BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Verallgemeinerte Ausstrahlungslösungen der Wellengleichung bei beliebiger Dimensionszahl

Von **Dietrich Suschowk** in München

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 11. Dezember 1959

Übersicht

Einleitung und Zusammenfassung

Bei dem Ausstrahlungsproblem der Wellengleichung (vgl. [5], S. 195) handelt es sich bekanntlich darum, Lösungen dieser Gleichung zu konstruieren, die im Ursprung o des Ortsraums eine vorgegebene zeitabhängige Singularität (d. i. die Intensität der Ausstrahlung) aufweisen und im Äußeren des von o ausgehenden charakteristischen Halbkegels verschwinden. Diese Ausstrahlungsintegrale können durch einen einfachen Grenzübergang aus geeigneten Lösungen der Cauchyschen Anfangswertaufgabe gewonnen werden. Sie sind ihrer Natur nach lediglich von der Zeit und vom Euklidschen Abstand eines Ortspunkts von o abhängig, und es ergibt sich für jede Dimension des Ortsraums genau eine Lösung.

Ist der Ortsraum zweidimensional, so gestattet die Ausstrahlungslösung eine physikalische Interpretation, die mit einem elektro-magnetischen Vorgang, an den man wohl bei der Bezeichnung „Ausstrahlungslösung" zunächst denken mag, nichts zu tun hat: Oben wurde erwähnt, daß die Ausstrahlungslösungen im Äußeren eines Kegels verschwinden. Dieser Sachverhalt tritt bei linearen Modellen von Überschallströmungen auf, wenn in ein solches Strömungsfeld ein hinreichend schlanker Körper eingebracht wird, dessen Achse in die Richtung der Anströmung fällt. Diese Achse entspricht der Zeitrichtung. Das Integrationsproblem, d. h. hier die Bestimmung des Strömungsfeldes, ist in diesem Fall weitaus komplizierter als bei der Ausstrahlungsaufgabe, denn es erfordert die Festlegung der Singularitäten so, daß die Lösung auf der Oberfläche des Körpers, also einer zeitartigen Fläche, gewisse Bedingungen erfüllt. Bei dieser Interpretation wird eine Erweiterung des Begriffs der Ausstrahlungslösung nahegelegt: Man wird sich nicht auf die Betrachtung von drehsymmetrischen Körpern beschränken, zu denen die herkömmlichen Ausstrahlungslösungen gehören, sondern auch Körper mit nicht kreisförmigem Querschnitt zu behandeln suchen. Durch Einführung von Polarkoordinaten und Fourierentwicklung gelangt man nach Variablenseparation zu einer einparametrigen Schar von Lösungen, die für den vorliegenden Zweck geeignet sind, da sie im Äußeren des vom Ursprung ausgehenden charakteristischen Halbkegels verschwinden. Diese Lösungen sind wohl erstmals bei Ward angegeben (vgl. [8], S. 192 f.) und wurden vom Verfasser eingehender untersucht (vgl. [6], [7]). Der erste Term der Fourier-Reihe liefert die herkömmliche Ausstrahlungslösung. Die weiteren Termine können ebenfalls als Ausstrahlungslösungen gedeutet werden, wobei der Zusammenhang zwischen der betreffenden Lösung und der dazugehörigen Ausstrahlungsintensität allerdings komplizierter wird (vgl. [7]).

Die vorliegende Arbeit enthält die entsprechenden Ergebnisse für den Fall einer beliebigen endlichen Anzahl von Raumdimensionen. Nach Transformation der Wellengleichung auf Polarkoordinaten und Abspaltung der Winkelvariablen in § 1 wird in § 2 die grundlegende Identität (15) für Integrale vom Faltungstypus des radial-zeitlichen Anteils der Wellengleichung hergeleitet. Diese Identität zerlegt das Ergebnis der Anwendung des radial-zeitlichen Operators auf eine Funktion vom Faltungstypus in zwei Summanden, nämlich in ein Integral über einen gewöhnlichen Differentialausdruck, angewandt auf den Kern der Faltung, und einen integralfreien Anteil, der ebenfalls von diesem Kern abhängt und in dem die zugehörige Ausstrahlungsintensität auftritt. Wird der Faltungskern so gewählt, daß er den gewöhnlichen Differentialausdruck annulliert, so erhält man eine Lösung der in § 1 formulierten homogenen Aufgabe, *falls auch der integralfreie Ausdruck verschwindet.* Annulliert der Faltungskern den gewöhnlichen Differentialausdruck, *ohne daß der integralfreie Ausdruck verschwindet*, so gewinnt man Lösungen einer *inhomogenen* Aufgabe. In § 3 wird zunächst gezeigt, daß bei *gerader* Raumdimension der erwähnte gewöhnliche Differentialausdruck ein hypergeometrischer Differentialausdruck ist, der in einer τ-Ebene betrachtet wird. Weiter wird bewiesen, daß die bei $\tau = 1$ beschränkte Lösung aus dem für diese Stelle gebildeten Fundamentalsystem sich für zulässige Separationsparameter (vgl. § 1), die stets in abzählbarer Menge vorhanden sind, auf Gegenbauersche Polynome (im Fall $n = 2$ auf Tschebyscheffsche Polynome) reduziert. Das hat zur Folge, daß die mit diesen Polynomen bis auf einen Faktor als Kernen gebildeten Faltungen für jedes (t, r) mit $1 \leq \frac{t}{r} < \infty$ Lösungen der *homogenen*, separierten Wellengleichung sind (Satz 1). Im Fall nicht zulässiger Separationsparameter, deren Mächtigkeit stets der des Kontinuums gleich ist, existieren die Integrale der homogenen, separierten Wellengleichung i. a. nur in jeder beschränkten Teilmenge des von den koaxialen Halbkegeln $t = r$ und $t = 3r\,(t > 0)$ begrenzten Gebiets (Satz 1a). Aus den für zulässige Separationsparameter gebildeten Lösungen können in einfacher Weise die entsprechenden Ausstrahlungsintensitäten bestimmt werden (Satz 2). Die zweite Lösung des für die Stelle $\tau = 1$ gebildeten Fundamentalsystems führt bei beliebigem Separationsparameter zu einem Faltungsintegral, welches ein gewisses *inhomogenes* Problem für die Ausgangsdifferentialgleichung löst

(Satz 3.) Da die dabei auftretende Inhomogeneität im wesentlichen die zugehörige Ausstrahlungsintensität ist, kann man dieses Ergebnis als Umkehrung des entsprechenden Faltungsintegrals deuten (Satz 3). Alle diese Ergebnisse gelten für eine beliebige *gerade* Anzahl von Raumdimensionen. In § 4 werden die Fälle *ungerader* Raumdimension untersucht, wobei sich wesentliche Unterschiede den entsprechenden Resultaten des § 3 gegenüber zeigen. Der obenerwähnte gewöhnliche Differentialausdruck wird hier zur Differentialgleichung der zugeordneten Legendreschen Funktionen. Die Legendreschen Funktionen 1. Art sind auch hier für zulässige Separationsparameter im wesentlichen wieder die Gegenbauerschen Polynome, wodurch in diesem Fall dem Satz 1 genau entsprechende Ergebnisse erhalten werden (Satz 4). Die Umkehrung der Ausstrahlungslösungen, also die Bestimmung der zugehörigen Ausstrahlungsintensitäten, gelingt hier für beliebige Separationsparameter (Satz 5).[1] Der wesentliche Unterschied zwischen gerader und ungerader Raumdimension zeigt sich bei dem Versuch, mit den (bei $\tau = 1$ unbeschränkten) Legendreschen Funktionen 2. Art, also den zweiten Lösungen aus dem Fundamentalsystem der gewöhnlichen Differentialgleichung, durch den Faltungsprozeß Lösungen des homogenen oder inhomogenen Problems zu konstruieren, d. h. auch hier eine dem Satz 3 entsprechende Aussage zu gewinnen. Dieser Versuch mißglückt mit einer Ausnahme: $n = 3$, und zwar, da für $n = 7, 9, 11, \ldots$ die Faltungen nicht existieren, während im Fall $n = 5$ zwar die Faltung gebildet werden kann, der im Zusammenhang mit der grundlegenden Identität (15) genannte integralfreie Anteil jedoch nicht endlich ist. So bleibt einzig der Fall des realen physikalischen Raums ausgezeichnet, in dem dann auch ein dem Satz 3 entsprechendes Resultat gewonnen wird.

