

Enrico Mai, Manfred Schneider, Chunfang Cui

**Zur Entwicklung von Bahntheorien
– Methodik und Anwendung –**

München 2008

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München



DGK Deutsche Geodätische Kommission
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe A

Theoretische Geodäsie

Heft Nr. 122

Enrico Mai, Manfred Schneider, Chunfang Cui

Zur Entwicklung von Bahntheorien

– Methodik und Anwendung –

München 2008

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0938-2836

ISBN 3 7696 8202 5

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:



Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 - 1283/- 1100

e-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Adressen der Autoren /
Addresses of the authors

Dr.-Ing. Enrico Mai
Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik
Sekretariat H12
TU Berlin
Straße des 17. Juni 135
D – 10623 Berlin
email: enrico@igg.tu-berlin.de

Prof. Dr.rer.nat. Manfred Schneider
Hoppestraße 18
D – 93049 Regensburg
email: mxsx.tum@t-online.de

Dr.-Ing. Chunfang Cui
Brüsseler Straße 26
D – 13353 Berlin
email: cui@mca.bv.tu-berlin.de

Diese Publikation ist als pdf-Dokument veröffentlicht im Internet unter der Adresse /

This volume is published in the internet

<http://dgk.badw.de>

© 2008 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
Teil I Einleitung	9
1 Einführung in die Aufgabenstellung	9
1.1 N-Körper-Problem der Bahnbewegung	10
1.2 Zwei-Körper-Problem und Kepler-Problem	11
1.3 Erweitertes Zwei-Körper-Problem der Bahnbewegung	12
1.4 Gravitationspotential bzw. Kraftfunktionen für das erweiterte Zwei-Körper-Problem	14
1.5 Darstellungen in Hill-Variablen	17
2 Hauptprobleme in der Bahntheorie und Lösungsstrategie für das erweiterte Zwei-Körper-Problem	19
2.1 Allgemeine Form der Bewegungsgleichungen	19
2.2 Hauptproblem	20
3 Lösbarkeit des Hauptproblems	24
3.1 Integrabilität des Hauptproblems	24
3.2 Integrale Näherungssysteme des Hauptproblems	24
3.2.1 Kleinheitsparameter und Ordnung einer Bahntheorie	24
3.2.2 Definition eines integrierbaren Näherungssystems k . Ordnung	25
4 Integrierbare Formen von Lelgemann und Cui	26
4.1 Verallgemeinertes Hauptproblem in Hill-Variablen	26
4.2 Ein als integrierbares Näherungssystem zur Bahntheorie verwendbares integrierbares kanonisches System	27
4.2.1 Die ersten Integrale und vollständige Lösung	28
4.2.1.1 Die ersten Integrale	28
4.2.1.2 Das Differential der Hamilton-Funktion und die Differentialgleichungen für Funktionen der kanonischen Variablen	28
4.2.1.3 Lösung für $(\tilde{t}, \tilde{T})$; die Verbindung mit (t, T)	28
4.2.1.4 Lösung für $(r, \dot{r})$; die Bahnkurve und die Bewegung auf der Bahn	29
4.2.1.5 Lösung für (u, Ω) ; die Drehung der Bahnkurve	30
4.2.1.6 Das System (43), das Lelgemann-System und das Kepler-Problem	30
4.2.2 Reihenentwicklung zur elliptischen Bewegung	30
4.2.3 Differentialformeln	32
Teil II Quadratisch konvergente Lösungsverfahren	33
5 Allgemeine Störungsrechnung basierend auf fast-identischen Transformationen	33
5.1 Bearbeitungen des Hauptproblems der Theorie der Satellitenbahnen	33
5.1.1 Lösungen nach dem Poisson-Verfahren der schrittweisen Annäherung	34
5.1.2 Lösung des Hauptproblems mittels kanonischer Transformationen	36
5.1.3 Verfahren vom Konvergenzgrad 2	38
5.2 Lie-Transformationen	39
5.3 Produkte von Lie-Transformationen	40
5.3.1 Baker-Hausdorff-Campbell-Formel	40
5.3.2 Produkt zweier Lie-Transformationen	40
5.3.3 Bestimmung der Erzeugenden des Produktes zweier Lie-Transformationen bis zur 4. Ordnung	42

5.4	Abschätzungstheoreme für kanonische Systeme	43
5.4.1	Abschätzungstheorem von Kamke	44
5.4.2	Abschätzungstheorem von Arnold	44
5.4.3	Abschätzungstheorem von Kirchgraber	45
5.4.4	Abschätzungstheorem von Cui für kanonische Systeme	45
6	Modifiziertes Cui-Verfahren	46
6.1	Aufgabenstellung	46
6.2	Vorbereitende Bemerkungen	47
6.3	Schrittweise Konstruktion von IAS beliebiger Ordnung	48
6.3.1	Elimination periodischer Anteile mittels Lie-Transformationen	49
6.3.2	Zerlegung des neuen Residuums	49
6.3.3	Schrittweise Konstruktion eines IAS höherer Ordnung	49
6.3.4	Ablaufschema des modifizierten Cui-Verfahrens	50
7	Modifiziertes Kamel-Deprit-Verfahren	51
7.1	Lösungskonzept	51
7.2	Verwendung der Kamel-Gleichungen	53
7.2.1	Erste Transformation ($k = 0$)	53
7.2.2	Ergebnis der ersten Transformation	55
7.2.3	Zweite Transformation ($k = 1$)	56
7.2.4	Ergebnis der zweiten Transformation	57
7.2.5	Dritte Transformation ($k = 2$)	57
7.2.6	Ergebnis nach der dritten Transformation	58
7.3	k te Transformation	58
7.4	Zusammenfassende Darstellung des Algorithmus	59
7.5	Methodischer Vergleich der vorgeschlagenen quadratisch konvergenten Verfahren	60
Teil III Vom Hauptproblem zum Gesamtproblem		62
8	Hamiltonisierung des Gesamtproblems	62
8.1	Hamiltonisierung von Bewegungsgleichungen 1. Ordnung	62
8.2	Hamiltonisierung von Bewegungsgleichungen 2. Ordnung	63
8.3	Rekonstruktion der Hamilton-Funktion aus ihren partiellen Ableitungen	66
8.4	Zur Lösung der Gleichungen im Allgemeinfeld	68
8.5	Das inverse Problem der Newton'schen Mechanik	70
8.5.1	Aufgabenstellung	70
8.5.2	Selbstadjunktion	72
8.5.3	Konstruktion der Hamilton-Funktion	73
9	Linearisierung des Gesamtproblems	73
9.1	Poincaré'sche Variationsgleichung	73
9.2	Encke-Linearisierung	74
9.3	Lösung des linearisierten Gesamtproblems	74
9.3.1	Propagator-Verfahren (Formel von Dyson)	75
9.3.2	Fundamentalsystem der homogenen Gleichung	75
9.3.3	Variation der Konstanten	75
10	Elimination von Störanteilen aus dem Gesamtproblem mit Hilfe fast-identischer Transformationen	75
10.1	Aufgabenstellung	76
10.2	Bedingung an die Transformation	76
10.3	Bestimmungsgleichungen für die Koeffizientenfunktionen	76
10.3.1	Taylorreihe mit Richtungsableitung	76
10.3.2	Bedingungsgleichungen	78
10.3.3	Lösung der Differentialgleichungen	79
10.4	Übertragung auf Bewegungsgleichungen 1. Ordnung	79
10.5	Zusammenfassung und Ausblick	80

Teil IV	Anwendungen	81
11	Duffing-Oszillator	81
11.1	Bewegungsgleichung	81
11.2	Lösung nach der modifizierten Cui-Methode	81
11.2.1	Konstruktion einer IAS 0. Ordnung	81
11.2.2	Schrittweise Konstruktion von IAS höherer Ordnung	82
11.2.3	Genäherte Lösung des Ausgangssystems	84
11.3	Lösung durch Elimination des Störanteils	85
11.3.1	Ansatz nach dem Propagator-Verfahren	85
11.3.2	Notwendigkeit einer Renormierung	88
11.3.3	Lösung mittels Laplace-Transformation	91
11.3.4	Lösung mittels Neumann'scher Reihe	92
11.3.5	Laplace-Transformation vs. Neumann'sche Reihe	95
11.3.6	Ablaufschema für Lösungen beliebig höherer Ordnung	96
11.3.7	Ein weiteres einfaches Beispiel	98
12	Satellitenbahntheorie (Skizze)	99
12.1	Anwendung des modifizierten Cui-Verfahrens auf das verallgemeinerte Hauptproblem	99
12.1.1	Hamilton-Funktion in Hill'schen Variablen	99
12.1.2	Die Cui-Lösung	100
12.1.3	Festlegung des Zielsystems (IAS 0. Ordnung)	100
12.1.4	Schema der Konstruktion integrierbarer Näherungssysteme höherer Ordnungen	102
12.1.4.1	Die erste Lie-Transformation	103
12.1.4.2	Die zweite Lie-Transformation	103
12.1.4.3	Die dritte Lie-Transformation	104
12.1.4.4	Die vierte Lie-Transformation	104
12.1.5	Methodische Vorbereitung der praktischen Ausführung des modifizierten Cui-Verfahrens	105
12.1.5.1	Auswertung der unbestimmten Integrale bei der Berechnung der Erzeugenden	105
12.1.5.2	Berechnung der auf das integrable Näherungssystem bezogenen Größen und deren Ableitungen	110
12.1.5.3	Eigenschaften der Poisson-Klammern	112
12.1.6	Bisherige Ergebnisse	113
12.2	Alternative Entwicklungen einer hochgenauen Bahntheorie	113
12.2.1	Anwendung des Verfahrens der Elimination von Störkräften	113
12.2.1.1	Linearisation	113
12.2.1.2	Volterra-Gleichung gestörter Bewegungen	113
12.2.1.3	Linearisation der Volterra-Gleichung im Falle elliptischer Bahnen	115
12.2.1.4	Alternativen zu den quadratisch konvergenten Lösungsverfahren	116
12.2.1.5	Lösung der Volterra-Gleichung nach dem Poisson-Verfahren	117
12.3	Offene Fragen und Qualitätsbeurteilung der Lösungen	119
12.3.1	Resonanzen	119
12.3.1.1	Fragestellung	119
12.3.1.2	Entstehen der Resonanzen in der Kaula-Theorie und deren Beseitigung	121
12.3.2	Möglichkeiten der Qualitätsbeurteilung der analytischen Lösungen	121
	Zusammenfassung und Ausblick	124
	Literaturverzeichnis	125
	Anhang	128
13	Details zum Duffing-Oszillator	128
13.1	Bekannte Lösungen	128
13.2	Lösungen nach dem Eliminationsverfahren	131
	Danksagung	141

Vorwort

Dem Leser der vorliegenden Abhandlung über derzeit anstehende mathematische Probleme der Himmelsmechanik, der mit praktischen Problemen der Auswertung konkreter Meßdaten befasst ist, mag diese unnötig kompliziert und theoretisch erscheinen. Das mag in gewisser Hinsicht nicht unrichtig sein; denn die Entwicklung der mathematischen Modelle der Satellitengeodäsie, wie sie für die Analyse der extrem genauen (1 Mikrometer) Meßdaten der modernen Satellitengeodäsie notwendig sind, ist bei weitem noch nicht abgeschlossen. Ansätze ausgehend von verschiedenen Grundkonzepten müssen derzeit noch verfolgt werden, bevor eine möglichst einheitliche und effiziente Methodik zur Verfügung stehen wird. Den international mit der Erarbeitung dieser für die praktischen Anwendungen notwendigen mathematischen Methoden befassten Kollegen bietet die vorliegende Abhandlung jedenfalls eine breite und solide Übersicht über die Grundkonzepte.

Die Basis sowohl der Himmelsmechanik als auch der Satellitengeodäsie bildet die Integration der Bewegungsgleichungen eines Himmelskörpers, sei es ein Planet, ein Mond oder ein künstlicher Erdsatellit. Diese Integration kann sowohl numerisch als auch analytisch erfolgen. Infolge der Gravitationskraft weisen die Himmelskörper insbesondere periodische Bewegungen auf; man kann daher die analytische Integration auch als eine Methode im Spektralbereich ansehen, die numerische Integration als eine Methode im Ortsbereich.

Lösungen der Bewegungsgleichungen mittels analytischer Integration sind von großer Bedeutung in der Satellitengeodäsie im Hinblick auf die Aufstellung von Fehlergleichungen zur Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials der Erde. Arbeitet man im Ortsbereich mittels numerischer Integration, entstehen hierbei riesige Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung, um die Fehlergleichungskoeffizienten zu berechnen. Da diese nicht mit höchster Genauigkeit benötigt werden, ist es wesentlich effizienter, diese durch simple Differentiation einer geeignet approximierten analytischen Lösung zu bestimmen; die Einsparung von Computerzeit ist beachtlich.

Analytische und numerische Integration beinhalten beide bekanntlich Vor- als auch Nachteile.

Spektralbereichsmethoden bzw. analytische Integration erweisen sich als vorteilhaft hinsichtlich der folgenden Aspekte:

- Integration von langen Bahnen; da eine analytische Integration eine Lösung gewährleistet, die im Prinzip für unbeschränkte Zeit gilt, ist sie wünschenswert insbesondere für das Planetensystem und Mondbahnen
- Meßdatenanalyse im Spektralbereich; eine derartige alternative Methode zur Analyse im Ortsbereich, die derzeit in der Praxis meistens verwendet wird, bietet oft tiefere Einblicke in die zugrunde liegende Problematik einer konkreten Problemstellung.

Als nachteilig wird oft angesehen:

- Die Komplexität der Methoden; sicherlich bereitet diese befähigten Wissenschaftlern besondere Herausforderungen.
- Die Komplexität genauer Lösungen; diese sind möglicherweise durch spezielle Verfahren wesentlich zu vereinfachen.

Sogenannte Liereihen können sowohl (wie bekannt) für die analytische Integration als auch (wie kürzlich entdeckt) für hochgenaue numerische Integrationen verwendet werden. Von diesem Gesichtspunkt aus würde sich der Liereihen-Kalkül als eine generelle Methode für Himmelsmechanik/Satellitengeodäsie anbieten.

Allerdings bleibt zu klären, ob sich von den vielen in der Himmelsmechanik entwickelten Methoden andere nicht als ebenso vorteilhaft erweisen bzw. in bestimmten Spezialfällen einzusetzen sind. Die vorliegende Abhandlung leistet einen wichtigen Beitrag zur Beantwortung derartiger Fragen; von den Antworten wird die weitere Entwicklung von Himmelsmechanik und Satellitengeodäsie abhängen.

Berlin, im März 2008
Dieter Lelgemann

Teil I

Einleitung

Das Mehrkörperproblem macht den Grundinhalt der Himmelsmechanik aus, das Zweikörperproblem ist seine größtmögliche Vereinfachung. Im Vordergrund stand über lange Zeit das Mehrkörperproblem bei alleiniger Gravitationswechselwirkung, nur vereinzelt wurden nicht-gravitative Kräfte berücksichtigt (Smart [66]). Das hat sich mit dem Start künstlicher Erdsatelliten wesentlich geändert. Um deren Bewegung zu verstehen, musste eine Vielfalt nicht-gravitativer Kräfte neben der Gravitationswechselwirkung mit dem Zentralkörper Erde und mit dritten Körpern wie Sonne und Mond in die Behandlung des Bewegungsproblems aufgenommen werden (King-Hele [28], Milani et al. [46], Schneider [63]).

Die Entwicklung der Theorie der Umlaufbewegung künstlicher Satelliten hat mit der Genauigkeitssteigerung der Ortungs- und Bahnverfolgungsverfahren in den letzten Jahrzehnten nicht Schritt gehalten. Die von Kaula [25], [26] ausgearbeitete Bahntheorie war den seinerzeitigen Beobachtungsgenauigkeiten noch angemessen, die folgende Entwicklung aber führte zu einer wachsenden Diskrepanz von Genauigkeit der Bahnverfolgung und Genauigkeit der analytischen Lösungsdarstellung. Das hatte zur Folge, dass die vielfältigen Aufgaben der Bahn- und Parameterbestimmung zunehmend unter Verwendung numerischer Verfahren gelöst werden mussten. Diese ermöglichten, die Vielfalt der im Flugbereich der Satelliten wirkenden Kräfte mit vergleichsweise geringem Aufwand zu berücksichtigen, zumal diese Kräfte häufig keine einfache modellmäßige Darstellung zuließen. Als Beispiel sei etwa die Darstellung des Strömungswiderstandes der Hochatmosphäre genannt, die die Darstellung der Atmosphäre erforderlich macht und die teilweise nur mehr in tabellarischer Form angemessen angegeben werden kann, also eine für die Ausarbeitung einer analytischen Bahntheorie wünschenswerte analytische Darstellung nicht verfügbar ist.

Aus dem Blickwinkel der Anwendung mag es rationell sein, sich auf numerische Verfahren zu stützen, um etwa die Ephemeriden und die Lösung der bei der differentiellen Korrektur von Modellparametern anfallenden Variationsgleichungen in ausreichender Genauigkeit bereitzustellen. Allerdings zeigen sich zunehmend begrenzende Faktoren bei der Anwendung numerischer Verfahren, beispielsweise bei Langzeitintegrationen von Bewegungen unter komplizierten Kraftfunktionen wie einem hochaufgelösten Gravitationsfeld der Erde, abgeleitet im Rahmen der neueren Satellitenmissionen wie *CHAMP* und *GRACE*.

Technologische Entwicklungen, etwa die hochempfindlicher Akzelerometer in Satelliten, mit denen nicht-gravitative Kräfte genau gemessen werden können, oder Systeme zur Störkraftkompensation, mit deren Hilfe Flugbahnen der Satelliten verwirklicht werden können, die allein unter der Wirkung der gravitativen Kräfte der Erde und dritter Körper zustande kommen, ändern die Anforderungen an die Theorie der Satellitenbahnen.

Es rücken damit wieder analytische Bahntheorien ins Gesichtsfeld, zumal in den letzten Jahrzehnten in der Himmelsmechanik eine Reihe methodischer Entwicklungen stattgefunden haben, die die Ausarbeitung hinreichend genauer Bahntheorien realisierbar erscheinen lassen. Zu nennen sind hier etwa die auf fast-identischen kanonischen Transformationen, beschrieben durch Lie-Reihen, basierenden Verfahren der allgemeinen Störungsrechnung. In der vorliegenden Studie wird gezeigt werden, dass diese Verfahren weitaus effizienter gestaltet werden, als es bisher der Fall ist, nämlich mit höherem Konvergenzgrad. Im Unterschied zu den bekannten auf der Verwendung von Lie-Reihen basierenden Verfahren, die vom Konvergenzgrad 1 sind, gelingt es, die Verfahren als quadratisch oder superkonvergente Verfahren vom Konvergenzgrad 2 zu gestalten und damit eine praktisch realisierbare Form des Kolmogorov-Verfahrens zu erreichen. Anders ausgedrückt: der diesem Verfahren nachgesagte Nachteil lässt sich vermeiden, was einen außerordentlich effizienten Weg zu Konstruktion hochgenauer Bahntheorien eröffnet. Damit werden aber auch die bekannten Vorteile analytischer Lösungen zugänglich, beispielsweise die Verfügbarkeit der Lösungsmannigfaltigkeit und nicht nur jeweils spezieller Lösungen wie bei numerischen Verfahren.

1 Einführung in die Aufgabenstellung

Die Umlaufbewegung eines Erdsatelliten ist als Lösung eines Mehrkörperproblems zu bestimmen. In dem noch näher zu definierenden Hauptproblem wird allein die Gravitationswechselwirkung der beteiligten Körper eine Rolle spielen. Im Hinblick darauf soll das Mehrkörperproblem bei Gravitationswechselwirkung formuliert werden. Und zwar soll das im Rahmen der Newton'schen Gravitationstheorie erfolgen (Schneider[60]).

1.1 N-Körper-Problem der Bahnbewegung

Betrachtet werde die Bahnbewegung von N Himmelskörpern. In einem beliebig gelagerten Inertialsystem (*ICRS*) lässt sich die Bewegung, unter den Bezeichnungen $\mathbf{r}_i$ bzw. $\mathbf{v}_i$ und m_i für den Orts- bzw. Geschwindigkeitsvektor des Massenmittelpunktes und die Masse des Körpers i , durch die Newton-Euler'schen Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i \mathbf{v}_i, \quad m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N(j \neq i)} \mathbf{F}_i^j \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

oder

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N(j \neq i)} \mathbf{F}_i^j \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

beschreiben. Darin steht $\mathbf{F}_i$ für die auf den Körper i wirkende Kraft. Sie setzt sich bei ausschließlicher Gravitationswechselwirkung zusammen aus den Gravitationskräften aller anderen Körper

$$\mathbf{F}_i^j = -\frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = -\mathbf{F}_j^i \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N \quad \text{und mit } j \neq i.$$

Führt man die Kraftfunktion des N -Körper-Systems

$$U_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N(j \neq i)} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

ein, so erhält man die Kraft $\mathbf{F}_i$ durch Gradientenbildung

$$\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} U_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N.$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i \mathbf{v}_i, \quad m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \nabla_{\mathbf{r}_i} U_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

oder

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \nabla_{\mathbf{r}_i} U_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Die Gleichungssysteme (1) bzw. (3) und (2) bzw. (4) sind äquivalent. Das System (1) bzw. (3) besteht aus $6N$ Differentialgleichungen 1. Ordnung, dagegen System (2) bzw. (4) aus $3N$ Differentialgleichungen 2. Ordnung. Beide Systeme sind von $6N$. Ordnung.

Anmerkung: Die Bewegungsgleichung ist nicht-relativistisch, die unterlegte Zeitskala dem Charakter nach Newtons absolute Zeit. An die Stelle der angegebenen Bewegungsgleichung tritt in erster postnewton'scher Näherung die Einstein'sche Bewegungsgleichung, wenn man das Bewegungsproblem im Rahmen der Einstein'schen Gravitationstheorie, also allgemein-relativistisch formuliert (Schneider [63]). Das soll im folgenden nicht geschehen.

Für $N = 2$ bzw. $N = 3$ erhält man das Zwei-Körper- bzw. das Drei-Körper-Problem, charakterisiert durch die Kraftfunktionen

$$U_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} =: U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad \text{bzw.} \quad U_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{Gm_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{Gm_3 m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|}.$$

Es ist bekannt (Schneider [61]), dass es folgende Integrale für das Bewegungsproblem (3) oder (4) gibt:

Integrale der Bewegung des Massenmittelpunktes des Systems:

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \text{const}, \quad \mathbf{r}_c = \mathbf{v}_c(t - t_0) + \text{const} \quad (5)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k \quad \text{Ortsvektor des Massenmittelpunktes des Systems,}$$

$$M = \sum_{k=1}^N m_k \quad \text{Gesamtmasse des Systems.}$$

Integral der Drehimpulse des Systems:

$$\sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_c) \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_c) = \text{const} \quad (6)$$

Integral der Energie:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k - U_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \text{const} \quad (7)$$

Die Gleichungen (5), (6) und (7) stellen die 10 klassischen Integrale in der Himmelsmechanik dar. Sie implizieren Erhaltungssätze für den Gesamtimpuls, den Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie des N -Körper-Systems (Schneider/Cui [64]).

1.2 Zwei-Körper-Problem und Kepler-Problem

Das Zwei-Körper-Problem stellt sich als das einfachste Problem in der Himmelsmechanik

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = -\frac{Gm(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} = -\frac{1}{m_0} \mathbf{F}^0, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{Gm_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^0, \quad (8)$$

worin $\{m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}\}$ das Körpersystem bezeichnet. $\mathbf{F}^0$ steht für die durch den Körper m_0 auf den Körper m wirkende Kraft. Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{dt^2} = -\frac{G(m_0 + m)m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad \frac{\mathbf{r}^0 := \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{q := m/m_0} \rightarrow m \frac{d^2 \mathbf{r}^0}{dt^2} = -\frac{G(1+q)m_0 m \mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}^0|^3} = m \nabla_{\mathbf{r}^0} U^0(\mathbf{r}^0) \quad (9)$$

mit dem Massenverhältnis $q = m/m_0$ und

$$U^0(\mathbf{r}^0) = \frac{\mu^0}{|\mathbf{r}^0|} \quad \text{mit } \mu^0 = (1+q) Gm_0 \quad (10)$$

für die relative Bewegung des Körpers m gegen das mit dem Massenmittelpunkt des Körpers m_0 verbundene rotationsfreie Galilei-System, oder mit anderen Worten, für die Bahnbewegung des Körpers m um den Zentralkörper m_0 .

Wird der Massenmittelpunkt des Körpersystems durch dessen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_0 \mathbf{r}_0 + m \mathbf{r}}{m_0 + m} = \frac{\mathbf{r}_0 + q \mathbf{r}}{1+q}$$

definiert, dann lassen sich die Positionen beider Körper durch die relativen Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_0^c = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{r}^c = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c$$

bestimmen und dabei gelten die Beziehungen

$$\mathbf{r}_0^c = -q \mathbf{r}^c \quad \text{und} \quad \mathbf{r}^0 = \mathbf{r}^c - \mathbf{r}_0^c = (1+q) \mathbf{r}^c. \quad (11)$$

Aus den Gleichungen (8) ergibt sich dann die Bewegungsgleichung des Massenmittelpunktes

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2} = \mathbf{0}$$

und die Gleichung

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^c}{dt^2} = -\frac{Gm_0 m \mathbf{r}^c}{(1+q)^2 |\mathbf{r}^c|^3} = m \nabla_{\mathbf{r}^c} U^c(\mathbf{r}^c) \quad (12)$$

für die relative Bewegung des Körpers m gegen den Massenmittelpunkt des Systems mit der Kraftfunktion

$$U^c(\mathbf{r}^c) = \frac{\mu^c}{|\mathbf{r}^c|} \quad \text{mit } \mu^c = \frac{Gm_0}{(1+q)^2}. \quad (13)$$

Es ist ersichtlich, dass das mit dem Massenmittelpunkt des Körpersystems verbundene rotationsfreie Bezugssystem ein inertiales System ist.

Anmerkung: Mit $\mu_0 = Gm_0$, dem Gravitationskoeffizienten des Zentralkörpers m_0 , erhält man aus (10)

$$U^0(\mathbf{r}^0) = (1+q) \frac{\mu_0}{|\mathbf{r}^0|} = (1+q) \bar{U}_0(\mathbf{r}^0)$$

und aus (13)

$$U^c(\mathbf{r}^c) = \frac{1}{1+q} \frac{\mu_0}{|\mathbf{r}^0|} = \frac{1}{1+q} \bar{U}_0(\mathbf{r}^0) = \frac{1}{1+q} \bar{U}_0((1+q)\mathbf{r}^c),$$

wobei

$$\bar{U}_0(\mathbf{r}^0) = \frac{\mu_0}{|\mathbf{r}^0|}$$

das Gravitationspotential des Zentralkörpers als Punktmasse angibt.

Die beiden Bewegungsprobleme (9) und (12) führen zur Bewegung einer Punktmasse im Raum, also zu einem System von Differentialgleichungen 6. Ordnung, welches sich durch eine einheitliche Form

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r}) \quad \text{mit } U(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{|\mathbf{r}|}$$

ausdrücken lässt - die *Kepler-Bewegung*.

Für das nicht nur in der Himmelsmechanik eingehend untersuchte Kepler-Problem sind die folgenden Bewegungsintegrale gefunden worden (Schneider [60], Schneider/Cui [64]):

Das *Drehimpulsintegral* (3 Komponenten) zeigt, dass sich die Punktmasse in einer im Raum festliegenden Ebene mit einer konstanten Flächengeschwindigkeit bewegt.

Das *Energieintegral* (1 Komponente) ergibt Kegelschnitte mit konstanter Exzentrizität als mögliche Bahnkurven der Punktmasse.

Das *Laplace-Integral* zeigt die feste Orientierung der Bahnkurve in der Bahnebene. (Das Laplace-Integral besitzt zwar 3 Komponenten, aber nur eine ist von den oben genannten 4 Integralen unabhängig.)

Das *Kepler-Integral* (Kepler-Gleichung) gibt die Zeitabhängigkeit der Position der Punktmasse entlang der Bahn.

Anmerkung: Der Vergleich mit den 10 klassischen Integralen des N -Körper-Problems ergibt:

- Die Reduktion des Zwei-Körper-Problems (System 12. Ordnung) auf das System 6. Ordnung (9) oder (12) bedeutet implizit 6 Integrale der Bewegung des Massenmittelpunktes oder die 6 Integrale sind erschöpft.
- Laplace-Integral und Kepler-Integral gehören nicht zu den klassischen Integralen; sie ergeben mit dem Drehimpulsintegral und dem Energieintegral 6 unabhängige Integrale des Systems 6. Ordnung. Damit ist die allgemeine Lösung des Kepler-Problems gefunden.

1.3 Erweitertes Zwei-Körper-Problem der Bahnbewegung

In der Praxis ist ein erweitertes Zwei-Körper-Modell von großem Interesse. Es sei ein Zwei-Körper-System $\{m_0, m\}$ mit $m_0 \geq m$; die Bewegungsgleichungen in einem Inertialsystem lauten

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} &= -\mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t) + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_0^{\alpha}(m_{\alpha}, m_0; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{\alpha}) = -\mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t) + \sum_{\alpha} \frac{Gm_{\alpha}m_0}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_0), \\ m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t) + \sum_{\alpha} \mathbf{F}^{\alpha}(m_{\alpha}, m; \mathbf{r}, \mathbf{r}_{\alpha}) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \\ &= \mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t) + \sum_{\alpha} \frac{Gm_{\alpha}m}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t)$ die durch den Körper m_0 auf den Körper m wirkende gravitative Kraft bezeichnet; $\mathbf{F}_0^{\alpha}(m_{\alpha}, m_0; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{\alpha})/\mathbf{F}^{\alpha}(m_{\alpha}, m; \mathbf{r}, \mathbf{r}_{\alpha})$ ist die Kraft auf den Körper m_0/m infolge der Gravitation eines Körpers α außerhalb des Systems. Dabei ist die Bewegung der einzelnen Körper α , d. h., $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}(t)$ als bekannt vorgegeben. $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ gibt die auf die Körper m wirkende nicht-gravitative Kraft an.

Für die Bahnbewegung des Körpers m in einem mit dem Körper m_0 verbundenen rotationsfreien Bezugssystem gilt dann

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^0}{dt^2} = (1+q) \mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t) + \sum_{\alpha} G m_{\alpha} m \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}^0 - \mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}_{\alpha}^0 - \mathbf{r}^0|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha}^0}{|\mathbf{r}_{\alpha}^0|^3} \right) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \quad (14)$$

mit den Ortsvektoren des Massenzentrums der Körper m bzw. α im o. g. Bezugssystem

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_{\alpha}^0 = \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_0.$$

Für die Bewegung des Massenmittelpunktes des Körpers m in einem mit dem Massenzentrum $\mathbf{r}_c$ des Körpersystems $\{m_0, m\}$ verbundenen rotationsfreien Bezugssystem (Zwei-Körper-zentriert) erhält man

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^c}{dt^2} = \mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t) + \frac{1}{1+q} \sum_{\alpha} G m_{\alpha} m \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}^c - \mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_{\alpha}^c - \mathbf{r}^c|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha}^c + q \mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_{\alpha}^c + q \mathbf{r}^c|^3} \right) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t).$$

Die Kraft $\mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t)$ lässt sich nach dem Gravitationsgesetz als Funktion der Ortsvektors $\mathbf{r}^0$ und der Zeit modellieren; dabei kann der Zentralkörper sowohl als Punktmasse als auch als ausgedehnter Körper (deformierbarer Körper, rotierender oder rotationsfreier starrer Körper) angenommen werden. Im Falle einer Punktmasse oder eines rotationsfreien starren Körpers soll die Funktion von der Zeit nicht explizit abhängen: $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}^0)$.

Würde die Kraft $\mathbf{F}^0$ im m_0 -zentrierten Bezugssystem als Funktion von $(\mathbf{r}^0, t)$ formuliert und die letzte Gleichung in (11) verwendet, dann ließe sie sich durch $\mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0; t)|_{\mathbf{r}^0=(1+q)\mathbf{r}^c} = \mathbf{F}^0(m_0, m; (1+q)\mathbf{r}^c; t)$ ausdrücken. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^c}{dt^2} = \mathbf{F}^0(m_0, m; (1+q)\mathbf{r}^c; t) + \frac{1}{1+q} \sum_{\alpha} G m_{\alpha} m \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha}^c - \mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_{\alpha}^c - \mathbf{r}^c|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\alpha}^c + q \mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_{\alpha}^c + q \mathbf{r}^c|^3} \right) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t). \quad (15)$$

Die Kraftfunktionen eingeführt, lassen sich die beiden Bewegungsprobleme in einheitlicher Form

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}^B}{dt^2} &= \nabla_{\mathbf{r}^B} \left(V_0^B(m_0, m; \mathbf{r}^B; t) + \sum_{\alpha} V_{\alpha}^B(m_{\alpha}, m; \mathbf{r}^B; t) \right) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \\ &= m \nabla_{\mathbf{r}^B} \left(U_0^B(m_0; \mathbf{r}^B; t) + \sum_{\alpha} U_{\alpha}^B(m_{\alpha}; \mathbf{r}^B; t) \right) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \end{aligned} \quad (16)$$

schreiben, worin die Größen $V_0^B(m_0, m; \mathbf{r}^B; t)$ bzw. $V_{\alpha}^B(m_{\alpha}, m; \mathbf{r}^B; t)$ die Kraftfunktion infolge der Gravitation des Zentralkörpers bzw. des Störkörpers α außerhalb des Zwei-Körper-Systems bezeichnen und die Größen $U_0^B(m_0; \mathbf{r}^B; t)$ bzw. $U_{\alpha}^B(m_{\alpha}; \mathbf{r}^B; t)$ die entsprechenden Kraftfunktionen für die Einheitsmasse. $B = \{0, c\}$ weist auf das dabei verwendete Bezugssystem hin.

Anmerkungen:

- Das o. g. erweiterte Zwei-Körper-Modell lässt sich in den meisten Fällen der Bahnbewegung im Sonnensystem verwenden. Für die Planetenbewegung (Bewegung des Massenmittelpunktes eines Planeten oder des Planet-Satellit-Systems) wird die Bewegungsgleichung (14) im heliozentrischen Bezugssystem verwendet, wobei die anderen Planeten als die Körper α extern zum Sonne-Planet-System betrachtet werden. Für die Satellitenbewegung wird die Bewegungsgleichung (15) im Zwei-Körper-zentrierten System verwendet, wobei die Körper α für die Sonne und die anderen Planeten stehen. In beiden Fällen stellt $\mathbf{F}^0$ die dominierende Kraft dar; alle sonstigen in den Gleichungen auftretenden Kräfte sind wesentlich kleiner.
- Für die Bewegung eines künstlichen Satelliten ist das Massenverhältnis sehr klein und praktisch vernachlässigbar; so sind die Bewegungsgleichungen in beiden Bezugssystemen identisch.
- Beim erweiterten Zwei-Körper-Modell können der Zentralkörper als ausgedehnter Körper behandelt und die nicht-gravitativen Kräfte $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ berücksichtigt werden. Dazu ist es dann nur notwendig, die Kraft $\mathbf{F}^0(m_0, m; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t)$ und das entsprechende Potential sowie die Kraft $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ zu formulieren - abhängig davon, welches der o. g. Bezugssysteme verwendet wird.

