}\log n} = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{\tau+p}}},$$

woraus die Behauptung folgt.

---

1) Für $\gamma_n = n$ ist $\tau = 1$; wenn $\tau = \infty$ ist, ist der Satz trivial.

Es hat kein erhebliches Interesse, die analogen Untersuchungen zu den Sätzen VI, VII und IX auszuführen, da die zum Vergleich heranzuziehende Reihe im allgemeinen keine Dirichletsche wäre.

Dagegen erscheint es wohl von Bedeutung, daß sich die Abszissen λ und μ der Grenzgeraden für die betrachteten Reihen im Sinne des Satzes VIII durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen lassen.

Es mögen die Reihen $F(x)$ und $G(x)$ in der Form

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \gamma_1 \dots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\dots(x+\gamma_n)},$$

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)}{\gamma_1 \dots \gamma_n}$$

geschrieben werden, was nur eine Änderung der Bezeichnung ist. Dann gilt der

Satz VIII': Falls $\lambda \geqq 0$ ist, ist für $F(x)$

$$(40) \qquad \lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}},$$

für $G(x)$

$$(41) \qquad \lambda = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \left| \sum_{n=1}^{t} (-1)^n a_n \right|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}};$$

falls $\mu \geqq 0$ ist, ist für $F(x)$ und $G(x)$

$$(42) \qquad \mu = \limsup_{t=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{t} |a_n|}{\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{\gamma_n}}.$$

Beweis: Es brauchen offenbar nur die Formeln (40) und (41) für λ bewiesen zu werden; denn alsdann folgt der Wert (42) von μ durch ihre Anwendung auf die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\gamma_1\ldots\gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|\frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\ldots\gamma_n},$$

welche für reelle x nur absolut, nicht bedingt konvergieren können, da ihre Glieder von einer gewissen Stelle an durchweg $\geqq 0$ oder durchweg $\leqq 0$ sind.

Es möge zunächst die Gleichung (40) bewiesen werden:

1. Wenn

$$\limsup_{t=\infty} \frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}} = \varkappa$$

endlich und $\delta > 0$ ist, so ist zu zeigen, daß (falls $\varkappa + \delta$ mit keinem $-\gamma_n$ zusammenfällt) $F(\varkappa + \delta)$ konvergiert. Es ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log\left|\sum_{n=1}^{t} a_n\right|}{\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}} < \varkappa + \frac{\delta}{2},$$

also, wenn

$$\sum_{n=1}^{t} a_n = A_t$$

gesetzt wird,

(43)
$$|A_t| < e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_n}\right)} = e^{-\sum_{\nu=1}^{n}\log\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_\nu}\right)}$$

$$= e^{-(\varkappa+\delta)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}+\eta\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu^2}},$$

also, da für alle hinreichend großen n nach (37)

$$|\eta|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu^2} < \frac{\delta}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}$$

ist, von einer gewissen Stelle an

$$(44)\qquad \left|\frac{1}{\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varkappa+\delta}{\gamma_n}\right)}\right| < e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}.$$

Nun ist

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{a_n\gamma_1\ldots\gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{A_n-A_{n-1}}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)}$$

$$= \sum_{n=\varrho}^{\sigma} A_n \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)}\cdot\frac{x}{x+\gamma_{n+1}}$$

$$-\frac{A_{\varrho-1}}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_\varrho}\right)}+\frac{A_\sigma}{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{\sigma+1}}\right)}.$$

Für alle hinreichend großen ϱ und $\sigma \geqq \varrho$ ist also nach (43) und (44)

$$\left|\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{a_n\gamma_1\ldots\gamma_n}{(\varkappa+\delta+\gamma_1)\ldots(\varkappa+\delta+\gamma_n)}\right| < \sum_{n=\varrho}^{\sigma} e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\, e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\cdot\frac{2(\varkappa+\delta)}{\gamma_{n+1}}$$

$$+e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\gamma_\nu}}\, e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho}\frac{1}{\gamma_\nu}} + e^{\left(\varkappa+\frac{\delta}{2}\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_\nu}}\, e^{-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma+1}\frac{1}{\gamma_\nu}}$$

$$=2(\varkappa+\delta)\sum_{n=\varrho}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_{n+1}}e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}+e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\gamma_\nu}-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\gamma_\varrho}}+e^{-\frac{1}{4}\delta\sum\limits_{\nu=1}^{\sigma}\frac{1}{\gamma_\nu}-\left(\varkappa+\frac{3}{4}\delta\right)\frac{1}{\gamma_{\sigma+1}}}.$$

Die drei Glieder dieses Ausdruckes haben für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ den Grenzwert 0 (ersteres nach den Feststellungen von S. 199 bis 200), so daß die Konvergenz von $F(\varkappa+\delta)$ bewiesen ist.