---

[1] Die Unterschiede zwischen den konstanten Faktoren in den Umkehrformeln für gerade und ungerade Dimension können durch Umnormierung der Kerne beseitigt werden. Sie treten dann in den Formeln für die Ausstrahlungslösungen auf, weshalb auf die Umbenennung verzichtet wurde.

§ 1. Herstellung der Ausgangsdifferentialgleichung und Formulierung des Integrationsproblems

Führt man im Euklidschen $E^n := \{(x_1, \ldots, x_n)\}$ $(n \geq 2)$ Polarkoordinaten gemäß

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-2} \cos\alpha_{n-1}\\
x_2 &= r \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-2} \sin\alpha_{n-1}\\
x_3 &= r \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{n-2}\\
&\vdots\\
x_n &= r \sin\alpha_1
\end{aligned}$$

$$(r > 0,\ 0 \leq \alpha_m \leq \pi\ (m = 1, \ldots, n-2),\ 0 \leq \alpha_{n-1} < 2\pi)$$

ein, so ist

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{und} \quad \alpha_j = \arctan \frac{x_{j+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{j} x_i^2}}$$

$(j = 1, \ldots, n-1)$, und

$$\partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 \text{ [1]}$$

transformiert sich in

$$(1) \qquad \partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\,\partial_r - \frac{1}{r^2}\,B =: V$$

mit

$$B := (\cos^{n-2}\alpha_1 \ldots \cos\alpha_{n-2})^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{\alpha_i} \frac{\cos^{n-2}\alpha_1 \ldots \cos\alpha_{n-2}}{\cos^2\alpha_1 \ldots \cos^2\alpha_{i-1}}\,\partial_{\alpha_i},$$

$$\alpha_0 = 0$$

---

[1] Zur Kennzeichnung von Ableitungen verwenden wir die folgende bequeme Schreibweise: Ist f eine Funktion einer Veränderlichen, so schreiben wir für ihre Ableitung ∂f. Hängt f von den Veränderlichen y_i ab, so bezeichnen wir die Ableitung von f nach y_i mit $\partial_{y_i} f$. Für die k-te Ableitung von f nach y_i benutzen wir das Symbol $\partial_{y_i}^k f$. Das k-te iterierte Integral einer Funktion einer Veränderlichen schreiben wir in der Gestalt $\partial^{-k} f$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

(B wird gelegentlich Beltramischer Operator genannt, wohl wegen seiner Beziehung zu dem auf allgemeine Koordinaten umgeschriebenen Laplace-Operator.) B hängt nur von Parametern auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel, nicht aber von t und r ab. Daher kann man nach Lösungen von

$$\nabla U = 0 \tag{2}$$

fragen, die sich in der Gestalt

$$U(t, r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = u(t, r)\, Y(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \tag{3}$$

schreiben lassen, wo u und Y nur von den angegebenen Variablen abhängen. Setzt man (3) in (2) ein, so ergibt sich die Bedingung

$$Y\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\,\partial_r\right) u - \frac{1}{r^2}\, u\, B\, Y = 0 \tag{4}$$

oder

$$u^{-1}\left[r^2\left(\partial_t^2 - \partial_r^2\right) - (n-1)\, r\, \partial_r\right] u = Y^{-1}\, B\, Y = -k$$

mit konstantem k. (4) zerfällt also in die beiden Differentialgleichungen

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\,\partial_r + \frac{k}{r^2}\right) u = 0 \tag{5}$$

$$B\, Y + k\, Y = 0. \tag{6}$$

Fordert man gewisse Regularitätseigenschaften von den Lösungen von (6) auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel, so werden dadurch bekanntlich die für k zulässigen Werte eingeschränkt, und zwar existieren genau für $k = l\,(l + n - 2)$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ Lösungen von (6), die auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel zweite stetige Ableitungen besitzen. Die so festgelegten Werte k wollen wir „zulässige Separationsparameter" nennen, denn auf diese Werte hat man sich zu beschränken, wenn man eine beliebige mit den durch (1) geforderten Differentiierbarkeitseigenschaften ausgestattete Lösung in der Gestalt

$$U(t, r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \sum_k u_k(t, r)\, Y_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$$

darzustellen wünscht. Da wir hier (im Gegensatz zu [6]) an dem Entwicklungsproblem nicht interessiert sind, werden wir k jedoch nicht von vornherein auf die zulässigen Separationsparameter beschränken.

Unserer Absicht entsprechend, suchen wir Lösungen von (2), die neben (3) die weitere Eigenschaft haben, auf dem charakteristischen Halbkegel

$$t^2 - \sum_{r=1}^{n} x_i^2 = 0, \quad t \geq 0 \tag{7}$$

von (1) zu verschwinden, ohne identisch Null zu sein. Da (7) auch charakteristische Mannigfaltigkeit von (5) ist – überhaupt stimmen ja die charakteristischen Mannigfaltigkeiten von (5) und (7) überein –, so genügt es, Lösungen von (5) zu konstruieren, die in den Punkten von (7) verschwinden.

§ 2. Zurückführung von (5) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung

Sind f und g Funktionen aus $L(-\infty, +\infty)$, so ist

$$f * g := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

ebenfalls aus $L(-\infty, +\infty)$. Wir bilden mit Funktionen A und f aus $L(-\infty, +\infty)$ und

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

den Ausdruck

$$u(t, r) := \frac{\varepsilon(t-r)}{r} A\left(\frac{t}{r}\right) * \varepsilon(t) f(t), \tag{8}$$

der nach einer Substitution der Integrationsveränderlichen in die Gestalt

$$u(t, r) = \int_{1}^{t/r} A(\tau) f(t - \tau r)\, d\tau \tag{9}$$

gebracht werden kann, in der wir *fortan f als beschränkt voraussetzen* wollen. Hat man an u Differentiationen auszuführen – wozu natürlich weitere Voraussetzungen über A bzw. f gemacht werden müssen –, so liegt der Vorteil der Darstellung (9) gegenüber (8) auf der Hand: Die Ableitungen von u lassen sich durch lineare Transformation aus den *Ableitungen von f allein* gewinnen.

