

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1948

---

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

## Betrachtungen über Flächenabbildungen.

### IX. Flächen, die sich gegenseitig gleichmäßig entsprechen.

Von Frank Löbell in München.

Vorgelegt am 10. Dezember 1948.

Bei einer früheren Gelegenheit wurde die Frage gestreift, wann eine affine Abbildung einer Ebene  $\varepsilon$  auf eine andere  $\varepsilon'$  im euklidischen Raum zugleich mit ihrer inversen „gleichmäßig“ ist.<sup>1</sup> Es ergab sich, daß dies dann und nur dann der Fall sein kann, wenn

entweder entsprechende Richtungen von  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  stets zueinander senkrecht sind

oder eine Drehstreckung in  $\varepsilon$  verbunden mit einer Translation nach  $\varepsilon'$  vorliegt.

Die folgende Mitteilung möge die Antwort vervollständigen: Es sollen alle Flächenpaare  $\varkappa(u, v) \rightleftharpoons \eta(u, v)$  angegeben werden, deren Koppelung in doppeltem Sinne gleichmäßig ist.

1. Die erste Art dieser Paare besteht, wie gesagt, aus den Flächen  $\varkappa, \eta$ , die einander durch Orthogonalität der Linien-elemente zugeordnet sind.

Man weiß seit langem, daß es zu jeder Fläche  $\varkappa$  unendlich viele Flächen  $\eta$  gibt, die mit ihr in der genannten Beziehung stehen, und daß man ihre Bestimmung, sofern  $\varkappa$  nicht abwickelbar ist, auf die Integration einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung 2.O., der sog. charakteristischen Gleichung, zurückführen kann, der die von Weingarten eingeführte „Verschiebungsfunktion“ genügen muß.<sup>2</sup> Wenn das Krümmungsmaß von  $\varkappa$  verschwindet, hängt die Lösung der Aufgabe von der Integration linearer partieller Differentialgleichungen 1.O. ab.

<sup>1</sup> SitzBer. der Bayer. Akademie der Wiss., Math.-nat. Kl., 1947 S. 25 ff., bes. S. 33.

<sup>2</sup> J. Weingarten, Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, Crelles Journal 100, 1887, S. 296 ff.

Das Problem hängt bekanntlich aufs engste sowohl mit dem der Auffindung aller infinitesimalen Verbiegungen von  $\mathfrak{x}$  als auch mit dem der Bestimmung aller Drehrisse von  $\mathfrak{x}$  zusammen.<sup>3</sup> Aus diesem Grunde bietet auch die Lösung der Aufgabe in dem Falle der Abwickelbarkeit der Fläche  $\mathfrak{x}$  keine grundsätzliche Schwierigkeit. Diese Zusammenhänge machen auch die Tatsache verständlich, daß Volterra eine kinematische Deutung für die Verschiebungsfunktion geben konnte.<sup>4</sup>

Hier sei aber noch darauf hingewiesen, daß die doppelte Verschiebungsfunktion gleich der Schiefe  $J$  des Flächenpaares ist.<sup>5</sup> Die oben betrachteten Abbildungen können, wie sich leicht direkt nachweisen läßt, nirgends „gerade“ sein, wenn man nicht entartete Flächen zulassen will.<sup>6</sup>

2. Die zweite Art der in Rede stehenden Paare gehört zu den einander mit parallelen Berührebenen konform entsprechenden Flächen  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$ , deren Ermittlung sich schon Christoffel zur Aufgabe gemacht hat.<sup>7</sup> Da aber in diesem Zusammenhang gewöhnlich nicht ausdrücklich zwischen den Fällen, in denen direkte Winkeltreue vorliegt, und denjenigen, in denen die Winkeltreue indirekt ist, unterschieden wird, sei hier der Fall der Erhaltung des Drehsinnes kurz erneut behandelt:

Dafür, daß  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{y}$  der gestellten Forderung genügen, ist notwendig und hinreichend, daß die Vektoren  $\mathfrak{x}_u$  und  $\mathfrak{x}_v$  durch eine

<sup>3</sup> Siehe G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV, Paris 1896, S. 15 ff. E. Cesaro, *Lezioni di geometria intrinseca*, Napoli 1896, S. 194 ff. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, II 1, Bologna 1923, S. 5. Vgl. auch diese SitzBer. 1948, S. 227 ff.

<sup>4</sup> V. Volterra, *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili*. Rend. d. R. Acc. dei Lincei. Sitzung vom 6. April 1884. Vgl. auch Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 7 (1927), S. 463 ff., sowie die dort zitierte Literatur.

<sup>5</sup> Dies erkennt man sofort, wenn man einen Blick auf die in Bianchi-Lukat, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Leipzig 1899, S. 289, angegebene Definition der Verteilungsfunktion wirft, die dort mit  $\varphi$  bezeichnet ist. (Wegen der Definition der Schiefe vergleiche man diese SitzBer. 1944, S. 126, 107 und 122.)

<sup>6</sup> Vgl. diese SitzBer. 1943, S. 236, und 1947, S. 31 f.

<sup>7</sup> E. B. Christoffel, *Über einige Eigenschaften der Minimumsflächen*. Crelles Journal 67, 1867, S. 218 ff. (Ges. math. Abhandl., I, S. 259 ff.). Vgl. auch J. Knoblauch, *Grundlagen der Differentialgeometrie*. Leipzig und Berlin 1913, S. 601 ff.

in dem Kreis  $\gamma$  einbeschrieben ist. Die Seitenlänge ist  $\frac{1}{2}$  bzw.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  mal so groß wie die des Kreises. Daher sind die beiden Kreise einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die erste Behauptung bewiesen. Nach dem Satz von Pappos sind die beiden Kreise einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die zweite Behauptung bewiesen. Nach dem Satz von Pappos sind die beiden Kreise einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die dritte Behauptung bewiesen.

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

Die beiden Kreise  $\gamma$  und  $\delta$  sind einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die vierte Behauptung bewiesen. Nach dem Satz von Pappos sind die beiden Kreise einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die fünfte Behauptung bewiesen.

Die beiden Kreise  $\gamma$  und  $\delta$  sind einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die sechste Behauptung bewiesen.

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

oder

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

Die beiden Kreise  $\gamma$  und  $\delta$  sind einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die siebte Behauptung bewiesen. Nach dem Satz von Pappos sind die beiden Kreise einander kongruent, wenn wir uns auf  $\gamma$  beziehen. Hiermit ist die achte Behauptung bewiesen.

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

oder

Bezeichnung der Flächeninhalte 15

Bezeichnung der Flächeninhalte 15  
 Bezeichnung der Flächeninhalte 15  
 Bezeichnung der Flächeninhalte 15



und demselben die Rechte der Reichsstände zu gewähren.

Die Reichsstände des Reiches sind zu demselben Zweck die Reichsstände des Reiches.

Die Reichsstände des Reiches sind zu demselben Zweck die Reichsstände des Reiches.

Die Reichsstände des Reiches sind zu demselben Zweck die Reichsstände des Reiches.

Die Reichsstände des Reiches sind zu demselben Zweck die Reichsstände des Reiches.