2. Es ist zu zeigen: wenn $x > 0$ ist, $F(x)$ konvergiert und δ eine beliebig gegebene positive Größe ist, so ist von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log|A_t|}{\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}} < x+\delta,$$

d. h.

$$|A_t| < e^{(x+\delta)\sum\limits_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

Es werde

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} = B_t, \quad B_{-1} = 0$$

gesetzt; dann ist

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} a_n = \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} \, \frac{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)}{\gamma_1 \ldots \gamma_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{t} (B_n - B_{n-1}) \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{t} B_n \left\{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right) - \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)\right\}$$

$$+ B_t \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right).$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} B_n = F(x) - a_0$$

existiert, ist für alle n

$$|B_n| < B,$$

also

$$|A_t| < B \sum_{n=1}^{t} \left\{\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right) - \left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_n}\right)\right\}$$

$$+ B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)$$

$$= 2B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right) - B\left(1+\frac{x}{\gamma_1}\right)$$

$$< 2Be^{x\left(\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\gamma_{t+1}}\right)},$$

also für alle hinreichend großen t

$$|A_t| < e^{(x+\delta)\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{\gamma_n}}.$$

Der Beweis des Satzes VIII* für die Reihen $G(x)$, also der Formel (41) ist genau derselbe, wenn man im ersten Teile von der Formel

$$\sum_{n=\varrho}^{\sigma} a_n \frac{(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\dots\gamma_n} = \sum_{n=\varrho}^{\sigma}(A_n - A_{n-1})\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

ausgeht, wo

$$A_t = \sum_{n=1}^{t}(-1)^n a_n$$

ist, und im zweiten Teile von

$$A_t = \sum_{n=1}^{t}(B_n - B_{n-1})\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)},$$

wo

$$B_t = \sum_{n=1}^{t} a_n \frac{(x-\gamma_1)\dots(x-\gamma_n)}{\gamma_1\dots\gamma_n},\quad B_{-1} = 0$$

ist. Da das Produkt

$$\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)$$

bei gegebenem positiven $x\ (\neq \gamma_1, \gamma_2 \dots)$ von einem gewissen Index an konstantes Vorzeichen besitzt und dem absoluten Betrage nach abnimmt, so folgt die Behauptung im zweiten Teil mit unwesentlicher Abänderung aus

$$A_t = \sum_{n=1}^{t} B_n\left(\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_n}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_{n+1}}\right)}\right)$$
$$+\frac{B_t}{\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)}$$

mit Hilfe der Ungleichung

$$|A_t| < c + 2B \frac{1}{\left|\left(1-\frac{x}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\gamma_{t+1}}\right)\right|}.$$

Endlich gilt für Reihen $F(x)$ bezw. $G(x)$ ein den früheren Sätzen X und X' entsprechender Satz X'', nach welchem im Falle $a_n \geqq 0$ bezw. $(-1)^n a_n \geqq 0$ (für alle n von einer gewissen Stelle an) der reelle Punkt λ der Grenzgeraden eine singuläre Stelle der Funktion ist. (Für $G(x)$ wird hierbei λ von allen γ_n verschieden angenommen.)

In der Tat ist für die Reihen $F(x)$ der erste (direkte) Beweis des Satzes X wörtlich anwendbar, und für die Reihen $G(x)$ ergibt sich ebenso — da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda < 0$ angenommen werden kann — der Beweis auf Grund der Tatsache, daß aus

$$G(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{(\gamma_1 - x)\ldots(\gamma_n - x)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}$$

durch gliedweises Differentiieren für $G^{(k)}(x)$ eine Reihe entsteht, in welcher der mit $(-1)^n a_n$ multiplizierte Ausdruck für $x = 0$ (und überhaupt für alle x zwischen λ und γ_1) Null ist oder das Vorzeichen $(-1)^k$ besitzt.