Setzt man voraus, daß ∂A existiert und $\partial^2 f$ in $L(-\infty, +\infty)$ liegt, so erhält man

$$\partial_t u = \int_1^{t/r} A(\tau) f'(t-\tau r)\, d\tau + \frac{1}{r} A\left(\frac{t}{r}\right) f(0),$$

$$\partial_r u = -\int_1^{t/r} \tau A(\tau) f'(t-\tau r)\, d\tau - \frac{t}{r^2} A\left(\frac{t}{r}\right) f(0),$$

$$\partial_t^2 u = \int_1^{t/r} A(\tau) f''(t-\tau r)\, d\tau + \frac{1}{r} A\left(\frac{t}{r}\right) f'(0) + \frac{1}{r^2} A'\left(\frac{t}{r}\right) f(0),$$

$$\partial_r^2 u = \int_1^{t/r} \tau^2 A(\tau) f''(t-\tau r)\, d\tau + \frac{t}{r^3} A\left(\frac{t}{r}\right)(t f'(0) + 2 f(0)) + \frac{t^2}{r^4} A'\left(\frac{t}{r}\right) f(0).$$

Wenn man diese Ausdrücke in (5) einsetzt, so gelangt man unter Beachtung von

$$r\partial f(t-\tau r) = -\partial_\tau f(t-r\tau)$$

nach leichter Rechnung zu

$$r^2\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{k}{r^2}\right) u$$

$$(10) \quad = \int_1^{t/r} A(\tau)\{(1-\tau^2)\,\partial_\tau^2 - (n-1)\,\tau\,\partial_\tau + k\} f(t-\tau r)\, d\tau$$

$$+ \left(1-\left(\frac{t}{r}\right)^2\right) f(0)\,\partial A\left(\frac{t}{r}\right) - \left[\left(1-\left(\frac{t}{r}\right)^2\right)\partial_\tau f(0) - (n-3)\frac{t}{r} f(0)\right] A\left(\frac{t}{r}\right).$$

Vermöge dieser Beziehung wird das Ergebnis der Anwendung des partiellen Differentialausdrucks V durch ein Integral über den gewöhnlichen Differentialausdruck

$$(1-\tau^2)\,\partial^2-(n-1)\,\tau\,\partial+k \tag{11}$$

dargestellt. (Natürlich ist [10] eine Konsequenz der speziellen Annahme [8]). Mit Hilfe der Lagrangeschen Identität kann die rechte Seite von (10) umgeformt werden. Dazu wollen wir zunächst den nicht selbstadjungierten Operator (11) in einen selbstadjungierten überführen. Zu diesem Zweck setzen wir mit noch zu bestimmenden Funktionen g und h

$$h(\tau)\left[(1-\tau^2)\,\partial^2-(n-1)\,\tau\,\partial\right]f(\tau) = \partial\left(g(\tau)f(\tau)\right)$$

und finden mit

$$h(\tau) = (\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}} \qquad \text{und} \qquad g(\tau) = -(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$(\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\left[(1-\tau^2)\,\partial^2-(n-1)\,\tau\,\partial\right] = -\partial\left[(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\partial\right].$$

Führt man eine neue Funktion B gemäß

$$A(\tau) = (\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\,B(\tau)$$

ein, so geht (10) wegen

$$(1-\tau^2)f(0)\,\partial A(\tau)-\left[(1-\tau^2)\,\partial_\tau f(0)-(n-3)\,\tau f(0)\right]A(\tau)$$
$$= (\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(B(\tau)\,\partial_\tau f(0)-f(0)\,\partial B(\tau)\right)$$

über in

$$r^2\left(\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{n-1}{r}\,\partial_r+\frac{k}{r^2}\right)u$$

$$= -\int_1^{t/r} B(\tau)\left[\partial_\tau\,(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\partial_\tau-(\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\,k\right]f(t-\tau r)\,d\tau \tag{12}$$

$$+\left[\left(\frac{t}{r}\right)^2-1\right]^{\frac{n-1}{2}}\left(B\left(\frac{t}{r}\right)\partial_\tau f(0)-f(0)\,\partial B\left(\frac{t}{r}\right)\right).$$

Die Lagrangesche Identität liefert mit

$$L(\partial_\tau):=\partial_\tau(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\partial_\tau-(\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}}k$$

$$\int_1^{t/r} B(\tau)\,L(\partial_\tau)f(t-\tau r)\,d\tau=\int_1^{t/r} f(t-\tau r)\,L(\partial_\tau)\,B(\tau)\,d\tau$$

$$(13)\qquad +\left[\left(\frac{t}{r}\right)^2-1\right]^{\frac{n-1}{2}}\left(B\left(\frac{t}{r}\right)\partial_\tau f(0)-f(0)\,\partial B\left(\frac{t}{r}\right)\right)$$

$$-\lim_{\tau\downarrow 1}\left\{(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(B(\tau)\,\partial_\tau f(t-\tau r)-f(t-\tau r)\,\partial B(\tau)\right)\right\}.$$

Wir setzen zur Vereinfachung der Schreibweise

$$(14)\quad b(t,r;\tau)=(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(B(\tau)\,\partial_\tau f(t-\tau r)-f(t-\tau r)\,\partial B(\tau)\right)$$

und

$$a(t,r)\quad:=\lim_{\tau\downarrow 1} b(t,r;\tau),$$

falls dieser Grenzwert existiert. Durch Einsetzen von (13) in (12) erhält man die für alles Weitere grundlegende Beziehung

$$(15)\qquad \begin{aligned} &r^2\left(\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{n-1}{r}\,\partial_r+\frac{k}{r^2}\right)u\\ &=-\int_1^{t/r} f(t-\tau r)\,L(\partial_\tau)\,B(\tau)\,d\tau+a(t,r).\end{aligned}$$

Gelingt es nun, für B solche Lösungen der Differentialgleichung

$$(16)\qquad L(\partial_\tau)\,B(\tau)=0$$

zu finden, für welche $(\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}}B(\tau)$ über $\left[1,\frac{t}{r}\right]$ integrabel ist und $a(t,r)$ durchweg verschwindet, so erhält man in

$$(17)\qquad u(t,r)=\int_1^{t/r}(\tau^2-1)^{\frac{n-1}{2}}B(\tau)\,f(t-\tau r)\,d\tau$$

eine Lösung der Gleichung (5), die auf der charakteristischen Mannigfaltigkeit (7) von (5) überall den Wert Null annimmt. Bemerken wir noch, daß für das identische Verschwinden von $a(t, r)$ die Beschränktheit von B und ∂B in einer rechtsseitigen Umgebung von $\tau = 1$ hinreicht.

§ 3. Konstruktion der Lösungen für gerade Raumdimensionen

Nach diesen Vorbereitungen können wir die beiden folgenden Aussagen beweisen:

Satz 1: Ist $n > 0$ gerade und $k = l\,(l + n - 2)$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, also ein zulässiger Separationsparameter, so ist das mit f $(\partial^2 f \in L(-\infty, +\infty))$ gebildete Integral

$$u_k(t, r) = \int_1^{t/r} (\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, F\left(n + l - 2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) f(t - \tau r)\, d\tau$$

eine (durch f, n und k eindeutig festgelegte) Lösung von (5), die für jedes endliche $(1 \leq)\, {}^t/_r$ existiert und auf (7) verschwindet. Ist $n = 2$, so ist die hypergeometrische Funktion im Integranden gleich dem l-ten Tschebyscheffschen Polynom. Für $n > 2$ stimmt sie bis auf einen nur von n und l abhängenden Faktor (der wegen der Homogeneität von (5) weggelassen werden kann) mit dem Gegenbauerschen Polynom $C_l^{\frac{n-2}{2}}$ überein.

