

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über autogene Folgen und die Konstruktion des Kerns eines Graphen

*Herrn Otto Haupt zum 80. Geburtstag gewidmet*

Von **Georg Aumann** in München

Vorgelegt am 8. Juli 1966

1. Auf dem Quadrant  $Q$  der Gitterpunkte  $(x, y)$ ,  $x, y$  ganzzahlig und nicht negativ, betrachte man das folgende Spiel (von R. Isaacs<sup>1</sup>) zweier Partner  $P_1$  und  $P_2$ : Jeder Gitterpunkt  $(x, y)$  repräsentiert eine „Stellung“ des Spiels; erlaubte „Züge“ sind die Übergänge

$$\begin{aligned} & (x, y) \rightarrow (x - n, y) && \text{mit } 0 < n \leq x, \\ (1) \quad & (x, y) \rightarrow (x, y - m) && \text{mit } 0 < m \leq y, \\ & (x, y) \rightarrow (x - p, y - p) && \text{mit } 0 < p \leq \min(x, y). \end{aligned}$$

Das Spiel besteht darin, daß abwechselnd jeder Partner einen erlaubten Zug ausführt; der beginnende Spieler  $P_1$  bestimmt (mit dem ersten Zug) die Ausgangsstellung  $(x_0, y_0)$ , etwa mit einer Auflage der Art  $x_0 + y_0 \geq m_0 \geq 1$ . Derjenige Spieler, der mit seinem Zug schließlich die Stellung  $(0, 0)$  bezieht und damit das Spiel beendet, hat gewonnen.

---

<sup>1</sup> C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, 2. Aufl. 1963, p. 52. – Das Spiel läßt sich übrigens folgendermaßen als Gesellschaftsspiel realisieren: Man bildet zwei größere Häufchen (etwa von Zündhölzern). Die beiden Spieler nehmen abwechselnd Zündhölzer (mindestens eins) weg nach folgender Spielregel: Entweder es wird nur von einem Häufchen eine beliebige Anzahl (ev. auch alle) oder es werden von beiden Häufchen die gleiche (im übrigen beliebige) Anzahl (gegebenenfalls auch alle) weggenommen; wer abräumt, hat gewonnen. Wie die nachfolgenden Betrachtungen lehren, hat der kluge Spieler, sobald er die Anzahlen der beiden Häufchen  $(n_1, n_2)$  überschauen kann, auf die Anzahlpaare  $(1, 2)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(6, 10)$ ,  $(8, 13)$ ,  $(9, 15)$ ,  $(11, 18)$ , . . . hinzuspielen.

Jedes mit  $(x_0, y_0)$  begonnene Spiel hat eine Länge (= Zahl der Züge)  $\leq x_0 + y_0$ .  $P_1$  gewinnt bei richtiger Strategie immer; dies liegt daran, daß der mit dem Spiel, d. h. der mehrdeutigen Abbildung (1), die dem Punkt  $(x, y)$  die Menge  $\Gamma(x, y)$  aller rechts