§ 7.

Herr Pincherle[1]) hat in einer kürzlich erschienenen ausführlichen Arbeit die Integrale

$$(45) \qquad \int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt$$

behandelt, wo $a > 0$ ist und $\varphi(t)$ eine für $0 < t < a$ stetige reelle oder komplexe Funktion der reellen Variablen t bezeichnet. Einige der von ihm bewiesenen Eigenschaften dieser Integrale entsprechen den Sätzen I, II, III, IV über Fakultäten-

[1]) l. c. (s. S. 155, Anm. 1).

reihen; seine Beweise sind — mit einer nachher anzugebenden Ausnahme — denkbarst einfach und so kurz, daß ich sie zunächst wiederholen will, um alsdann diejenigen neuen Eigenschaften hinzuzufügen, welche den Sätzen VIII und X über Fakultätenreihen entsprechen.

Durch die Substitution

$$t = \frac{a}{\tau}$$

geht das Integral

$$\int_{\delta}^{a} \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

wo $0 < \delta < a$ ist, in

$$-\int_{\frac{a}{\delta}}^{1} \varphi\left(\frac{a}{\tau}\right) \frac{a^{x-1}}{\tau^{x-1}} \frac{d\tau}{\tau^2} = a^{x-1} \int_{1}^{\frac{a}{\delta}} \frac{\varphi\left(\frac{a}{\tau}\right)}{\tau} \tau^{-x}\, d\tau$$

über, wo

$$\frac{\varphi\left(\frac{a}{\tau}\right)}{\tau} = \psi(\tau)$$

eine für $\tau \geqq 1$ stetige Funktion von τ bezeichnet. Also ist die Theorie der Integrale (45) identisch mit der Theorie der Integrale

$$\int_{1}^{\infty} \psi(t)\, t^{-x}\, dt,$$

und ich will alle Betrachtungen für diese Schreibweise der Integrale anstellen, auf die auch Herr Pincherle Bezug nimmt.

Es ist ihm nicht entgangen, daß die Funktion $\varphi(t)$ bezw. $\psi(t)$ nicht stetig zu sein braucht. Ich mache demgemäß folgende allgemeinere Annahme: $\psi(t)$ ist für alle endlichen reellen $t \geqq 1$ eindeutig definiert, in jedem endlichen Intervalle $t = (1 \ldots \omega)$ hat $|\psi(t)|$ eine endliche obere Grenze, und $\psi(t)$ ist über jedes solche Intervall integrierbar. Alsdann zerfallen alle komplexen $x = u + vi$ in zwei Klassen:

1. Die durch das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

für jedes $\omega > 1$ definierte Funktion[1]) von ω besitzt für $\omega = \infty$ einen Grenzwert.

2. Dies ist nicht der Fall.

Im ersteren Falle nennt man das Integral

$$\mathfrak{I}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

konvergent.

Dann gilt der

Satz I''': Wenn $\mathfrak{I}(x_0)$ konvergiert und $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist, so konvergiert $\mathfrak{I}(x_1)$.

Dieser Satz ist zuerst von Herrn Pincherle[2]) bewiesen worden. Die Herren Phragmén,[3]) Franel[4]) und Lerch,[5]) denen Herr Pincherle[6]) die Entdeckung des Satzes zuschreibt, sprechen tatsächlich nur von denjenigen $x_1 = x_0 + p$, wo $p > 0$ ist. Allerdings ist der Nachweis für $\Re(p) > 0$ ganz analog.[7]) Folgendes ist für den Satz I''' der Lerch-Pincherlesche

---

[1]) In der Tat ist das Produkt zweier integrierbarer Funktionen bekanntlich integrierbar; wenn $\psi(t) = \psi_1(t) + i\,\psi_2(t)$ ist (wo $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ reell sind), so existieren die beiden eigentlichen reellen Integrale

$$\int_1^\omega (\psi_1(t)\cos(v\log t) + \psi_2(t)\sin(v\log t))\, t^{-u}\, dt,$$

$$\int_1^\omega (-\psi_1(t)\sin(v\log t) + \psi_2(t)\cos(v\log t))\, t^{-u}\, dt.$$

[2]) l. c., S. 14.