Satz 1a: Unter den gleichen Voraussetzungen über f und n wie oben und der Annahme $k \leq -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, sonst beliebig, ist das Integral

$$\tilde{u}_k(t, r) = \int_1^{t/r} (\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, F\left(\alpha, \beta, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) f(t - \tau r)\, d\tau,$$

in dem α und β die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - (n-2)\,\varrho - k = 0$$

sind, eine (durch f, n und k eindeutig festgelegte) Lösung von (5), die für jedes $(1 \leq)\, \frac{t}{r} < 3$ existiert und auf (7) verschwindet.

Beweis: Wir ersparen uns in beiden Fällen die formal erforderliche explizite Verifikation der Tatsache, daß die angegebenen Integrale Lösungen von (5) sind, sondern gehen von (15) aus. Es wird gezeigt, daß B so gewählt werden kann, daß (16) erfüllt ist und (17) existiert. Da

$$L(\partial_\tau)\, B(\tau) = (\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}} \left[(\tau^2-1)\, \partial_\tau^2 + (n-1)\tau\, \partial_\tau - k\right] B(\tau)$$

ist, so hat B, soll (16) erfüllt sein, der Differentialgleichung

$$(18) \qquad (\tau^2-1)\, y'' + (n-1)\, \tau y' - k y = 0 \qquad (n \geq 2)$$

zu genügen. (16) geht vermöge der Substitution $\sigma = \frac{1+\tau}{2}$, die $\sigma = 1$ in $\tau = 1$ überführt, über in die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(19) \qquad \sigma(\sigma-1)\, z'' + \left[(n-1)\, \sigma - \frac{n-1}{2}\right] z' - k z = 0,$$

die im Endlichen die singulären Stellen $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ besitzt. Die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung

$$\sigma(\sigma-1)\, z'' + \left[(1+\alpha+\beta)\, \sigma - \gamma\right] z' + \alpha\beta z = 0$$

hat – in Gestalt des Riemannschen Symbols geschrieben – das allgemeine Integral

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \sigma \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{pmatrix}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten mit (19) liefert

$$\gamma = \frac{n-1}{2}, \quad \alpha + \beta = n-2, \quad \alpha\beta = -k,$$

also

$$1-\gamma = -\frac{n-3}{2}, \quad \gamma-\alpha-\beta = -\frac{n-3}{2},$$

woraus man die Wurzeln der determinierenden Gleichung für die im Endlichen gelegenen Singularitäten von (19) zu

$$(20) \qquad \varrho_1^{(i)} = 0, \quad \varrho_2^{(i)} = -\frac{n-3}{2}, \quad i = \begin{cases} 0\colon \text{Stelle } \sigma = 0 \\ 1\colon \text{Stelle } \sigma = 1 \end{cases}$$

entnimmt. Für $\sigma = \infty$ ergeben sich die Wurzeln

$$\alpha = \frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n-2)^2 + 4k}$$

(21)

$$\beta = \frac{n-2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(n-2)^2 + 4k}\,.$$

Ist k ein zulässiger Separationsparameter, so ist

$$(n-2)^2 + 4k = (n-2)^2 + 4l\,(l+n-2) = (n+2\,(l-1))^2;$$

α und β sind in diesen Fällen also stets ganz. Vor allem interessiert uns das Verhalten der Lösungen von (18) an der Stelle $\tau(=\sigma) = 1$, da $\tau = 1$ Endpunkt des Integrationsintervalls in (17) ist. Die Antwort auf diese Frage können wir (20) entnehmen, da die Wurzeln der determinierenden Gleichung für eine singuläre Stelle bei einer linearen Transformation dieser Stelle erhalten bleiben. Da im vorliegenden Fall

$$\varrho_1^{(1)} - \varrho_2^{(1)} = \frac{n-3}{2}$$

nicht ganz ist, so liefert die allgemeine Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung sofort ein Fundamentalsystem von (18) an der Stelle $\tau = 1$ der Gestalt

$$B_1(\tau) = p(1-\tau), \quad B_2(\tau) = (1-\tau)^{-\frac{n-3}{2}}\, q(1-\tau)$$

mit bei $\tau = 1$ holomorphen Potenzreihen p und q, die beide mindestens den Konvergenzradius 2 besitzen (denn die Reihen für p und q konvergieren mindestens bis zur $\tau = 1$ nächstgelegenen singulären Stelle von (18), und das ist $\tau = -1$). Die expliziten Ausdrücke für $B_i\,(i = 1, 2)$ lauten

$$B_1(\tau) = F\left(\alpha, \beta, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$$

(22)

$$B_2(\tau) = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^{-\frac{n-3}{2}} F\left(\frac{n-1}{2} - \beta, \frac{n-1}{2} - \alpha, -\frac{n-5}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right),$$

wo F die hypergeometrische Funktion ist und α, β die Wurzeln der Gleichung $\varrho^2 - (n-2)\,\varrho - k = 0$ bezeichnen. B_2 scheidet zunächst aus unseren Betrachtungen aus, da es für $\tau > 1$ nicht reell ist. Ist k ein zulässiger Separationsparameter, so folgt aus (21)

$$\alpha = l + n - 2, \quad \beta = -l.$$

$F\left(\alpha, \beta, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$ ist bei festem n in der Tat durch k eindeutig festgelegt, denn aus

$$(k =)\ l(l+n-2) = l'(l'+n-2) \qquad (l, l' = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt $-l' = l+n-2$. Daher werden bei Ersetzung von l durch $l' \neq l$ nur α und β vertauscht; die hypergeometrische Funktion ist aber in ihren ersten beiden Parametern symmetrisch. Weiter ist im vorliegenden Fall für $n = 2$

$$B_1(\tau) = F\left(l, -l, \frac{1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) = T_l(\tau)$$

das l-te Tschebyscheffsche Polynom (vgl. [1] Bd. 2, S. 186) und für $n > 2$

$$\begin{aligned} B_1(\tau) &= F\left(n+l-2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) \\ &= \frac{l!\,(n-3)!}{(l+n-3)!} \sum_{j=0}^{l} \frac{(-1)^j \left(\frac{n}{2}+j-2\right)!\,(l+n+j-3)!}{j!\left(\frac{n}{2}-2\right)!\,(2j+n-3)!\,(l-j)!} \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^j \\ &= \frac{l!\,(n-3)!}{(l+n-3)!}\, C_l^{\frac{n-2}{2}}(\tau), \end{aligned}$$

wobei $C_l^{\frac{n-2}{2}}$ ein Gegenbauersches Polynom ist (vgl. [1] Bd. 1, S. 175; [4], S. 281 f.). Da B_1 für zulässige Separationsparameter ein Polynom ist, so folgt sofort die Existenz der mit $B = B_1$ gebildeten Integrale (17) (auch im Fall $n = 2$) und deren Verschwinden für $\frac{t}{r} \downarrow 1$. Weiter ist $a(t,r) = 0$, denn B_1 und ∂B_1 sind bei $\tau = 1$ endlich. Der Beweis von Satz 1 ist damit geliefert. Um den Beweis für Satz 1a abzuschließen, genügt es, daran zu erinnern, daß der Konvergenzradius von $F\left(\alpha, \beta, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$ mindestens gleich 2 ist.