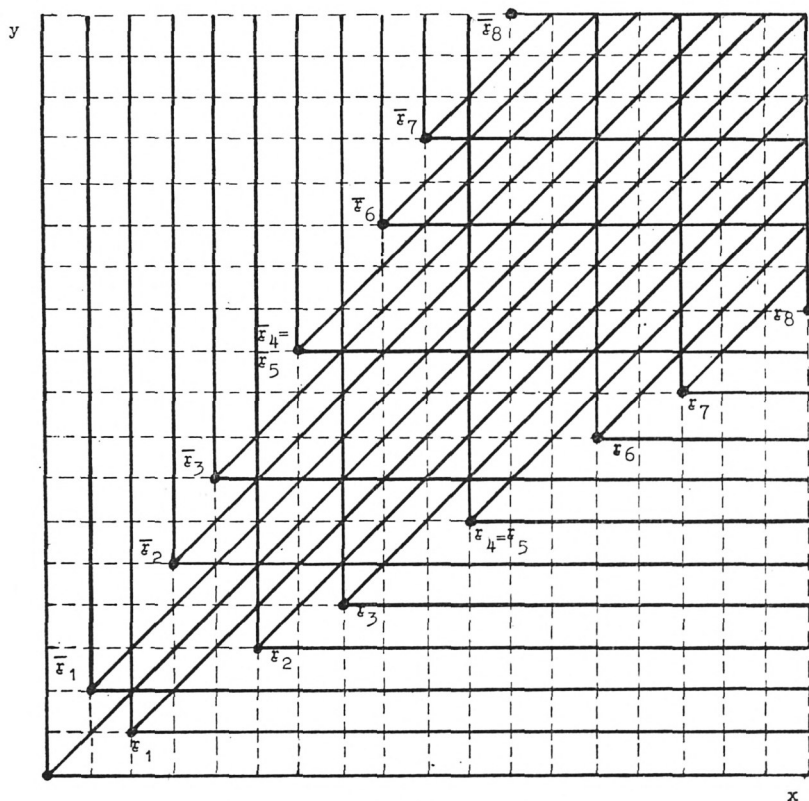


Abb. 1: Kern des Spiels von R. Isaacs.

von den Pfeilen stehenden Punkte zuordnet, verbundene Graph einen sogenannten *Kern*  $K$  besitzt.  $K$  ist als Teilmenge von  $Q$  durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- (A)  $(0, 0) \in K$ ;
- (B) wenn  $(x, y) \in K$ , dann  $\Gamma(x, y) \cap K = \emptyset$ ;
- (C) wenn  $(x, y) \notin K$ , dann  $\Gamma(x, y) \cap K \neq \emptyset$ .

(B) bedeutet, daß, wenn  $P_2$  von einer Stellung in  $K$  aus zieht, er auf  $\mathbf{CK}$  (= Komplement von  $K$  in  $Q$ ) gehen muß; (C) erlaubt dann  $P_1$  von  $\mathbf{CK}$  aus wieder auf  $K$  zurückzuspielen. Wenn also  $P_1$  zu Beginn auf  $K$  setzt, muß er unter Beachtung dieser Konsequenzen und Möglichkeiten gewinnen.

Gemäß den Bedingungen (A), (B), (C) ist der Kern des beschriebenen Spiels durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

$$(A') \quad (0, 0) \in K;$$

$$(B') \quad \text{wenn } (x, y) \in K, \text{ dann } (x + n, y) \notin K,$$

$$(x, y + n) \notin K,$$

$$(x + n, y + n) \notin K$$

für alle  $n \geq 1$ ;

(C') Die in (B') angegebenen nicht zu  $K$  gehörigen Punkte erfüllen mit  $K$  zusammen den ganzen Quadranten.

Es ist möglich, vom Nullpunkt her den Kern aufzubauen (siehe Figur); man erkennt aus der Figur, daß sich der Kern zusammensetzt aus den Ecken zweier Streckenzüge, wovon der eine oberhalb und der andere unterhalb der Winkelhalbierenden verläuft. An diesen Streckenzügen ist nicht ohne weiteres eine Regelmäßigkeit zu erkennen<sup>1</sup>; erst durch geeignete Einfügung von Nullstrecken in die Streckenfolge dieser Züge – was ja die Eckenmenge nicht ändert! – ergibt sich eine einfache Konstruktionsregel. Diese Konstruktionsmethode wird anschließend (in 4.) verallgemeinert zum Begriff der „autogenen Folgen“, deren „rekursive Erzeugung“ durch Verwendung einer „Zäsur“ gekennzeichnet ist und welche im Rahmen der kombinatorischen Analyse ein größeres Interesse verdienen dürften.