[3]) „Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 132, 1901, S. 1396.

[4]) Die entsprechende Mitteilung Herrn Franels ist von Herrn Hurwitz auf S. 364—365 seiner Arbeit publiziert: „Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 19, 1902.

[5]) „Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel", Acta mathematica, Bd. 27, 1903, S. 345.

[6]) l. c., S. 13.

[7]) Die von Herrn Nielsen in seiner Arbeit „Elementare Herleitung einiger Formeln aus der Theorie der Gammafunktion" (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 15, 1904, S. 316) gegebene Begründung für die Sätze I''' und II''' des Textes ist unzureichend. Seine auf S. 325

Beweis: Wenn

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_0}\, dt = \Psi(\omega)$$

gesetzt wird, existiert nach Voraussetzung

$$\lim_{\omega=\infty} \Psi(\omega),$$

so daß insbesondere $|\Psi(\omega)|$ für alle $\omega \geqq 1$ unterhalb einer endlichen Schranke A gelegen ist. Es besteht nun die Gleichung

$$(46)\quad \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt = \Psi(\omega)\,\omega^{-x_1+x_0} + (x_1 - x_0)\int_1^\omega \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt.$$

Wegen $\Re(x_1) > \Re(x_0)$ ist

$$\lim_{\omega=\infty} \Psi(\omega)\,\omega^{-x_1+x_0} = 0;$$

wegen

$$|\Psi(t)| < A$$

konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt;$$

also folgt aus (46) die behauptete Konvergenz des Integrals

$$\mathfrak{Z}(x_1) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt$$

und zugleich die Relation

---

des „Handbuches" gemachte Angabe, Herr Pincherle habe die Konvergenz des Integrales für $\Re(x_1) \geqq \Re(x_0)$ nachgewiesen, ist nicht richtig; Herr Pincherle spricht — mit Recht — nur von der Konvergenz für $\Re(x_1) > \Re(x_0)$, und für $\Re(x_1) = \Re(x_0)$ braucht das Integral nicht zu konvergieren. Endlich schreibt Herr Nielsen a. a. O. (S. 325) irrtümlich mir die Priorität der Bemerkung zu, daß der Satz I''' auch ohne Voraussetzung der Stetigkeit von $\psi(t)$ gilt.

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x_1}\, dt = (x_1 - x_0) \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-x_1+x_0-1}\, dt.$$

Aus Satz I‴ folgt für das Integral $\mathfrak{Z}(x)$ die Existenz einer Konvergenzhalbebene, deren Abszisse λ natürlich auch $-\infty$ oder $+\infty$ sein kann.

Satz II‴: In jedem endlichen Gebiete $\mathfrak{G}$, welches innerhalb der Konvergenzhalbebene liegt, ist das Integral $\mathfrak{Z}(x)$ gleichmäßig konvergent.

Beweis (nach Herrn Pincherle): Nach Voraussetzung gibt es zwei positive Konstanten p und q, so daß für alle x in $\mathfrak{G}$

$$\Re(x) \geqq \lambda + 2p, \quad |x| < q$$

ist. Es sei

$$x_0 = \lambda + p,$$

$$\int_1^\omega \psi(t)\, t^{-x_0}\, dt = \Psi(\omega).$$

Dann folgt wegen

$$|\Psi(\omega)| < A$$

aus

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(t)\, t^{-x}\, dt = \Psi(\omega_1)\, \omega_1^{-x+x_0} - \Psi(\omega_0)\, \omega_0^{-x+x_0}$$

$$+ (x - x_0) \int_{\omega_0}^{\omega_1} \Psi(t)\, t^{-x+x_0-1}\, dt$$

die Ungleichung

$$\left| \int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(t)\, t^{-x}\, dt \right| < \frac{A}{\omega_1^p} + \frac{A}{\omega_0^p} + (q + \lambda + p)\, A \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{dt}{t^{p+1}},$$

deren rechte Seite gegen Null konvergiert, falls ω_0 und ω_1 ins Unendliche rücken. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Satz II‴ führt zum