Wir zeigen nun, wie man die Integrale (17) im Fall zulässiger Parameter umkehren, d. h. die Intensitäten der zugehörigen „Strahlungsquellen" bestimmen kann:

Satz 2: Es sei $n > 0$ gerade, k ein zulässiger Separationsparameter und, falls $n = 2$ ist, $l \neq 0$. Ist dann a_{jnl} der Koeffizient der j-ten Potenz in dem nach wachsenden Potenzen von τ geordneten Polynom $F\left(n+l-2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$, so gilt für $t \geq 0$

$$f(t) = \frac{1}{(n+l-3)!\, a_{lnl}} \partial_t^{n+l-2} \left[\lim_{r \downarrow 0} r^{l+n-2} u_k(t, r)\right].$$

Ist $n = 2$ und $l = 0$, so hat man für $t \geq 0$

$$f(t) = -\lim_{r \downarrow 0} r \partial_r u_0(t, r).$$

Beweis: Es ist $n > 0$ gerade und, falls $n = 2$ ist, $l \neq 0$. Unter Beachtung der Gleichheit der rechten Seiten von (8) und (9) erhalten wir mit

$$F\left(n+l-2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) = \sum_{j=0}^{l} a_{jnl}\, \tau^j, \; (a_{lnl} \neq 0)$$

$$u_k(t, r) = \int_1^{t/r} (\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} F\left(n+l-2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) f(t - \tau r)\, d\tau$$

$$= \varepsilon(t-r)\, r^{-n+2} (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} \sum_{j=0}^{l} a_{jnl} \left(\frac{t}{r}\right)^j * \varepsilon(t) f(t)$$

$$= \varepsilon(t-r)\, r^{-l-n+2} (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} \sum_{j=0}^{l} a_{jnl}\, r^{l-j}\, t^j * \varepsilon(t) f(t).$$

In

$$r^{l+n-2} u_k(t, r) = \varepsilon(t-r)\, (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} \sum_{j=0}^{l} a_{jnl}\, r^{l-j}\, t^j * \varepsilon(t) f(t)$$

kann der Grenzübergang $r\downarrow 0$ vorgenommen werden. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{r\downarrow 0} r^{l+n-2} u_k\,(t, r) &= a_{lnl}\,\varepsilon(t)\, t^{n+l-3} * \varepsilon(t) f(t)\\ &= a_{lnl}\int_0^t (t-\tau)^{n+l-3} f(\tau)\, d\tau\\ &= (n+l-3)!\, a_{lnl}\, \partial^{-(n+l-2)} f(t),\end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung aus Satz 2 folgt. Die zweite Behauptung, betreffend den Fall $n = 2$, $l = 0$, ist in der Note [7] bewiesen.

Wir greifen nun den oben zurückgestellten Fall $B = B_2$ (aus (22)) wieder auf: Da B_2 (16) erfüllt, so genügt auch die *reelle* Funktion

$$e^{\frac{n-3}{2}\pi i} B_2(\tau) = \left(\frac{\tau-1}{2}\right)^{-\frac{n-3}{2}} F\left(\frac{n-1}{2}-\beta, \frac{n-1}{2}-\alpha, -\frac{n-5}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$$

der Gleichung (16). Wegen

$$(\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}} (\tau-1)^{-\frac{n-3}{2}} = (\tau+1)^{\frac{n-3}{2}}$$

existiert ferner das mit $B = e^{\frac{n-3}{2}\pi i} B_2$ gebildete Integral (17) für jedes t und $r > 0$ mit $(1 \leq) \frac{t}{r} < 3$. Dieses Integral genügt jedoch nicht der Gleichung (5), löst aber eine andere Aufgabe. Darüber beweisen wir den

Satz 3: Unter den Voraussetzungen des Satzes 1a (also nicht nur für zulässige Separationsparameter) existiert das reelle Integral

$$v_k\,(t, r) := e^{\frac{n-3}{2}\pi i} \int_1^{t/r} (\tau^2-1)^{\frac{n-3}{2}} B_2(\tau) f(t-\tau r)\, d\tau$$

$$= \int_1^{t/r} (1+\tau)^{\frac{n-3}{2}} F\left(\frac{n-1}{2}-\beta, \frac{n-1}{2}-\alpha, -\frac{n-5}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right) f(t-\tau r)\, d\tau$$

(mindestens) für $(1 \leq) \frac{t}{r} < 3$, wobei $\alpha + \beta = n-2$ und $\alpha\beta = -k$ ist, und gestattet dort die Umkehrung

$$f(t-r) = \frac{2^{-(n-3)}}{n-3} \left[r^2(\partial_t^2 - \partial_r^2) - (n-1)\, r\,\partial_r + k\right] v_k\,(t, r).$$

Anders ausgedrückt: v_k ist in $(1 \leq) \frac{t}{r} < 3$ Lösung der Gleichung

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\,\partial_r + \frac{k}{r^2}\right) v(t, r) = 2^{n-3}(n-3)\, r^{-2} f(t-r).$$

Ferner gilt $\lim\limits_{\frac{t}{r} \downarrow 1} v_k\,(t, r) = 0$.

Beweis: Die Existenz des mit beschränktem, integrablem f gebildeten v_k für $(1 \leq) \frac{t}{r} < 3$ wurde bereits oben gezeigt. Daß $\lim\limits_{t/r \downarrow 1} v_k(t, r)$ vorhanden und gleich Null ist, folgt aus der Beschränktheit des in v_k auftretenden Integranden bei $\tau = 1$. Es bleibt die Aussage über die Umkehrung zu beweisen. Dazu gehen wir von (15) aus. Da

$$L(\partial_\tau)\, e^{\frac{n-3}{2}\pi i}\, B_2\,(\tau) = e^{\frac{n-3}{2}\pi i}\, L(\partial_\tau)\, B_2(\tau) = 0$$

ist, lautet diese Beziehung

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\,\partial_r + \frac{k}{r^2}\right) v_k(t, r) = r^{-2}\, a(t, r)\,,$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. Das ist der Fall, wie wir jetzt zeigen. Aus (14) und (22) erhält man mit $B = e^{\frac{n-3}{2}\pi i} B_2$ nach elementarer Rechnung

$$\begin{aligned} b(t, r; \tau) = 2^{\frac{n-3}{2}}\,(\tau+1)^{\frac{n-1}{2}} \Big[&(\tau-1)\, F\,\partial_\tau f(t-\tau r) \\ &+ \left(\frac{n-3}{2}\,\tau\, F - (\tau-1)\,\partial_\tau F\right) f(t-\tau r)\Big], \end{aligned}$$

wobei F zur Abkürzung für $F\left(\frac{n-1}{2} - \beta, \frac{n-1}{2} - \alpha, -\frac{n-5}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right)$ geschrieben wurde. Da die Reihenentwicklungen für F und $\partial_\tau F$ an der Stelle $\tau = 1$ von der Gestalt

$F = 1 + a_1(1-\tau) +$ Glieder mit höheren Potenzen von $(1-\tau)$

bzw.

$\partial_\tau F = -a_1 +$ Glieder mit höheren Potenzen von $(1-\tau)$ sind, so findet man (f und $\partial_\tau f$ sind nach Voraussetzung beschränkt)

$$a(t, r) = \lim_{\tau \downarrow 1} b(t, r; \tau) = 2^{n-3}\,(n-3)\, f(t-r)\,.$$

Daraus ist die Richtigkeit der noch zu beweisenden Behauptung aus Satz 3 abzulesen.