1.4 Gravitationspotential bzw. Kraftfunktionen für das erweiterte Zwei-Körper-Problem

Gravitationspotential und Kraftfunktion einer Punktmasse:

Die Gravitationskraft einer *Punktmasse* $\{m_0, \mathbf{r}_0\}$ auf eine Einheitsmasse lässt sich nach dem Gravitationsgesetz von Newton angeben zu

$$\mathbf{f}^0 = -\frac{Gm_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3},$$

ableitbar aus einem Potential

$$\frac{\partial U^0}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{f}^0.$$

Da die Position der betreffenden Einheitsmasse von der Position der Punktmasse m_0 unabhängig ist, ergibt eine Wegintegration $U^0 = \int \mathbf{f}^0 d\mathbf{r}$, wobei $\mathbf{r}_0$ als konstant betrachtet wird,

$$U^0 = \frac{Gm_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Das Gravitationspotential ist unabhängig davon, welches Bezugssystem verwendet wird.

Die Kraftfunktion V^B einer in der Bewegungsgleichung auftretenden Kraft $\mathbf{F}$ ist definiert durch

$$\frac{\partial V^B}{\partial \mathbf{r}^B} = \mathbf{F},$$

wenn eine Kraftfunktion überhaupt existiert, worin $\mathbf{r}^B$ den Ortsvektor (bzgl. eines gegebenen Bezugssystems) der Punktmasse unter der Wirkung der Kraft $\mathbf{F}$ bezeichnet.

Gravitationspotential und Kraftfunktion des Zentralkörpers:

Das Gravitationspotential eines aus mehreren Punktmassen $\{m_\alpha, \mathbf{r}_\alpha\}$ mit $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$ bestehenden Systems ergibt sich durch Zusammensetzung der Potentiale aller einzelnen Punktmassen

$$U^{1,2,3,\dots} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{Gm_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}.$$

Die Summe ersetzt durch ein Integral über die Masse ergibt das Potential eines ausgedehnten Körpers

$$U^K = \iiint_K \frac{G dm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} = \iiint_K \frac{G\rho(\mathbf{r}_\alpha) d\nu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}. \quad (17)$$

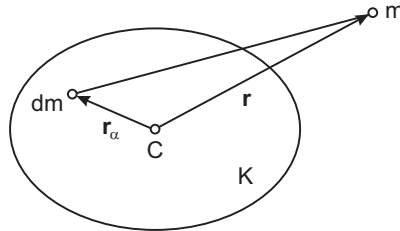


Abb. 1: Gravitationsfeld eines Kontinuums

Der reziproke Abstand lässt sich mittels der konvergenten Potenzreihen

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r_\alpha}{r}\right)^n P_{n(0)}(\cos(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r})) & \text{für } r > r_\alpha \\ \frac{1}{r_\alpha} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r}{r_\alpha}\right)^n P_{n(0)}(\cos(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r})) & \text{für } r < r_\alpha \end{cases} \quad (18)$$

darstellen, worin $(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r})$ den aus den Vektoren $\mathbf{r}_\alpha$ und $\mathbf{r}$ gebildeten Winkel und $r_\alpha = |\mathbf{r}_\alpha|$ bzw. $r = |\mathbf{r}|$ bezeichnen. Mit dem Additionstheorem der Legendre-Polynome

$$P_{n(0)}(\cos \gamma_\alpha) = P_{n0}(\cos \theta_\alpha) P_{n0}(\cos \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta_\alpha) P_{nm}(\cos \theta) \cos m(\lambda - \lambda_\alpha) \quad (19)$$

kann man den reziproken Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^{-1}$ als eine Funktion der Kugelkoordinaten (r, θ, λ) und $(r_\alpha, \theta_\alpha, \lambda_\alpha)$ der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_\alpha$ darstellen. Es ergibt sich für $r > r_\alpha$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} = \frac{1}{r} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r_\alpha}{r} \right)^n \left(P_{n0}(\cos \theta_\alpha) P_{n0}(\cos \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta_\alpha) P_{nm}(\cos \theta) \cos m(\lambda - \lambda_\alpha) \right) \quad (20)$$

und für $r_\alpha > r$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} = \frac{1}{r_\alpha} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r}{r_\alpha} \right)^n \left(P_{n0}(\cos \theta_\alpha) P_{n0}(\cos \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta_\alpha) P_{nm}(\cos \theta) \cos m(\lambda - \lambda_\alpha) \right).$$

(20) in (17) eingeführt und die von $(r_\alpha, \theta_\alpha, \lambda_\alpha)$ unabhängigen Faktoren aus dem Integral herausgezogen, erhält man für $r > \max\{r_\alpha\}$

$$U^K = \frac{GM}{r} \sum_{n \geq 1} \left(c_{n(0)} \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{n0}(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) \right) \quad (21)$$

mit der Gesamtmasse des Körpers

$$M = \iiint_K dm$$

und den harmonischen Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{2}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_K \left(\frac{r_\alpha}{a} \right)^n P_{nm}(\cos \theta_\alpha) \cos m\lambda_\alpha dm, \\ s_{nm} &= \frac{2}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_K \left(\frac{r_\alpha}{a} \right)^n P_{nm}(\cos \theta_\alpha) \sin m\lambda_\alpha dm, \\ c_{n(0)} &= \frac{1}{M} \iiint_K \left(\frac{r_\alpha}{a} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_\alpha) dm, \end{aligned} \quad (22)$$

worin a ein willkürlich eingeführter Längenparameter ist.

Es ist (Schneider [60])

$$c_{0(0)} = \frac{1}{M} \iiint_K dm = 1, \quad s_{n(0)} = 0$$

und

$$c_{1(0)} = \frac{1}{M} \iiint_K \frac{1}{a} z_\alpha dm = \frac{1}{M} \frac{z_c}{a}, \quad c_{1(1)} = \frac{1}{M} \iiint_K \frac{1}{a} x_\alpha dm = \frac{1}{M} \frac{x_c}{a}, \quad s_{1(1)} = \frac{1}{M} \iiint_K \frac{1}{a} y_\alpha dm = \frac{1}{M} \frac{y_c}{a},$$

worin (x_c, y_c, z_c) die kartesischen Koordinaten des Massenmittelpunktes C des Körpers K sind. Seien die Ortsvektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_\alpha$ bezüglich des Massenmittelpunktes C des Körpers K definiert, dann reduziert sich die Reihenentwicklung (21) zu

$$\begin{aligned} U^K &= \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{n \geq 2} \left(c_{n(0)} \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{n0}(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (c_{nm} \cos m(\lambda - \Theta) + s_{nm} \sin m(\lambda - \Theta)) \right) \\ &= U_{00}(r, \theta, \lambda) + \sum_{n \geq 2} \left(U_{n0}(r, \theta, \lambda) + \sum_{m=1}^n U_{nm}(r, \theta, \lambda) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

(23) gibt, zusammen mit (22), den Ausdruck des Potentials eines Kontinuums K bzgl. eines körperzentrierten, beliebig orientierten Koordinatensystems unter der Bedingung $r > \max\{r_\alpha\}$. Die Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} hängen von der Massenverteilung innerhalb des Kontinuums ab. Für einen Starrkörper bleibt die Massenverteilung im Lauf der Zeit unveränderlich. Daher sind die Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} in einem beliebig orientierten körperfesten Koordinatensystem konstant.

Für einen sich im Raum drehenden Starrkörper lässt sich das körperfeste Koordinatensystem so orientieren, dass die Z -Achse des Systems mit der Drehachse des Körpers zusammenfällt (äquatorielles System). Damit ergibt

eine Rotation des Koordinatensystems den *Ausdruck des Potentials bzgl. eines körperzentrierten rotationsfreien Galilei-Systems*:

$$U^K(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n \geq 2} \left(c_{n(0)} \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{n0}(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (c_{nm} \cos m(\lambda - \Theta) + s_{nm} \sin m(\lambda - \Theta)) \right) \right\} \quad (24)$$

worin Θ den Drehwinkel des Körpers bezeichnet. Die Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} sind bzgl. der Rotationsachse des Körpers definiert.

Somit lassen sich die Kraftfunktionen entsprechend den Kräften durch den Zentralkörper für die Bewegungsprobleme (14) und (15) über

$$V_0^0 = m(1+q)U^K(r^0, \theta, \lambda) = mU_0^0$$

bzw.

$$V_0^c = mU^K((1+q)r^c, \theta, \lambda) = mU_0^c$$

ausdrücken. Hier bedeutet U_0^B die Kraftfunktion infolge des Zentralkörpers im Bezugssystem B , V_0^B die entsprechende Kraftfunktion für die Einheitsmasse.

Kraftfunktionen für die Gravitationskraft infolge eines Himmelskörpers außerhalb des Zwei-Körper-Systems:

Die Kräfte durch einen Himmelskörper α außerhalb des Zwei-Körper-Systems für die Bewegungsprobleme (14) und (15) sind

$$\mathbf{F}_\alpha^0 = Gm_\alpha m \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha^0 - \mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}_\alpha^0 - \mathbf{r}^0|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha^0}{|\mathbf{r}_\alpha^0|^3} \right) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}_\alpha^c = \frac{Gm_\alpha m}{1+q} \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha^c - \mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_\alpha^c - \mathbf{r}^c|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha^c + q\mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_\alpha^c + q\mathbf{r}^c|^3} \right).$$

Entsprechende Kraftfunktionen lassen sich über das Wegintegral

$$V^B = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{r}^B$$

bestimmen, wenn das Wegintegral vom Integrationsweg unabhängig ist. Für die o. g. Kräfte hängt $\mathbf{r}_\alpha^0/\mathbf{r}_\alpha^c$ von der Integrationsvariablen $\mathbf{r}^0/\mathbf{r}^c$ nicht ab. Es ergibt sich daher

$$V_\alpha^0 = Gm_\alpha m \int_L \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha^0 - \mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}_\alpha^0 - \mathbf{r}^0|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha^0}{|\mathbf{r}_\alpha^0|^3} \right) d\mathbf{r}^0 = Gm_\alpha m \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha^0 - \mathbf{r}^0|} - \frac{\mathbf{r}_\alpha^0 \cdot \mathbf{r}^0}{|\mathbf{r}_\alpha^0|^3} \right) = mU_\alpha^0 \quad (25)$$

und

$$V_\alpha^c = \frac{Gm_\alpha m}{1+q} \int_L \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha^c - \mathbf{r}^c}{|\mathbf{r}_\alpha^c - \mathbf{r}^c|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha^c}{|\mathbf{r}_\alpha^c|^3} \right) d\mathbf{r}^c = \frac{Gm_\alpha m}{1+q} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha^c - \mathbf{r}^c|} + \frac{1}{q} \frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha^c + q\mathbf{r}^c|} \right) = mU_\alpha^c. \quad (26)$$

Führt man die Reihenentwicklung (18) in (25) und (26) ein, man erhält weiter

$$U_\alpha^0 = \begin{cases} \frac{Gm_\alpha}{r^0} + \frac{Gm_\alpha}{r^0} \sum_{n \geq 1} \left(\left(\frac{r_\alpha^0}{r^0} \right)^n - \delta_{n(1)} \left(\frac{r_\alpha^0}{r_\alpha^0} \right)^2 \right) P_{n0}(\cos(\mathbf{r}_\alpha^0, \mathbf{r}^0)) & \text{für } r_\alpha^0 < r^0 \\ \frac{Gm_\alpha}{r_\alpha^0} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{r_\alpha^0}{r_\alpha^0} \right)^n P_{n0}(\cos(\mathbf{r}_\alpha^0, \mathbf{r}^0)) & \text{für } r_\alpha^0 > r^0 \end{cases}$$

bzw.

$$U_\alpha^c = \frac{Gm_\alpha}{(1+q)r_\alpha^c} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{r_\alpha^c}{r_\alpha^c} \right)^n (1 - (-q)^{n-1}) P_{n(0)}(\cos(\mathbf{r}_\alpha^c, \mathbf{r}^c)) \quad \text{für } r_\alpha^c > r^c,$$

wobei $\delta_{n(1)}$ für das Kronecker-Symbol steht.

Mit der Hilfe des Additionstheorems der Kugelflächenfunktionen (19) lassen sich die Kraftfunktionen U_α^0 und U_α^c in Form einer Funktion der Kugelkoordinaten (r, θ, λ) des zur Untersuchung anstehenden Körpers und $(r_\alpha, \theta_\alpha, \lambda_\alpha)$ des störenden Körpers außerhalb des Zwei-Körper-Systems ausdrücken, wie im Falle der Funktionen U_0^0 und U_0^c , siehe Schneider/Cui [64].

1.5 Darstellungen in Hill-Variablen

Die Hill-Variablen $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := (r, u, \Omega; \dot{r}, G, H)$ als die Bahnbewegung beschreibende kanonische Variablen sind folgendermaßen definiert:

r ... der Radiusvektor $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

u ... das Argument der Breite $\cos u = \mathbf{s} \cdot \mathbf{N}, \sin u = \mathbf{s} \cdot \mathbf{W}$

Ω ... die Länge des aufsteigenden Knotens $\cos \Omega = \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}_1, \sin \Omega = \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}_2$

$\dot{r}$... die radiale Geschwindigkeit $\dot{r} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}$

G ... der „Drehimpuls“, der Absolutwert des Drehimpulsvektors $G = |\mathbf{G}|, \mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

H ... die Polkomponente des Drehimpulsvektors $H = \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_3$

wobei $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r$ der radiale Einheitsvektor, $\mathbf{n} = \mathbf{G}/G$ der zur Bahnebene normale Einheitsvektor und $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}$ der komplettierende und innerhalb der Bahnebene liegende Einheitsvektor sind. Zusammen bilden sie das Dreiein des *Gauß'schen Bahnkoordinatensystems*. $\mathbf{N} = \mathbf{b}_3 \times \mathbf{n}$ und $\mathbf{W} = \mathbf{n} \times \mathbf{N}$ sind zwei zueinander senkrechte Einheitsvektoren innerhalb der Bahnebene und $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ sind die drei Basisvektoren des Kartesischen Koordinatensystems.

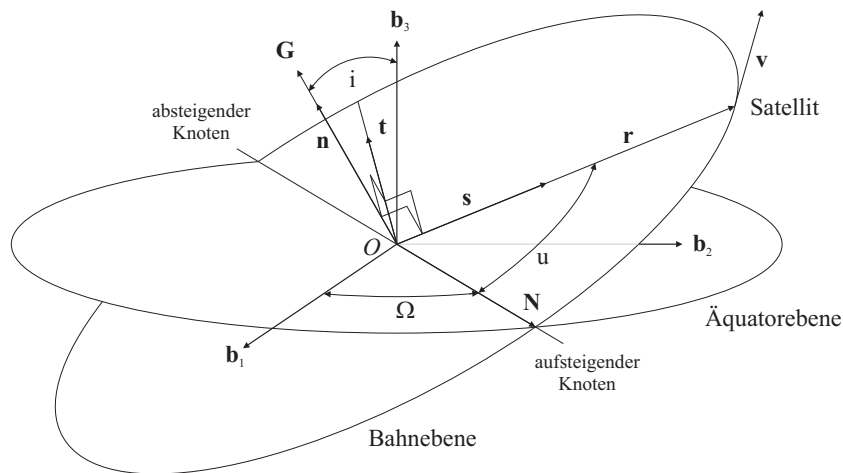


Abb. 2: Gauß'sches Bahnkoordinatensystem und Hill-Variablen

Aus der o. g. Definition ist ersichtlich, dass alle sechs Hill-Variablen Funktionen der Positions- und Geschwindigkeitskomponenten sind. Umgekehrt lassen sich diese wie folgt als Funktionen der Hill-Variablen ausdrücken ($x_j = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_j, v_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_j, j = 1, 2, 3$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix} + \frac{G}{r} \begin{pmatrix} -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i \\ -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i \\ \cos u \sin i \end{pmatrix},$$

wobei die Inklination i von den Variablen G und H abhängt

$$\cos i = \frac{H}{G}.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{r}}, & \frac{d\dot{r}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial r} + f_1^g, \\
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial G} - \frac{r}{G} \cot i \sin u f_3^g, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial u} + r f_2^g, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial H} + \frac{r}{G} \frac{1}{\sin i} \sin u f_3^g, & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Omega} + r (\cos i f_2^g - \sin i \cos u f_3^g)
\end{aligned}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$F = \frac{1}{2}v^2 - V = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - V,$$

wobei f_1^g , f_2^g , f_3^g für die Komponenten der auf die Einheitsmasse wirkenden nicht-gravitativen Kraft bzgl. des Gauß'schen Koordinatensystems $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ stehen und V die gravitativen Kräfte erfasst.

Die Darstellung des Geopotentials in Hill-Variablen ist bei Kaula [26] (Formel (3.61)) angegeben. Die Kugelflächenfunktionen können folgendermaßen in Hill-Variablen formuliert werden:

$$\begin{aligned}
P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda &= \begin{cases} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \cos((n-2p)u + m\Omega) & (n-m \text{ gerade}) \\ \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sin((n-2p)u + m\Omega) & (n-m \text{ ungerade}) \end{cases} \quad (0 \leq m \leq n), \\
P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda &= \begin{cases} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sin((n-2p)u + m\Omega) & (n-m \text{ gerade}) \\ -\sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \cos((n-2p)u + m\Omega) & (n-m \text{ ungerade}) \end{cases} \quad (1 \leq m \leq n).
\end{aligned}$$

Hier ist $F_{nmp}(i)$ die Kaula'sche Inklinationsfunktion. Eine eingehende Untersuchung über die Eigenschaften dieser Inklinationsfunktionen in in Cui [6] gegeben.

Werden sie in (24) eingeführt, dann ergibt sich die Darstellung des Gravitationspotentials eines um die Polachse $\mathbf{b}_3$ rotierenden starren Körpers in Hill-Variablen, die ihrerseits festgelegt sind durch das Massenzentrum und die Drehachse des betrachteten Körpers:

$$\begin{aligned}
U^K &= \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) + \right. \\
&\quad + 2 \sum_{k \geq 2} \sum_p^{(g)} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)0} F_{(k+2p)0p}(i) \cos ku + 2 \sum_{k \geq 1} \sum_p^{(u)} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)0} F_{(k+2p)0p}(i) \sin ku + \\
&\quad + \sum_{m \geq 1} \sum_k^{(g)} \left(\sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)m} F_{(k+2p)mp}(i) \cos \alpha_{km} + \sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} s_{(k+2p)m} F_{(k+2p)mp}(i) \sin \alpha_{km} \right) + \\
&\quad \left. + \sum_{m \geq 1} \sum_k^{(u)} \left(\sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)m} F_{(k+2p)mp}(i) \sin \alpha_{km} - \sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} s_{(k+2p)m} F_{(k+2p)mp}(i) \cos \alpha_{km} \right) \right\}
\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha_{km} = ku + m(\Omega - \Theta),$$

wobei die Summationen $\sum_{k \geq 2}^{(g)}$ für gerade k , $\sum_{k \geq 1}^{(u)}$ für ungerade k , $\sum_{m \geq 1} \sum_k^{(g)}$ für gerade $m+k$ und $\sum_{m \geq 1} \sum_k^{(u)}$ für ungerade $m+k$ durchgeführt werden.

Der Laufbereich vom Summationsindex p lässt sich durch die Bedingungen

$$0 \leq p \leq k+2p \quad \text{und} \quad k+2p \geq m$$

eingrenzen.

2 Hauptprobleme in der Bahntheorie und Lösungsstrategie für das erweiterte Zwei-Körper-Problem

2.1 Allgemeine Form der Bewegungsgleichungen

Formel (16) gibt eine allgemeine Form der Bewegungsgleichungen für das erweiterte Zwei-Körper-Problem an. Unter Weglassen des Hochindex B , der auf das Bezugssystem hinweist, erhält man drei Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) =: \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \quad (27)$$

für den Ortsvektor $\mathbf{r}$ im entsprechenden Bezugssystem oder sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) =: \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \end{aligned} \quad (28)$$

für Orts- und Geschwindigkeitsvektor $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ mit der Abkürzung

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = m \nabla_{\mathbf{r}} \left(U_0(m_0; \mathbf{r}; t) + \sum_{\alpha} U_{\alpha}(m_{\alpha}; \mathbf{r}; t) \right)$$

für die gravitativen Kräfte. In der Himmelsmechanik dominieren die gravitativen Kräfte die nicht-gravitativen Kräfte

$$|\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)| \gg |\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)|.$$

Das Gleichungssystem (28) lässt sich weiter umformen in ein System aus sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung für sechs unbekannte Funktionen $(y_1, y_2, \dots, y_6)$

$$\frac{dy_i}{dt} = \phi(y_1, y_2, \dots, y_6; t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (29)$$

durch eine umkehrbare Transformation

$$(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{y} := (y_1, y_2, \dots, y_6).$$

In speziellen Fällen nimmt das System (29) eine kanonische Form an

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + Z_i^q, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Z_i^p, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (30)$$

wobei

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + V(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$$

die Hamilton-Funktion ist mit der kinetischen Energie $T(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ bzw. potentiellen Energie $V(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$; $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sind gegenseitig konjugierte kanonische Variablen. Die Variablen $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ und $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sind durch eine kanonische Transformation verbunden.

Das Gleichungssystem (27) stellt eine allgemeine Form der Bewegungsgleichung für das erweiterte Zwei-Körper-Problem in beiden o.g. Bezugssystemen dar; (28), (29) und (30) ergeben mathematisch äquivalente Formen. Die Lösung irgend eines dieser Systeme beschreibt den Bewegungsablauf; eine Näherungslösung beschreibt den Bewegungsablauf näherungsweise. Ist die Lösung der o.g. Systeme durch einen Satz von Funktionen der Zeit $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) gegeben, dann gibt ein Satz der Funktionen $\bar{y}_i(t)$ eine Näherungslösung k ter Ordnung der Systeme an, wenn gilt

$$|y_i(t) - \bar{y}_i(t)| = O(\varepsilon^{k+1}), \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

wobei ε der im Problem auftretende Kleinheitsparameter ist. Für die Bahnbewegungen ist die Keplerkraft der dominierende Anteil an der Gesamtkraft. Der Kleinheitsparameter ε ist definiert als das Verhältnis des sonstigen Kraftanteils zur Keplerkraft. Für das Potential der Erdgravitation sind die harmonischen Koeffizienten $c_{2(0)} \approx O(10^{-3})$, $(c_{nm}, s_{nm}) \approx O(10^{-6})$ ($n > 2$ oder $m \neq 0$). So wird meistens $c_{2(0)}$ für die Beschreibung der Bewegung von Erdsatelliten als Hauptkleinheitsparameter verwendet, d.h., $\varepsilon = c_{2(0)}$, wobei $(c_{nm}, s_{nm}) = O(10^{-6})$ als Größen 2. Ordnung betrachtet werden. Für extrem hoch bzw. niedrig fliegende Satelliten können die Mond- und Planetengravitation bzw. der Luftwiderstand überwiegen.

2.2 Hauptproblem

Es sei ein Teil $\mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t)$ der im Problem auftretenden gravitativen Kräfte dominierend über alle anderen Kräfte. Dann lässt sich die Gesamtkraft zerlegen in

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t) + \mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$$

mit

$$\mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t),$$

so dass

$$|\mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t)| \gg |\mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)|. \quad (31)$$

Damit wandelt sich die Bewegungsgleichung (27) in

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t) + && \text{Hauptteil der gravitativen Kräfte} \\ &+ \mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t) + && \text{Restteil der gravitativen Kräfte} \\ &+ \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) && \text{Resultierende der nicht-gravitativen Kräfte.} \end{aligned}$$

Dies ermöglicht, das vereinfachte Bewegungsproblem (*Hauptproblem*)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_h}{dt^2} = \mathbf{G}_H(\mathbf{r}_h, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_h(t)$$

als eine Näherung des aktuellen Bewegungsproblems (27) einzuführen und eine Bestimmungsgleichung für den Unterschied

$$\Delta(t) := \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_h(t)$$

der Lösungen der beiden Bewegungsgleichungen anzugeben. Dazu wird die Differenz der Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) - \mathbf{G}_H(\mathbf{r}_h, t) = \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t) - \mathbf{G}_H(\mathbf{r}_h, t) + \mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$$

gebildet.¹ Entwickelt man jetzt die von $\mathbf{r}(t)$ abhängigen Kraftkomponenten um die Lösung $\mathbf{r}_h(t)$ in eine Taylorreihe und bricht nach den linearen Termen ab, so erhält man wegen

$$\mathbf{G}_H(\mathbf{r}_h + \Delta, t) = \mathbf{G}_H(\mathbf{r}_h, t) + \Delta \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t)]_h + \dots,$$

$$\mathbf{G}_R(\mathbf{r}_h + \Delta, t) = \mathbf{G}_R(\mathbf{r}_h, t) + \Delta \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t)]_h + \dots,$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}_h + \Delta, \dot{\mathbf{r}}_h + \dot{\Delta}; t) = \mathbf{Z}(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h; t) + \Delta \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)]_h + \dot{\Delta} \cdot [\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)]_h + \dots,$$

also die lineare Bestimmungsgleichung für die Abweichung

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \Delta}{dt^2} &= \dot{\Delta} \cdot [\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)]_h + \Delta \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} (\mathbf{G}_H(\mathbf{r}, t) + \mathbf{G}_R(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t))]_h + && \text{lineare Terme} \\ &+ \mathbf{G}_R(\mathbf{r}_h, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h; t) && \text{freie Terme.} \end{aligned} \quad (32)$$

Aus dieser linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung ist die Abweichung $\Delta(t)$ bestimmbar.

Anmerkung: Bei Anfangswertdeterminierung ist dies gleichbedeutend mit der Lösung der *Volterra'schen Integralgleichung* (Schneider[60])

$$\Delta(t) = \tilde{\Delta}(t) + \int_{t_0}^t (t - \tau) \left\{ \dot{\Delta} \cdot [\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; \tau)]_h + \Delta \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} (\mathbf{G}(\mathbf{r}, \tau) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; \tau))]_h + \mathbf{G}_R(\mathbf{r}_h, \tau) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h; \tau) \right\} d\tau$$

mit

$$\tilde{\Delta}(t) := \tilde{\Delta}_0 + \dot{\tilde{\Delta}}_0(t - t_0), \quad \tilde{\Delta}_0, \dot{\tilde{\Delta}}_0 \text{ Integrationskonstanten.}$$

Im Hamilton-Formalismus lässt sich dementsprechend eine Zerlegung der Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = H_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) + H_R(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$$

¹der Index h bedeutet eine Ersetzung der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ durch $(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h)$

mit

$$|H_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)| \gg |H_R(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)|$$

eingeführen. Damit ist ein Hauptproblem

$$\frac{d\mathbf{q}_h}{dt} = \frac{\partial H_H}{\partial \mathbf{p}} \Big|_h, \quad \frac{d\mathbf{p}_h}{dt} = -\frac{\partial H_H}{\partial \mathbf{q}} \Big|_h$$

zur Lösung $(\mathbf{q}_h(t), \mathbf{p}_h(t))$ definiert. Entsprechende Linearisierung führt zu

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{r}}, \quad (33)$$

dem System linearer Differentialgleichungen zur Bestimmung bzw. zur Schätzung der Abweichung

$$\mathbf{z} = (\tilde{\mathbf{q}}(t), \tilde{\mathbf{p}}(t)) = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_h(t), \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_h(t))$$

der aktuellen Bewegung $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ von der Lösung $(\mathbf{q}_h(t), \mathbf{p}_h(t))$ des Hauptproblems. Darin ist $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion $H_H = H_H(\mathbf{q}_h, \mathbf{p}_h)$ als Elemente; $\tilde{\mathbf{r}}$ ist eine Spaltenmatrix und enthält als Elemente die partiellen Ableitungen von H_R bezüglich der Variablen $(\mathbf{q}_h, \mathbf{p}_h)$.²

Es liegt damit die folgende Lösungsstrategie für die Behandlung des aktuellen Bewegungsproblems in der klassischen Himmelsmechanik nahe:

1. Definition und ausreichend genaue Lösung eines *Hauptproblems*, das einen dominierenden Anteil der Kräfte erfasst,
2. Formulierung und Lösung der Gleichung für die Abweichung $\Delta(t)$ bzw. $\mathbf{z}(t)$,
3. Zusammensetzung und Qualitätsbeurteilung der Teillösungen $\mathbf{r}_h(t)$, $\Delta(t)$ oder $(\mathbf{q}_h(t), \mathbf{p}_h(t))$, $\mathbf{z}(t)$ zur Lösung $\mathbf{r}(t)$ oder $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ des aktuellen Bewegungsproblems.

Dazu seien einige *Anmerkungen* gemacht:

ad 1.

Die Schnittstelle

$$\text{Hauptproblem} \Leftrightarrow \text{aktuelles Bewegungsproblem}$$

kann unter der Bedingung (31) unterschiedlich gelegt werden, beispielsweise in der Gestalt

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \underbrace{\mathbf{K}_{\text{Kep}} = m \nabla_{\mathbf{r}} \frac{GM_{\oplus}}{r} =: m \nabla_{\mathbf{r}} U_{G,00}}_{\text{Keplerkraft}} \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)}_{\text{Gesamtkraft}}, \\ \text{b)} \quad & \underbrace{\mathbf{K}_{\text{kl}} = m \nabla_{\mathbf{r}} (U_{G,00} + U_{G,20})}_{\text{Keplerkraft} + \text{Abplattung}} \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)}_{\text{Gesamtkraft}}. \end{aligned}$$

Ein wichtiges Kriterium bei der Festlegung der Schnittstelle und damit für die Definition des Hauptproblems ist die ausreichend genaue oder strenge Lösbarkeit des Hauptproblems. Im Fall

- a) ist das Hauptproblem exakt lösbar, da das *Kepler-Problem* integrabel ist,
- b) des *klassischen Hauptproblems* liegt keine Integrabilität mehr vor.

Weitere Beispiele werden in folgenden Abschnitten diskutiert.

ad 2.

Darauf wird nach der Behandlung des Hauptproblems eingegangen werden.

Für die linearen Bestimmungsgleichungen (32) für die Abweichung $\Delta(t)$ liegt keine allgemeine Lösung vor. Die Differentialgleichung (33) zur Bestimmung der Abweichung $\mathbf{z}(t)$ hat jedoch die allgemeine Lösung (Bronstein/Semendjajew [2], Hiller [18])

²Werden die nicht-gravitativen Kräfte berücksichtigt, dann enthalten die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\tilde{\mathbf{r}}$ darüber hinaus auch die partiellen Ableitungen Z_i^q und Z_i^p - dies wird in dieser Arbeit jedoch nicht behandelt.

$$\mathbf{z} = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \mathbf{c} + e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \tilde{\mathbf{r}}(\tau) d\tau = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \tilde{\mathbf{r}}(\tau) d\tau. \quad (34)$$

In (34) ist der erste Term die allgemeine Lösung des zugeordneten homogenen Systems $d\mathbf{z}/dt = \mathbf{A}\mathbf{z}$.

$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} = (\phi_{kj})$ ist die *Fundamentalmatrix* des Systems; die Spaltenmatrix $\mathbf{c}$ enthält die frei wählbaren Integrationskonstanten. Der zweite Term stellt eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems dar. Ersichtlich gilt $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{c}$.

ad 3.

Eine Beurteilung der erzielten Lösungen des Hauptproblems wie des aktuell gestellten Bewegungsproblems kann beispielsweise durch *Abschätzungstheoreme* erfolgen. Darauf soll ebenfalls erst nach der Ausführung der ersten beiden Schritte näher eingegangen werden.

Zur Abschätzung der Lösung des Gleichungssystems (33) steht u. a. das *Theorem von Kamke* (s. Abschnitt 5.4.1) zur Verfügung:

Gibt es zwei Konstanten $M > 0$ und $N > 0$ so dass

$$\left\| \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right\| \leq M \|\mathbf{z}\| + N$$

für $t_0 \leq t \leq T < \infty$ gilt, dann gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{z}(t_0)\| e^{M(t-t_0)} + \frac{N}{M} (e^{M(t-t_0)} - 1). \quad (35)$$

Aus dem Theorem ist ersichtlich, dass der Absolutwert des unbekannten Vektors von zwei Faktoren abhängt; einerseits von den Anfangswerten $\|\mathbf{z}(t_0)\|$ und andererseits vom Zeitablauf $(t - t_0)$. Das bedeutet, dass die Abweichung der Lösung des Hauptproblems eines Bewegungsproblems von der aktuellen Bewegung nicht schneller als eine Exponentialfunktion des Zeitablaufs wächst.

Diese Abschätzung ist einerseits etwas zu pessimistisch; andererseits besagt und bringt sie daher nicht viel für die praktische Anwendung.

Bei der Beweisführung des Kamke-Theorems (35) wurde die allgemeine Lösung (34) des Systems (33) nicht genutzt. Wir werden von der Lösung (34) ausgehend eine alternative Abschätzung durchführen. Mit Hilfe der bekannten Theorie zur Abschätzung der Normen von Matrizen erhält man aus (34)

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\Phi(t)\| \|\Phi(t_0)\|^{-1} \|\mathbf{c}\| + \|\Phi(t)\| \int_{t_0}^t \|\Phi(\tau)\|^{-1} \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau, \quad (36)$$

worin $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}$, $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}$, $\|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| = \sqrt{\tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{r}}}$ für die Normen der Spaltenmatrizen $\mathbf{z}$, $\mathbf{c}$ und $\tilde{\mathbf{r}}(\tau)$ stehen. $\|\Phi(t)\|$ ist die Norm der quadratischen Fundamentalmatrix. Sie ist gleich der zugeordneten Determinante der Matrix und wird *Wronski-Determinante* genannt.

Die zeitliche Entwicklung der Determinante ist durch die Liouville-Formel

$$\|\Phi(t)\| = \|\Phi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma}$$

gegeben, wobei $\text{tr} \mathbf{A}$ für die Spur der Matrix $\mathbf{A}$ steht. Einführung dieser Spur in (36) ergibt

$$\|\mathbf{z}\| \leq e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \|\mathbf{c}\| + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau \leq e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \|\mathbf{c}\| + \int_{t_0}^t e^{\max_{t_0 \leq \tau \leq t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma \right)} \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau.$$

Mit

$$M = \max_{t_0 \leq \sigma \leq t} (\text{tr} \mathbf{A}(\sigma))$$

ergibt sich

$$\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma \leq M(t - t_0) \quad \max_{t_0 \leq \tau \leq t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma \right) \leq \max_{t_0 \leq \tau \leq t} (M(t - \tau)) = \begin{cases} M(t - t_0) & M \geq 0 \\ 0 & M \leq 0 \end{cases}$$

und daher

$$e^{\max_{t_0 \leq \tau \leq t} \left(\int_{\tau}^t \text{tr} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma \right)} = \begin{cases} e^{M(t-t_0)} & M \geq 0 \\ 1 & M \leq 0 \end{cases}.$$

Daraus schließt man

$$\|\mathbf{z}\| \leq e^{M(t-t_0)} \|\mathbf{c}\| + \int_{t_0}^t \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau \begin{cases} e^{M(t-t_0)} & M \geq 0 \\ 1 & M \leq 0 \end{cases}.$$

Dieses Ergebnis lässt sich zusammenfassen durch ein

Theorem: Für die Lösung des Systems linearer Differentialgleichungen (33) gilt die folgende Abschätzung:

- für $M \geq 0$

$$\|\mathbf{z}\| \leq e^{M(t-t_0)} \left(\|\mathbf{c}\| + \int_{t_0}^t \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau \right), \quad (37)$$

- für $M \leq 0$

$$\|\mathbf{z}\| \leq e^{M(t-t_0)} \|\mathbf{c}\| + \int_{t_0}^t \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau, \quad (38)$$

- und insbesondere für $M = 0$

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{c}\| + \int_{t_0}^t \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau, \quad (39)$$

wobei M das Maximum der Spur $\text{tr} \mathbf{A}(\tau)$ innerhalb des Intervalls $(t_0 \leq \tau \leq t)$ ist.