Satz III‴: $\mathfrak{Z}(x)$ stellt in seiner Konvergenzhalbebene eine reguläre analytische Funktion von x dar und darf in jener Halbebene beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiiert werden.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{J}(x)$ eine analytische Funktion von x ist, beweist Herr Pincherle unnötigerweise zuerst, daß das durch Differentiieren unter dem Integralzeichen entstehende Integral für $\Re(x) > \lambda$ konvergiert und zwar in einer gewissen Umgebung jeder Stelle gleichmäßig; er wendet dann einen Satz von Scheeffer [1]) an, nach welchem daraus der analytische Charakter von $\mathfrak{J}(x)$ folgt. Jener Nachweis der Konvergenz (und zumal der gleichmäßigen Konvergenz) ist jedoch überflüssig, da statt des Scheefferschen Satzes ein viel weittragenderer Satz von Herrn de la Vallée Poussin [2]) zur Verfügung steht; ich mache hier zu Herrn Pincherles Beweisführung die analoge Bemerkung wie auf S. 163, Anm. 1 gegenüber Herrn Cahen, und es erscheint mir prinzipiell wichtig, diese Dinge zu erwähnen, obgleich im vorliegenden Fall die Untersuchung des durch Differentiieren unter dem Integralzeichen entstehenden Integrals keine Mühe macht.

Der Satz von Herrn de la Vallée Poussin [3]) lautet:

Es sei n eine Zahl, welche unstetig oder stetig ins Unendliche wächst, $f(x, n)$ für jedes in Betracht kommende n eine in einem zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktion von x. Es existiere für alle x in $\mathfrak{G}$ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} f(x, n) = f(x),$$

und zwar konvergiere $f(x, n)$ für alle x in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

---

[1]) „Über einige bestimmte Integrale, betrachtet als Funktionen eines komplexen Parameters“, Habilitationsschrift, München, 1883, S. 5–6.

[2]) „Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe“, Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 17, Teil 2, 1893, S. 324—325.

[3]) Herr de la Vallée Poussin beweist ihn durch Anwendung der — von ihm wiedergefundenen — Moreraschen Umkehrung des Cauchyschen Satzes. Für den Fall, daß n alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, stellen 1. und 2. den auf S. 163—164 erwähnten Weierstraßschen Satz dar.

1. Dann ist $f(x)$ in $\mathfrak{G}$ eine reguläre analytische Funktion von x.

2. Es ist für $k = 1, 2, 3, \ldots$ in $\mathfrak{G}$

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^k f(x, n)}{d x^k} = \frac{d^k f(x)}{d x^k}.$$

3. Bei gegebenem k konvergiert $\frac{d^k f(x, n)}{d x^k}$ gegen $f^{(k)}(x)$ für jedes innerhalb $\mathfrak{G}$ gelegene Gebiet $\mathfrak{G}'$ gleichmäßig.

Durch Anwendung von 1. und 2. ergibt sich folgender Beweis des Satzes III''': Es werde

$$f(x, n) = \int_1^n \psi(t)\, t^{-x}\, d t$$

gesetzt, wo n alle positiven Werte $\geqq 1$ durchläuft; $\mathfrak{G}$ sei ein beliebiges, in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ gelegenes, zusammenhängendes Gebiet. Nach Satz II''' konvergiert $f(x, n)$ in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $\mathfrak{Z}(x)$; ferner ist $f(x, n)$ bei konstantem n eine in $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Funktion von x; denn[1]) es ist die gliedweise Integration der unendlichen Reihe

$$\psi(t)\, t^{-x} = \psi(t) - \psi(t) \log t \cdot x + \frac{\psi(t) \log^2 t}{2!} x^2 - \cdots$$

über das Intervall $(1 \ldots n)$ erlaubt, und die hierdurch entstehende Reihe stellt sogar eine ganze transzendente Funktion von x dar. Nach 1. ist also

$$\lim_{n=\infty} f(x, n) = \mathfrak{Z}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, d t$$

in $\mathfrak{G}$, also überhaupt für $\Re(x) > \lambda$ eine reguläre analytische Funktion; nach 2. ist in $\mathfrak{G}$, also für $\Re(x) > \lambda$

$$\frac{d^k \mathfrak{Z}(x)}{d x^k} = \int_1^\infty \psi(t)\, (-\log t)^k\, t^{-x}\, d t,$$

womit der Satz III''' bewiesen ist.