In dem Spezialfall $n = 2$ wird, wie erwähnt, (16) zur Tschebyscheffschen Differentialgleichung mit dem Fundamentalsystem

$$(B_1(\tau) =)\ T_l(\tau) = \frac{1}{2}\left[\left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}\right)^l + \left(\tau - \sqrt{\tau^2 - 1}\right)^l\right]$$

$$(\mathrm{B}_2(\tau) =)\qquad = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2} + l,\ \frac{1}{2} - l,\ \frac{3}{2},\ \frac{1-\tau}{2}\right).$$

Die Polynome T_l liefern speziell mit $l = 0$ für das Integral (17) die bekannte Ausstrahlungslösung

$$u_0(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{f(t - \tau r)}{\sqrt{\tau^2 - 1}}\, d\tau = \int_0^{t-r} \frac{f(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}}\, d\tau .$$

Für B_2 ergeben sich bis auf den Faktor $\left(\frac{1-\tau}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ Tschebyscheffsche Funktionen zweiter Art mit halbzahligem Index.

§ 4. Konstruktion der Lösungen für ungerade Raumdimensionen

Ist (vgl. (20)) $\varrho_1^{(1)} - \varrho_2^{(1)} = \frac{n-3}{2}$ ganz, so existiert z. B. für $n = 3$ sicher kein logarithmenfreies Fundamentalsystem von (16) an der Stelle $\tau = 1$. Es ist daher bequemer, (16) als Spezialfall der Gleichung

$$(23)\qquad (\tau^2 - 1)y'' + 2(m + 1)\tau y' - (\nu + m + 1)(\nu - m)y = 0$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots;\ \nu \text{ beliebig})$$

zu betrachten, die mit

$$m = \frac{n-3}{2} \quad \text{und} \quad \nu = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)(n-3) + 4k + 1}$$

in (16) übergeht. Im Fall zulässiger Separationsparameter ist wieder

$$(n-1)(n-3) + 4k + 1 = (n + 2(l-1))^2$$

und damit ν stets ganz. Für $\tau > 1$ besitzt (23) die linear unabhängigen Lösungen (vgl. [3], S. 461)

$$B_1(\tau) = \partial^{\frac{n-3}{2}} P_\nu(\tau) = \frac{1}{\pi} \partial^m \int_0^\pi \left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}\cos\alpha\right)^{-\nu-1} d\alpha$$

$$B_2(\tau) = \partial^{\frac{n-3}{2}} Q_\nu(\tau) = \partial^m \int_0^\infty \left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}\cosh\alpha\right)^{-\nu-1} d\alpha$$

$$(\nu > -1).$$

P_ν bzw. Q_ν sind die bekannten Legendreschen Funktionen erster bzw. zweiter Art. (Man beachte, daß sich trotz der Mehrdeutigkeit von ν nur zwei Lösungen ergeben, da $P_\nu = P_{-\nu-1}$ ist und bei Q_ν die Einschränkung $\nu > -1$ in Kraft tritt.) Nun ist (vgl. [1] Bd. 1, S. 148; [4] S. 131, 136)

$$\partial^m P_\nu(\tau) = (\tau^2 - 1)^{-\frac{m}{2}} P_\nu^m(\tau)$$

und

$$\partial^m Q_\nu(\tau) = (\tau^2 - 1)^{-\frac{m}{2}} Q_\nu^m(\tau),$$

wo

(24)
$$P_\nu^m(\tau) = \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\pi\,\Gamma(\nu+1)} \int_0^\pi \left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}\cos\alpha\right)^\nu \cos m\alpha\, d\alpha$$

bzw.

(25)
$$Q_\nu^m(\tau) = (-1)^m \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\frac{1}{2}\log\frac{\tau+1}{\tau-1}} \left(\tau - \sqrt{\tau^2 - 1}\cosh\alpha\right)^\nu \cosh m\alpha\, d\alpha$$

$$(\nu > -1)$$

die zugeordneten Legendreschen Funktionen erster bzw. zweiter Art sind (für P_ν^m vgl. [4], S. 161, für Q_ν^m vgl. [2], S. 259). Wir beweisen nun

Satz 4: Ist $n > 1$ ungerade und $-k \leq \frac{1}{4}((n-1)(n-3)+1)$, also nicht notwendig ein zulässiger Separationsparameter, so ist das mit $f(\partial^2 f \in L(-\infty, +\infty)$ gebildete Integral

$$u_k(t, r) = \int_1^{t/r} P_\nu^{\frac{n-3}{2}}(\tau) f(t - \tau r)\, d\tau$$

eine (durch f, n und k eindeutig festgelegte) Lösung von (5), die für jedes endliche $(1 \leq)\ \frac{t}{r}$ existiert und auf (7) verschwindet. Ist k ein zulässiger Separationsparameter, so ist $\nu = \frac{n-3}{2} + l$. Keines der $P_\nu^{\frac{n-3}{2}}$ in der obigen Darstellung für u_k verschwindet daher identisch.

Beweis: Zunächst ist P_ν^m durch k wegen $P_\nu^m = P_{-\nu-1}^m$ eindeutig festgelegt, und für zulässige Separationsparameter hat man

$$\nu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)(n-3) + 4k + 1} = \frac{n-3}{2} + l.$$

Für den Kern $(\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} B(\tau)$ von (17) ergibt sich im vorliegenden Fall

$$(26)\quad (\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} B(\tau) = (\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, \partial^{\frac{n-3}{2}} P_\nu(\tau) = P_\nu^{\frac{n-3}{2}}(\tau).$$

Aus (24) ist unmittelbar abzulesen, daß $P_\nu^{\frac{n-3}{2}}$ für jedes endliche τ beschränkt und über jedes Kompaktum aus $[1, \infty[$ integrabel ist. Da ferner $\partial P_\nu^{\frac{n-3}{2}}$ für $1 \leq \tau < \infty$ beschränkt bleibt, so ist auch $a(t, r) = 0$. Also liefert (17) mit (26) für jedes beliebige f mit $\partial^2 f \in L(-\infty, +\infty)$ eine Lösung von (5), die auf (7) verschwindet. Endlich ist nach der auf (23) folgenden Bemerkung $\nu = \frac{n-3}{2} + l$. Der Beweis ist damit beendet.

Bemerken wir noch, daß wir auf Grund dieses Ergebnisses nach Beachtung des Zusammenhanges von (8) und (9) die soeben gefundene Ausstrahlungslösung in der Gestalt

$$u(t, r) = \frac{\varepsilon(t-r)}{r} P_\nu^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{t}{r}\right) * \varepsilon(t) f(t)$$

schreiben können. Um z. B. hieraus durch Spezialisierung die im Fall $n = 3$ wohlbekannte Ausstrahlungslösung $\frac{g(t-r)}{r}$ zu gewinnen, nehme man $\nu = 0$ und wähle f als Ableitung ∂g. Wegen $P_0^0 = 1$ erhält man

$$\int_1^{t/r} f(t - \tau r)\, d\tau = \int_1^{t/r} \partial g(t - \tau r)\, dt = -\frac{1}{r}\int_1^{t/r} \partial_\tau g(t - \tau r)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{r}\left(g(t-r) - g(0)\right),$$

ein Ausdruck, der überdies für $t = r$ verschwindet, wie es nach der allgemeinen Herleitung sein muß.

Wie im Fall gerader Dimensionen läßt sich auch hier die zur Lösung u_k gehörige Ausstrahlungsintensität f aus u_k bestimmen.