Im Vergleich mit dem Kamke-Theorem hat das neue Abschätzungstheorem mehr konkrete Informationen des Systems linearer Differentialgleichungen berücksichtigt und daher zu mehreren Aussagen geführt.

Mit dem neuen Abschätzungstheorem wurden drei Faktoren, welche zur zeitlichen Entwicklung beitragen, festgestellt:

- die Matrix $\mathbf{A}$ des linearen Systems (über deren Spur $\text{tr} \mathbf{A}(t)$),
- der freie Term $\|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\|$ des Gleichungssystems (über das bestimmte Integral $\int_{t_0}^t \|\tilde{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau$),
- die Anfangsbedingung $\mathbf{c}$.

Aus (37) bis (39) sieht man, dass der Anfangswert $\mathbf{c}$ zu einer zeitlich exponentiellen Entwicklung beiträgt, die für $M > 0$ mit der Zeit anwächst, für $M < 0$ sich abschwächt und für $M = 0$ konstant bleibt.

Es ist ersichtlich, dass sich ein Hauptproblem in der klassischen Theorie in unterschiedlicher Weise definieren lässt. Es kann sowohl integrabel als auch nicht-integrabel sein. Wenn ein Hauptproblem integrabel ist, dann braucht man das Problem nicht mehr zu integrieren, weil in diesem Fall eine ausreichende Anzahl unabhängiger Integrale bereits bekannt ist. Zweitens, wenn der Unterschied zwischen dem integrablen Hauptproblem und dem aktuellen Bewegungsproblem gewisse Bedingungen (Kleinheit und Periodizität) erfüllt, dann lässt sich dieser Unterschied durch eine fast-identische Transformation weiter verringern.

So entsteht der Begriff *integrables Näherungssystem eines gegebenen kanonischen Systems*; gemeint ist eine Methode zur schrittweisen Konstruktion von integrablen Näherungssystem. Damit ergibt sich die folgende von der klassischen Theorie abweichende Lösungsstrategie in drei Schritten für die kanonischen Gleichungen:

1. *Definition eines initialen integrablen Näherungssystems des gegebenen kanonischen Systems:* Zerlegung der Hamilton-Funktion in einen größenordnungsmäßig dominierenden, integrablen Anteil und einen kleinen periodischen Restteil, vorausgesetzt, dass eine derartige Zerlegung möglich ist. Der erste Anteil stellt dann die Hamilton-Funktion eines integrablen Näherungssystems des aktuellen Bewegungsproblems dar.
2. *Sukzessive Konstruktion von integrablen Näherungssystemen höherer Ordnung:* Elimination des Hauptanteils des periodischen Restteils durch eine fast-identische kanonische Transformation. Zerlegung der transformierten Hamilton-Funktion wie beim Schritt 1. Dadurch ergibt sich ein integrables Näherungssystem mit höherem Annäherungsgrad in einem neuen Phasenraum. Wiederholung, bis der verbleibende periodische Restanteil ausreichend klein ist oder eine derartige Zerlegung nicht mehr möglich ist.
3. *Transformation der Lösung des integrablen Näherungssystems in den originalen Phasenraum:* Die jeweils durch den Schritt 2 erhaltenen integrablen Näherungssysteme lassen sich als ein Hauptproblem des aktuellen Bewegungsproblems definieren. Dessen allgemeine Lösung kann dann direkt als eine allgemeine Näherungslösung des aktuellen Bewegungsproblems im *transformierten Phasenraum* übernommen werden. Was zu tun verbleibt, ist nur eine Transformation der Lösung zurück in den originalen Phasenraum.

3 Lösbarkeit des Hauptproblems

3.1 Integrabilität des Hauptproblems

Die Frage nach der Existenz ausreichend vieler Bewegungsintegrale beantwortet sich wie folgt:

- a) Im Sonderfall des *Kepler-Problems* liegen ausreichend viele Bewegungsintegrale vor, das Bewegungsproblem ist *integrabel* (Schneider/Cui [64]). Es ist als *Stäckel-System* (Schneider [60], [63]) integrierbar durch Separation der Variablen.
- b) Das *klassische Hauptproblem* ist nicht-integrabel. Das wurde mit Hilfe des *Ziglin'schen Nichtintegrabilitätstheorems* (Schneider/Cui [64]) und einem von Yoshida angegebenen Kriterium bewiesen (Irigoyen/Simo [21], Schneider [63]). Ob sich die Beweisführung auf den Fall des axialsymmetrischen Gravitationsfeldes übertragen lässt, ist eine offene Frage.
- c) Das *verallgemeinerte Hauptproblem*, in dem auch nicht-zonale Harmonische vorhanden sind, lässt nach bisheriger Kenntnis nur ein Bewegungsintegral zu, das *Jacobi-Integral* (Schneider/Cui [64]). Dieses ist eine Kombination aus Erhaltung der Gesamtenergie und partieller Erhaltung des Bahndrehimpulses, in die das Jacobi-Integral im axialsymmetrischen Fall zerfällt (Schneider [63]).

Zusammenfassend lässt sich demnach sagen:

Tab. 1: Bewegungsprobleme und bekannte Bewegungsintegrale

Bewegungsproblem	bekannte Bewegungsintegrale
Kepler-Problem	Erhaltung des Bahndrehimpulses Erhaltung der Gesamtenergie Laplace-Integral Kepler-Integral (Kepler-Gleichung)
klassisches Hauptproblem und axialsymmetrisches Feld	partielle Bahndrehimpulserhaltung Erhaltung der Gesamtenergie
verallgemeinertes Hauptproblem	Jacobi-Integral

3.2 Integrale Näherungssysteme des Hauptproblems

Bewegungsprobleme, die (im Hinblick auf die Kräfte) Näherungen des verallgemeinerten Hauptproblems und überdies integrabel sind, sind neben dem Kepler-Problem, das *Vinti-Problem* (Schneider [63]) und das *Cui-Problem* (Cui [6]). Die beiden ersteren gehören zur Klasse der *Stäckel-Systeme*. Das Vinti-Problem kann als *Zwei-Zentren-Problem* interpretiert werden (Stumpff [70], Schneider [63]). Welche integrablen Näherungssysteme des verallgemeinerten Hauptproblems die Integrabilitäts-/Separationstheoreme von Cui (Schneider/Cui [64]) zulassen, wird im Folgenden ausführlich besprochen werden.

3.2.1 Kleinheitsparameter und Ordnung einer Bahntheorie

Nach Meyer [44] bietet sich für das hier interessierende Hauptproblem der Theorie der Satellitenbahnen (um die Erde) folgende *Definition des Kleinheitsparameters* - Verhältnis des Störpotentials R zu dem Potential der Kepler-Kraft - an:

$$\varepsilon := \frac{R}{G(M_{\oplus} + m_S)/r} \approx \frac{G(M_{\oplus} + m_S)}{G(M_{\oplus} + m_S)/a} \frac{a_{\oplus}^l}{a^{l+1}} \frac{c_{lm}}{c_{00}} \approx \left(\frac{a_{\oplus}}{a}\right)^l c_{lm}.$$

Für die *Erde als Zentralkörper* erhält man danach wegen $c_{00} = 1$, $O(c_{20}) = 10^{-3}$ und $O(c_{lm}, s_{lm}) \leq 10^{-6}$ als brauchbaren Kleinheitsparameter

$$\varepsilon := c_{20}.$$

Unter der Ordnung k der Lösung eines Bewegungsproblems soll dann die k . Potenz des Kleinheitsparameters verstanden werden in dem Sinne, dass gilt

$$O(x(t) - \tilde{x}(t)) = O(\varepsilon^{k+1}),$$

d. h., dass die Abweichung der genäherten Lösung $\tilde{x}(t)$ von der strengen Lösung $x(t)$ von der Größenordnung $O(\varepsilon^{k+1})$ ist. Dieser Begriff wird dann sinngemäß auf die Bahntheorie selbst übertragen.

3.2.2 Definition eines integrablen Näherungssystems k . Ordnung

Betrachtet seien zwei kanonische Systeme mit je n Freiheitsgraden, beschrieben durch die Hamilton-Funktionen

$$H = H(Q, P) \quad Q := \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \quad P := \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \quad (40)$$

und

$$\bar{H} = \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}) \quad \bar{Q} := \{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n\} \quad \bar{P} := \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n\}. \quad (41)$$

Das System (41) sei integrabel mit der aus $2n$ unabhängigen Bewegungsgleichungen abgeleiteten allgemeinen Lösung

$$\bar{q}_k = \bar{q}_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t), \quad \bar{p}_k = \bar{p}_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t).$$

Die Größen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})$ sind Integrationskonstanten.

Definition (1): Wenn für die Lösungen der kanonischen Systeme (40) und (41) innerhalb des Intervalls $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$q_k(t) - \bar{q}_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad p_k(t) - \bar{p}_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t) = O(\varepsilon^{k+1})$$

gilt, worin ε ein charakterisierender *Kleinheitsparameter* ist, dann stellen beide Systeme gegenseitig Näherungssysteme k . Ordnung voneinander dar; insbesondere das System (41) ein integrables Näherungssystem k . Ordnung des kanonischen Systems (40) im o. g. Intervall der unabhängigen Variable t . Dabei wird die Differenz

$$R(\bar{Q}, \bar{P}) := H(Q, P)|_{Q=\bar{Q}, P=\bar{P}} - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P})$$

das *Residuum* der Annäherung genannt.

Aus der Definition ist ersichtlich, dass die allgemeine Lösung eines integrablen Näherungssystems k . Ordnung eines gegebenen kanonischen Systems unmittelbar eine allgemeine Näherungslösung k . Ordnung des gegebenen Systems angibt. Andererseits, wenn es sich um ein integrables System handelt, dann sind dessen Integrale in ausreichender Anzahl bzw. die allgemeine Lösung bereits bekannt.

So wandelt sich die Aufgabe, ein kanonisches System näherungsweise zu lösen, zur Suche und Findung eines integrablen Näherungssystems gewisser Ordnung des gegebenen Systems. Das ist die methodische Bedeutung des Begriffs vom integrablen Näherungssystem eines kanonischen Systems.

Theoretisch ist die Existenz eines integrablen Näherungssystems für ein beliebig gegebenes kanonisches System nicht gesichert. Ausgehend vom Begriff des integrablen Näherungssystems k . Ordnung lässt sich die Integrabilität in einem verallgemeinerten Sinn definieren durch:

Definition (2): Wenn es zu dem gegebenen System ein Näherungssystem k . Ordnung, aber kein derartiges System mit höherer Näherungsordnung gibt, dann soll das gegebene System als *von k . Ordnung integrabel* genannt werden.

Definition (3): Wenn es zu dem gegebenen System ein integrables Näherungssystem beliebiger Ordnung gibt, dann heiße das System *voll integrabel*.

Ein im verallgemeinerten Sinne integrables System ist praktisch integrabel, d. h., es liegen allgemeine Lösungen mit beliebig geforderten Genauigkeiten zu dem System vor. Der Unterschied zwischen der Integrabilität im o. g. verallgemeinerten Sinne und der Integrabilität im konventionellen Sinne liegt nur darin, dass letztere einen Grenzfall der ersteren darstellt.

Satz(1): Ein ein integrables System k . Ordnung besitzendes System hat allgemeine Näherungslösungen bis zur k . Ordnung.

Unter den genannten Bedingungen gilt

Satz (2): Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System (41) ein integrables Näherungssystem k . Ordnung des kanonischen System (40) ist, lautet

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} R(\bar{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t), \bar{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}; t)) dt = O(\varepsilon^{k+1}). \quad (42)$$

Beweis: Entwickelt man das System (40) um die Lösung des integrablen Systems (41) in eine Taylorreihe und bricht nach den linearen Termen ab, subtrahiert sodann die kanonischen Bewegungsgleichungen der Systeme (40) und (41), so erhält man für die Variablen $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{2n}\}$ mit

$$z_{2k-1} = q_k(t) - \bar{q}_k, \quad z_{2k} = p_k(t) - \bar{p}_k \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n$$

die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}z + \tilde{\mathbf{r}},$$

worin $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})^T$, $\tilde{\mathbf{r}}$ Spaltenmatrizen und $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix sind. Letztere enthält als Elemente die partiellen Ableitungen von $R(\bar{Q}, \bar{P})$ bezüglich der Variablen $(\bar{Q}, \bar{P})$. Elemente von $\mathbf{A}$ sind also die zweiten partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion $\bar{H}(\bar{Q}, \bar{P})$. Die lineare Differentialgleichung zur Bestimmung der korrespondierenden Bahnpunkte hat die allgemeine Lösung (Hiller [18], Bronstein/Semendjajew [2])

$$\mathbf{z} = e^{\int \mathbf{A} dt} \mathbf{c} + e^{\int \mathbf{A} dt} \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \tilde{\mathbf{r}} dt.$$

Darin ist der erste Term die allgemeine Lösung des homogenen Systems $d\mathbf{z}/dt = \mathbf{A}\mathbf{z}$ und der zweite Term ist eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems. Die Spaltenmatrix $\mathbf{c}$ enthält die frei wählbaren Integrationskonstanten. $e^{\int \mathbf{A} dt}$ und $e^{-\int \mathbf{A} dt}$ sind quadratische Matrizen.

Zur Abschätzung der Größenordnung von $\mathbf{z}$ berechnet man die Norm $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}$ der Spaltenmatrix $\mathbf{z}$. Man erhält

$$\|\mathbf{z}\| \leq \left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \mathbf{c} \right\| + \left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \tilde{\mathbf{r}} dt \right\|,$$

worin die Norm einer quadratischen Matrix definiert ist durch den Absolutwert ihrer Determinante.

Für den zweiten Term in der Lösungsdarstellung erhält man wegen (42)

$$\left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \int e^{-\int \mathbf{A} dt} \tilde{\mathbf{r}} dt \right\| \leq \left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \int \left\| e^{-\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \|\tilde{\mathbf{r}}\|_{\max} dt = \left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \left\| e^{-\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \int \|\tilde{\mathbf{r}}\|_{\max} dt = O(\varepsilon^{k+1})$$

und, weil das Produkt der Normen $\left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \left\| e^{-\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max}$ beschränkt ist,

$$\|\mathbf{z}\| \leq \left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \|\mathbf{c}\| + \left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \left\| e^{-\int \mathbf{A} dt} \right\|_{\max} \int \|\tilde{\mathbf{r}}\|_{\max} dt.$$

Da $e^{\int \mathbf{A} dt} = O(1)$ nicht klein ist, muss für die frei wählbaren Integrationskonstanten, nach der vorausgesetzten Bedingung des Satzes, $\|\mathbf{c}\| = O(\varepsilon^{k+2})$ gewählt werden. Damit erhält man

$$\left\| e^{\int \mathbf{A} dt} \right\| \|\mathbf{c}\| \leq |t - t_0| O(\varepsilon^{k+2}) = O(\varepsilon^{k+1})$$

und damit

$$\|\mathbf{z}\| = O(\varepsilon^{k+1}), \quad \text{w.z.b.w.}$$

Der Satz (2) bedeutet, dass die allgemeine Lösung eines integrablen Näherungssystems k . Ordnung des gegebenen Systems eine allgemeine (von $2n$ frei wählbaren Integrationskonstanten abhängige) Näherungslösung k . Ordnung dieses Systems darstellt. Dieser Satz wird die Grundlage der zu entwickelnden Lösungsstrategie zur Lösung des Bewegungsproblems (40) bilden. Sie hat das Ziel, ein integrables Näherungssystem hinreichend hoher Ordnung für das aktuelle Bewegungsproblem zu konstruieren.

4 Integrable Formen von Lelgemann und Cui

Da das integrable Cui-System in Hill'schen Variablen formuliert ist, soll das verallgemeinerte Hauptproblem in diesen Variablen aufgeschrieben werden.

4.1 Verallgemeinertes Hauptproblem in Hill-Variablen

Die Bedeutung der Hill-Variablen

$$Q := \{q_1, q_2, q_3\} = \{r, u, \Omega\}, \quad P := \{p_1, p_2, p_3\} = \{\dot{r}, G, H\}$$

ist der Abbildung 2 im Abschnitt 1.5 zu entnehmen. Es ist $r = |\mathbf{r}|$, $\dot{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/r$, $G = h = |\mathbf{h}|$ und $H = h_z$, wobei $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ mit $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)^T$.

In den kanonisch konjugierten Variablen

$$x_i = x_i(\mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad y_i = y_i(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

bestehen die kanonischen Bewegungsgleichungen (Schneider [61])

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$F = F(Q, P; t) = T(Q, P) - (1 + q)V^K(Q, P; t).$$

Darin bezeichnet T die auf die Masseneinheit bezogene kinetische Energie des Satelliten.

Wenn die oben eingeführten Hill-Variablen $\{x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3\} := \{\dot{r}, G, H; r, u, \Omega\}$ verwendet werden, dann lässt sich die Hamilton-Funktion durch

$$F = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - R_0(G, H; r, u, \Omega; t)$$

ausdrücken. Die Anisotropie R_0 des Gravitationspotentials wird in den Hill-Variablen beschrieben durch

$$\begin{aligned} R_0 = & \frac{\mu}{r} \sum_{p \geq 1} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) + 2 \frac{\mu}{r} \sum_{s \geq 1} \sum_{p \geq 0} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2s+2p} c_{(2s+2p)0} F_{(2s+2p)0p}(i) \cos \alpha_{(2s)0} + \\ & + 2 \frac{\mu}{r} \sum_{s \geq 0} \sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2s+1+2p} c_{(2s+1+2p)0} F_{(2s+1+2p)0p}(i) \sin \alpha_{(2s+1)0} + \\ & + \frac{\mu}{r} \sum_{m \geq 1} \sum_k \sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} F_{(k+2p)0p}(i) (\tilde{c}_{(k+2p)m} \cos \alpha_{km} + \tilde{s}_{(k+2p)m} \sin \alpha_{km}) \end{aligned}$$

Darin sind $\tilde{c}_{nm}$ und $\tilde{s}_{nm}$ mittels

$$(\tilde{c}_{nm}, \tilde{s}_{nm}) := \begin{cases} (c_{nm}, s_{nm}) & n+m \text{ gerade} \\ (-s_{nm}, c_{nm}) & n+m \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{für } m > 0$$

definierte zugeordnete harmonische Koeffizienten und

$$\alpha_{km} = ku + m(\Omega - \Theta)$$

ist eine lineare Kombination der Winkelvariablen u, Ω und Θ .

Anmerkung: Die hier gewählte Darstellung der kanonischen Bewegungsgleichungen unterscheidet sich von der in Schneider [60], [61], [62], [63] gewählten durch eine Austauschtransformation und einem daraus resultierenden Vorzeichenwechsel der Hamilton-Funktion wie auch der kinetischen Energie. Diese Darstellung wird gewählt, um Anschluss an frühere Arbeiten von Cui zu haben.

Der in der Darstellung der Hamilton-Funktion auftretende Faktor $1 + q$ berücksichtigt die Mitbewegung des Zentralkörpers eines Zweikörperproblems. Wegen der Kleinheit wird er häufig vernachlässigt.

4.2 Ein als integrables Näherungssystem zur Bahntheorie verwendbares integrales kanonisches System

Eine strenge Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen in den Hill-Variablen hat Cui gefunden, aufbauend auf Vorarbeiten von Lelgemann. Wie in Cui [6] und Schneider/Cui [64] gezeigt, ist ein in den Hill-Variablen $(\dot{r}, G, H, \tilde{T}; r, u, \Omega, \tilde{t})$ dargestelltes kanonisches System mit der Hamilton-Funktion

$$F^* = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{G^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X(G, H) - \Phi(G, H, e^2) - \Psi(G, H, \tilde{t}) + \tilde{T} \quad (43)$$

unter der Bedingung

$$G^2 - 2X(G, H) > 0$$

integrabel. Verwendet werden die Abkürzungen

$$\Gamma = (G^2 - 2X(G, H))^{1/2} = \Gamma(G, H), \quad e^2 = \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \right)^2. \quad (44)$$

Damit lässt sich die Hamilton-Funktion über

$$F^* = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} - \Phi(G, H, e^2) - \Psi(G, H, \tilde{t}) + \tilde{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2}{\Gamma^2} (e^2 - 1) - 2\Phi(G, H, e^2) \right) - (\Psi(G, H, \tilde{t}) - \tilde{T}) \quad (43.a)$$

ausdrücken.

4.2.1 Die ersten Integrale und vollständige Lösung

4.2.1.1 Die ersten Integrale

Das durch (43) angegebene System ist nach den Theoremen über die Integrale von kanonischen Systemen integrierbar. Da die Hamilton-Funktion die generalisierten Koordinaten u und Ω nicht enthält, ergeben sich zwei erste Integrale

$$G = \alpha_2, \quad H = \alpha_3.$$

Aus (43.a) ist ersichtlich, dass die Hamilton-Funktion vom Variablenpaar $(r, \dot{r})$ nur zusammen mit $\Gamma = \Gamma(G, H)$ über die Kombination e^2 abhängt. So erhält man ein weiteres Integral

$$e^2 = \left(\frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right)^2 = \alpha_1. \quad (45)$$

Zudem hängt die Hamilton-Funktion vom Variablenpaar $(\tilde{t}, \tilde{T})$ allein über die letzten zwei Terme ab; es ergibt sich daher

$$\Psi(G, H, \tilde{t}) - T = \alpha_4. \quad (46)$$

Damit liegen 4 erste Integrale des gegebenen Systems vor. Von den Integrationskonstanten sind α_1 , α_2 und α_3 mit dem Bewegungszustand direkt verbunden; jede Wahl von Werten für sie entspricht einem speziellen Bewegungsablauf. Der Wert der Integrationskonstanten α_4 beeinflusst den Bewegungsablauf hingegen nicht.

Nachfolgend werden weitere Integrale formuliert.

4.2.1.2 Das Differential der Hamilton-Funktion und die Differentialgleichungen für Funktionen der kanonischen Variablen

Differentiation von (44) ergibt

$$\begin{aligned} de^2 &= -2 \frac{\Gamma^2}{\mu r^2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right) dr + 2 \frac{\Gamma}{\mu} \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} d\dot{r} + \frac{2}{\Gamma} \left(\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^2 - (1 - e^2) \right) d\Gamma, \\ d\Gamma &= \frac{\partial \Gamma}{\partial G} dG + \frac{\partial \Gamma}{\partial H} dH. \end{aligned} \quad (47)$$

Mit Hilfe von (47) erhält man das Differential der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} dF^* &= -\vartheta \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right) dr + \vartheta \dot{r} d\dot{r} + \left(\vartheta \frac{\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial G} \right) dG + \\ &+ \left(\vartheta \frac{\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial H} \right) dH - \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} + dT \end{aligned} \quad (48)$$

mit der Abkürzung

$$\vartheta = 1 - 2 \frac{\Gamma^2}{\mu^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right). \quad (49)$$

In (48) bezeichnen $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right)$ und $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right)$ partielle Ableitungen der Funktion $\Phi(G, H, e^2)$ unter Festhalten von e^2 .

Mittels (48) sind die partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion nach allen kanonischen Variablen angegeben. Aus ihnen lässt sich die Differentialgleichung für jedwede Funktion der kanonischen Variablen nach der Regel

$$\frac{dl}{dt} = \{l, F^*\} = \sum_k \left(\frac{\partial l}{\partial q_k} \frac{\partial F^*}{\partial p_k} - \frac{\partial l}{\partial p_k} \frac{\partial F^*}{\partial q_k} \right) \quad (50)$$

erstellen.

4.2.1.3 Lösung für $(\tilde{t}, \tilde{T})$; die Verbindung mit (t, T)

Für die Variable $\tilde{t}$ ergibt (50) die Gleichung $\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1$ und damit die allgemeine Lösung

$$\tilde{t} = t + \beta_4$$

mit der Integrationskonstanten β_4 .

Das System (43) stellt ein Ersatzsystem des nicht-autonomen Systems

$$\tilde{F}^* = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{G^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X(G, H) - \Phi(G, H, e^2) - \Psi(G, H, t) \quad (51)$$

dar. Dabei ist t in (51) durch $\tilde{t}$ in (43) ersetzt worden. Um zu gewährleisten, dass sich aus der Lösung des Systems (43) die allgemeine Lösung des Systems (51) ergibt, ist es notwendig, dass die Variable $\tilde{t}$ durch t rückersetzbar ist, d. h.,

$$\tilde{t} = t.$$

Damit ist die Integrationskonstante bestimmt

$$\beta_4 = 0,$$

und man erhält aus (46) schließlich

$$T = \Psi(G, H, t) - \alpha_4. \quad (46.a)$$

4.2.1.4 Lösung für $(r, \dot{r})$; die Bahnkurve und die Bewegung auf der Bahn

Das auf die Variablen $(r, \dot{r})$ bezogene erste Integral (45) lässt sich durch die Bahngleichungen

$$\frac{\Gamma^2}{\mu r} = 1 + e \cos f, \quad \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} = e \sin f \quad \left(p = \frac{\Gamma^2}{\mu} \right) \quad (52)$$

erfüllen. Die erste Gleichung in (52) beschreibt einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt. Es bezeichnet e die Exzentrizität und p den Kegelschnittparameter; zusammen bestimmen sie Form und Größe des Kegelschnittes. Die wahre Anomalie wird durch f symbolisiert; sie identifiziert die Position eines Punktes auf der (Kegelschnitt-)Kurve. Für $f = 0$ erreicht der Radiusvektor seinen kleinsten Wert; dies entspricht dem Perigäum der Bahn.

Beide Gleichungen in (52) definieren die wahre Anomalie und zwar als eine Funktion, neben e , von den Variablen $(r, \dot{r})$ und Γ . Differentiation mit Hilfe von (47) ergibt

$$e^2 df = \frac{\mu}{\Gamma^2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^2 \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} dr + \frac{\Gamma}{\mu} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right) d\dot{r} - \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} + 1 \right) \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} d\Gamma. \quad (53)$$

Aus (53) und (50) erhält man die Differentialgleichung für f

$$\frac{df}{dt} = \{f, F^*\} = \vartheta \frac{\Gamma}{r^2}, \quad (54)$$

deren Lösung ein weiteres Integral in den Variablen $(r, \dot{r})$ ergeben wird. Infolge der ersten Gleichung von (52) enthält die rechte Seite der Gleichung (54) außer Konstanten nur f , so dass die Gleichung zu einer Quadratur führt.

Andererseits ist der Lösungsvorgang der Gleichung für die Fälle $e < 1$, $e = 1$ und $e > 1$ ganz unterschiedlich. Für $e < 1$ führt man durch

$$\frac{\mu r}{\Gamma^2} = \frac{1}{1 - e^2} (1 - e \cos E)$$

die exzentrische Anomalie E ein. Es folgen dann die Umrechnungsformel

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{f}{2}$$

und die differentielle Beziehung

$$df = (1 - e^2)^{-3/2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^2 (1 - e \cos E) dE. \quad (55)$$

Kombination von (54) und (55) ergibt

$$(1 - e \cos E) dE = \vartheta (1 - e^2)^{3/2} \frac{\mu^2}{\Gamma^3} dt.$$

Daraus folgt direkt das Kepler-Integral

$$E - e \sin E = n(t - t^*) := M$$

mit der Abkürzung

$$n = \frac{dM}{dt} = \vartheta (1 - e^2)^{3/2} \frac{\mu^2}{\Gamma^3}, \quad (56)$$

worin t^* als Epoche des Perigäumdurchgangs eine Integrationskonstante ist.

Schließlich ergibt die Kombination von (54) und (56)

$$\frac{d(f - M)}{dt} = \vartheta \left(\frac{\Gamma}{r^2} - (1 - e^2)^{3/2} \frac{\mu^2}{\Gamma^3} \right). \quad (57)$$

4.2.1.5 Lösung für (u, Ω) ; die Drehung der Bahnkurve

Aus (48) erhält man die Differentialgleichungen für u und Ω :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \vartheta \frac{\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial G} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \vartheta \frac{\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial H} \right).\end{aligned}$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \Gamma}{\partial G} f + \left(\frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right) \right) (t - t^*) - \int_{t^*}^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial G} \right) d\tilde{t} + u^*, \\ \Omega &= \frac{\partial \Gamma}{\partial H} f + \left(\frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right) \right) (t - t^*) - \int_{t^*}^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial H} \right) d\tilde{t} + \Omega^*\end{aligned}\tag{58}$$

mit den Integrationskonstanten u^* und Ω^* , welche jeweils dem Wert der entsprechenden Variablen zum Zeitpunkt des Perigäumdurchgangs entsprechen.

Die zweite Gleichung beschreibt die Drehung der Bahnebene im Raum. Die Drehung der Bahnkurve innerhalb der Bahnebene lässt sich durch die zeitliche Änderung des Arguments des Perigäums

$$\omega = u - f$$

beschreiben. Mit Hilfe der ersten Gleichung von (58) erhält man

$$\omega = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1 \right) f + \left(\frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right) \right) (t - t^*) - \int_{t^*}^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial G} \right) d\tilde{t} + u^*.\tag{59}$$

Aus (58) und (59) ist ersichtlich, dass sich die zeitliche Änderung der Variablen u , Ω und ω aus drei Anteilen zusammensetzt. Der Hauptteil ($O(1)$) ist der wahren Anomalie proportional, der zweite Anteil ($O(\Phi)$) ist der Zeit proportional und der dritte Anteil hängt von der Funktion $\Psi(G, H, t)$ ab.

4.2.1.6 Das System (43), das Lelgemann-System und das Kepler-Problem

Setzt man $\Phi(G, H, e^2) = 0$ und $\Psi(G, H, t) = 0$, dann folgt $\vartheta = 1$. Damit erhält man das Lelgemann-System:

$$F^* = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{G^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X(G, H)$$

mit der Lösung

$$M = (1 - e^2)^{3/2} \frac{\mu^2}{\Gamma^3} (t - t^*), \quad u = \frac{\partial \Gamma}{\partial G} f + u^*, \quad \Omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial H} f + \Omega^*, \quad \omega = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1 \right) f + u^*.$$

Wird weiter $X(G, H) = 0$ gesetzt, dann folgt $\Gamma = G$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial H} = 0$. Damit entsteht das Kepler-Problem:

$$F^* = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{G^2}{r^2} - \frac{\mu}{r}$$

mit der Lösung

$$M = (1 - e^2)^{3/2} \frac{\mu^2}{G^3} (t - t^*), \quad u = f + u^*, \quad \Omega = \Omega^*, \quad \omega = u^* = \omega^*.$$

4.2.2 Reihenentwicklung zur elliptischen Bewegung

Reihenentwicklung der Potenz des Radiusvektors

$$\left(\frac{p}{r} \right)^n = \sum_{q=-N}^N X_{nq}(e) \cos qf$$

mit

$$X_{nq}(e) = \left(\frac{e}{2} \right)^2 \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j+q} \binom{2j+q}{j} \left(\frac{e}{2} \right)^{2j} = X_{n(-q)}(e) \quad \text{für } q \geq 0.\tag{60}$$

Für $n \geq 0$ ist $X_{nq}(e)$ ein Polynom des Argumentes e und der Grenze des Summationsindex $N = n$; andernfalls ist $X_{nq}(e)$ eine zu Wurzelfunktionen $(1 - e^2)^{(1/2-n)}$ führende unendliche Potenzreihe von e und $N = \infty$. Als Beispiele werden hier die Funktionen für $n = -1$ und $n = -2$ angegeben:

$$\begin{aligned} X_{(-1)q}(e) &= (-1)^q (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^q, \quad q \geq 0, \\ X_{(-2)q}(e) &= (-1)^q (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + q\sqrt{1 - e^2} \right) \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^q. \end{aligned} \quad (61)$$

Reihenentwicklung der equation of center $(f - M)$ und ihrer Potenzen

$$f - M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(1)}(e) \sin jf \quad (62)$$

mit den Koeffizienten (für $j > 0$)

$$d_j^{(1)}(e) = -\frac{1}{j} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} X_{(-2)j}(e) = (-1)^{j-1} \left(\frac{1}{j} + \sqrt{1 - e^2} \right) \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^j = -d_{(-j)}^{(1)}(e). \quad (63)$$

Rekursionsformeln für die Exzentrizitätsfunktionen

Generelle Rekursionsformeln:

$$X_{(n+m)q}(e) = \frac{1}{2} \sum_p (X_{n(p-q)}(e) + X_{n(p+q)}(e)) X_{mp}(e).$$

Vorwärts- und Rückwärtsrekursion (durch Setzung von $m = 1$ und $m = -1$):

$$X_{(n+1)q}(e) = X_{nq}(e) + \frac{e}{2} (X_{n(q-1)}(e) + X_{n(q+1)}(e))$$

und

$$X_{(n-1)q}(e) = \frac{1}{2} \sum_p (X_{n(p-q)}(e) + X_{n(p+q)}(e)) X_{(-1)p}(e) = \sum_p X_{n(p-q)}(e) X_{(-1)p}(e).$$

Wird n in obigen Formeln durch $-n$ ersetzt, so erhält man die Vorwärts- und Rückwärtsrekursion für Exzentrizitätsfunktionen negativer Grade:

$$X_{(-n+1)q}(e) = X_{-nq}(e) + \frac{e}{2} (X_{(-n)(q-1)}(e) + X_{(-n)(q+1)}(e))$$

und

$$X_{(-n-1)q}(e) = \frac{1}{2} \sum_p (X_{(-n)(p-q)}(e) + X_{(-n)(p+q)}(e)) X_{(-1)p}(e) = \sum_p X_{n(p-q)}(e) X_{(-1)p}(e).$$

Für die Potenzen von $(f - M)$ folgt

$$\begin{aligned} (f - M)^2 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2)}(e) \cos jf, & d_j^{(2)}(e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(1)}(e) d_{j+k}^{(1)}(e) = d_{(-j)}^{(2)}(e), \\ (f - M)^{2\nu} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2\nu)}(e) \cos jf, & d_j^{(2\nu)}(e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j+k}^{(2)}(e) d_k^{(2\nu-2)}(e) = d_{(-j)}^{(2\nu)}(e), \\ (f - M)^{2\nu+1} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2\nu+1)}(e) \sin jf, & d_j^{(2\nu+1)}(e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j+k}^{(1)}(e) d_k^{(2\nu)}(e) = -d_{(-j)}^{(2\nu+1)}(e). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \cos \gamma(f - M) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_j(\gamma, e) \cos jf, & \tilde{C}_j(\gamma, e) &= \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu \gamma^{2\nu}}{(2\nu)!} d_j^{(2\nu)}(e) = \tilde{C}_{(-j)}(\gamma, e), \\ \sin \gamma(f - M) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_j(\gamma, e) \sin jf, & \tilde{S}_j(\gamma, e) &= \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu \gamma^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} d_j^{(2\nu+1)}(e) = -\tilde{S}_{(-j)}(\gamma, e). \end{aligned}$$

Modifizierte Exzentrizitätsfunktionen

Aus (60), (61) und (63) erkennt man $X_{nq}(e) = O(e^q)$, ($q \geq 0$) und $d_j^{(1)}(e) = O(e^j)$, ($j \geq 0$). So lassen sich die modifizierten Exzentrizitätsfunktionen und modifizierten Fourier-Koeffizienten durch

$$\bar{X}_{nq}(e^2) = X_{nq}(e) e^{-q} \quad \text{und} \quad \bar{d}_j^{(1)}(e^2) = d_j^{(1)}(e) e^{-j}$$

definieren. Damit folgt die Darstellung der oben genannten Reihenentwicklungen in der Form

$$\left(\frac{p}{r}\right)^n = \bar{X}_{n0}(e^2) + 2 \sum_{q \geq 1} \bar{X}_{nq}(e^2) e^q \cos qf$$

und

$$f - M = 2 \sum_{j \geq 0} \bar{d}_j^{(1)}(e^2) e^j \sin jf. \quad (62.a)$$

4.2.3 Differentialformeln

$$\begin{aligned} d(f - M) &= \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right) + 2\sqrt{1 - e^2} \frac{\mu r}{\Gamma^2} \right) \frac{\Gamma}{\mu} d\dot{r} + \\ &+ \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^2 + \sqrt{1 - e^2} \right) \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \frac{\mu}{\Gamma^2} dr - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} + 1 \right) \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \frac{1}{\Gamma} d\Gamma. \end{aligned}$$

Für eine beliebige Funktion $\Phi(e)$ und eine beliebige Integerzahl j ergibt sich

$$\begin{aligned} d(\Phi(e) \cos jf) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\mu} \left(- \left(\Phi' + \frac{j}{e} \Phi \right) \sin(j-1)f + \left(\Phi' - \frac{j}{e} \Phi \right) \sin(j+1)f \right) d\dot{r} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{\mu r^2} \left(\left(\Phi' + \frac{j}{e} \Phi \right) \cos(j-1)f + \left(\Phi' - \frac{j}{e} \Phi \right) \cos(j+1)f \right) dr + \\ &+ \frac{1}{\Gamma} \left(e \Phi' \cos jf + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} + 1 \right) \left(\left(\Phi' + \frac{j}{e} \Phi \right) \cos(j-1)f + \left(\Phi' - \frac{j}{e} \Phi \right) \cos(j+1)f \right) \right) d\Gamma, \\ d(\Phi(e) \sin jf) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\mu} \left(\left(\Phi' + \frac{j}{e} \Phi \right) \cos(j-1)f - \left(\Phi' - \frac{j}{e} \Phi \right) \cos(j+1)f \right) d\dot{r} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{\mu r^2} \left(\left(\Phi' + \frac{j}{e} \Phi \right) \sin(j-1)f + \left(\Phi' - \frac{j}{e} \Phi \right) \sin(j+1)f \right) dr + \\ &+ \frac{1}{\Gamma} \left(e \Phi' \sin jf + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} + 1 \right) \left(\left(\Phi' + \frac{j}{e} \Phi \right) \sin(j-1)f + \left(\Phi' - \frac{j}{e} \Phi \right) \sin(j+1)f \right) \right) d\Gamma. \end{aligned}$$

Teil II

Quadratisch konvergente Lösungsverfahren

Die vielfältigen Lösungswege können u. a. unter dem Gesichtspunkt des *Konvergenzgrades* eingeteilt werden. Damit ist gemeint, dass die Genauigkeit der Annäherung an die gesuchte Lösung mit einer gewissen Potenz eines *Kleinheitsparameters* ε ansteigt.