---

[1]) Man braucht hierzu nicht einmal die von Herrn de la Vallée Poussin aus seinem Satze gezogenen allgemeinen Folgerungen über Integrale mit einem komplexen Parameter.

Aus

$$|\psi(t)\, t^{-x_1}| = |\psi(t)\, t^{-x_0}|\, \frac{1}{t^{\Re(x_1 - x_0)}}$$

ergibt sich ohne weiteres der

Satz IV‴: Der Bereich absoluter Konvergenz von

$$\mathfrak{I}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-x}\, dt$$

ist eine Halbebene $\Re(x) > \mu$ mit eventuellem Einschluß des Randes.

Diesen bekannten Sätzen füge ich nun die Analoga zu den Sätzen VIII und X über Fakultätenreihen hinzu.

Die Bestimmung der Abszissen λ und μ der Grenzgeraden bedingter und unbedingter Konvergenz ergibt sich durch den

Satz VIII‴: Falls $\lambda \geqq 0$ ist, ist

$$(47) \qquad \lambda = \limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \left| \int_1^\omega \psi(t)\, dt \right|}{\log \omega};$$

falls $\mu \geqq 0$ ist, ist

$$(48) \qquad \mu = \limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \int_1^\omega |\psi(t)|\, dt}{\log \omega}.$$

Beweis: Es braucht nur die Formel (47) bewiesen zu werden; denn aus ihr ergibt sich (48) durch Anwendung auf das Integral $\int_1^\infty |\psi(t)|\, t^{-x}\, dt$.

1. Es werde

$$\limsup_{\omega = \infty} \frac{\log \left| \int_1^\omega \psi(t)\, dt \right|}{\log \omega} = \varkappa$$

gesetzt, und es sei $\varkappa$ endlich, $\delta > 0$; dann soll die Konvergenz von

$$\mathfrak{I}(\varkappa + \delta) = \int_1^\infty \psi(t)\, t^{-\varkappa - \delta}\, dt$$

gezeigt werden. Wenn

$$\int_1^\omega \psi(t)\,dt = \Phi(\omega)$$

gesetzt wird, ist

$$(49)\quad \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-\varkappa-\delta}\,dt = \Phi(\omega)\,\omega^{-\varkappa-\delta} + (\varkappa+\delta)\int_1^\omega \Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,dt.$$

Von einer gewissen Stelle an ist

$$|\,\Phi(\omega)\,| < \omega^{\varkappa+\frac{\delta}{2}};$$

daher ist

$$\lim_{\omega=\infty} \Phi(\omega)\,\omega^{-\varkappa-\delta} = 0,$$

und das Integral

$$\int_1^\infty \Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,dt$$

ist (sogar absolut) konvergent, da von einer gewissen Stelle an

$$|\,\Phi(t)\,t^{-\varkappa-\delta-1}\,| < t^{\varkappa+\frac{\delta}{2}}\,t^{-\varkappa-\delta-1} = \frac{1}{t^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

ist; nach (49) existiert also, wie behauptet,

$$\lim_{\omega=\infty} \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-\varkappa-\delta}\,dt = \vartheta(\varkappa+\delta).$$

2. Es sei $x > 0$ und $\vartheta(x)$ konvergent, $\delta > 0$; dann ist zu zeigen, daß von einer gewissen Stelle an

$$|\,\Phi(\omega)\,| < \omega^{x+\delta}$$

ist. Falls

$$\int_1^\omega \psi(t)\,t^{-x}\,dt = \Psi(\omega)$$

gesetzt wird, ergibt sich

$$\Phi(\omega) = \int_1^\omega \psi(t)\,dt = \int_1^\omega \psi(t)\,t^{-x}\cdot t^x\,dt = \Psi(\omega)\,\omega^x - x\int_1^\omega \Psi(t)\,t^{x-1}\,dt,$$

also wegen

$$|\Psi(\omega)| < B \qquad (\text{für alle } \omega \geqq 1)$$

$$|\Phi(\omega)| < B\omega^x + Bx\int_1^\infty t^{x-1}\,dt = B\omega^x + B(\omega^x - 1) < 2B\omega^x,$$

folglich von einer gewissen Stelle an

$$|\Phi(\omega)| < \omega^{x+\delta},$$

womit der Satz VIII‴ bewiesen ist.