Satz 5: Ist $n > 1$ ungerade und k ein zulässiger Separationsparameter, ferner a_{jnl} wieder der Koeffizient der j-ten Potenz in dem nach Potenzen von τ geordneten Polynom

$$F\left(n+l-2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right),$$

so gilt für $t \geq 0$

$$f(t) = \frac{2^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\, l!}{((n+l-3)!)^2\, a_{lnl}}\ \partial_t^{\frac{n-1}{2}+l}\left[\lim_{r\downarrow 0} r^{\frac{n-1}{2}+l}\, u_k(t,r)\right].$$

Ist $-k \leq \frac{1}{4}((n-1)(n-3)+1)$, sonst beliebig, jedoch so beschaffen, daß

$$\nu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)(n-3)+4k+1}$$

nicht ganz ist, so gilt für das „$(\nu+1)$te iterierte Integral"

$$\varepsilon(t)\, t^{\nu} * \varepsilon(t) f(t) = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu-m+1)}{2^{\nu}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \lim_{r\downarrow 0} r^{\nu+1}\, u_k(t,r).$$

Beweis: Betrachten wir zunächst den Fall zulässiger Separationsparameter. Dann ist $\nu = \frac{n-3}{2} + l$ und wegen

$$P^{\frac{n-3}{2}}_{\frac{n-3}{2}+l}(\tau) =$$

$$= \frac{(n+l-3)!}{2^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\, l!}\,(\tau^2-1)^{\frac{n-3}{4}}\, F\left(n+l-2, -l, \frac{n-1}{2}, \frac{1-\tau}{2}\right).$$

(F ist also wiederum ein Gegenbauersches Polynom) hat man wie beim Beweis von Satz 2

$$u_k(t, r) =$$

$$= \frac{(n+l-3)!}{2^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\,l!}\,\varepsilon(t-r)\,r^{-\frac{n-1}{2}}\,(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{4}}\sum_{j=0}^{l} a_{jnl}\left(\frac{t}{r}\right)^j * \varepsilon(t) f(t)$$

oder

$$r^{\frac{n-1}{2}+l}\,u_k(t, r) =$$

$$= \frac{(n+l-3)!}{2^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\,l!}\,\varepsilon(t-r)\,(t^2-r^2)^{\frac{n-4}{4}}\sum_{j=0}^{l} a_{jnl}\, t^j\, r^{l-j} * \varepsilon(t) f(t).$$

Damit wird

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{\frac{n-1}{2}+l}\,u_k(t, r) = \frac{(n+l-3)!}{2^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\,l!}\,a_{lnl}\,\varepsilon(t)\,t^{\frac{n-3}{2}+l} * \varepsilon(t) f(t)$$

$$= \frac{((n+l-3)!)^2}{2^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-3}{2}\right)!\,l!}\,a_{lnl}\,\partial^{-\left(\frac{n-1}{2}+l\right)} f(t),$$

woraus die erste Behauptung folgt.

Im Fall $\nu > -\frac{1}{2}$ nicht ganz, den wir wegen $P_\nu^m = P_{-\nu-1}^m$ weiterhin allein zu betrachten haben, ist (vgl. [1] Bd. 1, S. 164)

$$P_\nu^{\frac{n-3}{2}}(\tau) = \tilde{P}_{n,\nu}(\tau) + \frac{2^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-m+1)}\,\tau^\nu$$

mit $\qquad \tilde{P}_{n,\nu}(\tau) = o(\tau_\nu) \quad (\tau \to \infty).$

Dann ist

$$u_k(t, r) = \frac{\varepsilon(t-r)}{r} P_\nu^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{t}{r}\right) * \varepsilon(t) f(t)$$

$$= \frac{\varepsilon(t-r)}{r}\left(\tilde{P}_{n,\nu}\left(\frac{t}{r}\right) + \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-m+1)}\left(\frac{t}{r}\right)^\nu\right) * \varepsilon(t) f(t)$$

und

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{\nu+1} u_k(t, r) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-m+1)} \varepsilon(t) t^\nu * \varepsilon(t) f(t).$$

Satz 5 ist damit bewiesen.

Über die Lösungen Q_ν^m aus dem Fundamentalsystem (23) beweisen wir den

Satz 6: Ist $n > 1$ ungerade, so ist (im Gegensatz zu den Fällen gerader Dimension) *allein für* $n = 3$ die zweite Lösung (25) des Fundamentalsystems von (23) so beschaffen, daß (17) für jedes endliche $(1 \leq) \frac{t}{r}$ existiert, für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ verschwindet und $a(t, r)$ endlich ist. Das Integral (17)

$$v_k(t, r) = \int_1^{t/r} Q_\nu(\tau) f(t - \tau r)\, d\tau$$

$$\left(\nu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4k+1}\right)$$

ist in diesem Fall durch den nicht notwendig zulässigen Separationsparameter k mit $-k \leq \frac{1}{4}$ und f eindeutig festgelegt und gestattet für $(1 \leq) \frac{t}{r} < \infty$ die Umkehrung

$$f(t-r) = \{r^2(\partial_t^2 - \partial_r^2) - 2r\partial_r + k\}\, v_k(t, r).$$

Anders ausgedrückt: v_k ist für $1 \leq \frac{t}{r} < \infty$ Lösung der Gleichung

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r + \frac{k}{r^2}\right) v(t, r) = -r^{-2} f(t-r).$$

Beweis: Die Q_ν^m sind für $\tau \downarrow 1$ nicht beschränkt. Wie zuvor ist es erforderlich, erstens das Bestehen der Bedingung $a(t, r) < \infty$ und zweitens die Existenz der mit

$$(\tau^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} B(\tau) = Q_\nu^{\frac{n-3}{2}}(\tau)$$

gebildeten Integrale (17) zu prüfen. Beginnen wir mit der zuletzt genannten Aufgabe. Bekanntlich kann $Q_\nu^0 = Q_\nu$ in einer rechtsseitigen Umgebung von $\tau = 1$ in die Gestalt

$$Q_\nu(\tau) = -\frac{1}{2} \log \frac{\tau - 1}{2} + p_\nu(\tau) \tag{27}$$

gebracht werden, während für Q_ν^m in einer solchen Umgebung

$$Q_\nu^m(\tau) = (\tau - 1)^{-\frac{m}{2}} q_{m\nu}(\tau) \qquad (m > 0) \tag{28}$$

gilt, wobei p_ν und $q_{m\nu}$ für $\tau \downarrow 1$ beschränkt und von Null verschieden sind (vgl. [1] Bd. 1, S. 163). Demnach ist Q_ν^m für $m > 1$ (m ist ganz) nicht bis $\tau = 1$ integrierbar. In diesen Fällen kann überdies durch keine Wahl von f mit $f \neq 0$ (fast überall) erzielt werden, daß $Q_\nu^m(\tau) f(t - \tau r)$ bis $\tau = 1$ integrierbar wird, da t und r bis auf die Bedingung $0 < r \leq t$ beliebig sind. Damit ist zunächst gezeigt:

> Falls $n > 5$ (also $m > 1$) ist, kann man aus Q_ν^m durch den Prozeß (8) keine Lösung von (5) konstruieren, da die entsprechenden Integrale nicht existieren. Die mit $f \in L(-\infty, +\infty)$ gebildeten Integrale
>
> $$v_\nu^{(m)}(t, r) = \int_1^{t/r} Q_\nu^m(\tau) f(t - \tau r)\, d\tau \qquad (\nu > -1)$$
>
> existieren genau in den Fällen $m = 0, 1$.