2. Wir konstruieren eine Menge  $K^*$  und zeigen, daß sie die Eigenschaften (A'), (B'), (C') hat, also gleich  $K$  ist. Zu diesem Zweck führen wir die Vektoren ein:

$$\mathbf{a} = (2, 1), \quad \mathbf{b} = (3, 2),$$

$$\bar{\mathbf{a}} = (1, 2), \quad \bar{\mathbf{b}} = (2, 3) \text{ und } \vec{0} = (0, 0).$$

Wir bilden weiter eine Folge von Vektoren

$$F = v_1 \ v_2 \ v_3 \dots$$

unter Benutzung der Abbildung  $\varphi$

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(\bar{a}) &= \bar{b} \vec{O} \bar{b} \\ \varphi(\bar{b}) &= \bar{a} \\ \varphi(\vec{O}) &= \bar{b} \end{aligned}$$

( $\varphi(\bar{a})$  ist einfach das geordnete Tripel  $\bar{b} \vec{O} \bar{b}$ ) durch die folgende „rekursive Konstruktion mit Zäsur“:

Allgemeiner Schritt: Es sei die endliche Folge  $v_1 \dots v_{m-1} | v_m \dots v_n$  mit der Zäsur zwischen  $v_{m-1}$  und  $v_m$  bereits gebildet; man verlängert diese Folge durch Anhängen von  $\varphi(v_m)$  und Verschiebung der Zäsur um 1 nach rechts:

$$v_1 \dots v_m | v_{m+1} \dots v_n \varphi(v_m).$$

In unserem Falle *beginnt der Prozeß mit*

$$v_1 | v_2 = \alpha | \bar{b}.$$

Die ersten Schritte sehen also so aus:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\alpha | \bar{b} \\ &\alpha \bar{b} | \alpha \\ &\alpha \bar{b} \alpha | \bar{b} \vec{O} \bar{b} \\ &\alpha \bar{b} \alpha \bar{b} | \vec{O} \bar{b} \alpha \\ &\alpha \bar{b} \alpha \bar{b} \vec{O} | \bar{b} \alpha \bar{b} \\ &\dots \qquad \qquad \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

$F$  betrachten wir als die gerichteten Strecken eines Streckenzuges  $S$  mit den Ecken  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$

$$\bar{x}_1 = v_1, \bar{x}_2 = v_1 + v_2, \bar{x}_3 = v_1 + v_2 + v_3, \dots$$

Analog bilden wir eine Vektorfolge

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \dots \text{ mittels der Abbildung } \bar{\varphi}: \\ \bar{\varphi}(\bar{a}) &= \bar{b} \vec{O} \bar{b}, \bar{\varphi}(\bar{b}) = \bar{a}, \bar{\varphi}(\vec{O}) = \bar{b}, \end{aligned}$$

durch die analoge Konstruktion, ausgehend von  $\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2 = \bar{a} \mid \bar{b}$ . Dies führt zum Streckenzug  $\bar{S}$  mit den Ecken  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ . Wir setzen dann

$$K^* = \{\vec{0}\} \cup \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots\}$$

und behaupten, daß

$$(4) \quad K = K^*.$$

3. Um (4) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß in  $F$  der Vektor  $\vec{0}$  immer nur zwischen zwei  $b$  steht und daß weder die Sequenz  $aa$ , noch  $bb$  noch  $\vec{0}b\vec{0}$  in  $F$  auftritt.