Praktisch ausnahmslos sind die zur Lösung des Hauptproblems verwendeten Verfahren solche vom *Konvergenzgrad 1*. D. h., man erzielt mit jedem Schritt dieser in der Regel iterativ oder rekursiv angelegten Verfahren einen Genauigkeitsgewinn von einer Potenz des Kleinheitsparameters ε des Hauptproblems.

Die *Auflösung der Keplergleichung*

$$E - e \sin E = M \quad \Rightarrow \quad E = E(M)$$

zeigt sehr anschaulich die Bedeutung des Konvergenzgrades eines Lösungsverfahrens für dessen Effizienz. Die Auflösung könnte nach diversen *Iterationsvorschriften* (mit dem Iterationsindex $i = 0, 1, \dots$) vorgenommen werden:

- a) $E_{i+1} = M + e \sin E_i$ (Bogenmaß),
- b) $E_{i+1} = E_i + \frac{M - E_i + e \sin E_i}{1 - e \cos E_i}$ (Bogenmaß) *Newton-Verfahren*,

Während a) vom Konvergenzgrad 1 ist, hat das Newton-Verfahren b) den Konvergenzgrad 2. Bei letzterem gewinnt man mit jedem Iterationsschritt in *quadratischer* Weise an Genauigkeit. Eine zusätzliche Beschleunigung der Annäherung an die gesuchte Lösung erreicht man durch eine *Konvergenzbeschleunigung* - etwa nach dem Vorschlag von *Aitken*:

$$\text{c) } z^i := x^{(i)} - \frac{(x^{(i+1)} - x^{(i)})^2}{x^{(i+2)} - 2x^{(i+1)} + x^{(i)}} \quad \text{die Folge } \{z^{(i)}\} \text{ konvergiert rascher als die Folge } \{x^{(i)}\}.$$

Während die üblicherweise verwendeten Verfahren zur Lösung von Störungsproblemen den Konvergenzgrad 1 aufweisen, werden in der vorliegenden Studie solche vom Konvergenzgrad 2 vorgestellt. Sie basieren auf hintereinandergeschalteten fast-identischen kanonischen Transformationen (*Lie-Transformationen*). Diese Verfahren werden am Beispiel des freien, ungedämpften Duffing-Oszillators veranschaulicht werden. Des weiteren wird u. a. die Anwendung auf das verallgemeinerte Hauptproblem skizziert.

5 Allgemeine Störungsrechnung basierend auf fast-identischen Transformationen

5.1 Bearbeitungen des Hauptproblems der Theorie der Satellitenbahnen

Das verallgemeinerte Hauptproblem wie auch dessen vereinfachten Fälle wurden *bislang* mit Verfahren vom *Konvergenzgrad 1* bearbeitet. Solche Verfahren sind beispielsweise das

- Verfahren der sukzessiven Approximation (Poisson-Verfahren),
- Verfahren von Hori,
- modifizierte Hori-Verfahren von Cui,
- Verfahren von Kamel-Deprit,
- direkte Verfahren von Garfinkel,
- Verfahren von Garfinkel und Cui,
- Verfahren von Kirchgraber.

Sie sind in Schneider [61], [63] dargestellt. Dort findet man auch ausführliche Literaturhinweise.

5.1.1 Lösungen nach dem Poisson-Verfahren der schrittweisen Annäherung

Eine Theorie erster Ordnung für das verallgemeinerte Hauptproblem hat Kaula [25], [26] ausgearbeitet. Sie stützt sich auf das Verfahren der *schrittweisen Annäherung*.

Für die Elemente

$$\boldsymbol{\alpha} := (i, \Omega, \omega, a, e, M)^T \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} i & \text{Bahnneigung} \\ \Omega & \text{Knotenlage} \\ \omega & \text{Apsidenlage} \\ a & \text{große Halbachse} \\ e & \text{numerische Exzentrizität} \\ M & \text{mittlere Anomalie} \end{array}$$

einer elliptischen Keplerbahn werden die Variationsgleichungen

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \Psi^{-1} F_{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{mit} \quad F_{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{1}{m} \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

aufgestellt, in denen die Störkraft $\mathbf{S}$ aus der Bewegungsgleichung des Hauptproblems

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \nabla_{\mathbf{r}} U_{\tilde{G}}(\mathbf{r}, t) = \nabla_{\mathbf{r}} U_{\tilde{G}_{00}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \nabla_{\mathbf{r}} (U_{\tilde{G}}(\mathbf{r}, t) - U_{\tilde{G}_{00}}(\mathbf{r}, t)) =: \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{R}(\mathbf{r}, t)$$

entnommen wird. Die *Störungsfunktion*

$$\tilde{R}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l U_{\tilde{G}_{lm}}(\mathbf{r}, t)$$

beschreibt die *Anisotropie* des äußeren Gravitationsfeldes der als starr angenommenen und um eine feste Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Erde. Sie wird nach Bahnelementen entwickelt, d. h., ihre Orts- und Zeitabhängigkeit wird durch die Kepler'schen Elemente ausgedrückt

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\mathbf{r}, t) &= \underbrace{\frac{GM_{\oplus}}{r}}_{\text{radial}} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{a_{\oplus}^l}{r^{l+1}} (C_{lm} C_l^m(\vartheta, \lambda) + S_{lm} S_l^m(\vartheta, \lambda))}_{\text{Anisotropie}} \\ &= GM_{\oplus} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty}}_{\text{allein abhängig von}} \underbrace{\sum_{m=0}^l}_{\text{a}} \underbrace{\frac{a_{\oplus}^l}{a^{l+1}}}_{\text{a}} \underbrace{\sum_{p=0}^l F_{lmp}(i)}_{\text{i}} \underbrace{\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} G_{lpq}(e)}_{\text{e}} \underbrace{S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \Theta(t))}_{\omega, M, \Omega, \Theta(t)}. \end{aligned}$$

In dieser *Entwicklung der Störungsfunktion* ist die Abhängigkeit von Bahnelementen weitgehend faktorisiert. Diese *Faktorisierung* ist hilfreich bei der Aufstellung der expliziten Variationsgleichungen für die Kepler'schen Elemente. Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i F_{\omega} - F_{\Omega}}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{F_i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{-\cos i F_i + \frac{1-e^2}{e} \sin i F_e}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} F_M, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2} F_{\omega} + (1-e^2) F_M}{na^2 e}, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{3t}{a^2} F_M + \frac{-2ae F_a - (1-e^2) F_e}{na^2 e}. \end{aligned}$$

Anmerkungen:

- Die vorstehenden Differentialgleichungen haben die allgemeine Struktur

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 \quad & \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{(0)}}{dt} = \mathbf{0}, \\ \varepsilon^1 \quad & \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}{dt} = d^{(0)}\hat{\mathbf{f}}\Big|_0 + \mathbf{F}^{(1)}, \\ \varepsilon^2 \quad & \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{(2)}}{dt} = d^{(1)}\hat{\mathbf{f}}\Big|_0 + \mathbf{F}^{(2)}, \\ \varepsilon^3 \quad & \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{(3)}}{dt} = d^{(2)}\hat{\mathbf{f}}\Big|_0 + \mathbf{F}^{(3)} \\ \vdots \quad & \vdots \end{aligned}$$

also

$$\varepsilon^n \quad \frac{d\boldsymbol{\alpha}^{(n)}}{dt} = d^{(n-1)}\hat{\mathbf{f}}\Big|_0 + \mathbf{F}^{(n)} \quad \text{für} \quad n \geq 1$$

mit

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}^{(3)} = \frac{1}{2!} d^{(1)} d^{(1)} \hat{\mathbf{f}}\Big|_0 \quad \dots$$

- Zu der durch

$$\lambda := \pi + M = \Omega + \omega + M$$

definierten *mittleren Länge* sind infolge der Störung der Halbachse a und damit der mittleren Bewegung n folgende Beiträge hinzuzunehmen

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 \quad & -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \Big|_0 \int_{t_0}^t \lambda^{(1)}(t') dt', \\ \varepsilon^2 \quad & -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \Big|_0 \int_{t_0}^t \lambda^{(2)}(t') dt' + \frac{15}{4} - \frac{3}{2} \frac{n}{a^2} \Big|_0 \int_{t_0}^t (\lambda^{(1)}(t'))^2 dt' \\ \vdots \quad & \vdots \end{aligned}$$

In Kudryavtsev [33] bzw. Schneider [63] sind sie bis zur fünften Ordnung angegeben. Zum Entstehen solcher zusätzlicher Beiträge sei verwiesen auf Schneider [61], [63]. Dort findet man auch eine Diskussion und Algorithmen zur Berechnung der nötigen Eingangsdaten für die Integrationskonstanten und mittleren Bahnelemente.

Das Verfahren der schrittweisen Annäherung lässt in der 1. Ordnung die Mitnahme weiterer Störkräfte in einfacher Weise zu: Die Bestimmungsgleichungen werden für jede Störkraftkomponente separat gelöst und die Ergebnisse *linear superponiert*. In der 2. Ordnung ist das nicht mehr möglich, weil es zu *Kopplungstermen* kommt.

Kudryavtsev hat das Hauptproblem in 5. Ordnung nach dem Poisson-Verfahren gelöst. In Kudryavtsev [33] wird das erreichte Ergebnis wie folgt beschrieben:

Um eine Darstellungsgenauigkeit der Lösung von 1 cm in den Ortskoordinaten sicher zu stellen, sind für einen hochfliegenden Satelliten wie *ETALON* 1679 Reihenterme (klassisches Hauptproblem: $C_{20} \neq 0$) bzw. 42746 Reihenterme (Hauptproblem: $C_{lm}, S_{lm} \neq 0$ für $0 \leq l, m \leq 36$) erforderlich. Weitere Ordnungen werden erforderlich, wenn dieselbe Qualität der Lösungsdarstellung für niedriger fliegende Satelliten wie *AJISAI* oder *STARLETTE* erreicht werden soll.

5.1.2 Lösung des Hauptproblems mittels kanonischer Transformationen

Einen Überblick über die durch Verwendung fast-identischer kanonischer Transformationen ausgearbeiteten Lösungen des Hauptproblems findet man in Schneider [63]. Diese Lösungen wurden insbesondere mit folgenden Verfahren ausgearbeitet:

- von Zeipel-Verfahren,
- Hori-Verfahren,
- Kamel-Deprit-Verfahren,
- Kirchgraber-Verfahren.

Diese Verfahren sind in Schneider [61], [63] ausführlich dargestellt. Dort findet man auch zahlreiche Literaturhinweise, vor allem auf die Originalarbeiten. Alle Verfahren, auch deren Modifikationen, sind vom Konvergenzgrad 1. Erreicht wurden Lösungen bis 4. Ordnung, dargestellt in verschiedenen Sätzen kanonischer Variablen.

Beispiele

1. *Theorie 1. Ordnung von Lelgemann*, charakterisiert durch

- Verwendung der Hill-Variablen
- Anwendung des Hori-Verfahrens
- volle Anisotropie des Gravitationsfeldes

als kanonisches Gegenstück zur Theorie von Kaula

2. *Theorie 2. Ordnung von Brouwer*, charakterisiert durch

- Verwendung der Delaunay-Variablen
- Anwendung des von Zeipel-Verfahrens
- axialsymmetrisches Gravitationsfeld ($2 \leq l \leq 6$)

3. *Theorie 4. Ordnung von Deprit-Rom*, charakterisiert durch

- Verwendung der Delaunay-Variablen
- Anwendung des Deprit-Verfahrens
- klassisches Hauptproblem
- Einsatz symbolischer Formelmanipulation

4. *Theorie 2. Ordnung von Cui [5], [6]*, charakterisiert durch

- Verwendung der Hill-Variablen
- Anwendung des durch Cui modifizierten Hori-Verfahrens
- volle Anisotropie des Gravitationsfeldes
- nachgeschaltete Encke-Linearisierung zur Mitnahme weiterer insbes. nicht-gravitativer Störkräfte
- Berücksichtigung von Kopplungs- und Resonanzeffekten

5. *Theorie von Meyer-Schneider-Reichhoff*, charakterisiert durch

- Anwendung des Kirchgraber-Verfahrens
- Einsatz symbolischer Formelmanipulation (Programm *ANALYTOS* von Meyer [44])
- Beurteilung der Qualität durch Vergleich mit einer hochgenauen numerischen Lösung von Reichhoff (Meyer/Schneider/Reichhoff [45])

Beispiele

Fall	Feld	Ordnung	Δx	$\Delta \dot{x}$
1	C_{20}	$O(C_{20}^4)$	290 nm	140 pm/sec
		$O(C_{20}^5)$	14 pm	35 fm/sec
2	C_{20}, C_{30}, C_{40}	$O(C_{20}^4)$	15 μm	7 nm/sec
3	$C_{20}, C_{30}, C_{40}, C_{50}, C_{60}$	$O(C_{20}^3)$	260 μm	2 $\mu m/sec$
4	C_{20}, C_{22}, S_{22}	$O(C_{20}^3)$	3 mm	2 $\mu m/sec$
5	$C_{20}, C_{22}, S_{22},$	$O(C_{20}^3)$	14 mm	6 $\mu m/sec$
	$C_{30}, \dots, C_{33}, S_{31}, \dots, S_{33},$ $C_{40}, \dots, C_{44}, S_{41}, \dots, S_{44}$			

Die beiden letzten Spalten geben die Abweichungen der geozentrischen Örter bzw. Geschwindigkeiten der analytischen Lösung von der numerischen Lösung an, gerechnet für 1000 Umläufe des Satelliten *LAGEOS*.

Man erkennt den Genauigkeitsgewinn, wenn man die Ordnung erhöht (Fall 1), aber auch den Genauigkeitsverlust der analytischen Lösung, wenn man die Feldentwicklung höher treibt (Fälle 2-5). Folglich muss mit der Feldentwicklung bei vorgegebener Genauigkeitsforderung die Ordnung höher getrieben werden. Wie die Lösung von Kudryavtsev zeigt, sind die Verfahren vom Konvergenzgrad 1 wenig effizient. Von Verfahren vom Konvergenzgrad 2 ist hier Abhilfe zu erwarten.

Die bisherigen Bemühungen lassen sich wie folgt bewerten:

1. Während die Bahntheorien von Kaula und Kudryavtsev in den nicht-kanonischen Kepler'schen Bahnelementen formuliert sind, liegen den weiteren genannten Bahntheorien kanonische Variablen zugrunde; beispielsweise verwendet Cui die Hill'schen Variablen, Deprit und Rom sowie Meyer et al. Delaunay-Elemente (Schneider [61]).
2. Alle verwendeten Verfahren sind vom Konvergenzgrad 1, gewinnen also je ausgeführten Schritt nur eine Potenz des Kleinheitsparameters an Genauigkeit in der Lösungsdarstellung.
3. Die erzielten Genauigkeiten in der Lösungsdarstellung erweisen sich als unzureichend angesichts der inzwischen erreichten Genauigkeiten der Ortung und Bahnverfolgung.
4. Die Berücksichtigung weiterer Störkräfte kann beim Poisson-Verfahren der schrittweisen Annäherung nur in der ersten Ordnung durch lineare Superposition der Elementstörungen theoretisch einwandfrei gelingen. In den Verfahren basierend auf kanonischer Transformationstheorie besteht nach Cui die Möglichkeit der sog. Encke-Linearisierung, die der Behandlung des verallgemeinerten Hauptproblems nachgeschaltet wird.
5. Alle genannten Verfahren greifen auf fast-identische Transformationen zurück. Auch das Poisson-Verfahren kann so interpretiert werden, wie noch gezeigt werden wird.
6. Aus der Sicht der Anwendung ist die Kenntnis der Lösung eines Bewegungsproblems vor allem für die differentielle Korrektur von Modellparametern von erheblichem Interesse und sie ist auch erforderlich bei der Lösung der dabei auftretenden Variationsgleichungen (Schneider [63]). Bei kanonischen Systemen ist von besonderem Vorteil die die Lie-Reihe beschreibende Erzeugende. Sie vermittelt über den Lie'schen Vertauschungssatz auch die Zeitverläufe testbarer Funktionale eines Bewegungsvorganges.
7. In allen nach den genannten Verfahren ausgearbeiteten Theorien stellen sich folgende Fragen:
 - a) Auftreten von Resonanzen bei genäherten bzw. strengen Kommensurabilitäten von systemeigenen und externen Winkelgeschwindigkeiten.
 - b) Auftreten kritischen Bahnneigung, die sich ebenfalls als Resonanzproblem erweist (Garfinkel [10]). In Meyer [44] wurde gezeigt, dass deren Lage sich mit der Ordnung der Bahntheorie verschiebt.

Diese Fragen sind nur teilweise gelöst (Garfinkel [10], Cui [6]).

5.1.3 Verfahren vom Konvergenzgrad 2

In Schneider/Cui [64] wurde ein Lösungskonzept für die Behandlung der Satellitenbewegung vorgeschlagen, das einen Konvergenzgrad 2 aufweist. Dieses Konzept wird im Folgenden detailliert vorgestellt (siehe Abschnitt 6) und sein Ablauf dargelegt. Darüber hinaus wird ein weiteres Verfahren vorgestellt (siehe Abschnitt 7), das durch eine modifizierte Ablaufsteuerung des Kamel-Deprit-Verfahrens (Schneider [61]) eine Konvergenzordnung 2 gewährleistet.

Der Prototyp eines quadratisch konvergenten Verfahrens ist das von Kolmogorov 1954 (Kolmogorov [32]) angegebene Verfahren. Es spielt in der Beweisführung für das KAM-Theorem (Moser [47], Schneider [61]) eine zentrale Rolle. Über dieses Verfahren heißt es in Lichtenberg/Lieberman [39]:

„We note that each *step* in Kolmogorov's technique is much more complicated than the corresponding step using the ordinary technique and, moreover, that each step involves a different integration over the orbits of the system, perhaps expressing the general conservation law that one may climb to a given height using many small steps or a few large ones! We may conclude that it may not be the best way of doing practical calculations.

On the other hand, Kolmogorov's technique increases the singularity from a resonant denominator d by just one power for each „large“ step, i. e., when doing perturbation theory to order 2^n , resonance denominators of order $1/d^n$ appear in Kolmogorov's technique, but these are of order $1/d^{(2^n-1)}$ using the standard technique. This fact, together with the quadratic convergence, is crucial in the KAM demonstration that convergent series expansion can be found sufficiently far from resonances.“

Die in den Abschnitten 6 und 7 vorzustellenden Verfahren sind so angelegt, dass die hier angesprochenen Vorteile gewahrt bleiben, die für die praktische Anwendung bestehenden Nachteile aber vermieden werden.

Dazu sei eine Bemerkung vorangestellt:

Die *Hamilton-Jacobi-Gleichung* (Schneider [60])

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

ist eine Bestimmungsgleichung für die *Erzeugende* F einer kanonischen Transformation, die die *alte* Hamilton-Funktion H in die *neue* Hamilton-Funktion H' transformiert. Dabei können zwei Fragestellungen auftreten:

1. Welche kanonische Transformation führt von einer vorgegebenen alten Hamilton-Funktion zu einer neuen Hamilton-Funktion vorgegebener Funktionsstruktur ? Zu bestimmen ist die zugehörige Erzeugende als Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung.
2. Welche Funktionsstruktur der neuen Hamilton-Funktion ergibt sich, durch eine kanonische Transformation mit vorgegebener Erzeugenden ? Zu bestimmen ist die Funktionsstruktur der neuen Hamilton-Funktion mittels der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

ad 1.

Die Anwendung kanonischer Transformationen in der allgemeinen Störungsrechnung soll in der Regel auf eine solche Funktionsstruktur der neuen Hamilton-Funktion führen, dass sich das transformierte Bewegungsproblem leichter lösen lässt.

Beispiel: Vielfach zielt man darauf ab, dass eine oder mehrere generalisierte Koordinaten in der neuen Hamilton-Funktion nicht mehr auftreten, also *zyklische Variable* sind. Bekanntlich sind dann die konjugierten kanonischen Impulse Bewegungskonstanten (Schneider [60]).

Dieser Weg wird in vielen Störungstheorien (Brouwer/Clemence [3], Stumpff [69],[70],[71]) besprochen.

In Schneider/Cui [64] wurde vorgeschlagen, die neue Hamilton-Funktion so vorzugeben, dass sie die Funktionsstruktur eines *integrablen* Systems hat. Dazu ist die kanonische Transformation so anzulegen, dass das durch die alte Hamilton-Funktion beschriebene dynamische System in ein *integrables Zielsystem* übergeht. Dabei soll dieses Zielsystem in einem bestimmten Sinne das aktuelle Problem annähern und bei wiederholter Anwendung solcher Transformationen die gesuchte Lösung des gestellten Störungsproblems in quadratischer Konvergenz approximieren. Es soll eine Exhaustion des Störungsproblems durch ein integrables Zielsystem in quadratischer Konvergenz erfolgen. Mit anderen Worten: Da das zu lösende Störungsproblem i. A. nicht-integrabel sein wird, wird angestrebt, es durch ein integrables Näherungssystem zu approximieren, also einen maximalen integrablen Kern der alten Hamilton-Funktion herauszuarbeiten, und einen nicht-integrablen Restanteil in hinreichend hohe Ordnung zurückzudrängen.

Bei dieser Vorgehensweise wird sichergestellt, dass man die Lösung des Zielsystems kennt, die Erzeugende eines jeden Transformationsschrittes dient dann vornehmlich der Elimination von Störanteilen aus der transformierten Hamilton-Funktion. Entscheidend für das Verfahren ist, dass die jeweils transformierte Hamilton-Funktion so zerlegt werden kann, dass ein integrabler Anteil mit der beabsichtigten Funktionsstruktur des Zielsystems anfällt und der periodische Restanteil zum Teil eliminiert werden kann und dann noch verbleibende Reste in eine höhere Ordnung zurückgedrängt werden.

ad 2.

Gibt man die Erzeugende vor, so kann über die Hamilton-Jacobi-Gleichung die zu erwartende Funktionsstruktur der neuen Hamilton-Funktion ermittelt werden und damit entschieden werden, ob die Lösung des Bewegungsproblems damit vereinfacht wird.

5.2 Lie-Transformationen

Eine *Lie-Transformation*, welche die kanonischen Variablen (q, p) in (q', p') überführt, ist definiert durch

$$l = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_{s_1}^k l', \quad (66)$$

wobei l und l' für jede einzelne Variable von (q, p) bzw. von (q', p') stehen. Die Funktion $s_1 = s_1(q, p)$ wird die Erzeugende der Transformationen genannt. Die *Lie-Operatoren* $D_{s_1}^k l'$ werden definiert durch

$$D_{s_1}^0 l' = l', \quad D_{s_1}^k l' = \{D_{s_1}^{k-1} l', s_1\},$$

wobei

$$\{u, v\} := \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right) \quad (67)$$

für die Poisson-Klammer des Funktionspaares (u, v) steht. Für Poisson-Klammern gelten die lineare Beziehung

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$$

und die *Jacobi-Identität*

$$\{\{A, B\}, C\} = \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$$

und daher

$$\{\{A, B\}, C\} = \{A, \{B, C\}\} + \{\{A, C\}, B\} = 0.$$

Entsprechend gelten mit

$$D_{B+C} = D_B + D_C$$

und

$$D_C D_B = D_{\{B, C\}} + D_B D_C \quad (68)$$

die assoziativen und (nicht-) kommutativen Formeln für die Lie-Operatoren.

Die folgenden Eigenschaften sind bereits bekannt:

- für jede unter üblicher Bedingung gegebene Erzeugende $s_1 = s_1(q, p)$ stellt (66) eine kanonische Transformation zwischen den Variablen (q, p) und (q', p') dar (*Kanonizität*),
- für jede unter üblicher Bedingung gegebene Funktion $l = l(q, p)$ bleibt die Transformationsformel (66) gültig, wenn $l' := l(q, p)|_{q, p = q', p'}$ (*Vertauschungssatz*),
- für die Erzeugende s_1 gilt $s'_1 := s_1(q, p)|_{q, p = q', p'} = s_1(q, p)$ (*Invarianz der Erzeugenden*).

5.3 Produkte von Lie-Transformationen

5.3.1 Baker-Hausdorff-Campbell-Formel

U. a. in Kirchgraber/Stiefel [30] wird gezeigt:

Sind X und Y irgendzwei nicht-kommutative Operatoren, so kann das Produkt der Exponentialfunktionen $\exp X$ und $\exp Y$ in Gestalt einer einzigen Exponentialfunktion ausgedrückt werden

$$\exp Z = \exp X \exp Y$$

mit

$$\begin{aligned} Z = & X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, X, Y] + [Y, Y, X]) + \frac{1}{24}[X, Y, Y, X] + \frac{1}{720}([Y, Y, Y, Y, X] + [X, X, X, X, Y]) + \\ & + \frac{1}{360}([Y, X, X, X, Y] + [X, Y, Y, Y, X]) + \frac{1}{120}([X, X, Y, Y, X] + [Y, Y, X, X, Y]) + \dots, \end{aligned}$$

wobei

$$[X, Y] := XY - YX, \quad [X, X, Y] := [X, [X, Y]] \quad \dots$$

Durch erneute Anwendung dieser *Hausdorff-Campbell-Formel*, auch *Baker-Hausdorff-Campbell-Formel* genannt, erhält man (Yoshida [73])

$$\exp W = \exp X \exp Y \exp X$$

mit

$$\begin{aligned} W = & 2X + Y + \frac{1}{6}[Y, Y, X] - \frac{1}{6}[X, X, Y] + \frac{7}{360}[X, X, X, X, Y] - \frac{1}{360}[Y, Y, Y, Y, X] + \\ & + \frac{1}{90}[X, Y, Y, Y, X] + \frac{1}{45}[Y, X, X, X, Y] + \frac{1}{60}[X, X, Y, Y, X] + \frac{1}{30}[Y, Y, X, X, Y] + \dots \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden Rekursionsformeln zur Hintereinanderschaltung kanonischer Transformationen hergeleitet. In Schneider [61] werden die oben angegebenen Formeln für die Beurteilung der Verfahrensfehler symplektischer Integratoren herangezogen.

5.3.2 Produkt zweier Lie-Transformationen

Nun werde eine zweite Lie-Transformation

$$l' = \sum_{\kappa \geq 0} \frac{1}{\kappa!} D_{s_2}^\kappa l'' \quad (69)$$

eingeführt, die die kanonischen Variablen (q', p') in (q'', p'') überführt, wobei $s_2 = s_2(q', p')$ die Erzeugende ist. Eintragen von (69) in (66) ergibt

$$l = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_{s_1}^k \sum_{\kappa \geq 0} \frac{1}{\kappa!} D_{s_2}^\kappa l'' = \sum_{k \geq 0} \sum_{\kappa \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{\kappa!} D_{s_1}^k D_{s_2}^\kappa l''.$$

Mit $m = k + \kappa$ erhält man

$$l = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{\kappa=0}^m \frac{m!}{\kappa!(m-\kappa)!} D_{s_1}^\kappa D_{s_2}^{m-\kappa} l'' = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \Delta_m \quad (70)$$

mit der Abkürzung

$$\Delta_m = \sum_{\kappa=0}^m \binom{m}{\kappa} D_{s_1}^{\kappa} D_{s_2}^{m-\kappa} l'' . \quad (71)$$

Die Gleichung (70) stellt eine Transformation zwischen den Variablen (q', p') und (q'', p'') , das Produkt der Transformationen (66) und (69), dar.

Definition (1): Wenn es eine Funktion $\bar{s}$ gibt, mit der sich die Gleichung (70) in der Form

$$Dl'' = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_{\bar{s}}^k l''$$

darstellen lässt, dann ist das Produkt (70) zweier Lie-Transformationen (66) und (69) gleich einer Lie-Transformation mit der Erzeugenden $\bar{s}$.

Definition (2): Wenn es eine Funktion $s^{(m)}$ gibt, mit der sich die Gleichung (70) in der Form

$$D^{(m)} l'' = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} D_{s^{(m)}}^k l'' + O\left((s^{(m)})^{m+1}\right)$$

darstellen lässt, dann ist das Produkt (70) zweier Lie-Transformationen (66) und (69) eine genäherte Lie-Transformation der m . Ordnung.

Die Existenz einer genäherten Lie-Transformation der m . Ordnung des Produkts (70) für jede gegebene Ganzzahl m ist äquivalent der Existenz einer zu dem Produkt (70) äquivalenten Lie-Transformation.

Zur Veranschaulichung seien die ersten Δ 's ausführlich angegeben:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \bar{D}_0 l'' = l'' , \\ \Delta_1 &= \bar{D}_1 l'' = (D_{s_2}^1 + D_{s_1}^1) l'' \\ &= \{l'', s_2\} + \{l'', s_1\} , \\ \Delta_2 &= \bar{D}_2 l'' = (D_{s_2}^2 + 2D_{s_1}^1 D_{s_2}^1 + D_{s_1}^2) l'' \\ &= \{\{l'', s_2\}, s_2\} + 2\{\{l'', s_2\}, s_1\} + \{\{l'', s_1\}, s_1\} , \\ \Delta_3 &= \bar{D}_3 l'' = (D_{s_2}^3 + 3D_{s_1}^2 D_{s_2}^1 + 3D_{s_1}^1 D_{s_2}^2 + D_{s_1}^3) l'' \\ &= \{\{\{l'', s_2\}, s_2\}, s_2\} + 3\{\{\{l'', s_2\}, s_2\}, s_1\} + 3\{\{\{l'', s_2\}, s_1\}, s_1\} + \{\{\{l'', s_1\}, s_1\}, s_1\} , \\ \Delta_4 &= \bar{D}_4 l'' = (D_{s_2}^4 + 4D_{s_1}^3 D_{s_2}^1 + 6D_{s_1}^2 D_{s_2}^2 + 4D_{s_1}^1 D_{s_2}^3 + D_{s_1}^4) l'' \\ &= \{\{\{\{l'', s_2\}, s_2\}, s_2\}, s_2\} + 4\{\{\{\{l'', s_2\}, s_2\}, s_2\}, s_1\} + 6\{\{\{\{l'', s_2\}, s_2\}, s_1\}, s_1\} + \\ &\quad + 4\{\{\{\{l'', s_2\}, s_1\}, s_1\}, s_1\} + \{\{\{\{l'', s_1\}, s_1\}, s_1\}, s_1\} . \end{aligned}$$

Für die binomischen Koeffizienten gilt mit Hilfe von Rekursionsformeln (*Pascal'sches Dreieck*)

$$\binom{m}{\kappa} = \binom{m-1}{\kappa-1} + \binom{m-1}{\kappa} . \quad (72)$$

Mittels (72) erhält man aus (71)

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \sum_{\kappa=0}^m \left(\binom{m-1}{\kappa-1} + \binom{m-1}{\kappa} \right) D_{s_1}^{\kappa} D_{s_2}^{m-\kappa} l'' = \sum_{\kappa=0}^m \left(\binom{m-1}{\kappa-1} D_{s_1}^{\kappa} D_{s_2}^{m-\kappa} l'' + \binom{m-1}{\kappa} D_{s_1}^{\kappa} D_{s_2}^{m-\kappa} l'' \right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^m \left(\binom{m-1}{\kappa} D_{s_1}^{\kappa+1} D_{s_2}^{m-1-\kappa} l'' + \binom{m-1}{\kappa} D_{s_1}^{\kappa} D_{s_2}^{m-\kappa} l'' \right) = \sum_{\kappa=0}^m \binom{m-1}{\kappa} D_{s_1}^{\kappa} (D_{s_1} + D_{s_2}) D_{s_2}^{m-1-\kappa} l'' . \end{aligned}$$

Für $m = 1$ verschwinden alle Terme mit dem Index $\kappa \neq 0$ aus der Summe und es verbleibt nur noch

$$\bar{D}_1 = D_{s_1} + D_{s_2} = D_{s_1+s_2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta_1 = \{l'', s_1 + s_2\} .$$

Nochmalige Verwendung von (72) ergibt

$$\begin{aligned}\Delta_m &= \sum_{\kappa=0}^m \binom{m-1}{\kappa} D_{s_1}^\kappa \bar{D}_1 D_{s_2}^{m-1-\kappa} l'' = \sum_{\kappa=0}^{m-2} \left(\binom{m-2}{\kappa-1} D_{s_1}^\kappa \bar{D}_1 D_{s_2}^{m-1-\kappa} l'' + \binom{m-2}{\kappa} D_{s_1}^\kappa \bar{D}_1 D_{s_2}^{m-1-\kappa} l'' \right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{m-2} \binom{m-2}{\kappa} (D_{s_1}^{\kappa+1} \bar{D}_1 D_{s_2}^{m-2-\kappa} l'' + D_{s_1}^\kappa \bar{D}_1 D_{s_2}^{m-1-\kappa} l'') = \sum_{\kappa=0}^{m-2} \binom{m-2}{\kappa} D_{s_1}^\kappa (D_{s_1} \bar{D}_1 + \bar{D}_1 D_{s_2}) D_{s_2}^{m-2-\kappa} l''.\end{aligned}$$

Für $m = 2$ erhält man analog

$$\bar{D}_2 = D_{s_1} \bar{D}_1 + \bar{D}_1 D_{s_2}$$

und allgemein mit

$$\bar{D}_{k+1} = D_{s_1} \bar{D}_k + \bar{D}_k D_{s_2} \quad (k \geq 1) \quad (73)$$

eine Rekursionsformel für die Operatoren $\bar{D}$.