Da wir f als beschränkt vorausgesetzt hatten: $|f| < K$, so ist wegen (27)

$$\left| \int_1^{t/r} Q_\nu(\tau) f(t - \tau r)\, d\tau \right| \leq \frac{K}{2} \int_1^{t/r} \log \frac{\tau - 1}{2}\, d\tau + K \int_1^{t/r} |p_\nu(\tau)|\, d\tau$$

$$= \frac{K}{2} \left(\frac{\frac{t}{r} - 1}{2} \log \frac{\frac{t}{r} - 1}{2} - \frac{\frac{t}{r} - 1}{2} \right) + K \int_1^{t/r} |p_\nu(\tau)|\, d\tau.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung strebt für $\frac{t}{r} \downarrow 1$ gegen Null, so daß

$$v_\nu^{(0)}(t, r) \to 0 \quad \text{für } \frac{t}{r} \downarrow 1$$

gilt. $v_\nu^{(0)}$ erfüllt demnach die auf (7) gestellte Bedingung. Auch $v_\nu^{(1)}$ genügt dieser Bedingung, wie man ebenso einfach feststellt, doch scheidet $v_\nu^{(1)}$ aus einem anderen Grunde aus unseren Betrachtungen aus, wie gleich gezeigt wird.

Wir gehen daran, die Bedingung

$$\lim_{\tau \downarrow 1} b(t, r; \tau) = a(t, r) < \infty$$

zu prüfen. Mit

$$B(\tau) = (\tau^2 - 1)^{-\frac{n-3}{2}} Q_\nu^{\frac{n-3}{2}}(\tau)$$

ergibt sich unter Benutzung der Rekursionsformel (vgl. [1] Bd. 1, S. 161, Formel (10))

$$(\tau^2 - 1)\partial Q_\nu^\mu(\tau) = (\nu - \mu + 1) Q_{\nu+1}^\mu(\tau) - (\nu + 1)\tau Q_\nu^\mu(\tau):$$

$$\partial B(\tau) = (\tau^2 - 1)^{-\frac{n-1}{2}} \left[\left(\nu - \frac{n-5}{2}\right) Q_{\nu+1}^{\frac{n-3}{2}}(\tau) - (\nu + n - 2)\tau Q_\nu^{\frac{n-3}{2}}(\tau) \right],$$

woraus man im Fall $n = 3$ nach Anwendung der Rekursionsformel (vgl. [1] Bd. 1, S. 161, Formel (6))

$$\tau Q_\nu^\mu(\tau) - Q_{\nu+1}^\mu(\tau) = -(\nu + \mu)(\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}} Q_\nu^{\mu-1}(\tau):$$

$$\begin{aligned} \partial B(\tau) &= \nu(\nu + 1)(\tau^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^{-1}(\tau) \\ &= \frac{\nu(\nu + 1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + 2)} (\tau^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1(\tau) \qquad (29) \\ &= (\tau^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1(\tau) \end{aligned}$$

und im Fall $n = 5$

$$\begin{aligned} \partial B(\tau) &= (\tau^2 - 1)^{-2} \left[\nu Q_{\nu+1}^1(\tau) - (\nu + 3)\tau Q_\nu^1(\tau)\right] \\ &= (\tau^2 - 1)^{-2} \left[\nu Q_{\nu+1}^1(\tau) - (\nu + 2)\tau Q_\nu^1(\tau) - \tau Q_\nu^1(\tau)\right] \\ &= (\tau^2 - 1)^{-3/2} Q_\nu^2(\tau) - \tau(\tau^2 - 1)^{-2} Q_\nu^1(\tau) \end{aligned}$$

erhält, wobei die Beziehung

$$(\nu - \mu + 1)\, Q^{\mu}_{\nu+1}(\tau) - (\nu + \mu + 1)\tau\, Q^{\mu}_{\nu}(\tau) = (\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, Q^{\mu+1}_{\nu}(\tau)$$

(vgl. [1] Bd. 1, S. 161, Formel (8)) benutzt wurde. Im Fall $n = 5$ hat man demnach

$$b(t, r; \tau) =$$

$$= (\tau^2 - 1)\, Q^1_\nu(\tau)\, \partial_\tau f(t - r\tau) - f(t - r\tau)\left[(\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, Q^1_\nu(\tau) - \tau\, Q^1_\nu(\tau)\right]$$

$$= (\tau^2 - 1)\, Q^1_\nu(\tau)\, \partial_\tau f(t - r\tau) - f(t - \tau r)\left[(\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, Q^2_\nu(\tau) + \tau\, |\, Q^1_\nu(\tau)|\right].$$

Dieser Ausdruck kann, wenn für t und r beliebige Werte mit $0 < r \leq t$ zuzulassen sind und $f \neq 0$ (fast überall) ist, für $\tau \downarrow 1$ keinen endlichen Grenzwert annehmen, denn nach (28) geht

$$(\tau^2 - 1)\, Q^1_\nu(\tau)\, \partial_\tau\, f(t - r\tau)$$

für $\tau \downarrow 1$ gegen Null, während die beiden Summanden in der eckigen Klammer stets positiv und (ebenfalls nach (28)) für $\tau \downarrow 1$ über alle Grenzen wachsen. Trotz der Existenz von

$$\frac{\varepsilon(t - r)}{r}\, Q^1_\nu\left(\frac{t}{r}\right) * \varepsilon(t)\, f(t)$$

ist also im Fall $n = 5$ wegen $b(t, r; \tau) \to \infty$ für $\tau \downarrow 1$ keine Lösung von (5) in der soeben angeschriebenen Gestalt vorhanden.

Es bleibt nur mehr der Fall $n = 3$ zu erledigen. Hier ist unter Verwendung von (29)

$$b(t, r; \tau) = (\tau^2 - 1)\, Q_\nu(\tau)\, \partial_\tau f(t - \tau r) - (\tau^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, Q^1_\nu(\tau) f(t - \tau r).$$

Der erste Summand geht nach (27) für $\tau \downarrow 1$ gegen Null, während die für $\tau > 1$ gültige Entwicklung

$$Q^1_\nu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (\tau - 1)^{-\frac{1}{2}} + r\, (\tau - 1)$$

(r eine Potenzreihe in $\tau - 1$) (vgl. [1] Bd. 1, S. 163) zeigt, daß der zweite Summand für $\tau \downarrow 1$ den Wert $-f(t-r)$ annimmt. Man hat also

$$a(t, r) = \lim_{\tau \downarrow 1} b(t, r; \tau) = -f(t-r).$$

Damit folgt aus (15)

$$[r^2(\partial_t^2 - \partial_r^2) - 2r\partial_r + k]\, v_\nu(t, r) = -f(t-r),$$

und Satz 6 ist bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G.: Higher transcendental functions, New York 1953

[2] Hobson, E. W.: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge 1931

[3] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig 1942

[4] Lense, J.: Kugelfunktionen, Leipzig 1950

[5] Sauer, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958

[6] Suschowk, D.: Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems usw., Math. Zeitschr. 68 (1958), 340–361

[7] Suchowk, D.: Die Umkehrung einer Klasse singulärer Integrale, Math. Zeitschr. 69 (1958), 363–365

[8] Ward, G. N.: Linearized theory of steady high speed flow, Cambridge 1955