Nun stellen wir einen Zusammenhang der Punkte  $x_v$  mit der Zäsur fest:

a) Ist  $v_m = a$ , also das angehängte Stück

$$\varphi(a) = b \vec{0} b = v_t v_{t+1} v_{t+2},$$

so gilt, wenn wir mit  $X(x)$  bzw.  $Y(x)$  die  $x$ -Koordinate bzw.  $y$ -Koordinate von  $x$  bezeichnen:

$$(a) \quad X(x_{m-1}) = Y(x_{t-1}) + 1.$$

b) Ist  $v_m = b$  und das angehängte Stück  $\varphi(b) = a = v_t$ , so gilt

$$(b) \quad X(x_{m-1}) + 1 = Y(x_{t-1}).$$

c) Ist  $v_m = \vec{0}$  und  $\varphi(\vec{0}) = b = v_t$ , so haben wir

$$(c) \quad X(x_{m-1}) = Y(x_{t-1}) + 1.$$

Diese Gleichungen beweist man durch Induktion in  $m$ , indem man zunächst die Richtigkeit für kleine  $m$  an Hand von (3) nachprüft und beim Induktionsschritt die folgenden vier Fälle untersucht:

$$v_m v_{m+1} = \begin{cases} b \vec{0} & \text{bzw.} \\ b a, \\ a b, \\ \vec{0} b, \end{cases}$$

zu welchen die Anhängungen

$$\varphi(v_m) \varphi(v_{m+1}) = \begin{cases} a \ b & \text{bzw.} \\ a \ b \ \vec{0} \ b, \\ b \ \vec{0} \ b \ a, \\ b \ a \end{cases}$$

gehören.

Im *Falle* a) lehrt die Gleichung (a), daß, wenn man von  $\xi_{m-1}$  ausgeht, parallel zur  $y$ -Achse bis zum Schnitt mit der Winkelhalbierenden  $x = y$  fortschreitet, dann weiter parallel und in Richtung der positiven  $x$ -Achse wandert, man durch den Mittelpunkt

$$\frac{1}{2}(\xi_{t-1} + \xi_t)$$

der Strecke  $v_t (= b)$  gelangt; wenn man entsprechend, von  $\xi_m$  ausgehend, verfährt, so wird man durch  $\frac{1}{2}(\xi_t + \xi_{t+1})$ , den Mittelpunkt von  $v_{t+2} (= b)$ , geführt.

Im *Falle* b) lehrt (b): Führt man hier die entsprechende Wanderung aus, so kommt man ausgehend von  $\xi_{m-1}$  bzw.  $\xi_m$  durch die Mitte von  $v_{t-1} (= b)$  bzw.  $v_{t+1} (= b)$ .

Im *Falle* c) führt der entsprechende Weg, ausgehend von  $\xi_{m-1} = \xi_m$  mitten durch  $v_t (= b)$ , ausgehend von  $\xi_{m-2}$  mitten durch  $v_{t-2} (= b)$  und ausgehend von  $\xi_{m+1}$  mitten durch  $v_{t+2} (= b)$ .

Diese Betrachtungen, zusammen mit der Feststellung, daß  $\bar{S}$  das Spiegelbild von  $S$  bzgl. der Geraden  $x = y$  ist, zeigen, daß  $K^*$  die Eigenschaft (B') hat. Die Eigenschaft (C') ergibt sich durch folgende Bemerkung: Die beiden Streckenzüge

$$\begin{aligned} S &: v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \\ \bar{S} &: \bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3 \ \dots \end{aligned}$$

zerlegen den Quadranten  $Q$  in 3 Bereiche: Jener um die Winkelhalbierende liegende wird durch die Halbgeraden

$$(x + d, y + d) \text{ mit } d > 0 \text{ und } (x, y) \in K^*$$

schlicht überdeckt, weil die durch Anfangs- und Endpunkt des Vektors  $a$  oder  $b$  gehenden Parallelen zur Geraden  $x = y$  durch

Verschiebung um 1 in der  $x$ -Richtung auseinander hervorgehen. Der z. B. an die  $x$ -Achse angrenzende Bereich wird schlicht überdeckt von den Halbgeraden  $(x + d, y)$  mit  $d > 0$  und  $(x, y) \in K^*$ ; denn entweder ist  $(x, y)$  eine Ecke von  $S$  oder  $(x, y)$  ist eine Ecke von  $\bar{S}$ ; dann geht aber die betreffende Halbgerade mitten durch einen Vektor  $b$  von  $S$ . Damit ist (3) bewiesen.