Mit der Setzung

$$\sigma_1 := s_1 + s_2, \quad \tau_1 := s_2 - s_1, \quad s_1 := \frac{1}{2}(\sigma_1 - \delta_1), \quad s_2 := \frac{1}{2}(\sigma_1 + \delta_1)$$

erhält man

$$\bar{D}_{k+1} = \frac{1}{2}(D_{\sigma_1} \bar{D}_k + \bar{D}_k D_{\sigma_1}) + \frac{1}{2}(\bar{D}_k D_{\delta_1} - D_{\delta_1} \bar{D}_k),$$

und damit eine alternative Form der Rekursionsformel (73).

Mit der Hilfe der Rekursionsformel (72) lassen sich ein paar der ersten $\bar{D}$'s bestimmen - dabei wird die kommutative Formel (68) so oft verwendet, wie es zur Vereinfachung der Ausdrücke führt. Es ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\bar{D}_1 &= D_{\sigma_1}, \\ \bar{D}_2 &= D_{\sigma_1}^2 + D_{\sigma_2}, \\ \bar{D}_3 &= D_{\sigma_1}^3 + \frac{1}{2}D_{\sigma_3} + \frac{3}{2}(D_{\sigma_2}D_{\sigma_1} + D_{\sigma_1}D_{\sigma_2}), \\ \bar{D}_4 &= D_{\sigma_1}^4 + 2D_{\sigma_1}^2D_{\sigma_2} + 2D_{\sigma_1}D_{\sigma_2}D_{\sigma_1} + 2D_{\sigma_2}D_{\sigma_1}^2 + 3D_{\sigma_2}D_{\sigma_2} + D_{\sigma_3}D_{\sigma_1} + D_{\sigma_1}D_{\sigma_3} + D_{\sigma_4}\end{aligned} \quad (74)$$

mit den Abkürzungen

$$\sigma_2 := \{s_2, s_1\}, \quad \sigma_3 := \{s_2 - s_1, \sigma_2\}, \quad \sigma_4 := \{s_2, \{\sigma_2, s_1\}\}.$$

Für weitere Umformungen wird die Gleichung (70) in

$$l = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \Delta_m = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \bar{D}_m l'' = \bar{D} l'' \quad (75)$$

mit der Abkürzung

$$\bar{D} l'' = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \bar{D}_m = 1 + \bar{D}_1 + \frac{1}{2!} \bar{D}_2 + \frac{1}{3!} \bar{D}_3 + \frac{1}{4!} \bar{D}_4 + \frac{1}{5!} \bar{D}_5 + \frac{1}{6!} \bar{D}_6 + \dots$$

umgeschrieben.

5.3.3 Bestimmung der Erzeugenden des Produktes zweier Lie-Transformationen bis zur 4. Ordnung

Es ist das Produkt (70) zweier Lie-Transformationen als eine einzige Lie-Transformation

$$l = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_s^k l'' = D l'' \quad (76)$$

mit

$$D := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_s^k$$

zu bestimmen. Ein Vergleich zwischen (76) und (75) zeigt, dass

$$\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \bar{D}_m = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_s^k. \quad (77)$$

Zur Bestimmung der Erzeugenden wird

$$s = \sum_{k \geq 1} \xi_k = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \dots \quad (78)$$

gesetzt mit

$$\xi_k = O((\xi_1)^k) = O(s^m).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} D_s^1 &= D_{\xi_1} + D_{\xi_2} + D_{\xi_3} + D_{\xi_4} + \dots, \\ D_s^2 &= D_{\xi_1}^2 + (D_{\xi_1} D_{\xi_2} + D_{\xi_2} D_{\xi_1}) + (D_{\xi_2}^2 + D_{\xi_1} D_{\xi_3} + D_{\xi_3} D_{\xi_1}) \dots, \\ D_s^3 &= D_{\xi_1}^3 + (D_{\xi_1}^2 D_{\xi_2} + D_{\xi_1} D_{\xi_2} D_{\xi_1} + D_{\xi_2} D_{\xi_1}^2) + \dots \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D_s^k &= 1 + \frac{1}{1!} D_s^1 + \frac{1}{2!} D_s^2 + \frac{1}{3!} D_s^3 + \frac{1}{4!} D_s^4 + \dots \\ &= 1 + \\ &+ D_{\xi_1} + \\ &+ D_{\xi_2} + \frac{1}{2!} D_{\xi_1}^2 + \\ &+ D_{\xi_3} + \frac{1}{2!} (D_{\xi_1} D_{\xi_2} + D_{\xi_2} D_{\xi_1}) + \frac{1}{3!} D_{\xi_1}^3 + \\ &+ D_{\xi_4} + \frac{1}{2!} (D_{\xi_2}^2 + D_{\xi_1} D_{\xi_3} + D_{\xi_3} D_{\xi_1}) + \frac{1}{3!} (D_{\xi_1}^2 D_{\xi_2} + D_{\xi_1} D_{\xi_2} D_{\xi_1} + D_{\xi_2} D_{\xi_1}^2) + \frac{1}{4!} D_{\xi_1}^4 + \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite hat die m te Zeile die Größenordnung $O(s^m)$ und lässt sich gemäß (77) gleich $(1/m!) \bar{D}_m$ setzen. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} D_{\xi_1} &= \bar{D}_1, \\ D_{\xi_2} + \frac{1}{2!} D_{\xi_1}^2 &= \frac{1}{2!} \bar{D}_2, \\ D_{\xi_3} + \frac{1}{2!} (D_{\xi_1} D_{\xi_2} + D_{\xi_2} D_{\xi_1}) + \frac{1}{3!} D_{\xi_1}^3 &= \frac{1}{3!} \bar{D}_3, \\ D_{\xi_4} + \frac{1}{2!} (D_{\xi_2}^2 + D_{\xi_1} D_{\xi_3} + D_{\xi_3} D_{\xi_1}) + \frac{1}{3!} (D_{\xi_1}^2 D_{\xi_2} + D_{\xi_1} D_{\xi_2} D_{\xi_1} + D_{\xi_2} D_{\xi_1}^2) + \frac{1}{4!} D_{\xi_1}^4 &= \frac{1}{4!} \bar{D}_4 \end{aligned}$$

zur schrittweisen Bestimmung der Funktionen ξ_k und damit der Erzeugenden (78), wobei die $\bar{D}_k$ durch (74) gegeben sind. Man erhält

$$\xi_1 = \sigma_1, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \sigma_2, \quad \xi_3 = \frac{1}{12} \sigma_3, \quad \xi_4 = \frac{1}{24} \sigma_4$$

und schließlich

$$s = \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{1}{12} \sigma_3 + \frac{1}{24} \sigma_4 + O((\sigma_1)^5).$$

5.4 Abschätzungstheoreme für kanonische Systeme

Betrachtet seien zwei dynamische Systeme mit den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}} \right) + \mathbf{K} \left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (79)$$

und

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \bar{\mathbf{q}}}, \frac{\partial H^*}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \right), \quad (80)$$

wobei das System (80) integrabel sei und die allgemeine Lösung $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\alpha}, t)$, $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ besitze. Bildet man die Differenz beider Gleichungen und linearisiert man um diese Differenz die Lösung von (80), so ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{z} + \mathbf{r}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (81)$$

für die Abweichungen

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (82)$$

wobei

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{D}|_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$$

die Koeffizientenmatrix ist mit

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

als kanonischer Matrix und

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} \right)^T & \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}} \right)^T & \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \end{pmatrix}$$

als Matrix der partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Hamilton-Funktion.

Die Spaltenmatrix

$$\mathbf{r} := \mathbf{K} \left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \Big|_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$$

erfasst die inhomogenen Terme aus (79).

Aus der Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen ist bekannt, dass sich die Lösung des Systems (81) beispielsweise in der Gestalt

$$\mathbf{z} = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \mathbf{c} + e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} \mathbf{r}(\tau) d\tau \quad (83)$$

oder in der Gestalt

$$\mathbf{z} = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau \quad (84)$$

darstellen lässt. Der erste Term auf der rechten Seite, nämlich

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma} = (\phi_{kj}),$$

ist die allgemeine Lösung des zugeordneten homogenen Systems

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}.$$

$\Phi(t)$ ist die *Fundamentalmatrix* des linearen Systems, deren Determinante $\|\Phi(t)\|$ als *Wronski-Determinante* bezeichnet wird. Die Spaltenmatrix $\mathbf{c}$ in (83) bzw. (84) fasst die Integrationskonstanten zusammen.

Der zweite Term stellt eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems (81) dar. Ersichtlich gilt $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{c}$.

Damit führt die Abschätzung der Differenz zwischen den Lösungen der beiden Systeme (79) und (80) auf eine Abschätzung der Lösung von (83) oder (84). Dazu kann man auf Abschätzungstheoreme zurückgreifen. Solche Theoreme wurden u. a. angegeben von Kamke, Arnold und Kirchgraber.

5.4.1 Abschätzungstheorem von Kamke

Gibt es zwei Konstanten $M > 0$ und $N > 0$, so dass

$$\left\| \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right\| \leq M \|\mathbf{z}\| + N$$

für $t_0 \leq t \leq T < \infty$ gilt, dann gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{z}(t_0)\| e^{M(t-t_0)} + \frac{N}{M} (e^{M(t-t_0)} - 1)$$

für die Lösung, wobei $\|\mathbf{z}\|$ den Betrag des Vektors $\mathbf{z}$ bezeichnet.

5.4.2 Abschätzungstheorem von Arnold

Es existiert eine Zahl $\delta > 0$ für zwei beliebige Größen $T > t_0$ und $\varepsilon > 0$ sodass, wenn $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \varepsilon$, dann $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon\delta$ für $t_0 < t < T$ gilt, wobei $\mathbf{y}(t)$ die Lösung des linearisierten Systems für ein gegebenes System für die Unbekannten $\mathbf{x}(t)$ darstellt.

Das Theorem von Arnold ist nur eine andere Darstellung des Theorems von Kamke. In beiden Theoremen hängt die Genauigkeit der Lösung eines linearisierten Systems, d. h. die Kleinheit der Differenz $\mathbf{z}$, von zwei Faktoren ab - einerseits von den Anfangswerten, andererseits von der Länge des Zeitintervalls. Gleiches gilt auch für das nächste Theorem.

5.4.3 Abschätzungstheorem von Kirchgraber

In Kirchgraber [29] findet man drei Theoreme, die Kirchgraber basierend auf der *Gronwall'schen Ungleichung* (Walter [72]) hergeleitet hat. Die Varianten unterscheiden sich durch die Menge an verfügbarer Information über das gestörte Bewegungsproblem

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}).$$

Der Lösung $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}^0)$ mit den Anfangswerten $\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}(t = 0)$ wird gegenübergestellt die Lösung $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}^0)$ der Bewegungsgleichung des gestörten Problems

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{h}(\mathbf{y}) \quad \text{mit dem Störterm } \mathbf{h}(\mathbf{y}).$$

Kirchgraber gibt für die Abweichung $|\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\xi})|$ ausgehend von der Gronwall'schen Ungleichung die Fehlerschranken an

$$|\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\xi})| \leq \frac{M}{k} (e^{kt} - 1).$$

Dabei ist angenommen, dass der Störterm $\mathbf{h}$ gleichmäßig beschränkt ist durch eine Konstante M und $\mathbf{g}$ einer globalen Lipschitzbedingung (Walter [72]) mit einer Lipschitzkonstanten k genügt. Diese obige Abschätzung ist pessimistisch und wird in den weiteren Varianten des Abschätzungstheorems von Kirchgraber verschärft.

5.4.4 Abschätzungstheorem von Cui für kanonische Systeme

Es wird nun die spezielle kanonische Gestalt der Bewegungsgleichungen berücksichtigt.

Wenn $\text{tr} \mathbf{A}(\tau) = 0$, dann gilt für die Lösung des Systems (81) die Abschätzung

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{c}\| + \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{r}(\tau) d\tau \right\|. \quad (85)$$

Beweis: Man schreibe (84) um in

$$\mathbf{z} = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) d\mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{b} := \int_{t_0}^t \mathbf{r}(\tau) d\tau.$$

Partielle Integration ergibt

$$\mathbf{z} = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{c} + \mathbf{b}(t) - \Phi(t) \int_{t_0}^t (d\Phi^{-1}(\tau)) \mathbf{b},$$

wenn man $\mathbf{b}(t_0) = \mathbf{0}$ beachtet. Mit bekannten Sätzen aus der Matrizenrechnung erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\| &\leq \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(t_0)\| \|\mathbf{c}\| + \|\mathbf{b}(t)\| - \|\Phi(t)\| \int_{t_0}^t \|d\Phi^{-1}(\tau)\| \|\mathbf{b}\| \\ &= \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(t_0)\| \|\mathbf{c}\| + \|\mathbf{b}(t)\| - \|\Phi(t)\| \int_{t_0}^t d\|\Phi^{-1}(\tau)\| \|\mathbf{b}\|. \end{aligned}$$

Für die zeitliche Entwicklung der *Wronski-Determinante* $\|\Phi(t)\|$ gilt nach der *Liouville-Formel*

$$\|\Phi(t)\| = \|\Phi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau},$$

wobei $\text{tr} \mathbf{A}(\tau)$ die Spur der Matrix $\mathbf{A}(\tau)$ bezeichnet. Man erhält so weiter

$$\|\mathbf{z}\| \leq e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau} \|\mathbf{c}\| + \|\mathbf{b}(t)\| - e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t \|\mathbf{b}\| d e^{-\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau}.$$

Wegen $\text{tr} \mathbf{A}(\tau) = 0$ folgen die Beziehungen

$$e^{\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau} = 1, \quad d e^{-\int_{t_0}^t \text{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau} = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{c}\| + \|\mathbf{b}(t)\|,$$

was zu beweisen war.

Das Verschwinden der Spur der Matrix ergibt sich aus einer geeigneten Zuordnung der Komponenten von (82). Ordnet man sie entsprechend

$$(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4, \dots, \tilde{z}_{2n-1}, \tilde{z}_{2n}) := (\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_n)$$

neu zu, so erhält man aus (81) das neue Gleichungssystem

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{r}}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \dot{\tilde{p}}_1 \\ \dot{\tilde{q}}_2 \\ \dot{\tilde{p}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n \\ \dot{\tilde{p}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{q_1 p_1}^* & H_{p_1 p_1}^* & H_{q_2 p_1}^* & H_{p_2 p_1}^* & \cdots & \cdots & H_{q_n p_1}^* & H_{p_n p_1}^* \\ -H_{q_1 q_1}^* & -H_{p_1 q_1}^* & -H_{q_2 q_1}^* & -H_{p_2 q_1}^* & \cdots & \cdots & -H_{q_n q_1}^* & -H_{p_n q_1}^* \\ H_{q_1 p_2}^* & H_{p_1 p_2}^* & H_{q_2 p_2}^* & H_{p_2 p_2}^* & \cdots & \cdots & H_{q_n p_2}^* & H_{p_n p_2}^* \\ -H_{q_1 q_2}^* & -H_{p_1 q_2}^* & -H_{q_2 q_2}^* & -H_{p_2 q_2}^* & \cdots & \cdots & -H_{q_n q_2}^* & -H_{p_n q_2}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ H_{q_1 p_n}^* & H_{p_1 p_n}^* & H_{q_2 p_n}^* & H_{p_2 p_n}^* & \cdots & \cdots & H_{q_n p_n}^* & H_{p_n p_n}^* \\ -H_{q_1 q_n}^* & -H_{p_1 q_n}^* & -H_{q_2 q_n}^* & -H_{p_2 q_n}^* & \cdots & \cdots & -H_{q_n q_n}^* & -H_{p_n q_n}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \\ \tilde{p}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{p_1} \\ -R_{q_1} \\ R_{p_2} \\ -R_{q_2} \\ \vdots \\ R_{p_n} \\ -R_{q_n} \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Aus (86) ist ersichtlich, dass

$$\text{tr} \tilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^n (H_{q_k p_k}^* - H_{p_k q_k}^*) = 0.$$

Somit ist die Bedingung für die Abschätzung (85) erfüllt und daher

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \|\mathbf{c}\| + \left\| \int_{t_0}^t \tilde{\mathbf{r}}(\tau) d\tau \right\|.$$

Anmerkung:

Wenn die Anfangswerte $\mathbf{c}$ im Bereich von $\left\| \int_{t_0}^t \tilde{\mathbf{r}}(\tau) d\tau \right\|$ gewählt (oder einfach zu Null gesetzt) würden, dann würde die Lösung von der gleichen Größenordnung wie

$$\left\| \int_{t_0}^t \tilde{\mathbf{r}}(\tau) d\tau \right\| = \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{r}(\tau) d\tau \right\|$$

sein. Die Größenordnung von $\left\| \int_{t_0}^t \mathbf{r}(\tau) d\tau \right\|$ ist aber durch die Größenordnung von $\int_{t_0}^t R d\tau$ festgelegt.

Damit ist das Theorem von Cui bewiesen.

6 Modifiziertes Cui-Verfahren

6.1 Aufgabenstellung

Vorgelegt sei das autonome System kanonischer Gleichungen

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial X}$$

für die $2n$ kanonisch konjugierten Variablen, die Impulse X und die Koordinaten Y

$$(X, Y) := (x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$$

mit der Hamilton-Funktion

$$F = F(X, Y; \varepsilon)$$

und dem Kleinheitsparameter $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

Dass man das Bewegungsproblem im Allgemeinfall streng lösen kann, ist nicht zu erwarten. Eine Hilfe in dieser Frage sind eine Reihe bekannter Integrabilitäts- bzw. Nichtintegrabilitätstheoreme. Diese decken aber bei weitem nicht die denkbaren Funktionsstrukturen für die Hamilton-Funktion ab (Schneider/Cui [64]). Wenigstens genäherte Lösungen lassen sich finden mit den Verfahren der allgemeinen Störungsrechnung (Schneider [61]). Die vielfältigen Bemühungen legen speziellere Strukturen der Hamilton-Funktion zugrunde, die in vielen himmelsmechanischen Bewegungsproblemen angenommen werden können. Unter diesen sind vor allem zu nennen:

1.

$$F(X, Y) = F_0(X, Y) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k F_k(X, Y), \quad (87)$$

wobei das System für $\varepsilon = 0$ lösbar ist

2.

$$F(X, Y) = F^*(X, Y; \varepsilon) + \hat{R}(X, Y; \varepsilon),$$

worin $F^*(X, Y; \varepsilon)$ ein integrables Bewegungsproblem definiert und der *Restanteil* von der Ordnung des Kleinheitsparameters ist:

$$\hat{R}(X, Y; \varepsilon) = O(\varepsilon).$$

3.

$$F(X, Y; \varepsilon) = F^*(X, Y; \varepsilon) + R(X, Y; \varepsilon), \quad (88)$$

worin, wie im Fall 2, $F^*(X, Y; \varepsilon)$ ein integrables Bewegungsproblem definiert, aber für den Restanteil gelte

$$R(X, Y; \varepsilon) = O(\varepsilon),$$

$$\int R(X, Y; \varepsilon) dt = O(\vartheta \varepsilon) \ll O(1). \quad (89)$$

Diese beiden Forderungen an den Restanteil $R(X, Y; \varepsilon)$ der Hamilton-Funktion bedeuten

- $R(X, Y; \varepsilon)$ muss eine beschränkte periodische Funktion der unabhängigen Variable t sein und damit darstellbar sein durch eine Linearkombination von Termen der Form $A \cos bt$, $B \sin bt$ mit $A, B = O(\varepsilon)$
- der *Resonanzfaktor* ϑ muss beschränkt sein durch $\delta := \vartheta \varepsilon$ oder $\vartheta \ll \varepsilon^{-1}$

ad 1.

Dieser Fall ist charakteristisch für den Leitgedanken der Störungstheorie - der erste Term der Hamilton-Funktion definiert das ungestörte Bewegungsproblem, der zweite die Störung. Das Beispiel par excellence ist das gestörte Kepler-Problem, $F_0(X, Y)$ beschreibt das ungestörte Kepler-Problem. Diese Formulierung trifft man insbesondere bei Poincaré. Der integrable Teil $F_0(X, Y)$ kann aber auch ein über das Kepler-Problem hinausgehendes Bewegungsproblem beschreiben und beispielsweise einen Anteil der Störung erfassen. Als Beispiel seien genannt das Vinti-Problem oder das Cui-Problem. Das führt dann zum Fall 2.

ad 2.

In diesem Fall ist die Schnittstelle zwischen ungestörtem und gestörtem Bewegungsproblem anders gelegt als im Fall 1. Durch den integrablen Anteil wird ein intermediäres Bewegungsproblem eingeführt, das gegenüber dem Fall 1 einen Teil der Störung in die ungestörte Bewegung einbezieht. Ein Beispiel ist die Cui-Lösung, die eine säkular in Knoten- und Apsidenlage gestörte Keplerbewegung beschreibt und deren mittlere Bewegung ebenfalls abgeändert ist.

ad 3.

Diese Struktur liegt einer Behandlung des Bewegungsproblems zugrunde, die in Schneider/Cui [64] vorgeschlagen wurde, um mit den Mitteln der Transformationstheorie zu einer genäherten Lösung zu gelangen.

6.2 Vorbereitende Bemerkungen

Der Darstellung des Lösungsverfahrens liegen die in Abschnitt 3.1 angegebenen Definitionen und Theoreme zugrunde, die zugeschnitten auf den hier interessierenden Fall 3 nochmals aufgeführt seien:

Definition (1): Ein kanonisches System mit der Hamilton-Funktion

$$F^* = F^*(X, Y; \varepsilon)$$

heiße ein *integrables Näherungssystem* k . *Ordnung* eines kanonischen Systems mit der Hamilton-Funktion

$$F = F(X, Y; \varepsilon),$$

wenn für das *Residuum*

$$R(X, Y; \varepsilon) = F(X, Y; \varepsilon) - F^*(X, Y; \varepsilon)$$

gilt

$$\int_0^t R(\bar{X}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; \tau; \varepsilon), \bar{Y}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; \tau; \varepsilon)) d\tau = O(\varepsilon^{k+1}) \quad \text{für} \quad |t| < \infty. \quad (90)$$

Darin sei

$$\bar{x}_k = \bar{x}_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; t), \quad \bar{y}_k = \bar{y}_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; t) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (91)$$

die allgemeine Lösung des Systems mit der Hamilton-Funktion $F^*(X, Y; \varepsilon)$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ sind unabhängige Integrationskonstanten in dieser Lösung.

Anmerkungen:

- Die an das Residuum gestellte Bedingung (90) erfordert dessen *Periodizität*. Das erlaubt nur kurz- und langperiodische Terme der Gestalt

$$A \sin \omega t \quad \text{oder} \quad A \cos \omega t \quad \text{mit} \quad A = O(\omega \varepsilon^{k+1}).$$

Für einen langperiodischen Term (ω klein) muss demnach die Amplitude kleiner sein als für einen zulässigen kurzperiodischen Term.

- Unter Bedingung (89) definiert der integrable Anteil $F^*(X, Y; \varepsilon)$ ein IAS 0. Ordnung des Systems (88).
- Der integrable Anteil $F_0(X, Y)$ definiert i. A. kein IAS des Systems (87). So definiert also das Kepler-Problem kein IAS 0. Ordnung, hingegen die Lelgemann- oder die Cui-Lösung.

Aus vorstehenden Überlegungen folgt ein erstes Existenztheorem für IAS k . Ordnung:

Theorem (1): Unter Voraussetzung (90) ist die allgemeine Lösung (91) zum System mit der Hamilton-Funktion F^* die allgemeine genäherte Lösung k . Ordnung zum System mit der Hamilton-Funktion $F = F(X, Y; \varepsilon)$

$$\bar{x}_k(t) = \bar{x}_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; t) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad \bar{y}_k(t) = \bar{y}_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; t) + O(\varepsilon^{k+1}) \quad (92)$$

für

$$t \in [t_0 - T, t_0 + T] \quad \text{mit} \quad T = O(\varepsilon^{-1}) \quad \text{und} \quad t_0 \text{ beliebig}$$

genau dann, wenn (92) zutrifft für einen Zeitpunkt

$$t = t^* \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Daran schließt sich an die

Definition (2): Ein kanonisches System heißt ein *integrables System k . Ordnung*, wenn ein IAS k . Ordnung existiert, aber keines von höherer Ordnung.

Das führt direkt zum

Theorem (2): Zu einem System, das von k . Ordnung integrabel ist, existieren genäherte allgemeine Lösungen bis zur k . Ordnung.

Schließlich sei angegeben die

Definition (3): Ein kanonisches System heißt *integrabel*, wenn IASe beliebiger Ordnung existieren.

6.3 Schrittweise Konstruktion von IAS beliebiger Ordnung

Ein integrables Näherungssystem beliebiger Ordnung zu einem vorgelegten kanonischen System mit der Hamilton-Funktion (88), also

$$F(X, Y; \varepsilon) = F^*(X, Y; \varepsilon) + R(X, Y; \varepsilon)$$

mit $F^*(X, Y; \varepsilon)$ als IAS von k . Ordnung und $R(X, Y; \varepsilon) = O(\varepsilon)$ kann schrittweise wie folgt konstruiert werden:

1. *Elimination* periodischer Anteile mittels Lie-Transformationen,
2. *Zerlegung* der Hamilton-Funktion in integrable und periodische Anteile,
3. *Wiederholung* der Schritte 1 und 2 bis zur gewünschten Ordnung.

Die Schritte 1 und 2 werden im einzelnen dargestellt und dann am Beispiel des Duffing-Oszillators vorgeführt.

6.3.1 Elimination periodischer Anteile mittels Lie-Transformationen

Mittels einer fast-identischen kanonischen Transformation

$$X, Y \Rightarrow X^{(1)}, Y^{(1)},$$

dargestellt durch die Lie-Reihen

$$X = X^{(1)} + \{X^{(1)}, s^{(1)}\} + \frac{1}{2!} \{\{X^{(1)}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\} + \frac{1}{3!} \{\{\{X^{(1)}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\} + \dots,$$

$$Y = Y^{(1)} + \{Y^{(1)}, s^{(1)}\} + \frac{1}{2!} \{\{Y^{(1)}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\} + \frac{1}{3!} \{\{\{Y^{(1)}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\} + \dots$$

und einer geeignet gewählten *erzeugenden Funktion* $s^{(1)}(X, Y; \varepsilon)$ soll aus dem Residuum $R(X, Y; \varepsilon)$ der dominante Anteil $\tilde{R}(X, Y; \varepsilon)$ eliminiert werden - genauer, in eine höhere Ordnung zurückgedrängt werden. Das gelingt mit folgender Wahl

$$s^{(1)} := \int \tilde{R}(X, Y; \varepsilon) \Big|_{X=X', Y=Y'} dt = O(\vartheta \varepsilon).$$

Diese Transformation ergibt die transformierte Hamilton-Funktion

$$F'(X', Y'; \varepsilon) = F^*(X', Y'; \varepsilon) + \hat{R}(X', Y'; \varepsilon) \quad (93)$$

mit dem integrierbaren Anteil $F^*(X', Y'; \varepsilon)$ und der allgemeinen Lösung

$$X = \bar{X}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t), \quad Y = \bar{Y}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; t), \quad (94)$$

sowie dem Residuum

$$\begin{aligned} \hat{R}(X', Y'; \varepsilon) &= \left(R - \tilde{R} + \frac{1}{2!} \{\tilde{R}, s^{(1)}\} - \frac{1}{3!} \{\{\tilde{R}^{(1)}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\} + \frac{1}{4!} \{\{\{\tilde{R}^{(1)}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\}, s^{(1)}\} + \dots \right) \Big|_{X=X', Y=Y'} \\ &= O(\vartheta \varepsilon) = O(\delta \varepsilon). \end{aligned}$$

Dieses Residuum ist von höherer Ordnung klein, verglichen mit $R(X, Y; \varepsilon)$.

6.3.2 Zerlegung des neuen Residuums

Wenn das neue Residuum $\hat{R}(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon)$, berechnet mit der allgemeinen Lösung (94), zerlegt werden kann gemäß

$$\hat{R}(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon) = R^*(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon) + R(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon), \quad (95)$$

dann ist die Funktion

$$F^{(0)*}(X, Y; \varepsilon) := F_0(X, Y) + R^*(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon) \Big|_{\bar{X}=X, \bar{Y}=Y} \quad (96)$$

die Hamilton-Funktion eines integrierbaren Systems, ein IAS zu dem vorgelegten System und

$$R(X, Y; \varepsilon) := F(X, Y; \varepsilon) - F^{(0)*}(X, Y; \varepsilon) \quad (97)$$

ist das Residuum des Systems (93). Der Annäherungsgrad des IAS (96) hängt von der Größenordnung des Residuums (97) ab.

6.3.3 Schrittweise Konstruktion eines IAS höherer Ordnung

Das durch (93) beschriebene kanonische System erfüllt die Voraussetzung (95), so dass ein IAS nach Fall 2 konstruiert werden kann. Begründung:

- wegen der Periodizität von $R(X, X; \varepsilon) = O(\varepsilon)$ sind auch der Anteil $\hat{R}(\bar{X}, \bar{X}; \varepsilon)$ sowie die Differenz $R - \tilde{R}$ periodisch,
- da $\tilde{R}$ und s periodisch sind, enthalten deren partielle Ableitungen und Produkte untereinander nur konstante und periodische Terme.

Das Residuum des IAS kann weiter mittels einer infinitesimalen Lie-Transformation reduziert werden.

Es ergeben sich IAS immer höherer Ordnung - bis zur geforderten Ordnung. Das führt zu dem

Theorem: Hat ein kanonisches System ein IAS gemäß der Definition (1), so ist es in deren Sinne integrierbar.

6.3.4 Ablaufschema des modifizierten Cui-Verfahrens

Das Vorgehen ist in nachfolgender Abbildung zusammengefasst

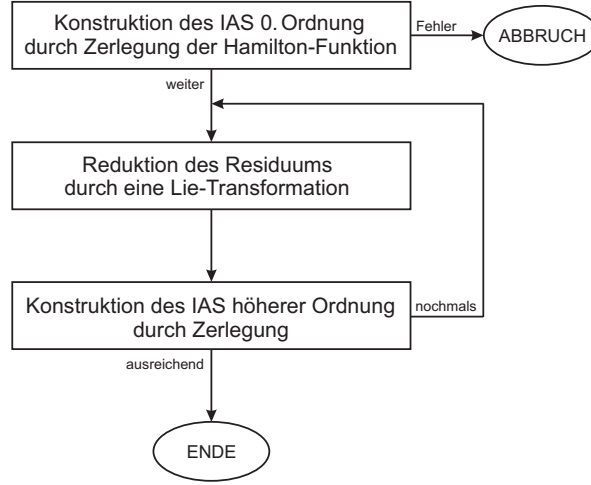


Abb. 3: Ablaufschema Modifiziertes Cui-Verfahren

Vorgelegt ist die Hamilton-Funktion des aktuellen Bewegungsproblems

$$F(X, Y; \varepsilon) = \underbrace{F^*(X, Y; \varepsilon)}_{\text{ungestörter Anteil}} + \underbrace{R(X, Y; \varepsilon)}_{\text{Störanteil (Residuum)}}.$$

1. Konstruktion des IAS 0. Ordnung

Umverteilung unter den Komponenten von F :

$$F = \underbrace{F^*}_{\substack{\text{Zielsystem} \\ \text{integabel}}} + \underbrace{R}_{\substack{\text{Residuum} \\ O(R) = \varepsilon^k}}.$$

2. Konstruktion des IAS k . Ordnung ($k = 1, 2, \dots$)

(a) Elimination periodischer Anteile mittels Lie-Transformation $X, Y \xrightarrow{s} X', Y'$:

$$X = X' + \{X', s^{(k)}\} + \frac{1}{2!} \{\{X', s^{(k)}\}, s^{(k)}\} + \frac{1}{3!} \{\{\{X', s^{(k)}\}, s^{(k)}\}, s^{(k)}\} + \dots,$$

$$Y = Y' + \{Y', s^{(k)}\} + \frac{1}{2!} \{\{Y', s^{(k)}\}, s^{(k)}\} + \frac{1}{3!} \{\{\{Y', s^{(k)}\}, s^{(k)}\}, s^{(k)}\} + \dots$$

mit der Lösung

$$X' = X'(\alpha, t), \quad Y' = Y'(\alpha, t)$$

zum IAS k . Ordnung $F^{(k)*}(X', Y'; \varepsilon)$.

Beseitigung von $\tilde{R}^{(k)}(X, Y; \varepsilon)$ aus $\tilde{R}^{(k)}(X, Y; \varepsilon)$ mittels Erzeugender

$$s^{(k)}(X', Y'; \varepsilon) := \int \tilde{R}^{(k)}(X, Y; \varepsilon) \Big|_{X=X', Y=Y'} dt = O(\vartheta \varepsilon).$$

Ergebnis: transformierte Hamilton-Funktion

$$F^{(k)}(X', Y'; \varepsilon) = \underbrace{F^{(k)*}(X', Y'; \varepsilon)}_{\text{ungestörter Anteil}} + \underbrace{\hat{R}^{(k)}(X', Y'; \varepsilon)}_{\text{neuer periodischer Störanteil}} \quad \text{mit} \quad O(\hat{R}^{(k)}) = O(\vartheta \varepsilon) \ll O(R) \quad (98)$$

mit der Ersatzfunktion

$$\hat{R}^{(k)}(X, Y; \varepsilon) = \left(R^{(k)} - \tilde{R}^{(k)} + \frac{1}{2!} \{\tilde{R}^{(k)}, s^{(k)}\} + \frac{1}{3!} \{\{\tilde{R}^{(k)}, s^{(k)}\}, s^{(k)}\} \right) \Big|_{X=X', Y=Y'}. \quad (99)$$

$$(b) \text{ Zerlegung der Ersatzfunktion } \hat{R}^{(k)}(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon) = \underbrace{R^{(k)*}(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon)}_{\text{integrabler Anteil}} + \underbrace{R^{(k)}(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon)}_{\text{Restanteil}}.$$

(c) Definition des neuen ungestörten Anteils

$$F^{(k+1)*}(X, Y; \varepsilon) := F^{(k)} + R^{(k)*}(\bar{X}, \bar{Y}; \varepsilon) \Big|_{X=X', Y=Y'}. \quad (100)$$

Ergebnis: neue Hamilton-Funktion

$$F^{(k+1)} = \underbrace{F^{(k)*}}_{\substack{\text{IAS} \\ k. \text{ Ordnung}}} + \underbrace{R^{(k)}}_{\substack{\text{neuer} \\ \text{Störanteil}}}. \quad (101)$$

zurück nach 2(a) bis gewünschtes IAS erreicht.