Endlich gilt der — von mir bereits publizierte[1]) —

Satz X‴: Wenn für alle t von einer gewissen Stelle an ($t \geqq a$)

$$\psi(t) \geqq 0$$

ist und das Integral

$$\mathfrak{I}(x) = \int_1^\infty \psi(t)\,t^{-x}\,dt$$

eine im Endlichen gelegene Konvergenzgerade[2]) $\Re(x) = \lambda$ besitzt, so ist $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der in der Halbebene $\Re(x) > \lambda$ durch das Integral $\mathfrak{I}(x)$ definierten analytischen Funktion.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a = 1$ angenommen werden, da

$$\int_1^a \psi(t)\,t^{-x}\,dt$$

eine ganze transzendente Funktion von x ist. Nach Satz III‴ ist nun, mindestens für $|x - \lambda - 1| < 1$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\lambda-1)^k}{k!}\,\mathfrak{I}^{(k)}(\lambda+1)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1-x)^k}{k!}\int_1^\infty \psi(t)\,t^{-\lambda-1}\log^k t\,dt.\end{aligned}$$

Wäre $x = \lambda$ eine reguläre Stelle, so wäre der Konvergenzradius r dieser Potenzreihe > 1. Es sei p so gewählt, daß

$$p > 0,\ 1 + p < r$$

[1]) l. c. (s. S. 191, Anm. 1), S. 548.

[2]) Natürlich muß hier $\mu = \lambda$ sein.

ist. Dann wäre die Potenzreihe für $x = \lambda - p$ konvergent. Da alle Elemente in

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \log^k t\, dt$$

≥ 0 sind, ist die Vertauschung von Summation und Integration erlaubt; es konvergiert also das Integral

$$\int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+p)^k}{k!} \log^k t\, dt = \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda-1}\, e^{(1+p)\log t}\, dt$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(t)\, t^{-\lambda+p}\, dt = \vartheta(\lambda - p),$$

gegen die Voraussetzung, daß λ die Abszisse der Grenzgeraden von $\vartheta(x)$ ist. Daher ist, wie behauptet, $x = \lambda$ eine singuläre Stelle der Funktion.

Berichtigungen.

1. Zu der Abhandlung „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen" von Edmund Landau.

Auf S. 156, Z. 6 v. u. lies: $|c_n - c_{n+1}|$ statt $(c_n - c_{n+1})$.

Auf S. 159, Z. 10 v. o. lies: $\frac{1}{n^{1+\Re(x_1-x_0)}}$ statt $n^{\overline{1+\Re(x_1-x_0)}}$.

Auf S. 161, Z. 12—14 v. o. lies:

$$\Re(x_0) + \gamma_1 \leqq u \leqq \Re(x_0) + \gamma_2, \quad \gamma_4 \leqq v \leqq \gamma_3,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ vier reelle Größen bezeichnen $(0 < \gamma_1 < \gamma_2, \gamma_4 < \gamma_3)$, die so gewählt sind, daß etc.

Auf S. 161, Z. 6—5 v. u. lies:

Wenn eine ganze Zahl γ oberhalb der fünf Zahlen $|x_0|$, $|\Re(x_0) + \gamma_1| + |\gamma_3|$, $|\Re(x_0) + \gamma_2| + |\gamma_3|$, $|\Re(x_0) + \gamma_1| + |\gamma_4|$ und $|\Re(x_0) + \gamma_2| + |\gamma_4|$ gewählt wird, so etc.

---

2. Zu der Abhandlung „Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen" von F. Hartogs.

S. 224 Z. 10 v. o. ist hinter „welche" einzuschalten: (abgesehen von dem einfachsten, die Unmöglichkeit isolierter singulärer Stellen betreffenden Falle)