Möglicherweise lassen sich für Varianten des Spiels – eine z. B. ist, daß man die Stellungen  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  und  $(1,0)$  aus dem Spiel ausschließt und  $(2,0)$ ,  $(1,1)$  und  $(0,2)$  als mögliche „Spielendstellungen“ erklärt – die Kerne in ähnlicher Weise konstruieren.

4. Die obige rekursive *Folgenkonstruktion mit Zäsur* führt auf eine bemerkenswerte allgemeine Klasse von gesetzmäßigen Folgen: Es seien  $A_1, \dots, A_n$  bei festem  $n$  vorgegebene nicht leere endliche Mengen; jedem Element

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ von } A_1 \times \dots \times A_n =: A$$

seien in eindeutiger Weise durch

$$(5) \quad a \rightarrow \beta(a) = \begin{pmatrix} \beta_1(a) \\ \vdots \\ \beta_n(a) \end{pmatrix}$$

$n$  endliche Folgen

$$\begin{aligned} \beta_1(a) &= b_{11}(a), \dots, b_{1k_1}(a) \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_n(a) &= b_{n1}(a), \dots, b_{nk_n}(a) \end{aligned}$$

zugeordnet, wobei  $b_{ij} \in A_i$  und im übrigen auch die  $k_1, \dots, k_n \geq 1$  von  $a$  abhängen können. Die Konstruktion vollzieht sich dann so: Von den „Folgen mit Zäsur“

$$(6) \quad \begin{array}{c|c} x_{11} \dots & x_{1k} \dots x_{1m_1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} \dots & x_{nk} \dots x_{1m_n} \end{array}$$



geht man über zu den Folgen

$$(6') \quad \begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \dots & x_{1k} & & \dots & x_{1m_1} & \beta_1(x^{(k)}) \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} & & \dots & x_{nm_n} & \beta_n(x^{(k)}), \end{array}$$

die aus (6) durch Verlängerung um  $\beta(x^{(k)})$ ,  $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$ , und

Verschiebung der Zäsur um 1 nach rechts gebildet werden. Geht man von einer Folge (6) aus, so ergibt sich durch fortgesetzte Anwendung des Übergangs (6)  $\rightarrow$  (6') eine unendliche Folge

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$$

von Elementen aus  $A$ , was wir eine aus der Anfangsfolge (6) mittels (5) erzeugte „autogene Folge“ nennen wollen.

Die oben in 2. beschriebene rekursive Konstruktion mit Zäsur entspricht dem Fall  $n = 1$ . Bei der Konstruktion des Kernes des obigen Spiels kann man nachträglich den Nullvektor  $\vec{0}$  aus der Folge streichen. Dieses Streichen läßt sich durch Konstruktion einer autogenen Folge mit  $n = 2$  umgehen: Wir setzen

$$A_1 = \{a, b\}, \quad A_2 = \{\vec{0}, *\}$$

und definieren  $\beta$  durch:

$$(7) \quad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b & b \\ \vec{0} & * \end{matrix}, \\ \begin{pmatrix} b \\ \vec{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a & b \\ * & * \end{matrix}, \\ \begin{pmatrix} b \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a \\ * \end{matrix}, \\ \begin{pmatrix} a \\ \vec{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a \\ \vec{0} \end{matrix}, \end{array}$$

wobei die letzte Zuordnung nur der Vollständigkeit halber hinzugenommen wurde. Beginnt man nämlich mit einer Folge  $|x_1^0 \dots x_l^0$  von  $a$ 's und  $b$ 's, operiert damit gemäß (2) im Sinne

von 2. und streicht nachträglich in der entstehenden Folge

$$x_1^0 \dots x_l^0 x_{l+1} \dots$$

die Nullvektoren  $\vec{0}$  heraus, so erhält man dasselbe Resultat in der ersten Zeile von

$$(8) \quad \begin{pmatrix} x_1^0 & \dots & x_l^0 & y_{l+1} & \dots \\ * & \dots & * & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ was sich ergibt, wenn man mit} \\ \left| \begin{pmatrix} x_1^0 \\ * \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_l^0 \\ * \end{pmatrix} \right.$$

beginnt und gemäß (7) die zugehörige autogene Folge (8) konstruiert (was leicht nachzuprüfen ist).