7 Modifiziertes Kamel-Deprit-Verfahren

Howland [19] hat 1977 erstmals für autonome kanonische Systeme, Cary [4] 1978 für nicht-autonome gezeigt, wie quadratische Konvergenz bei Verfahren, die sich auf Lie-Reihen bzw. Lie-Transformierte stützen, erreicht wird. Anknüpfend an Cary ist in Lichtenberg/Lieberman [38] gezeigt worden, wie die Deprit'schen Gleichungen der auf Lie-Transformierten basierenden Störungstheorie so abgearbeitet werden können, dass quadratische Konvergenz resultiert. In Schneider [61] wurde das auf die Kamel-Gleichungen übertragen. Diese gehen im Sonderfall kanonischer Systeme in die Deprit'schen Gleichungen über.

Die Verwendung der Kamel-Gleichungen wird im Folgenden vorgezogen, weil diese allgemeiner für nicht-kanonische Systeme formuliert sind und der vorzustellende Algorithmus auf solche Systeme übertragbar sein könnte. Das bleibt zu untersuchen.

7.1 Lösungskonzept

Leitgedanke: Durch eine oder mehrere Variablentransformationen, ausgeführt je als fast-identische kanonische Transformationen und dargestellt durch Lie-Reihen, soll eine Funktionsstruktur der Hamilton-Funktion erreicht werden, die die Lösung des Bewegungsproblems erleichtert:

$$H^{(0)} \xrightarrow{s^{(1)}} H^{(1)} \xrightarrow{s^{(2)}} H^{(2)} \xrightarrow{s^{(3)}} \dots H^{(n-1)} \xrightarrow{s^{(n)}} H^{(n)}.$$

Das kann auf verschiedene Weise geschehen, weil die Funktionsstrukturen der Erzeugenden wie auch der neuen Hamilton-Funktion zunächst frei wählbar sind. Es besteht jedoch eine Abhängigkeit dieser Funktionsstrukturen über den Zusammenhang der jeweils alten und neuen Hamilton-Funktion H bzw. K

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \frac{\partial S^{(k)}}{\partial t},$$

in den die Erzeugende S der jeweiligen kanonischen Transformation eingeht.

Geht man in diesen Zusammenhang mit den Reihenansätzen für die Hamilton-Funktionen

$$H^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{H}_n^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon) =: \sum_{n \geq 0} H_n^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon),$$

$$H^{(k+1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{H}_n^{(k+1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) =: \sum_{n \geq 0} H_n^{(k+1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon),$$

sowie mit dem Ansatz für die *Erzeugende*

$$S^{(k+1)} = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{S}_{n+1}^{(k+1)} =: \sum_{n \geq 0} S_{n+1}^{(k+1)}$$

einer kanonischen Transformation

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)^T \rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t)^T$$

ein, so resultieren die *Kamel-Gleichungen* (Kamel [22], [23], Schneider [61] § 24.7)

$$\frac{DS_i^{(k)}}{Dt} = H_i^{(k)} - H_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(k)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(k+1)} \right). \quad (102)$$

Darin bedeuten

$$C_m^j := \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad L_k f := (f; S_k) \text{ für } k \geq 1, \quad G_1 := L_1, \quad G_j := L_j - \sum_{m=0}^{j-2} C_m^j G_{j-m-1}, \quad \frac{DS_n}{Dt} = \frac{\partial S_n}{\partial t} - L_n H_0.$$

Anmerkung: In Nayfeh [50] findet man folgende alternative Schreibweise der allgemeinen Kamel-Gleichung (102):

$$H_i^{(k+1)} = H_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L'_j H_{i-1}^{(k)} + C_j^{i-1} H_{j,i-j}^{(k+1)} \right) - \frac{DS_i^{(k)}}{Dt}$$

mit

$$L'_j f := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial S_j^{(k)}}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial S_j^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}}, \quad H_{j,i}^{(k+1)} = L'_j H_i^{(k+1)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L'_j H_{j-m,i}^{(k+1)}.$$

Darauf aufbauend kann ein Lösungsverfahren ausgearbeitet werden, das quadratisch konvergent ist (siehe Schneider [61] § 24.9.2.5). Für die *Deprit'schen Gleichungen*, in die im Sonderfall kanonischer Systeme die Kamel-Gleichungen übergehen, ist in Lichtenberg/Liebermann [38] gezeigt, wie diese abgearbeitet werden müssen, um *quadratische Konvergenz* zu erzielen.

Dieser Weg ist von Schneider [61] § 24.9.2.5 auf die *Kamel-Gleichungen* übertragen worden, um auch durch nicht-kanonische Variationsgleichungen formulierte Störungsprobleme zu erschließen. Die Übertragung soll hier für kanonische Systeme weiter ausgeführt werden und insbesondere im Hinblick auf die Konstruktion einer hochgenauen Bahntheorie um einen Schritt weitergeführt werden als in Schneider [61] § 24.9.2.5.

Die Kamel-Gleichungen lauten bis $n = 4$ explizit

$$n=0 \quad H_0^{(k+1)} = H_0^{(k)},$$

$$n=1 \quad H_1^{(k+1)} = H_1^{(k)} - \frac{dS_1^{(k+1)}}{dt},$$

$$n=2 \quad H_2^{(k+1)} = H_2^{(k)} + L_1 H_1^{(k)} + G_1 H_1^{(k+1)} - \frac{dS_2^{(k+1)}}{dt},$$

$$n=3 \quad H_3^{(k+1)} = H_3^{(k)} + L_1 H_2^{(k)} + 2L_2 H_1^{(k)} + 2G_1 H_2^{(k+1)} + G_2 H_1^{(k+1)} - \frac{dS_3^{(k+1)}}{dt},$$

$$n=4 \quad H_4^{(k+1)} = H_4^{(k)} + C_0^3 L_1 H_3^{(k)} + C_1^3 L_1 H_3^{(k+1)} + C_1^3 L_2 H_2^{(k)} + C_2^3 G_2 H_2^{(k+1)} + C_0^3 L_3 H_1^{(k)} + C_3^3 G_3 H_1^{(k+1)} - \frac{dS_4^{(k+1)}}{dt}.$$

Die beiden letzten Gleichungen lauten, beachtet man die Definitionen der Größen C_m^n und G_j ,

$$\begin{aligned} H_3^{(k+1)} &= H_3^{(k)} + L_1 H_2^{(k)} + 2L_2 H_1^{(k)} + 2G_1 H_2^{(k+1)} + G_2 H_1^{(k+1)} - \frac{dS_3^{(k+1)}}{dt} \\ &= H_3^{(k)} + \left(H_2^{(k)}; S_1^{(k+1)} \right) + 2 \left(H_2^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right) + 2 \left(H_2^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right) + 2 \left(H_1^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right) - \frac{dS_3^{(k+1)}}{dt} \\ &= H_3^{(k)} + \left(H_2^{(k)}; S_1^{(k+1)} \right) + 2 \left(H_2^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right) + 2 \left(H_2^{(k+1)} + H_1^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right) - \frac{dS_3^{(k+1)}}{dt} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} H_4^{(k+1)} &= H_4^{(k)} + C_0^3 \left(H_3^{(k)}; S_1^{(k+1)} \right) + C_1^3 \left(H_3^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right) + C_1^3 \left(H_2^{(k)}; S_2^{(k+1)} \right) + \left(H_2^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right) - \\ &\quad - \left(\left(H_2^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right) + 2C_0^3 \left(H_1^{(k)}; S_3^{(k+1)} \right) - 2C_0^3 \left(\left(H_3^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right); S_2^{(k+1)} \right) + \\ &\quad + C_0^3 \left(\left(\left(H_1^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right) - C_0^3 \left(\left(H_1^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right) + C_0^3 \left(H_1^{(k+1)}; S_3^{(k+1)} \right) - \\ &\quad - \frac{dS_4^{(k+1)}}{dt} \\ &= H_4^{(k)} + \left(H_3^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right) + 3 \left(H_3^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right) + 3 \left(H_2^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right) + \\ &\quad + 3 \left[\left(H_2^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right) - \left(\left(H_2^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right) \right] + 2 \left(H_1^{(k+1)}; S_3^{(k+1)} \right) - 2 \left(\left(H_1^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right); S_2^{(k+1)} \right) + \\ &\quad + \left(\left(\left(H_1^{(k+1)}; S_1^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right) - \left(\left(H_1^{(k+1)}; S_2^{(k+1)} \right); S_1^{(k+1)} \right) + \left(H_1^{(k+1)}; S_3^{(k+1)} \right) - \frac{dS_4^{(k+1)}}{dt}. \end{aligned}$$

7.2 Verwendung der Kamel-Gleichungen

Das Bewegungsproblem sei definiert durch die *alte* Hamilton-Funktion (*aHF*)

$$H^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} H_n^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon), \quad (103)$$

worin ε der gewählte Kleinheitsparameter des Störungsproblems ist.

Zielvorstellung: Jede kanonische Transformation zielt im Folgenden darauf ab, integrable Anteile aus den Störtermen der *aHF* abzutrennen und sie in den ungestörten Anteil der *nHF* aufzunehmen.

Weiter wird durch eine geeignete Erzeugende der verbleibende Anteil dieser Störterme in eine höhere Ordnung zurückgedrängt, also aus den Ordnungen der fraglichen Störterme eliminiert. Kernstück dieses Vorgehens ist also eine Kombination aus *Zerlegung + Elimination*

$$H_i^{(k)} = \underbrace{\left[H_i^{(k)} \right]}_{\text{integrabler Anteil}} + \underbrace{\left\{ H_i^{(k)} \right\}}_{\text{periodischer Anteil}}$$

von Störtermen der *aHF* und die Verteilung der entstehenden Anteile auf den ungestörten integrablen Anteil der *nHF* und auf Störterme höherer Ordnung der *nHF*. Durch Nutzung einer entsprechenden Anzahl von Kamel-Gleichungen soll die *quadratische Konvergenz* des Lösungsverfahrens gesichert werden.

7.2.1 Erste Transformation ($k = 0$)

Bestimmt werden soll eine *neue* Hamilton-Funktion (*nHF*)

$$H^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} H_n^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) \quad (104)$$

mit Hilfe der *Kamel-Gleichungen*, die der Lösung förderliche Eigenschaften aufweise.

Der Übergang $aHF \xrightarrow{s} nHF$ werde durch eine fast-identische kanonische Transformation

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)^T \rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t)^T$$

vermittelt, definiert durch *Transformationsgleichungen*

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{\mathbf{q}}^{(n)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \hat{\mathbf{p}}^{(n)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t) \quad (105)$$

mit

$$\hat{\mathbf{q}}^{(k)} = \frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{P}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_{j,n-j}, \quad \hat{\mathbf{p}}^{(k)} = \frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{Q}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j^{n-1} \hat{\mathbf{p}}_{j,n-j},$$

worin

$$\hat{\mathbf{q}}_{j,i} := G_j \hat{\mathbf{q}}^{(i)} = L_j \hat{\mathbf{q}}^{(i)} - \sum_{m=0}^{j-2} C_m^{j-1} L_{m+1} \hat{\mathbf{q}}_{j-m-1,i} \quad \text{analog für } \hat{\mathbf{p}}_{j,i} \quad (106)$$

und mit der *Erzeugenden*

$$S^{(1)} = \sum_{n \geq 0} S_{n+1}^{(1)}. \quad (107)$$

Anmerkung: In Nayfeh [50] findet man die alternative Schreibweise für die Ausdrücke (106)

$$\hat{\mathbf{q}}_{j,i} := L'_j \hat{\mathbf{q}}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L'_j \hat{\mathbf{q}}_{j-m,i}, \quad \hat{\mathbf{p}}_{j,i} := L'_j \hat{\mathbf{p}}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1} L'_j \hat{\mathbf{p}}_{j-m,i}.$$

Beachtet man die Definition

$$L'_j f := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial S_j^{(k)}}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial S_j^{(k)}}{\partial \mathbf{Q}} \doteq \text{Poisson-Klammer } (f; S_j^{(k)}),$$

so lassen sich die Transformationsgleichungen (105) schreiben in der Gestalt

$$\begin{aligned}
k=1 \quad \mathbf{q} &= \mathbf{Q} + \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \mathbf{P}} \\
\mathbf{p} &= \mathbf{P} - \frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \mathbf{Q}}, \\
\\
k=2 \quad \mathbf{q} &= \mathbf{Q} + \frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{P}} + \left(\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{P}} + \left(\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \mathbf{P}}; S_1^{(2)} \right) \right) \\
\mathbf{p} &= \mathbf{P} - \frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{Q}} + \left(-\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{Q}} + \left(\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial \mathbf{Q}}; S_1^{(2)} \right) \right), \\
\\
k=3 \quad \mathbf{q} &= \mathbf{Q} + \frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{P}} + 2L_1' \mathbf{q}^{(2)} + L_2' \mathbf{q}^{(1)} - (L_1')^2 \mathbf{q}^{(1)} \\
\mathbf{p} &= \mathbf{P} - \frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{Q}} + 2L_1' \mathbf{p}^{(2)} + L_2' \mathbf{p}^{(1)} - (L_1')^2 \mathbf{p}^{(1)} \\
\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die erste Komponente der *neuen* Hamilton-Funktion (104) werde durch die *erste* Kamel-Gleichung ($n = 0$) (Schneider [61], § 24.9.2.5)

$$H_0^{(k+1)} := H_0^{(k)} \quad (108)$$

festgelegt, also durch den dominierenden Term der *alten* Hamilton-Funktion (103). In diese ungestörte Komponente wird noch ein integrierbarer Anteil $[H_1^{(k)}]$ aus dem Störterm H_1 der *aHF* aufgenommen, so dass

$$H_0^{(k+1)} = H_0^{(k)} + [H_1^{(k)}]$$

den ungestörten Anteil der *nHF* bildet. Sie fungiert als *aHF* der nächsten Transformation.

Zur Bestimmung der ersten Komponente $S_1^{(k+1)}$ der Erzeugenden (107) wird die *zweite* Kamel-Gleichung ($n = 1$)

$$\frac{DS_1^{(1)}}{Dt} = H_1^{(0)} - H_1^{(1)} \quad (109)$$

herangezogen, in der die Komponente $H_1^{(1)}$ der *neuen* Hamilton-Funktion (104) durch die Hamilton-Funktion eines *integrablen* Systems festgelegt wird

$$H_1^{(1)} := [H_1^{(0)}]. \quad (110)$$

Der Term 1. Ordnung $H_1^{(0)}$ soll demnach zerlegbar sein entsprechend

$$H_1^{(0)} =: \underbrace{[H_1^{(0)}]}_{\text{integrabler Anteil}} + \underbrace{\{H_1^{(0)}\}}_{\text{periodischer Anteil}}.$$

Damit lautet dann die Kamel-Gleichung (109)

$$\frac{DS_1^{(1)}}{Dt} = \{H_1^{(0)}\}. \quad (111)$$

Durch unbestimmte Integration über die Zeit bekommt man daraus

$$S_1^{(1)} = \int \{H_1^{(0)}\} dt. \quad (112)$$

Setzt man jetzt

$$S_i^{(1)} = 0 \quad \text{für } i > 1, \quad (113)$$

so folgt aus der Kamel-Gleichung ($n = 2$)

$$\frac{DS_2^{(1)}}{Dt} = H_2^{(0)} - H_2^{(1)} + L_1 H_1^{(0)} + G_1 H_1^{(1)}$$

die Komponente $H_2^{(1)}$ der *neuen* Hamilton-Funktion (104). Mit (110) sowie (113) und (Schneider [61], § 24.7)

$$L_1 H_1^{(0)} := (H_1^{(0)}; S_1^{(1)}), \quad G_1 H_1^{(1)} := (H_1^{(1)}; S_1^{(1)}),$$

wobei $(\ ; \)$ die Poisson-Klammer symbolisiert, lautet nämlich die Kamel-Gleichung ($n = 2$)

$$H_2^{(1)} = H_2^{(0)} + (H_1^{(0)} + H_1^{(1)}; S_1^{(1)}),$$

woraus, wie behauptet, die Komponente $H_2^{(1)}$ bestimmbar ist.

Die Komponenten $H_i^{(1)}$ für $i > 2$ lassen sich analog aus den weiteren Kamel-Gleichungen (102) bestimmen.

Mit den Festlegungen (108), (110) und (113) wurde von der eingangs erwähnten Freiheit in der Festlegung der Funktionsstrukturen der neuen Hamilton-Funktion $H^{(1)}$ sowie der Erzeugenden der kanonischen Transformation Gebrauch gemacht. Der Zusammenhang der Funktionsstrukturen ist durch die Kamel-Gleichungen berücksichtigt.

7.2.2 Ergebnis der ersten Transformation

Es liegen eine *neue* Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) &= \sum_{n \geq 0} H_n^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon), \\ H^{(1)} &= H_0^{(1)} + H_1^{(1)} + H_2^{(1)} + \dots \\ &= H_0^{(0)} + [H_1^{(0)}] + 0 + H_2^{(0)} + (H_1^{(0)} + H_1^{(1)}; S_1^{(1)}) + \dots \end{aligned}$$

und die *Erzeugende*

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + S_3^{(1)} + \dots \\ &= \int \{H_1\} dt + 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

der *ersten* kanonischen Transformation

$$\begin{array}{ccc} H^{(0)} & \xrightarrow{S^{(1)}} & H^{(1)} \\ aHF & & nHF \end{array} \quad (114)$$

vor. Es wurde eine Zerlegung des Störterms 1. Ordnung der aHF

$$H_1^{(0)} =: \underbrace{[H_1^{(0)}]}_{\text{integrabler Anteil}} + \underbrace{\{H_1^{(0)}\}}_{\text{periodischer Anteil}} \quad (115)$$

vorgenommen in einen *integrablen* Anteil $[H_1^{(0)}]$, der in den ungestörten Anteil der nHF aufgenommen wird und einen periodischen Anteil $\{H_1^{(0)}\}$, der die Erzeugende $S^{(1)} = \int \{H_1\} dt$ so festlegt, dass nach der kanonischen Transformation (114) Störterme 1. Ordnung nicht mehr in der *neuen* Hamilton-Funktion

$$H^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} H_n^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon) \quad (116)$$

präsent sind. D. h., die kanonische Transformation wird gerade so ausgeführt, dass $H_1^{(1)} := 0$ ist. Das bestätigt man sofort mit Hilfe der Kamel-Gleichung (109), setzt man in diese die Gleichungen (110) und (111) ein und beachtet man die Zerlegung (115). Der *ungestörte Anteil* der nHF nimmt die *lösbaren*, d. h., alle *integrablen* Teile von $H^{(0)}$ auf. Die durch

$$H_0^{(1)} := H_0^{(0)} + [H_1^{(0)}]$$

beschriebene ungestörte Bewegung der transformierten Hamilton-Funktion und damit die dieser *neuen* Hamilton-Funktion entsprechenden *ungestörten Bahnen* sind eine bessere Annäherung an die Bahnen zur *alten* Hamilton-Funktion.

Mit anderen Worten:

Die *neuen ungestörten* Bahnen enthalten gegenüber der Hamilton-Funktion $H_0^{(0)}$ des ungestörten Problems *Störterme 1. Ordnung*. Diese sind nicht mehr im Störterm $H_1^{(1)}$ der *neuen* Hamilton-Funktion enthalten, weil deren integrabler Anteil in die ungestörte Hamilton-Funktion $H_0^{(1)}$ verlagert worden ist und deren periodischer Anteil eliminiert bzw. in höhere Ordnungen verschoben worden ist.

Die Zerlegung (115) führt auf transformierte kanonische Variablen, in denen das anfänglich gestellte Störungsproblem in ein Störungsproblem transformiert erscheint, in dem Störterme 1. Ordnung nicht mehr auftreten.

$$H^{(0)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon) \xrightarrow{s^{(1)}} H^{(1)}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; t; \varepsilon)$$

7.2.3 Zweite Transformation ($k = 1$)

Die im 1. Schritt konstruierte *neue* Hamilton-Funktion (116) übernimmt im zweiten Schritt die Rolle einer *alten* Hamilton-Funktion

$$H^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} H_n^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t; \varepsilon)$$

mit den durch

$$\begin{aligned} H_0^{(1)} &:= H_0^{(0)} + [H_1^{(0)}] && \text{Absorption des integrablen Teils } [H_1^{(0)}], \\ H_1^{(1)} &:= 0 && \text{Störterme 1. Ordnung durch } S_1^{(1)} = \int \{H_1^{(0)}\} dt \text{ eliminiert,} \\ H_i^{(1)} &\text{ für } i > 1 && \text{Störterme der } nHF \end{aligned} \quad (117)$$

festgelegten Komponenten $H_n^{(1)}$.

Die erste Komponente der nHF $H^{(2)}$ sei wiederum durch die *erste* Kamel-Gleichung definiert

$$H_0^{(2)} := H_0^{(1)}.$$

In diese werden, wie in der ersten Transformation, integrable Anteile aus Störtermen der aHF aufgenommen. Aus der Kamel-Gleichung ($n = 1$)

$$\frac{DS_1^{(2)}}{Dt} = H_1^{(1)} - H_1^{(2)} \quad (118)$$

wird, wie in der ersten Transformation, die erste Komponente der Erzeugenden $S^{(2)}$ der *zweiten* kanonischen Transformation bestimmt:

$$\begin{array}{ccc} H^{(1)} & \xrightarrow{s^{(2)}} & H^{(2)} \\ aHF & & nHF \end{array}.$$

Dazu wird $H_1^{(2)}$, analog zur ersten Transformation, durch einen *integrablen* Teil von $H_1^{(1)}$, also durch

$$H_1^{(2)} := [H_1^{(1)}]$$

festgelegt. Beachtet man die zweite der Gleichungen (117), so folgt

$$H_1^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{DS_1^{(2)}}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1^{(2)} = \text{const.} \quad (119)$$

Wegen der zweiten der Gleichungen (117) fehlen Störterme 1. Ordnung in der nHF $H^{(2)}$.

Während man im ersten Verfahrensschritt nur eine Kamel-Gleichung, nämlich (118), lösen kann, lassen sich bei der zweiten Transformation simultan die beiden ersten der weiteren Kamel-Gleichungen, nämlich für ($n = 2, 3$) lösen. Sie lauten

$$\begin{aligned} \frac{DS_2^{(2)}}{Dt} &= H_2^{(1)} - H_2^{(2)} + L_1 H_1^{(1)} + G_1 H_1^{(2)}, \\ \frac{DS_3^{(2)}}{Dt} &= H_3^{(1)} - H_3^{(2)} + L_1 H_2^{(1)} + 2L_2 H_1^{(1)} + 2G_1 H_2^{(2)} + G_2 H_1^{(2)} \end{aligned}$$

und für $i > 3$

$$\frac{DS_i^{(2)}}{Dt} = H_i^{(1)} - H_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(1)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(2)} \right). \quad (120)$$

Beachtet man die zweite der Gleichungen (117) sowie (119) und

$$L_1 f = \left(f; S_1^{(2)} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad G_1 f = 0,$$

so vereinfachen sich die Kamel-Gleichungen zu

$$\begin{aligned}\frac{DS_2^{(2)}}{Dt} &= H_2^{(1)} - H_2^{(2)}, \\ \frac{DS_3^{(2)}}{Dt} &= H_3^{(1)} - H_3^{(2)}.\end{aligned}\tag{121}$$

Legt man die Funktionsstruktur der nHF , analog wie in der ersten Transformation, durch integrable Anteile der alten Hamilton-Funktion (aHF des zweiten Schritts) entsprechend

$$H_2^{(2)} := [H_2^{(1)}], \quad H_3^{(2)} := [H_3^{(1)}]$$

fest, so sind die Komponenten $S_2^{(2)}$ und $S_3^{(2)}$ aus (121) bzw.

$$\begin{aligned}\frac{DS_2^{(2)}}{Dt} &= \{H_2^{(1)}\} \Rightarrow S_2^{(2)}(t) = \int \{H_2^{(1)}\} dt, \\ \frac{DS_3^{(2)}}{Dt} &= \{H_3^{(1)}\} \Rightarrow S_3^{(2)}(t) = \int \{H_3^{(1)}\} dt\end{aligned}$$

simultan berechenbar.

Setzt man in den Kamel-Gleichungen (120) wieder analog wie im ersten Schritt

$$S_i^{(2)} = 0 \quad \text{für } i > 3,$$

so können die Komponenten $H_i^{(2)}$ für $i > 3$ aus

$$H_i^{(2)} = H_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(1)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(2)} \right)$$

bestimmt werden.

7.2.4 Ergebnis der zweiten Transformation

Es liegt nach dem zweiten Schritt eine nHF $H^{(2)}$ der Gestalt

$$H^{(2)} = H_0^{(2)} + H_4^{(2)} + H_5^{(2)} + \dots$$

vor, worin der *ungestörte lösbare Anteil* durch

$$H_0^{(2)} = H_0^{(1)} + 0 + [H_2^{(1)}] + [H_3^{(1)}] + \dots$$

festgelegt ist und die *Störterme* der neuen Hamilton-Funktion $H^{(2)}$ durch

$$H_i^{(2)} := H_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(1)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(2)} \right) \quad \text{für } i > 3.$$

D. h., nach der zweiten Transformation sind Störterme der Ordnungen ε^2 und ε^3 in der nHF $H^{(2)}$ nicht mehr präsent. Die nHF enthält Störterme $H_i^{(2)}$ für $i > 3$, also 4. Ordnung

$$H^{(2)} = H_0^{(2)} + H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + H_3^{(2)} + H_4^{(2)} + \dots$$

Für die Erzeugende der zweiten Transformation erhält man

$$\begin{aligned}S^{(2)} &= S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + S_3^{(2)} + S_i^{(2)} + \dots \\ &= \text{const} + \int \{H_2^{(1)}\}(t) dt + \int \{H_3^{(1)}\}(t) dt + 0 + \dots\end{aligned}$$

7.2.5 Dritte Transformation ($k = 2$)

Die zweite Transformation führte zu einer Hamilton-Funktion, die als aHF der dritten Transformation fungiert:

$$H^{(2)} = \underbrace{H_0^{(1)} + 0 + [H_2^{(1)}] + [H_3^{(1)}] + \dots}_{H_0^{(2)}} + \underbrace{0}_{H_1^{(2)}} + \underbrace{0}_{H_2^{(2)}} + \underbrace{0}_{H_3^{(2)}} + \underbrace{H_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(1)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(2)} \right)}_{H_i^{(2)} \text{ für } i > 3}$$

mit dem *ungestörten integrablen Anteil* $H_0^{(2)}$ sowie den *Störtermen* $H_i^{(2)}$ für $i > 0$.

In der *dritten* Transformation wird, analog zu den vorangehenden Transformationen, zunächst gesetzt (Kamel-Gleichung $n = 0$)

$$H_0^{(3)} := H_0^{(2)}.$$

7.2.6 Ergebnis nach der dritten Transformation

Nach der dritten Transformation entsteht eine nHF der Gestalt

$$H^{(3)} = H_0^{(3)} + H_8^{(3)} + H_9^{(3)} + \dots$$

mit dem *ungestörten integrablen Anteil*

$$H_0^{(3)} := H_0^{(3)} + H_5^{(3)} + H_6^{(3)} + H_7^{(3)}$$

und *Störtermen* $H_i^{(3)}$ für $i > 7$.

Es sind simultan Störterme der Ordnungen ε^4 bis ε^7 eliminiert. Störterme in der nHF sind von der Ordnung ε^8 .

7.3 kte Transformation

Nach Ausführung der ersten drei Transformationen ist folgendes Ergebnis der k ten Transformation zu vermuten: nHF

$$H^{(k+1)} = H_0^{(k+1)} + \dots + 0 + \dots + H_i^{(k+1)},$$

Erzeugende der kten Transformation

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= S_1^{(k)} + \dots + \sum S_i^{(k)} + \dots + \dots \\ &= \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{1 \leq i \leq 2^{k-1}-1} + \underbrace{\sum_i \int \{H_i^{(k)}\} dt}_{2^{k-1} < i \leq 2^k-1} + \underbrace{0 + 0 + \dots}_{2^k-1 < i < \infty}. \end{aligned}$$

Um das zu beweisen, ist zu zeigen, dass sich die Kamel-Gleichungen

$$\frac{DS_i^{(k)}}{Dt} = H_i^{(k)} - H_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(k)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(k+1)} \right)$$

für $2^{k-1} \leq i \leq 2^k - 1$ vereinfachen lassen zu

$$\frac{DS_i^{(k)}}{Dt} = H_i^{(k)} - H_i^{(k+1)} \quad \text{für } 2^{k-1} \leq i \leq 2^k - 1$$

d. h., dass bei der k ten Transformation gilt

$$\sum_{j=1}^{i-1} \left(C_{j-1}^{i-1} L_j H_{i-j}^{(k)} + C_j^{i-1} G_j H_{i-j}^{(k+1)} \right) = 0 \quad \text{für } 2^{k-1} \leq i \leq 2^k - 1$$

und mit den Zerlegungen

$$H_i^{(k)} =: \underbrace{\left[H_i^{(k)} \right]}_{\text{integrabler Anteil}} + \underbrace{\left\{ H_i^{(k)} \right\}}_{\text{periodischer Anteil}} \quad \text{für } 2^{k-1} \leq i \leq 2^k - 1$$

der Störterme der aHF $H^{(k)}$ Komponenten der Erzeugenden aus den vereinfachten Kamel-Gleichungen

$$\frac{DS_i^{(k)}}{Dt} = \int \{H_i^{(k)}\} dt \quad \text{für } 2^{k-1} \leq i \leq 2^k - 1$$

bestimmbar sind. Für die ersten drei Transformationen ist das bereits gezeigt.

Für die k . Transformation ergibt sich das folgendermaßen: Da bei der k . Transformation die aHF gegeben ist zu

$$H^{(k)} = H_0^{(k)} + 0 + \dots + 0 + \sum_i^\infty H_i^{(k)}$$

und weiter gilt $L_j f := (f; S_j^{(k)})$ sowie $S_j^{(k)} = 0$ bzw. $S_j^{(k)} = \text{const}$, bestätigt man die obige Gleichung elementar.

Das Ergebnis nach der k ten Transformation soll damit sein:

- aus der transformierten Hamilton-Funktion sollen Störterme bis zur Ordnung ε^{2k-1} entfernt bzw. in höhere Ordnungen zurückgedrängt sein,
- der ungestörte Anteil der transformierten Hamilton-Funktion soll alle integrierbaren Anteile der Ausgangs-Hamilton-Funktion aufgenommen haben und ein IAS der Ordnung $O(\varepsilon^{2k})$ des Ausgangsproblems sein (siehe Abschnitt 6.3).

Damit ist der Algorithmus des vorgeschlagenen quadratisch konvergenten, auf den Kamel-Gleichungen basierenden, Lösungsverfahrens festgelegt. Das Verfahren ist folgendermaßen charakterisiert:

Es werden von Transformation zu Transformation die Störterme in höhere Ordnungen zurückgedrängt und ein *integrabler Kern* aus der ursprünglichen Hamilton-Funktion $H^{(0)}$ in quadratischer Weise herausgearbeitet.

Entscheidend für das Verfahren sind

- die *Zerlegbarkeit* der jeweiligen Störterme in einen *integrablen* Anteil und einen *periodischen* Anteil,
- die *Bestimmbarkeit der exakten Lösung* zur jeweils neuen ungestörten Hamilton-Funktion $H_0^{(k)}$ mit $k \geq 0$, denn mit jedem Schritt muss das *neue ungestörte Bewegungsproblem* gelöst werden (s. u.).

Die *Art der Zerlegung* kann grundsätzlich von Transformation zu Transformation geändert werden.

Als Möglichkeiten für die Festlegung des integrablen Teils kommen beispielsweise in Betracht

$$\left[H_1^{(k)} \right] := \left\langle H_1^{(k)} \right\rangle \quad \text{Zeitmittel von } H_1^{(k)}$$

oder eine Festlegung durch ein *Zielsystem*, wie es in Schneider/Cui [64] skizziert worden ist. Diese Variante ist vorteilhaft, will man die bei jeder Transformation erforderliche Lösung des ungestörten Bewegungsproblems umgehen. Dadurch lässt sich der Nachteil des Kolmogorov-Verfahrens vermeiden.

7.5 Methodischer Vergleich der vorgeschlagenen quadratisch konvergenten Verfahren

Das modifizierte Cui-Verfahren (siehe Abschnitt 6) und das modifizierte Kamel-Deprit-Verfahren weisen eine Reihe von Gemeinsamkeiten auf, die in einem methodischen Vergleich aufgezeigt werden sollen. Daraus wird in den Anwendungen (siehe Teil IV) Nutzen gezogen werden.

Kennzeichnend ist für jeden Transformationsschritt das *Tripel*

- *Zerlegung* des transformierten Störanteils in einen integrablen Teil und einen periodischen Störanteil,
- *Verteilung* der durch die Zerlegung entstandenen Teile auf den ungestörten Teil der transformierten Hamilton-Funktion,
- *Elimination* des bei der Zerlegung entstehenden periodischen Störanteils durch eine durch diesen definierte erzeugende Funktion.

Die Verteilung des bei der Zerlegung des transformierten Störanteils entstehenden integrablen Anteils auf den ungestörten Anteil der n HF einerseits und andererseits die Verwendung des periodischen Restanteils zur Definition einer Erzeugenden, die den transformierten periodischen Störanteil in höhere Ordnungen zurückdrängt, also aus der jeweils betrachteten Ordnung eliminiert, sind die wesentlichen Elemente, um die quadratische Konvergenz zu sichern. Man zieht bei jeder Transformation die größtmögliche Anzahl der Kamel-Deprit-Gleichungen heran.

Die im modifizierten Cui-Verfahren angenommene Struktur der Hamilton-Funktion

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \varepsilon) = F^*(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \varepsilon) + R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \varepsilon)$$

kann auch die im modifizierten Kamel-Deprit-Verfahren angenommene als Sonderfall subsumieren, setzt man

$$\tilde{H}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \tilde{H}_n^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}; \varepsilon) \quad \text{mit} \quad \tilde{H}_n^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}; \varepsilon) = \begin{cases} -R_{\text{Cui}} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}.$$

Anmerkung:

Zu beachten ist, dass sich die kanonisch konjugierten Variablen in den beiden Verfahren durch eine Austauschtransformation unterscheiden und demzufolge die Hamilton-Funktionen im Vorzeichen verschieden sind (Schneider [61]). Die Tilde über den Variablen weist darauf hin, dass das vorgelegte kanonische System möglicherweise nicht-autonom ist und durch Übergang in den erweiterten Phasenraum in ein autonomes System umgeschrieben worden ist, wie es im modifizierten Cui-Verfahren von vornherein angenommen wird (Schneider [60]).

Entscheidend für die beiden quadratisch konvergenten Verfahren ist die Zerlegbarkeit der transformierten Ersatzfunktion bzw. Hamilton-Funktion in einen integrablen Anteil vorgegebener Funktionsstruktur (Zielsystem !) und einen periodischen Restanteil.

Ist beispielsweise im modifizierten Cui-Verfahren das IAS 0. Ordnung erfolgreich konstruiert, so könnte der Eindruck entstehen, dass damit bereits der größtmögliche integrable Anteil mit vorgegebener Funktionsstruktur heraus getrennt worden ist. Wie das Beispiel des Duffing-Oszillators belegt, ist das nicht der Fall. Es gelingt nach der ersten elementaren Lie-Transformation sehr wohl, aus der transformierten Hamilton-Funktion, genauer dem entstehenden Ersatzterm, ein weiteres Mal einen gleich gearteten integrablen Anteil derselben Funktionsstruktur wie bei der Konstruktion des IAS 0. Ordnung heraus zu trennen und mit demjenigen des IAS 0. Ordnung zu einem IAS 1. Ordnung zusammenzuführen. Ein einheitlich verwendbares Rezept für das Heraustrennen wurde bislang allerdings nicht gefunden. Einige eventuell hilfreiche Regeln sind in Schneider/Cui [64] § 10.4 angegeben.

Teil III

Vom Hauptproblem zum Gesamtproblem

Im aktuellen Bewegungsproblem sind eine Reihe von Störkraftkomponenten im Flugbereich der Satelliten wirksam, die im bisher behandelten verallgemeinerten Hauptproblem nicht berücksichtigt sind. Dessen Lösung, die mit ausreichender Genauigkeit ermittelt worden sei, wird also von der gesuchten aktuellen Lösung weg driften. In den folgenden Abschnitten werden Verfahren vorgestellt, wie diese Abweichung

$$\Delta(t) := \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_H(t)$$

entweder verringert oder bestimmt werden kann. Vorausgesetzt sei, dass die Lösung des verallgemeinerten Hauptproblems so genau bestimmt worden ist, dass das Auseinanderdriften

$$\delta(t) := \underbrace{\mathbf{r}_H(t)}_{\substack{\text{strenge} \\ \text{Lösung des Hauptproblems}}} - \underbrace{\tilde{\mathbf{r}}_H(t)}_{\text{genäherte}}$$

der strengen und der genähert ermittelten Lösung des verallgemeinerten Hauptproblems gegen dasjenige der aktuellen Lösung und der Lösung des verallgemeinerten Hauptproblems vernachlässigt werden kann. D. h., es soll sein

$$|\delta(t)| \ll |\Delta(t)|.$$

Das Auseinanderdriften kann abgeschätzt werden mit Hilfe der *Abschätzungstheoreme*. Sie erlauben eine Qualitätssicherung der gefundenen Lösungen, wobei dasjenige von Cui (siehe Abschnitt 5.4) zugeschnitten ist auf kanonische Systeme wie das in den Hill-Variablen formulierte verallgemeinerte Hauptproblem.

8 Hamiltonisierung des Gesamtproblems

Die *Hamiltonisierung des Gesamtproblems* (siehe Abschnitt 8.1) könnte als Ausgangspunkt für die Lösung der Gesamtaufgabe gewählt werden, was aber hier jedoch nicht weiter verfolgt werden wird. Stattdessen werden für die Lösung des Gesamtproblems zwei andere Wege aufgezeigt:

1. Linearisierung des Gesamtproblems um die Lösung des Hauptproblems und Lösung der entstehenden linearen Differentialgleichung, der *Poincaré'schen Variationsgleichung*. Das setzt voraus, dass eine Linearisierung ausreichend ist, um das Gesamtproblem in der angestrebten Genauigkeit zu lösen.
2. *Elimination der Störanteile*, die über das Hauptproblem hinaus vorhanden sind, aus dem Gesamtproblem durch fast-identische Transformationen.³

8.1 Hamiltonisierung von Bewegungsgleichungen 1. Ordnung

Das Gesamtproblem sei formuliert in Gestalt einer *Bewegungsgleichung 1. Ordnung*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t).$$

Sie kann durch Einführung eines *adjungierten Vektors* $\mathbf{y}$ *generalisierter Impulse* und einer *Hamilton-Funktion*, definiert durch

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

in ein System *kanonischer Bewegungsgleichungen*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}}$$

umgeschrieben werden (Giacaglia [12]). Diese Möglichkeit wird auch in Steeb/Kunick [67] erwähnt; dort wird jedoch einschränkend eine autonome Differentialgleichung angenommen.

³In Cui [6] wurden die kanonischen Bewegungsgleichungen erweitert, um über das Hauptproblem hinaus weitere Störkräfte berücksichtigen zu können. Diese sogenannte *Encke-Linearisierung* impliziert keine Hamiltonisierung des Gesamtproblems.

Die angegebene Möglichkeit der Hamiltonisierung von Bewegungsgleichungen erster Ordnung erfasst einen sehr großen Teil himmelsmechanischer Bewegungsprobleme. Es wird dabei das aktuelle System durch ein weiteres System gleicher Dimension

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$$

für die kanonischen Variablen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ergänzt. Um diesen Preis der Verdopplung der Dimension gelingt die Hamiltonisierung, aber es werden dadurch die Lösungsverfahren der Hamilton-Mechanik einsetzbar, insbesondere auch Verfahren wie die im Teil II angegebenen quadratisch konvergenten Verfahren.

Beispiel: Gedämpfter freier nicht-linearer Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{u} = -u - \varepsilon u^3 - \beta \dot{u} \quad \text{mit} \quad \varepsilon \ll 1, \quad \beta > 0.$$

Nach einer Variablensubstitution

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} \quad (122)$$

bekommt man ein System, bestehend aus

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -u - \varepsilon u^3 - \beta \dot{u} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (123)$$

und, da in diesem Beispiel $\mathbf{f}$ nicht explizit von der Zeit t abhängt,

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

mit der in diesem Beispiel zeitunabhängigen Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = y_1 f_1 + y_2 f_2 = y_1 \dot{u} + y_2 (-u - \varepsilon u^3 - \beta \dot{u}).$$

Damit folgt das kanonische System, bestehend aus (123) und

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{u}} \\ \frac{\partial (-u - \varepsilon u^3 - \beta \dot{u})}{\partial u} & \frac{\partial (-u - \varepsilon u^3 - \beta \dot{u})}{\partial \dot{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Nach Ausführung der partiellen Ableitungen erhält man für das zweite Gleichungssystem

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3\varepsilon u^2 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ (1 + 3\varepsilon u^2)y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$\dot{y}_1 = -y_2 = -(1 + 3\varepsilon u^2)y_1 - \beta y_2 = -(1 + 3\varepsilon u^2)y_1 + \beta \dot{y}_1.$$

Stellt man die beiden Gleichungssysteme nebeneinander

$$\ddot{u} = -(1 + \varepsilon u^2)u - \beta \dot{u}, \quad \dot{y}_1 = -(1 + 3\varepsilon u^2)y_1 + \beta \dot{y}_1, \quad \text{mit } \beta > 0,$$

so erkennt man, dass es sich bei beiden um Oszillatorgleichungen handelt, wobei sich die nicht-linearen Anteile der Rückstellkräfte unterscheiden. Durch die nicht-linearen Anteile sind die beiden Oszillatoren gekoppelt. In der Summe geht keine Energie verloren, was durch die Zeitunabhängigkeit der Hamilton-Funktion im betrachteten Beispiel

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{H} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = y_1 f_1 + y_2 f_2 = \text{const.}$$

bestätigt wird (vgl. Leech [36]).

8.2 Hamiltonisierung von Bewegungsgleichungen 2. Ordnung

Vorgelegt sei die Bewegungsgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$$

für die Bahn $\mathbf{x}(t)$.⁴ Sie soll auf kanonische Gestalt gebracht werden. Welche Möglichkeiten bestehen hierfür ?

⁴ $\mathbf{x}(t)$ symbolisiert hierbei den Zustandsvektor

1. Durch Variablensubstitution kann sie in ein System von Bewegungsgleichungen 1. Ordnung umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &=: \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t).\end{aligned}$$

Mit

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

das man mittels des in Abschnitt 8.1 angegebenen Weges auf kanonische Gestalt bringen kann.

2. In Meyer/Hall [43] wird folgende Möglichkeit der Hamiltonisierung angegeben:

Das System newton'scher Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t), \quad (124)$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\dots n\text{-dimensionaler Vektor,} \\ \mathbf{M} &\dots \text{Massenmatrix,} \\ F &\dots \text{Skalarfeld,} \\ \mathbf{g} &\dots \text{zeitabhängige Vektorfunktion,}\end{aligned}$$

kann mit der *Hamilton-Funktion*

$$H := \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} + F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^T\mathbf{g}(t) \quad (125)$$

auf *kanonische Gestalt* gebracht werden

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(t). \quad (126)$$

$\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ sind *kanonische Variable*.

Bei einem Teilchensystem fasst der Vektor $\mathbf{x}$ z.B. die $3n$ Ortskoordinaten zusammen und $\mathbf{p}$ die Impulskoordinaten. Die Massenmatrix $\mathbf{M}$ hätte dann die Gestalt

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{3n \times 3n}.$$

Die Gleichungen (124) sind die Zusammenfassung der n newton'schen Bewegungsgleichungen der n Teilchen. Vorausgesetzt ist, dass die Kraftkomponente $\mathbf{g}(t)$ allein von der Zeit abhängt.

Beispiel: Harmonische Anregung des linearen harmonischen Oszillators (Masse $m = 1$)

$$\ddot{u} = -u + g(t)$$

erhält man als $n = 1$ -dimensionalen Sonderfall aus (124) mit den Setzungen

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} = (\delta_{ij}) \quad \text{bzw.} \quad m = 1, \quad \mathbf{x} = u, \quad F(\mathbf{x}) = \frac{u^2}{2}, \quad \mathbf{g}(t) = g(t) = A \cos \omega t.$$

Im eindimensionalen Fall wird $\mathbf{p}$ durch p ersetzt und es folgt nach (125) die Hamilton-Funktion

$$H(u, p; t) = \frac{p^2}{2} + \frac{u^2}{2} - uA \cos \omega t$$

und damit nach (126) bestätigend

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -u + A \cos \omega t.$$

Bleibt die Frage, ob man auch eine Bewegungsgleichung mit einer geschwindigkeitsabhängigen Kraftkomponente auf kanonische Gestalt bringen kann. Das ist der Fall, wenn die Kraftkomponente $\mathbf{z}$ sich aus einer *Rayleigh'schen Dissipationsfunktion* ableiten lässt (siehe Meirovitch [42])

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mu_i \dot{x}_i^2 \Rightarrow \mathbf{z}(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{r}}}.$$

Dann tritt in den Lagrange-Gleichungen 2. Art (Schneider [60]) als generalisierte Kraft

$$\mathbf{Q}^* := \mathbf{r}_q \mathbf{z} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_q := \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{r}^T \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) := \mathbf{K} - \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t)$$

auf, die sich beim Übergang zu den kanonischen Bewegungsgleichungen wie folgt wiederfindet (Meirovitch [42], Schneider [60])

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}^*. \quad (127)$$

Damit ist die weitergehende Frage angesprochen, wann Lagrange-Gleichungen 2. Art in kanonische Gleichungen transformiert werden können. In Heil/Kitzka [16] wird gezeigt, dass das nicht gelingt, wenn für die Lagrange-funktion L gilt

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right) \equiv 0, \quad \dot{q}_i \text{ generalisierte Geschwindigkeiten.}$$

Beispiel: Selbsterregter van der Pol-Oszillator mit der Bewegungsgleichung (siehe Nayfeh [50])

$$\ddot{u} - \varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \alpha, \beta > 1.$$

Wenn ein solcher Übergang nicht möglich ist, so ist damit nicht ausgeschlossen, dass eine Hamiltonisierung gelingt. Mit dem eingangs genannten Weg erreicht man ja eine Hamiltonisierung dieses Bewegungsproblems wie folgt:

Nach einer Variablensubstitution entsprechend (122) ergibt sich in diesem Beispiel mit der Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_1 \dot{u} + y_2 (\varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{u} - \omega_0^2 u)$$

das System kanonischer Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{u} - \omega_0^2 u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \\ \frac{\partial (\varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{u} - \omega_0^2 u)}{\partial u} & \frac{\partial (\varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{u} - \omega_0^2 u)}{\partial \dot{u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Ausführung der partiellen Ableitungen erhält man für die zweite Gleichung

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon\beta u\dot{u} - \omega_0^2 & \varepsilon(\alpha - \beta u^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ (2\varepsilon\beta u\dot{u} + \omega_0^2)y_1 - \varepsilon(\alpha - \beta u^2)y_2 \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$\ddot{y}_1 = -\dot{y}_2 = -(2\varepsilon\beta u\dot{u} + \omega_0^2)y_1 + \varepsilon(\alpha - \beta u^2)y_2 = -(2\varepsilon\beta u\dot{u} + \omega_0^2)y_1 - \varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{y}_1.$$

Die Nebeneinanderstellung der beiden Gleichungen liefert diesmal

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{u}, \quad \ddot{y}_1 = -(2\varepsilon\beta u\dot{u} + \omega_0^2)y_1 - \varepsilon(\alpha - \beta u^2)\dot{y}_1 \quad \text{mit } \beta > 0.$$

Das sind, wie schon beim Duffing-Oszillator, zwei gekoppelte Schwingungsgleichungen, deren Dämpfungsterme sich im Vorzeichen unterscheiden und deren Rückstellkräfte sich darüber hinaus in ihrer Abhängigkeit von den Variablen unterscheiden. Der zweite Oszillator erfährt eine auch geschwindigkeitsabhängige Rückstellkraft.

8.3 Rekonstruktion der Hamilton-Funktion aus ihren partiellen Ableitungen

Die *autonome* Bewegungsgleichung (mit der Einheitsmasse $m = 1$)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

geht nach der Variablensubstitution $\mathbf{p} \equiv \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ über in das Gleichungssystem⁵

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \mathbf{p}).\end{aligned}$$

Danach gilt für die partiellen Ableitungen der gesuchten nicht explizit zeitabhängigen Hamilton-Funktion H

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right) &= \mathbf{p}, \\ \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}\right) &= -\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -(\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \mathbf{p})).\end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion soll aus diesen partiellen Ableitungen wie folgt rekonstruiert werden. Für deren totales Differential gilt

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r},$$

woraus nach unbestimmter Integration folgt

$$H = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} + F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} + F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})$$

bzw.

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} + F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}).$$

Darin sind $F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ und $F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})$ wählbare Funktionen. Sie sollen wie folgt festgelegt werden: Der Gegenüberstellung

$$\text{gesuchte kanonische Gleichungen} \quad \Leftrightarrow \quad \text{aktuelle Gleichungen}$$

hier also

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(-\int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} \right) + \frac{\partial F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(-\int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} \right) - \frac{\partial F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\end{aligned}$$

sowie

entnimmt man folgende Bedingungen für die unbestimmten Funktionen $F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ und $F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})$

$$\begin{aligned}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(-\int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} \right) + \frac{\partial F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(-\int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} \right) - \frac{\partial F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

oder nach Integration

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \text{const} =: F_{\mathbf{r}}^0, \\ \frac{\partial F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \text{const} =: F_{\mathbf{p}}^0.\end{aligned}$$

Damit erhält man für die gesuchte Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + F_{\mathbf{p}}^0 - \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} + F_{\mathbf{r}}^0,$$

worin die Konstanten $F_{\mathbf{p}}^0$ und $F_{\mathbf{r}}^0$ weggelassen werden können, weil sie bei der Aufstellung der kanonischen Bewegungsgleichungen ohnehin wegfallen. Bei der Aufstellung der kanonischen Bewegungsgleichungen ist darauf zu achten, dass $\partial \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} / \partial \mathbf{p} = \mathbf{0}$ ist, aber $\partial \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{r} / \partial \mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$.

⁵unter Verwendung von $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, wobei wieder die Einheitsmasse $m = 1$ angenommen wird

Beispiel 1: van der Pol-Oszillator

Seine Bewegungsgleichung (DGL 2. Ordnung)

$$\ddot{u} = f(u, \dot{u}) = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) \dot{u}$$

sei durch Variablensubstitution umgewandelt in das System von DGLn 1. Ordnung

$$\dot{u} =: p,$$

$$\dot{p} = f(u, p) = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) p.$$

Gesucht wird eine Hamilton-Funktion $H = H(u, p)$, so dass diese DGLn kanonische Gestalt annehmen, d. h.,

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) p.$$

Die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion nach den beiden Variablen u und p sind bekannt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= p, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -\left(-\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) p\right) =: -f(u, p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = H(u, p).$$

Bestimmung der Hamilton-Funktion $H = H(u, p)$:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial u} du + \frac{\partial H}{\partial p} dp \Rightarrow \int dH = \int \left(\frac{\partial H}{\partial u} du \right) + F_u(p) + \int \left(\frac{\partial H}{\partial p} dp \right) + F_p(u),$$

also

$$\begin{aligned} H &= \int (\omega_0^2 u - \varepsilon \alpha p + \varepsilon \beta u^2 p) du + F_u(p) + \int p dp + F_p(u) \\ &= \omega_0^2 \frac{u^2}{2} - \varepsilon \alpha p u + \varepsilon \beta p \frac{u^3}{3} + F_u(p) + \frac{p^2}{2} + F_p(u). \end{aligned}$$

Mit der so bestimmten Hamilton-Funktion

$$H(u, p) = \omega_0^2 \frac{u^2}{2} - \varepsilon p \left(\alpha u - \beta \frac{u^3}{3} \right) + F_u(p) + \frac{p^2}{2} + F_p(u)$$

ergeben sich folgende (kanonische) Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\omega_0^2 \frac{u^2}{2} - \varepsilon p \left(\alpha u - \beta \frac{u^3}{3} \right) + F_u(p) + \frac{p^2}{2} + F_p(u) \right) = \frac{\partial F_u(p)}{\partial p} + p, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\omega_0^2 \frac{u^2}{2} - \varepsilon p \left(\alpha u - \beta \frac{u^3}{3} \right) + F_u(p) + \frac{p^2}{2} + F_p(u) \right) = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) p - \frac{\partial F_p(u)}{\partial u}. \end{aligned}$$

Gegenüber zu stellen sind demnach (vgl. obige Anmerkung betreffend $\partial \int f(u, p) du / \partial p$)

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + \frac{\partial F_u(p)}{\partial p} \Leftrightarrow \dot{u} = p$$

sowie

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) p - \frac{\partial F_p(u)}{\partial u} \Leftrightarrow \dot{p} = -\omega_0^2 u + \varepsilon(\alpha - \beta u^2) p.$$

Damit ergeben sich folgende Bedingungen für die unbestimmten Funktionen F_u und F_p

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_u(p)}{\partial p} &= 0 \Rightarrow F_u(p) = \text{const} =: F_u^0, \\ \frac{\partial F_p(u)}{\partial u} &= 0 \Rightarrow F_p(u) = \text{const} =: F_p^0, \end{aligned}$$

so dass Hamilton-Funktion lautet

$$H(u, p) = \omega_0^2 \frac{u^2}{2} - \varepsilon p \left(\alpha u - \beta \frac{u^3}{3} \right) + F_u^0 + \frac{p^2}{2} + F_p^0.$$

Die Konstanten F_u^0 und F_p^0 spielen in den kanonischen Gleichungen keine Rolle, weil dort partielle Ableitungen gebildet werden.

Beispiel 2: gedämpfter freier Duffing-Oszillator ($m=1$)

Seine Bewegungsgleichung (DGL 2. Ordnung)

$$\ddot{u} = f(u, \dot{u}) = -u - \varepsilon u^3 - \beta \dot{u}, \quad \text{mit } \varepsilon \ll 1, \quad \beta > 0$$

sei durch Variablensubstitution umgewandelt in das System von DGLn 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{u} &=: p, \\ \dot{p} &= f(u, p) = -u - \varepsilon u^3 - \beta p. \end{aligned}$$

Gesucht wird eine Hamilton-Funktion $H = H(u, p)$, so dass diese DGLn kanonische Gestalt annehmen, d. h.,

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -u - \varepsilon u^3 - \beta p.$$

Die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion nach den beiden Variablen u und p sind bekannt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= p, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -(-u - \varepsilon u^3 - \beta p) =: -f(u, p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = H(u, p).$$

Bestimmung der Hamilton-Funktion $H = H(u, p)$:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial u} du + \frac{\partial H}{\partial p} dp \Rightarrow \int dH = \int \left(\frac{\partial H}{\partial u} du \right) + F_u(p) + \int \left(\frac{\partial H}{\partial p} dp \right) + F_p(u),$$

also

$$\begin{aligned} H &= \int (u + \varepsilon u^3 + \beta p) du + F_u(p) + \int p dp + F_p(u) \\ &= \frac{u^2}{2} + \varepsilon \frac{u^4}{4} + \beta p u + F_u(p) + \frac{p^2}{2} + F_p(u). \end{aligned}$$

Gegenüber zu stellen sind demnach

$$\begin{aligned} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} &= p + \frac{\partial F_u(p)}{\partial p} && \Leftrightarrow \quad \dot{u} = p \\ &&& \text{sowie} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} &= -u - \varepsilon u^3 - \beta p - \frac{\partial F_p(u)}{\partial u} && \Leftrightarrow \quad \dot{p} = -u - \varepsilon u^3 - \beta p. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Bedingungen für die unbestimmten Funktionen F_u und F_p

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_u(p)}{\partial p} &= 0 \Rightarrow F_u(p) = \text{const} =: F_u^0, \\ \frac{\partial F_p(u)}{\partial u} &= 0 \Rightarrow F_p(u) = \text{const} =: F_p^0, \end{aligned}$$

so dass die Hamilton-Funktion lautet

$$H(u, p) = \frac{u^2}{2} + \varepsilon \frac{u^4}{4} + \beta p u + F_u^0 + \frac{p^2}{2} + F_p^0.$$

Wieder spielen in den kanonischen Gleichungen Konstanten keine Rolle.

Anmerkung: Da in beiden Beispielen die Hamilton-Funktionen nicht explizit von der Zeit abhängen, sind die Bewegungsintegrale

$$H(u, p) = \text{const},$$

was eine Lösungskontrolle möglich macht.

8.4 Zur Lösung der Gleichungen im Allgemeinfall

- a) mittels *Lie-Reihen* (Taylorreihenintegration),
- b) *Variation der Konstanten* (Störungsrechnung) oder mittels Transformationstheorie.

ad a)

Die *Lie-Reihen* $\mathbf{x}(t) = \exp(tD) \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}(t) = \exp(tD) \mathbf{y}_0$ lösen die kanonischen Gleichungen.

Dabei ist der *Lie-Operator* definiert durch

$$D = \{\mathbf{x}, \tilde{H}\}_0 \Rightarrow D^2 \mathbf{x} = D^1 D^1 \mathbf{x} = \left\{ \{\mathbf{x}, \tilde{H}\}, \tilde{H} \right\}_0 \quad \text{usw.},$$

so dass

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t \{\mathbf{x}, \tilde{H}\}_0 + \frac{t^2}{2!} \left\{ \{\mathbf{x}, \tilde{H}\}, \tilde{H} \right\}_0 + \dots$$

und analog für $\mathbf{y}$.

ad b)

Das *ungestörte* Problem sei lösbar

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}_0(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t).$$

Diese Lösung in die *zweite Hälfte der ungestörten Gleichungen*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_0(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t)$$

eingetragen, ergibt eine *lineare* Differentialgleichung mit veränderlicher Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}(t)$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(t) := \left(\frac{\partial \mathbf{g}_0(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t)}.$$

Ihre Lösung kann u. a. nach dem *Propagator-Verfahren* (*Dyson-Formel*) angegeben werden (Bronstein/Semendjajew [2])

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}(t, t_0) \mathbf{y}_0 \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0),$$

worin der *Propagator* (Bronstein/Semendjajew [2]) gegeben ist durch

$$\mathbf{P}(t, \tau) := \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{t_1} \dots \int_{\tau}^{t_{k-1}} \mathbf{A}(t_1) \mathbf{A}(t_2) \dots \mathbf{A}(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1.$$

Eine *Alternative* hierzu ist nach Petry/Metsch [52]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Z}(t) \mathbf{y}_0 \quad \text{löst} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t),$$

wenn man $\mathbf{Z}(t)$ als Lösung von $\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{Z}(t)$ bestimmt.

Nach dem *Theorem von Jacobi* (Schneider [60]) erhält man die Lösung des *gestörten* Bewegungsproblems

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{g}_0(\mathbf{r}) + (\mathbf{g}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)), \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= -\mathbf{y} \cdot \frac{\partial (\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) + (\mathbf{g}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)))}{\partial \mathbf{x}} =: -\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mathbf{y} \end{aligned}$$

aber auch, wenn man in der ungestörten Lösung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{ungestört}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{ungestört}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t)$$

die Integrationskonstanten durch Zeitfunktionen $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$ bzw. $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{ungestört}}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t); t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{ungestört}}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t); t) \quad (128)$$

ersetzt und diese als Lösungen der *kanonischen* Störungsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t) \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t) \quad (129)$$

bestimmt und in die Lösungsdarstellung (128) einträgt. Die vorstehenden Gleichungen (129) werden beispielsweise gelöst durch die Lie-Reihen

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \exp(tD) \boldsymbol{\alpha}_0, \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \exp(tD) \boldsymbol{\beta}_0.$$

Darin ist der Lie-Operator, definiert durch den *Störanteil*

$$H_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t) = \mathbf{y}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)) \cdot \left(\mathbf{g}_1(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)), t) + \mathbf{z}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)), t) \right)$$

der Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; t)$,

$$D = \{, H_1\}_0 \Rightarrow D^2 = D^1 D^1 = \left\{ \{, H_1\}, H_1 \right\}_0 \quad \text{usw.}$$

anzuwenden auf die kanonisch konjugierten Elemente α, β

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 + t\{\alpha, H_1\}_0 + \frac{t^2}{2!}\{\{\alpha, H_1\}, H_1\}_0 + \dots, \\ \beta(t) &= \beta_0 + t\{\beta, H_1\}_0 + \frac{t^2}{2!}\{\{\beta, H_1\}, H_1\}_0 + \dots.\end{aligned}$$

Anmerkung: Hier soll noch eine störungstheoretische Variante skizziert werden. Wie in Abschnitt 8.1 soll zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \underset{\text{Gravitation}}{\mathbf{g}_0(\mathbf{r})} + \underset{\substack{\text{sonstige} \\ \text{Kräfte}}}{\mathbf{g}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)} \quad \text{mit} \quad O(\mathbf{g}_1, \mathbf{z}) = \varepsilon$$

der *adjungierte* Vektor $\mathbf{y}$ generalisierter Impulse eingeführt werden.

Weiter sei eine *Hamilton-Funktion* definiert durch

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) &:= \mathbf{y} \cdot (\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t))) \\ &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{y} \cdot (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t))\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix}.$$

Die Hamilton-Funktion werde nun aufgeteilt gemäß

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)$$

mit

$$H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_0(\mathbf{r}),$$

$$H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) := \mathbf{y} \cdot (\mathbf{g}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)) \quad \text{mit} \quad O(H_1) = \varepsilon.$$

Dann bestehen die *kanonischen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}}$$

bzw.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial(H_0 + H_1)}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial(H_0 + H_1)}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{x}}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_1) + (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)), \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= -\mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{y} \cdot \frac{\partial (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{z}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t))}{\partial \mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Das sind Bewegungsgleichungen zweier dynamischer Systeme, die gekoppelt sind und *zusammen* ein kanonisches System bilden, einzeln hingegen in der Regel nicht.

8.5 Das inverse Problem der Newton'schen Mechanik

Santilli [57] gibt einen Weg an, um zu Newton'schen Kräften eine Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion zu konstruieren: Diese Aufgabe definiert das inverse Problem der Newton'schen Mechanik.

8.5.1 Aufgabenstellung

Vorgelegt sei die Newton-Euler'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} + \mathbf{F},$$

worin die in $\mathbf{f}$ zusammengefassten Kräfte von einer Potentialfunktion ableitbar seien, die zu $\mathbf{F}$ zusammengefassten hingegen nicht, also

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) &:= \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t), \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) &\neq \nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t).\end{aligned}$$

Äquivalent zur Newton-Euler'schen Bewegungsgleichung ist nach

$$\begin{array}{ll} \text{Lagrange} & \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L_{\text{tot}} - \nabla_{\mathbf{r}} L_{\text{tot}} = \mathbf{F}, \\ \text{Hamilton} & \dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} H_{\text{tot}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} H_{\text{tot}} + \tilde{\mathbf{F}}. \end{array}$$

Darin bedeuten

$$\mathbf{p} := \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L, \quad H_{\text{tot}} := T + U, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$$

und es besteht der Zusammenhang der Lagrange- mit der Hamilton-Funktion

$$H_{\text{tot}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L_{\text{tot}}.$$

Die Lösung des inversen Problems der Newton'schen Mechanik besteht nun darin, die Kräfte $\mathbf{F}$ durch eine Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion darzustellen, so dass nach

$$\text{Lagrange} \quad \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L_{\text{tot}}^{\text{gen}} - \nabla_{\mathbf{r}} L_{\text{tot}}^{\text{gen}} = \mathbf{0}$$

bzw. nach

$$\text{Hamilton} \quad \dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} H_{\text{tot}}^{\text{gen}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} H_{\text{tot}}^{\text{gen}}$$

mit dem Zusammenhang

$$H_{\text{tot}}^{\text{gen}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L_{\text{tot}}^{\text{gen}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} := \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L_{\text{tot}}^{\text{gen}}.$$

In der letzteren Fassung treten die nicht von einer Potentialfunktion ableitbaren newton'schen Kräfte $\mathbf{F}$ nicht mehr als externe Terme auf.

Santilli zeigt, unter welchen Bedingungen diese inverse Aufgabe der newton'schen Mechanik lösbar ist.

Dazu seien die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} H, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} H$$

für die Variablen

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{p})^T$$

zusammengefasst zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \Phi_0 H_{\mathbf{x}}$$

mit der kanonischen Matrix

$$\Phi_0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{0} \dots \text{Nullmatrix} \\ \mathbf{I} \dots \text{Einheitsmatrix} \end{array}$$

und

$$H_{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{r}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{pmatrix}.$$

In Anlehnung an Santilli soll folgende Umbezeichnung vorgenommen werden: Die Phasenraumvariablen werden als ein $2n$ -komponentiger kontravarianter Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{a} = (a^\mu) := \begin{cases} q^\mu & \mu = 1, 2, \dots, n \\ p_{\mu-n} & \mu = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases}$$

eingeführt und die kanonische Matrix als zweistufiger kontravarianter Tensor aufgefasst

$$\Phi_0 =: (\omega^{\mu\nu}).$$

Damit lautet das System der kanonischen Gleichungen für die Phasenraumvariablen

$$\dot{a}^\mu - \omega^{\mu\nu} = \frac{\partial H}{\partial a^\nu} \quad \mu = 1, 2, \dots, 2n,$$

die im Folgenden als *kontravariante Normalform* der Gleichungen im Phasenraum bezeichnet wird.

Anmerkung: Verwendet wird die Einstein'sche Summenvereinbarung, also beispielsweise

$$\omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} = \sum_{\nu=1}^n \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu}.$$

Mit der inversen kanonischen Matrix (Schneider [60])

$$\Phi_0^{-1} = \Phi_0^T = (\omega_{\mu\nu}) = (\omega^{\mu\nu})^{-1},$$

dargestellt durch ihre kovarianten Komponenten sowie den kovarianten $2n$ -komponentigen Vektor

$$a_\mu = \omega_{\mu\nu} a^\nu = \begin{cases} -p_\mu & \mu = 1, 2, \dots, n \\ q^{\mu-n} & \mu = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases},$$

erhält man

$$\omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial H}{\partial a^\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\dot{p}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \\ \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \end{cases}$$

als *kovariante Normalform* der kanonischen Gleichungen im Phasenraum.

8.5.2 Selbstadjunktion

Liegt ein System newton'scher Bewegungsgleichungen in der Gestalt

$$A_{ki}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{q}_i + B_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$

vor und sind diese durch eine Variablentransformation

$$\dot{q}_k \rightarrow y_k : \quad G_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{y}) = \alpha(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) \dot{q}^i + \beta_k(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) = 0$$

in das System von $2n$ Gleichungen

$$\alpha_{ki}(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) \dot{q}^i + \beta_k(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) = 0,$$

$$\alpha_k^{ti}(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) \dot{y}^i + \beta'_k(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) = 0$$

überführt, die in der kovarianten Normalform geschrieben werden können

$$\omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \Xi_\mu(t, a^\alpha) = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, 2n.$$

Mit den Matrizen

$$(C_{\mu\nu}(t, a^\sigma)) := \begin{pmatrix} (\alpha_{ij}(t, a^\sigma)) & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & (\alpha_i'^j(t, a^\sigma)) \end{pmatrix},$$

$$(D_\mu \alpha_{ij}(t, a^\sigma)) := \begin{pmatrix} \beta_i(t, a^\sigma) \\ \beta_i'(t, a^\sigma) \end{pmatrix}$$

können die Gleichungen in der kovarianten Gestalt geschrieben werden:

$$C_{\mu\nu}(t, a^\sigma) \dot{a}^\nu + D_\mu(t, a^\sigma) = 0 \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n.$$

Anmerkung: Santilli gibt daneben weitere Schreibweisen an, z. B. eine kontravariante

$$C^{\mu\nu}(t, a^\sigma) \dot{a}_\nu + D^\mu(t, a^\sigma) = 0.$$

Die Forderung der Selbstadjunktion kann angepasst an die Darstellung der Bewegungsgleichungen angegeben werden, beispielsweise

$$C_{\mu\nu} + C_{\nu\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial a^\rho} + \frac{\partial C_{\nu\rho}}{\partial a^\mu} + \frac{\partial C_{\rho\mu}}{\partial a^\nu} = 0, \quad \mu, \nu, \rho = 1, 2, \dots, 2n$$

$$\frac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial D_\mu}{\partial a^\nu} - \frac{\partial D_\nu}{\partial a^\mu}.$$

oder angepasst an die Ausgangsgleichungen

$$A_{ij} = A_{ji},$$

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial A_{kj}}{\partial \dot{q}^i},$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i} = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} \right\} A_{ij},$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} \right\} \left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i} \right).$$

Selbstadjunktion wird verstanden als Forderung aus der Variationsrechnung.

8.5.3 Konstruktion der Hamilton-Funktion

Die Gleichungen können mit den kovarianten kanonischen Bewegungsgleichungen identifiziert werden

$$\omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \Xi_\mu(t, a^\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial H}{\partial a^\mu},$$

wenn diese kovariante Normalform *selbstadjungiert* ist.

Eine Hamilton-Funktion ist als Lösung des überbestimmten Systems partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial a^\mu} - \Xi_\mu(t, a^\alpha)$$

zu bestimmen. Die Hamilton-Funktion ist nach Santilli [57] gegeben durch

$$H = a^\mu \int_0^1 \Xi_\mu(t, \tau a^\alpha) d\tau.$$

Anmerkung: Santilli gibt noch eine Variante für die Berechnung der Hamilton-Funktion

$$H(t, a^\alpha) = \int_{a_0}^{a^\alpha} \Xi_\mu(t, a^\alpha = a_0^1, \dots, a^{\mu-1}, a^\mu, a^{\mu+1}, \dots, a^{2n}) da^\mu.$$

Die geforderte Selbstadjungiertheit ist gewährleistet, wenn gilt:

$$\delta_{\mu_1\mu_2}^{\nu_1\nu_2} \frac{\partial \Xi_{\nu_1}}{\partial a^{\nu_2}} = 0 \quad \mu_1, \mu_2 = 1, 2, \dots, 2n$$

oder

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial q^j} \right) & \left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial p^j} \right) \\ \left(\frac{\partial \Xi_{i+n}}{\partial q^j} \right) & \left(\frac{\partial \Xi_{i+n}}{\partial p^j} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \Xi_j}{\partial q^i} \right) & \left(\frac{\partial \Xi_{j+n}}{\partial q^j} \right) \\ \left(\frac{\partial \Xi_j}{\partial p_i} \right) & \left(\frac{\partial \Xi_{j+n}}{\partial p_i} \right) \end{pmatrix}.$$

Diese Bedingungen entsprechen Integrabilitätsbedingungen für das Bestehen einer Differentialform (Santilli [57])

$$\Xi^{(1)} = \Xi_\mu da^\mu.$$

In Santilli [57] werden u. a. für folgende Beispiele Hamilton-Funktionen auf vorstehendem Wege konstruiert. Hier soll lediglich das Ergebnis angegeben werden.