Daher scheinen die mehrdimensionalen autogenen Folgen ( $n \geq 2$ ) von besonderem Interesse zu sein.

5. Eine autogene Folge heißt *regulär*, wenn sowohl im Anfangsstück als auch in  $\beta(a)$  jeweils alle Komponenten gleich lang sind. Im Falle der Irregularität treten infolge der verschiedenen langen Komponenten in  $\beta(a)$  bzw. im Anfangsstück Verschiebungen in den einzelnen Komponenten auf, die die Konstruktion unübersichtlich machen. Für  $n = 1$  ist jede autogene Folge regulär. Dabei ist zu bemerken, daß sich jede reguläre autogene Folge mit  $n \geq 2$  deuten läßt als eine autogene Folge mit  $n = 1$ , und mit Elementen aus  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ . Z. B. ist die in 4. behandelte Folge mit  $n = 2$  regulär. Die weiteren Untersuchungen beschränken wir hier auf reguläre autogene Folgen, und o. B. d. A. auf den Fall  $n = 1$ . Wir betrachten die *Verteilung der Elemente in einer regulären autogenen Folge*.  $A$  sei die endliche Menge  $\{a_1, \dots, a_r\}$ , die dem Element  $a_i$  zugeordnete Folge  $\beta(a_i)$  habe die Länge  $\lambda_i \geq 1$  und die Verteilung  $a_j \rightarrow \eta_{ij}$  ( $\eta_{ij} \geq 0$  und  $\sum_j \eta_{ij} = 1$ ); ferner sei  $|x_{11}, \dots, x_{1\lambda_1}$  das Anfangsstück der Folge, das wir auch den ersten Abschnitt der Folge nennen. Ist der  $\nu$ -te Abschnitt  $x_{\nu 1} \dots x_{\nu \lambda_\nu}$  erklärt, so ist der  $(\nu + 1)$ -te Abschnitt die zusammengesetzte Folge  $\beta(x_{\nu 1}) \dots \beta(x_{\nu \lambda_\nu})$ . Die Verteilung im  $\nu$ -ten bzw.  $(\nu + 1)$ -ten Abschnitt sei durch  $a_i \rightarrow \zeta_i$  bzw.  $\zeta'_i$  be-

zeichnet, und  $\sigma$  bzw.  $\sigma'$  seien die Längen der betreffenden Abschnitte. Es gilt:

$$\sigma' = \sum_i \sigma \zeta_i \lambda_i, \quad \zeta'_j = \frac{1}{\sigma'} \sum_i \sigma \zeta_i \lambda_i \eta_{ij}.$$

Führen wir die Anzahlen

$$p_i := \zeta_i \lambda_i, \quad Q_{ij} := \eta_{ij} \lambda_j$$

ein, so erhalten wir die Übergangsgleichungen:

$$(9) \quad p'_j = \frac{\sum_i p_i Q_{ij}}{\sum_i p_i}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Die Deutung dieser Gleichungen ist klar: Man erhält die  $p'_j$  durch Mittelung der Spalten der festen Matrix  $(Q_{ij})$  mit den Gewichten  $p_i$ . Wegen

$$Q_* := \min_j Q_{ij} \leq p'_i \leq \max_j Q_{ij} = : Q^*$$

liegen die durch  $\nu$ -malige Iteration von (9) gewonnenen  $p_i^{(\nu)}$  stets im Intervall  $[Q_*; Q^*]$ . (9) stellt eine stetige Abbildung des zu diesem Intervall gehörigen  $r$ -dimensionalen Würfels  $W$  in sich dar. (Nach einem bekannten Satz besitzt (9) mindestens einen Fixpunkt.) Statt (9) betrachten wir die linear homogene Abbildung

$$(9') \quad q'_j = \sum_i q_i Q_{ij}, \quad j = 1, \dots, r,$$

mit  $Q_{ij} \geq 0$  und  $Q_{ij} > 0$  für jedes  $j$  mit einem passenden  $i$ . (9') bildet den Kegel  $B_0: q_i \geq 0, i = 1, \dots, r$ , auf einen Kegel  $B_1$ ,  $B_1$  auf einen Kegel  $B_2$ , usw. ab, wobei

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

Der Schnitt von  $B_j$  mit der Hyperebene  $\sum_i q_i = 1$  ist ein Simplex  $S_j$ , wobei  $S_0$   $(r-1)$ -dimensional ist. (Bei den nachfolgenden  $S_j$  dagegen kann die Dimension abfallen). Daraus folgt, daß

$$S^* := \bigcap_j S_j$$

ein Simplex in  $\Sigma_i q_i = 1$  ist, dessen zugehöriger Kegel  $B^*$  durch (9') auf sich abgebildet wird. Jede Kante von  $B^*$  muß also in eine Kante von  $B^*$  übergehen, was nur im Sinne einer Permutation möglich ist. Betrachtet man daher die Transformation (9') in dem von den Kanten von  $B^*$  aufgespannten Teilraum, so lautet diese mit den Einheitsvektoren dieser Kanten als Basis bei einer die Zyklen der fraglichen Permutation berücksichtigenden Numerierung:

$$y_j^* = \sum_i Q_{ij}^* y_i, \quad j = 1, \dots, r^*,$$

wobei die quadratische Matrix  $Q_{ij}^*$  eine Diagonalkastenform hat mit Kästchen  $K$  der Bauart

$$K = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & \\ & 0 & a_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & a_{h-1} \\ a_h & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a_1, \dots, a_h > 0.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind  $(a_1 \dots a_h)^{\frac{1}{h}} \varepsilon_h$ , worin  $\varepsilon_h$  eine  $h$ -te Einheitswurzel bezeichnet; damit ist  $K^h = a_1 \dots a_h E$  mit  $E$  als Einheitsmatrix. Hat man  $k$  solche Kästchen mit den Zeilenzahlen  $h = s_1, \dots, s_k$ , so folgt mit

$$s^* = \text{kl. gem. Vielf. } (s_1, \dots, s_k),$$

daß die  $s^*$ -te Potenz der Matrix  $(Q_{ij}^*)$  Diagonalform hat. Faßt man daher die Abschnitte der autogenen Folge in Gruppen zu je  $s^*$  Abschnitten zusammen, so strebt in diesen Abschnittsgruppen die Verteilung einer Grenzverteilung zu und daher auch in der Folge als Ganzes.

6. Die wichtige Frage, wie man einer Folge  $(x_v)_v$  von Elementen einer Menge  $A = \{a_1, \dots, a_r\}$  ansieht, daß sie autogen ist oder spezieller, daß sie regulär autogen ist mit einem  $\beta$ , dessen  $\beta(a)$  alle eine Länge  $\leq \lambda_0$  haben, verlangt eine feinere Analyse der Verteilungen der Elementekombinationen  $y_1 \dots y_\lambda$  (mit Berücksichtigung der Reihenfolge und mit Zulassung von Wiederholungen) für  $\lambda \leq \lambda_0$  in der Folge  $(x_{v+1} \dots x_{v+\lambda})_v$  der Abschnitte der Länge  $\lambda$ . Darüber soll zu einem späteren Zeitpunkt berichtet werden.