- | | |
|--|--|
| 1. Teilchenbewegung unter einer Reibungskraft | $\ddot{q} + \gamma \dot{q} = 0$ |
| Hamilton-Funktion | $H = \gamma q + e^p - 1$ |
| 2. Gedämpfter harmonischer linearer Oszillator | $\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega^2 q = 0$ |
| Hamilton-Funktion | $H = e^{-\gamma t} \frac{p^2}{2} + e^{+\gamma t} \frac{\omega^2 q^2}{2}$ |

9 Linearisierung des Gesamtproblems

9.1 Poincaré'sche Variationsgleichung

Der Bewegungsgleichung

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{f}_0(\mathbf{y}, t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \quad \text{mit} \quad O(\mathbf{f}_1) \approx O(\varepsilon)$$

sei die *exakt* bzw. hinreichend genau *lösbar* Bewegungsgleichung

$$\frac{dy_0}{dt} = \mathbf{f}_0(\mathbf{y}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0(t)$$

gegenübergestellt. Bleibt die *Abweichung* der Lösungen

$$\Delta(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)$$

klein, so folgt nach Taylor-Reihenentwicklung um die bekannte Bewegung $\mathbf{y}_0(t)$ die *Poincaré'sche Variationsgleichung* für die Abweichung $\Delta(t)$

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \mathbf{A} \Big|_{\mathbf{x}_0(t)} \Delta(t) \quad (130)$$

mit der *Jacobi-Matrix*

$$\mathbf{A} \Big|_{\mathbf{x}_0(t)} := (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_1) \Big|_{\mathbf{x}_0(t)}.$$

(130) ist eine *lineare* Differentialgleichung für die Abweichung $\Delta(t)$. Die Jacobi-Matrix ist i. A. zeitabhängig

$$\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}(\mathbf{y}_0(t)),$$

so dass ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zeitveränderlichen Koeffizienten vorliegt. Auf dessen Lösung wird im Abschnitt 9.3 eingegangen.

9.2 Encke-Linearisierung

Um die im verallgemeinerten Hauptproblem vernachlässigten (gravitativen/nicht-gravitativen) Störkräfte zu berücksichtigen, hat Cui in seiner Bahnthorie 2. Ordnung eine *Encke-Linearisierung* nachgeschaltet (Cui [6]). Sie geht von den kanonischen Bewegungsgleichungen aus, formuliert unter Einschluss aller Störkräfte (127) und entwickelt die Bewegungsgleichungen um die Lösung des Hauptproblems. Wird diese Taylorentwicklung nach den linearen Gliedern abgebrochen, so erhält man eine lineare Differentialgleichung zur Bestimmung der Zuschläge der kanonischen Variablen als Funktion der im Hauptproblem vernachlässigten Störkräfte. Diese Variationsgleichungen entsprechen den in Abschnitt 9.1 formulierten Poincaré'schen Gleichungen, sind aber in Cui [6] auf die Verwendung der Hill'schen Variablen zugeschnitten.

9.3 Lösung des linearisierten Gesamtproblems

Die Poincarésche Variationsgleichung

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \mathbf{A} \Big|_{\mathbf{x}_0(t)} \Delta(t) = \mathbf{A}(t) \Delta(t)$$

stellt den Sonderfall eines inhomogenen Systems von *linearen* Differentialgleichungen je 1. Ordnung dar:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}(t).$$

Dieses lässt sich auf mehreren Wegen⁶ lösen. In den Abschnitten 9.3.1 bis 9.3.3 werden drei Alternativen aufgeführt. Hat man auf einem dieser Wege die Lösung der Poincaré'schen Variationsgleichung gefunden, dann ergibt sich die Lösung des Gesamtproblems zu

$$\underbrace{\mathbf{r}(t)}_{\text{Lösung des Gesamtproblems}} = \underbrace{\mathbf{r}_H(t)}_{\text{Lösung des Hauptproblems}} + \underbrace{\Delta(t)}_{\text{Abweichung}}.$$

Umgekehrt kann aus der Lösung des Gesamtproblems die Auswirkung eines Störanteils herausgenommen werden

$$\underbrace{\mathbf{r}_H(t)}_{\text{Lösung des Hauptproblems}} = \underbrace{\mathbf{r}(t)}_{\text{Lösung des Gesamtproblems}} - \underbrace{\Delta(t)}_{\text{Abweichung}},$$

also die Lösung des Gesamtproblems von der Auswirkung eines Störanteils befreit werden - ein für Anwendungen interessanter Gesichtspunkt.

Ein für die Lösung des verallgemeinerten Hauptproblems interessanter Weg wird auch dadurch eröffnet, dass man von einem gegenüber dem verallgemeinerten Hauptproblem vereinfachten Bewegungsproblem ausgeht und dessen Lösung $\mathbf{r}_{int}(t)$ verbessert

$$\underbrace{\mathbf{r}_H(t)}_{\text{Lösung des Hauptproblems}} = \underbrace{\mathbf{r}_{int}(t)}_{\text{Lösung des vereinfachten Problems}} - \underbrace{\delta(t)}_{\text{Abweichung}}.$$

Die Abweichung berücksichtigt jetzt die Störung des vereinfachten Bewegungsproblems, bedingt durch den Unterschied der Kräfte im verallgemeinerten Hauptproblem und dem vereinfachten Bewegungsproblem.

⁶siehe z. B. Bronstein/Semendjajew [2] oder Rade/Westergren [56]

9.3.1 Propagator-Verfahren (Formel von Dyson)

Die Lösung lässt sich darstellen in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}(t, t_0) \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{P}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0).$$

Der Propagator $\mathbf{P}(t, \tau)$ besitzt für $-\infty < t < +\infty$ die konvergente Reihendarstellung⁷

$$\mathbf{P}(t, \tau) := \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tau}^t \int_{\tau}^{t_1} \cdots \int_{\tau}^{t_{k-1}} \mathbf{A}(t_1) \mathbf{A}(t_2) \cdots \mathbf{A}(t_k) dt_k \cdots dt_2 dt_1.$$

Für den Sonderfall $\mathbf{A} = \text{const}$ ist der Propagator gegeben durch die Exponentialreihe⁸

$$\mathbf{P}(t, \tau) = e^{(t-\tau)\mathbf{A}} = \mathbf{I} + (t-\tau) \mathbf{A} + \frac{(t-\tau)^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \cdots. \quad (131)$$

9.3.2 Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

Das homogene System von linearen Differentialgleichungen je 1. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t)$$

hat die Lösungsdarstellung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{y}_0$$

mit der Integrationskonstanten $\mathbf{y}_0$ und der Fundamentalmatrix

$$\mathbf{Y}(t) := [\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)].$$

9.3.3 Variation der Konstanten

Mit der Methode der Variation der Konstanten erhält man eine Lösung der Form⁹

$$\mathbf{y}(t) = e^{\int \mathbf{A} dt'} \mathbf{y}_0 + e^{\int \mathbf{A} dt'} \int e^{-\int \mathbf{A} dt'} \mathbf{B}(t') dt'.$$

10 Elimination von Störanteilen aus dem Gesamtproblem mit Hilfe fast-identischer Transformationen

In Schneider/Cui [64] wurde ein Konzept zur Entwicklung einer Bahntheorie für Erdsatelliten vorgestellt, das einen Genauigkeitsgrad gewährleistet, der der 3. Ordnung des Kleinheitsparameters entspricht. Dieses Konzept basiert auf der Elimination von Störanteilen der Hamilton-Funktion des Bewegungsproblems durch fastidentische kanonische Transformationen und der Zerlegbarkeit der jeweiligen transformierten Hamilton-Funktion in einen integrablen, also streng lösbaren Anteil und einen Störanteil, der von höherer Ordnung kleiner ist als der nicht-transformierte Störanteil. Das Ziel dieses zweistufigen Vorgehens je kanonischer Transformation ist es, den gesuchten Bahnverlauf in hoher Ordnung durch den integrablen Anteil, dessen exakte Lösung man kennt, zu approximieren - nach Rücktransformation mit Hilfe der erzeugenden Funktionen der ausgeführten kanonischen Transformationen. Diese Transformationen werden jeweils durch Lie-Reihen beschrieben.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der Grundgedanke auf Bewegungsgleichungen 2. Ordnung (Beispiel: Newton-Euler'sche Bewegungsgleichung) übertragen und aus ihr die Störkräfte durch eine Transformation eliminiert, d. h., die Funktionsstruktur der Kraftfunktion durch die Transformation so abgeändert, dass in der transformierten Bewegungsgleichung keinerlei Störkräfte mehr auftreten und diese einfach gelöst werden kann. Dazu ist ein System von Schwingungsgleichungen zu lösen, die je einen gestörten Oszillator beschreiben. Die Anzahl der zu lösenden Schwingungsgleichungen hängt von der angestrebten Genauigkeit der Lösungsdarstellung für das Ausgangsproblem ab. Das Verfahren wird sodann auf Bewegungsgleichungen 1. Ordnung (Beispiel: kanonische Bewegungsgleichungen) übertragen.

⁷zu dessen Auswertung durch Zeitgitterung sei beispielsweise verwiesen auf: Kleinert [31], Nolting [51], Schmutzer [58]

⁸siehe Hiller [18]

⁹Bei Hiller [18] findet man eine Reihe nützlicher Angaben über die Matrix $e^{t\mathbf{A}}$ und deren Verwendung bei der Lösung linearer Differentialgleichungen.

10.1 Aufgabenstellung

Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) =: \underbrace{\mathbf{f}_0(\mathbf{r}; t)}_{\text{definiert ungestörtes Bewegungsproblem}} + \underbrace{\varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)}_{\text{Störkräfte}}$$

soll mittels der Transformationsgleichung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t) =: \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t) \quad (132)$$

so umgeformt werden, dass Störkräfte in der transformierten Bewegungsgleichung nicht mehr auftreten. Es soll also ein *ungestörtes* Bewegungsproblem resultieren:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{f}'_0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \mathbf{f}'_1 = \mathbf{0}.$$

Zu klären ist, welche *Bedingung* die fast-identische Transformation (132) erfüllen muss, um das Fehlen der Störkräfte in der transformierten Bewegungsgleichung zu gewährleisten.

10.2 Bedingung an die Transformation

Geht man mit der Transformation in die Ausgangsgleichung ein

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \ddot{\mathbf{X}}_{\nu}(t) = \mathbf{f}_0 + \varepsilon \mathbf{f}_1 \quad (133)$$

und entwickelt die rechte Seite um die ungestörte Bewegung $\mathbf{r}'(t)$ in eine Taylorreihe, also

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{r}; t) = \mathbf{f}_0\left(\mathbf{r}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t); t\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(D_{\sigma}^{(\mathbf{r})} \mathbf{f}_0(\mathbf{r}; t) \Big|_{\mathbf{r}'} \right)$$

und

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \mathbf{f}_1\left(\mathbf{r}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t), \dot{\mathbf{r}}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \dot{\mathbf{X}}_{\nu}(t); t\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(D_{\sigma}^{(\mathbf{r})} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Big|_{\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'} + D_{\sigma}^{(\dot{\mathbf{r}})} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Big|_{\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'} \right)$$

unter Verwendung der Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} D_{\sigma}^{(\mathbf{r})} &:= \underbrace{D_1^{(\mathbf{r})} D_1^{(\mathbf{r})} \dots D_1^{(\mathbf{r})}}_{\sigma \text{ mal}} & \text{mit} & \quad D_1^{(\mathbf{r})} := \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}, \\ D_{\sigma}^{(\dot{\mathbf{r}})} &:= \underbrace{D_1^{(\dot{\mathbf{r}})} D_1^{(\dot{\mathbf{r}})} \dots D_1^{(\dot{\mathbf{r}})}}_{\sigma \text{ mal}} & \text{mit} & \quad D_1^{(\dot{\mathbf{r}})} := \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \dot{\mathbf{X}}_{\nu}(t) \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \ddot{\mathbf{X}}_{\nu}(t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{r}; t) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(D_{\sigma}^{(\mathbf{r})} \mathbf{f}_0(\mathbf{r}; t) \Big|_{\mathbf{r}'} \right) + \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\varepsilon D_{\sigma}^{(\mathbf{r})} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Big|_{\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'} + \varepsilon D_{\sigma}^{(\dot{\mathbf{r}})} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Big|_{\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'} \right) \quad (134)$$

Vergleicht man die Koeffizienten zu gleichen Potenzen von ε , so bekommt man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen je 2. Ordnung für die zu bestimmenden Funktionen $\mathbf{X}_{\nu}(t)$, die die fast-identische Transformation vermitteln.

10.3 Bestimmungsgleichungen für die Koeffizientenfunktionen

10.3.1 Taylorreihe mit Richtungsableitung

Nach Lagally/Franz [35] lässt sich die Entwicklung einer Funktion mehrerer Veränderlicher mit Hilfe von Richtungsableitungen darstellen. Es gilt

$$F(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = F(\mathbf{r} + \mathbf{s}t) = F(\mathbf{r}) + \frac{s}{1!} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{s^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \dots + \frac{s^n}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial s^n} + \dots$$

mit $s = |\mathbf{s}|$ als Bogenlänge in Richtung $\mathbf{t}$. Ersetzung von $\frac{\partial}{\partial s} := \mathbf{t} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Rightarrow s \frac{\partial}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$ führt auf

$$F(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = F(\mathbf{r} + s\mathbf{t}) = F(\mathbf{r}) + \frac{1}{1!}\mathbf{s} \cdot \nabla F + \frac{1}{2!}(\mathbf{s} \cdot \nabla)^2 F + \cdots + \frac{1}{n!}(\mathbf{s} \cdot \nabla)^n F + \cdots.$$

Wenn $\mathbf{t}$ ein konstanter Vektor ist, also nicht von $\mathbf{r}$ abhängt, kann man setzen

$$\begin{aligned} (\mathbf{t} \cdot \nabla)^2 &= \mathbf{t}\mathbf{t} \cdot \nabla^2 =: \mathbf{t}^2 \cdot \nabla^2, \\ (\mathbf{t} \cdot \nabla)^n &=: \mathbf{t}^n \underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot}_{n \text{ mal}} \nabla^n, \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{\partial^n F}{\partial s^n} = (\mathbf{t} \cdot \nabla_{\mathbf{r}})^n F = \mathbf{t}^n \underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot}_{n \text{ mal}} \nabla^n F.$$

Damit nimmt die Taylorreihe die Gestalt an

$$F(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = F(\mathbf{r} + s\mathbf{t}) = F(\mathbf{r}) + \frac{1}{1!}\mathbf{s} \cdot \nabla F + \frac{1}{2!}\mathbf{s}^2 \cdot \nabla^2 F + \cdots + \frac{1}{n!}\mathbf{s}^n \underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot}_{n \text{ mal}} \nabla^n F + \cdots$$

mit

$$\mathbf{s} := \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t).$$

Differentiation nach verschiedenen Richtungen liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s_1} &= \mathbf{t}_1 \cdot \nabla F, & \frac{\partial F}{\partial s_2} &= \mathbf{t}_2 \cdot \nabla F \\ &\Downarrow & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} &= \mathbf{t}_1 \cdot \nabla \mathbf{t}_2 \cdot \nabla F & \text{und} & \frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial s_1} = \mathbf{t}_2 \cdot \nabla \mathbf{t}_1 \cdot \nabla F. \end{aligned}$$

Wenn $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ unabhängig von $\mathbf{r}$ sind, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s_1} &= \mathbf{t}_1 \cdot \nabla F, & \frac{\partial F}{\partial s_2} &= \mathbf{t}_2 \cdot \nabla F \\ &\Downarrow & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} &= \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{t}_2 \cdot \nabla) \nabla F = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{t}_2 \cdot \nabla^2 F) = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 \nabla^2 F \\ \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial s_1} &= \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla) \nabla F = \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{t}_1 \cdot \nabla^2 F) = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1 \nabla^2 F. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial^n F}{\partial s_n \dots \partial s_2 \partial s_1} = (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{t}_n) \cdot \dots \cdot \nabla^n F.$$

In Worten: Der Operator einer Richtungsdifferentiation n -ter Ordnung ist ein n -fach skalares Produkt zweier Tensoren n -ter Stufe, deren erster das unbestimmte Produkt der Einheitsvektoren der n Differentialgleichungen ist und deren zweiter die n -te Potenz des Nabla-Operators ist (Lagally/Franz [35]).

Für die Anwendung auf das gestellte Problem sei

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}' + \mathbf{s}; t) =: \mathbf{f}\left(\mathbf{r}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t); t\right) = \mathbf{f}(\mathbf{r}'; t) + \frac{1}{1!}\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{f} + \frac{1}{2!}\mathbf{s}^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{f} + \cdots + \frac{1}{n!}\mathbf{s}^n \cdot \nabla^n \mathbf{f} + \cdots.$$

Auswertung der ersten beiden Terme liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\left(\mathbf{r}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t); t\right) &= \mathbf{f}(\mathbf{r}'; t) + \frac{1}{1!}\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{f} + \cdots = \mathbf{f}(\mathbf{r}'; t) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t)\right) \cdot \nabla \mathbf{f} + \cdots \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{r}'; t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu} \cdot \nabla \mathbf{f} + \cdots \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{r}'; t) + \varepsilon^1 \mathbf{X}_1 \cdot \nabla \mathbf{f} + \varepsilon^2 \mathbf{X}_2 \cdot \nabla \mathbf{f} + \varepsilon^3 \mathbf{X}_3 \cdot \nabla \mathbf{f} + \cdots. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{f}(\mathbf{r}'; t) \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}; t) \Big|_{\mathbf{r}'} + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{r}'; t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{\mathbf{X}}_\nu &= \mathbf{X}_\nu \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}; t) \Big|_{\mathbf{r}'} + \dots\end{aligned}$$

10.3.2 Bedingungsgleichungen

Unter Berücksichtigung von (132) und (133) lautet die zu erfüllende Bedingung für die Elimination der Störkräfte aus der transformierten Bewegungsgleichung (vgl. (134)):

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \ddot{\mathbf{X}}_\nu(t) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(D_\sigma^{(\mathbf{r})} \mathbf{f}_0(\mathbf{r}; t) \Big|_{\mathbf{r}'} \right) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\varepsilon D_\sigma^{(\mathbf{r})} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Big|_{\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'} \right) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\varepsilon D_\sigma^{(\dot{\mathbf{r}})} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Big|_{\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'} \right).$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{(0)} &:= \mathbf{f}_0(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}', t} & \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} &:= (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_0(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}', t}, \\ \mathbf{F}^{(1)} &:= \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}', t} & \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(1)} &:= (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}', t}\end{aligned}$$

erhält man im einzelnen für die Funktionen $\mathbf{X}_\nu(t)$ mit $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}}_0 &\equiv \ddot{\mathbf{r}}' && \Rightarrow \mathbf{X}_0(t), \\ \ddot{\mathbf{X}}_1 &= \frac{1}{1!} \mathbf{X}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{F}^{(1)} && \Rightarrow \mathbf{X}_1(t), \\ \ddot{\mathbf{X}}_2 &= \frac{1}{1!} \mathbf{X}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} + \frac{1}{2!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{X}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(1)} && \Rightarrow \mathbf{X}_2(t), \\ \ddot{\mathbf{X}}_3 &= \frac{1}{1!} \mathbf{X}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} + \frac{1}{2!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}^{(1)} + \frac{1}{2!} \{(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2) + (\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^2\} \mathbf{F}^{(0)} + \frac{1}{3!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^3 \mathbf{F}^{(0)} && \Rightarrow \mathbf{X}_3(t) \\ \vdots &&& \vdots\end{aligned} \tag{135}$$

wobei $\mathbf{X}_0(t) \equiv \mathbf{r}'(t)$. Das sind gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung zur Bestimmung der Funktionen $\mathbf{X}_\nu(t)$. Es handelt sich durchweg um Gleichungen vom Typus „Schwingungsgleichungen“. Der erste Term

$$\mathbf{X}_\nu(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} \rightarrow \ddot{\mathbf{X}}_\nu = \mathbf{X}_\nu(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} + \dots$$

definiert jeweils einen räumlichen Oszillator, allerdings sind dessen Komponenten gekoppelt. D. h., es sind keine unabhängigen linearen harmonischen Oszillatoren. Ausführlich lautet diese Gleichung nämlich

$$\ddot{\mathbf{X}}_\nu = \mathbf{X}_\nu(t) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_0(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}', t} + \dots$$

oder in Matrixschreibweise

$$\ddot{\mathbf{X}}_\nu(t) =: \begin{pmatrix} \ddot{X}_\nu^{(1)}(t) \\ \ddot{X}_\nu^{(2)}(t) \\ \ddot{X}_\nu^{(3)}(t) \end{pmatrix} =: (X_\nu^{(1)}(t), X_\nu^{(2)}(t), X_\nu^{(3)}(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_0^{(3)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_0^{(3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_0^{(3)}}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T.$$

Die weiteren Terme auf den rechten Seiten koppeln die höheren Gleichungen an die niederen. Beispielsweise geht in die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_2(t) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_0(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}', t} + \dots$$

die Lösung der vorangehenden Gleichung für $\mathbf{X}_1(t)$ ein. Während in diese die Störkraft selbst eingeht, treten in den nächsten Gleichungen jeweils deren Gradienten auf.

Die Lösung des Ausgangsproblems

$$\mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r}'}_{\substack{\text{ungestörte} \\ \text{Bewegung}}} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t)}_{\text{Überlagerung gekoppelter Oszillatoren}}$$

setzt sich aus der ungestörten Bewegung und einer Überlagerung von Oszillatorbewegungen zusammen, die untereinander nicht-linear gekoppelt sind. Führt man in den Gleichungen jeweils nur den ersten Term mit, so erkennt man, dass sich die Oszillatorbewegungen linear superponieren lassen, wie es z. B. in allen Bahntheorien erster Ordnung der Fall ist (siehe Kaula-Theorie). Erst ab zweiter Ordnung werden Kopplungen bedeutsam.

10.3.3 Lösung der Differentialgleichungen

Die zu lösenden Differentialgleichungen haben die allgemeine Gestalt

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\nu} = \mathbf{F}_{\nu}.$$

Durch Variablensubstitution können sie je in ein System von Gleichungen 1. Ordnung umgewandelt werden

$$\mathbf{y} := \dot{\mathbf{X}}_{\nu} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}_{\nu}.$$

Lässt sich die rechte Seite schreiben in der Gestalt

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}(t),$$

so liegt ein System von linearen Differentialgleichungen je 1. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$$

vor, das mit den erwähnten Verfahren aus den Abschnitten 9.3.1 bis 9.3.3 gelöst werden kann.

Durch unbestimmte Integration

$$\mathbf{X}_{\nu}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{y}(t') dt'$$

bekommt man aus der Lösung $\mathbf{y}(t)$ die gesuchte Funktion $\mathbf{X}_{\nu}(t)$. Der gesamte Vorgang ist entsprechend der angestrebten Ordnung auszuführen.

10.4 Übertragung auf Bewegungsgleichungen 1. Ordnung

Vorgelegt seien Bewegungsgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}; t) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}; t) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}; t).$$

Gesucht wird eine Transformation

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' : \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon^{\sigma} \mathbf{X}_{\sigma}(t),$$

die die Bewegungsgleichungen so transformiert, dass gilt

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}'; t) \Leftrightarrow \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}'; t) = \mathbf{0}.$$

Die Entwicklung der rechten Seite der Ausgangsgleichungen in eine Taylorreihe um $\mathbf{x}'(t)$ ergibt

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}' + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon^{\sigma} \dot{\mathbf{X}}_{\sigma}(t) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(D_{\sigma}^{(\mathbf{x})} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}; t) \Big|_{\mathbf{x}'; t} \right) + \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} \left(\varepsilon D_{\sigma}^{(\mathbf{x})} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}; t) \Big|_{\mathbf{x}'; t} \right).$$

Ein Koeffizientenvergleich bezüglich ε führt auf Bestimmungsgleichungen für die Funktionen $\mathbf{X}_{\nu}(t)$:

$$\begin{aligned} \nu = 1 & \quad \dot{\mathbf{X}}_1 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_1 \cdot \nabla \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1, \\ \nu = 2 & \quad \dot{\mathbf{X}}_2 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_2 \cdot \nabla \mathbf{g}_0 + \frac{1}{2!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{X}_1 \cdot \nabla \mathbf{g}_1, \\ \nu = 3 & \quad \dot{\mathbf{X}}_3 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_3 \cdot \nabla \mathbf{g}_0 + \frac{1}{2!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_1 + \frac{1}{2!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla^2 \mathbf{g}_0 + \frac{1}{3!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla^3 \mathbf{g}_0 \\ & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

bzw. allgemein

$$\dot{\mathbf{X}}_{\nu} = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_{\nu} \cdot \nabla \mathbf{g}_0 + \mathbf{F}_{\nu}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\nu-1}, \mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1; t) \quad \text{für} \quad \nu > 1.$$

Das ist ein System von Differentialgleichungen je 1. Ordnung, das nach den in den Abschnitten 9.3.1 bis 9.3.3 angegebenen Verfahren gelöst werden kann. Insbesondere bietet sich hier das Propagator-Verfahren an, weil die obigen Differentialgleichungen genau die dort angenommene Gestalt haben. In der n -ten Gleichung werden, wie beim Poisson-Verfahren, die Lösungen der vorangehenden Gleichungen benötigt. Das System der Differentialgleichungen ist also rekursiv. *Anmerkung:* Die Bewegungsgleichungen können im Sonderfall *kanonisch* sein.

10.5 Zusammenfassung und Ausblick

Das vorgestellte Verfahren ist auf Bewegungsgleichungen 1. und 2. Ordnung, nicht-relativistische wie relativistische, anwendbar. Es wird lediglich angenommen, dass sich deren Inhomogenität aufspalten lässt in einen integrierbaren, also exakt lösbaren Anteil und einen Störanteil, charakterisiert durch einen Kleinheitsparameter ε . Die Schnittstelle kann dabei beliebig gelegt werden. Beispiele hierfür sind:

- Kepler-Problem – Störkräfte,
- Cui-Problem – Störanteile,
- Vinti-Problem – Störanteile,
- Schwarzschild-Problem – Gravitomagnetfeld.

Von Interesse dürfte vor allem sein, dass man zunächst nicht berücksichtigte Störanteile mitnehmen kann. D. h., Lösungen eines vereinfachten Bewegungsproblems definieren ein *ungestörtes* Bewegungsproblem. Die zunächst vernachlässigten Störanteile gehen in die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten-Funktionen $\mathbf{X}_\nu(t)$ der Transformation ein. Die Berücksichtigung der vernachlässigten Störanteile kann in ausreichender Ordnung erfolgen. Dies entspricht gerade der Umkehrung der Elimination der Störanteile.

Damit stellt sich die Aufgabe der Entwicklung einer hochgenauen Bahntheorie wie folgt dar:

- Zerlegung der Gesamtaufgabe in ein integrables Hauptproblem und einen Störanteil

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}; t) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}; t) \quad \text{mit} \quad |\varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}; t)| \ll |\mathbf{g}_0(\mathbf{x}; t)|,$$

- exakte/hochgenaue Lösung des Hauptproblems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}; t) \rightarrow \mathbf{x}_H = \mathbf{x}_H(t),$
- Elimination der Störanteile $\varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}; t) \rightarrow \mathbf{X}_\nu(t)$ für $1 \leq \nu \leq N,$
- Zusammensetzung der ungestörten Lösung des Hauptproblems und der Transformation auf das aktuelle Bewegungsproblem

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_H(t) + \sum_{\nu=1}^N \varepsilon^\nu \mathbf{X}_\nu(t),$$

- Qualitätskontrolle der Teillösungen mit Hilfe von Abschätzungstheoremen und der Verarbeitung von Bahnverfolgungsdaten.

Danach können für die Teilaufgaben verschiedene Lösungsverfahren eingesetzt werden. Definiert man das Hauptproblem als die Bewegung in einem Gravitationsfeld, so kann man etwa Verfahren der kanonischen Transformationstheorie heranziehen.

Zusammenfassend lässt sich das vorgestellte Verfahren folgendermaßen charakterisieren:

Durch eine fast-identische Transformation lassen sich

- entweder Störkräfte aus einer Bewegungsgleichung *eliminieren*

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' : \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon^\sigma \mathbf{X}_\sigma(t) \quad (\text{Elimination}),$$

- oder Störkräfte in eine Bewegungsgleichung *einbeziehen*

$$\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} : \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon^\sigma \mathbf{X}_\sigma(t) \quad (\text{Einbeziehung}).$$

Somit können zweierlei Fragestellungen behandelt werden:

- Wie kann man die Auswirkungen von Störkräften auf eine vorgegebene Bahntheorie berücksichtigen und damit die Bahntheorie auf ein umfassenderes Bewegungsproblem erweitern ?
- Wie kann man das Ergebnis einer Bahnbestimmung von der Wirkung von Störkräften befreien ?

Beides ist beispielsweise für die Gravitationsfeldbestimmung von Interesse.

Teil IV

Anwendungen

Die in den vorangehenden Abschnitten dargestellten Verfahren zur Lösung von Störungsproblemen sollen an ausgewählten Beispielen demonstriert werden. Das Hauptanliegen ist dabei, die Arbeitsschritte vorzuführen, aber auch die Wirksamkeit der Verfahren aufzuzeigen. Die Lösung des eingangs gestellten verallgemeinerten Hauptproblems der Theorie der Satellitenbahnen wird nur skizziert werden, weil seine ausführliche Behandlung den Rahmen dieser Studie sprengen würde und das angestrebte Ergebnis noch nicht vorliegt und auch Gegenstand einer eigenen Veröffentlichung sein wird.

11 Duffing-Oszillator

11.1 Bewegungsgleichung

Der *freie, ungedämpfte Duffing-Oszillator* ist definiert durch die Bewegungsgleichung (Kevorkian/Cole [27])

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad \varepsilon \text{ Kleinheitsparameter}, \quad (136)$$

die bei verschwindendem Kleinheitsparameter in die Bewegungsgleichung des *linearen harmonischen Oszillators* übergeht. Nimmt man die Variablensubstitution

$$x = \dot{u}, \quad y = u \quad (137)$$

vor, so erhält man das kanonische System

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$F = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{4}\varepsilon y^4, \quad (138)$$

denn durch Nachrechnen sieht man, dass

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y} = -(y + \varepsilon y^3) \hat{=} -(u + \varepsilon u^3), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x} = x \hat{=} \dot{u}$$

und durch Bildung von $\ddot{u} = \dot{x} = -(u + \varepsilon u^3)$ die ursprüngliche Differentialgleichung 2. Ordnung entsteht.

11.2 Lösung nach der modifizierten Cui-Methode

11.2.1 Konstruktion einer IAS 0. Ordnung

Ein kanonisches System mit der Hamilton-Funktion

$$F^* = -\frac{1}{2}\Phi(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}\Phi(a^2) \quad (139)$$

in der $\Phi(z)$ eine differenzierbare und im Allgemeinfall beliebige Funktion des Arguments ist, erweist sich als integrierbar. Ein erstes Integral lautet nach dem *Theorem A* von Cui (Schneider/Cui [64])

$$a = \text{const.}$$

Unter Zuhilfenahme dieses Bewegungsintegrals lässt sich die allgemeine Lösung des kanonischen Systems mit der Hamilton-Funktion F^* darstellen in der Gestalt

$$x = a \cos f, \quad y = a \sin f. \quad (140)$$

Die Winkelvariable f ist als Funktion der kanonischen Variablen x und y definiert. Ihre Zeitabhängigkeit erhält man nach Bildung der Differentiale

$$\begin{aligned}
a^2 &:= x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad da = \frac{x}{a} dx + \frac{y}{a} dy, \\
x &= a \cos f \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{x}{a} da - y df, \\
df &= \frac{x}{y} \frac{1}{a} da - \frac{1}{y} dx.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Zeitableitung des Winkels zu

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{y} \frac{\partial F^*}{\partial y} = -2 \frac{dF^*}{da^2} = -2 \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d\Phi}{da^2} = \Phi'(a^2) = \omega(a^2). \quad (141)$$

Die Winkelgeschwindigkeit bzw. *Frequenz* ist also konstant. Im Allgemeinfall kann man für Φ' ein Funktional in a^2 ansetzen, etwa wie oben angezeigt $\Phi'(a^2) =: \omega(a^2)$. Unbestimmte Integration über die Zeit liefert dann als zweites Integral

$$f = \omega t + f_0$$

mit der Integrationskonstanten f_0 . Die beiden Bewegungsintegrale sind unabhängig und ergeben die allgemeine Lösung des vereinfachten kanonischen Systems

$$x = a \cos(\omega t + f_0), \quad y = a \sin(\omega t + f_0).$$

Es wird als *Zielsystem* für die Konstruktion des IAS n ter Ordnung gewählt.

Aus der Lösungsdarstellung erhält man

$$x^2 = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos 2f), \quad y^2 = \frac{1}{2} a^2 (1 - \cos 2f)$$

und

$$x^4 = \frac{1}{8} a^4 (3 + 4 \cos 2f + \cos 4f), \quad y^4 = \frac{1}{8} a^4 (3 - 4 \cos 2f + \cos 4f)$$

und damit die Hamilton-Funktion (138) des Duffing-Oszillators zu

$$F = \underbrace{-\frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{3}{16} \varepsilon a^4 \right)}_{=: F^{(0)*}} + \underbrace{\frac{1}{32} \varepsilon a^4 (4 \cos 2f - \cos 4f)}_{=: R^{(0)}}. \quad (142)$$

Darin stellt

$$F^{(0)*} = -\frac{1}{2} \left((x^2 + y^2) + \frac{3}{16} \varepsilon (x^2 + y^2)^2 \right)$$

ein IAS 0. Ordnung dar und

$$R^{(0)} = \frac{1}{32} \varepsilon (3x^4 + 6x^2 y^2 - 5y^4)$$

ist ein *periodischer Restanteil*.

Für das IAS 0. Ordnung ergibt sich die Frequenz

$$\omega^{(0)}(a^2) = -2 \frac{dF^{(0)*}}{da^2} = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 \neq \omega(a^2).$$

Ergebnis: Es liegt jetzt eine Hamilton-Funktion des geforderten Typs

$$F = F^*(X, Y; \varepsilon) + R(X, Y; \varepsilon)$$

vor mit dem *integralen* Anteil

$$F^* = F^*(X, Y; \varepsilon) \hat{=} F^{(0)*}(X, Y; \varepsilon)$$

und dem *periodischen* Restanteil

$$R = R(X, Y; \varepsilon) \hat{=} R^{(0)}(X, Y; \varepsilon),$$

wobei

$$R(X, Y; \varepsilon) = O(\varepsilon) \quad \text{und} \quad \int R(X, Y; \varepsilon) dt = O(\vartheta \varepsilon) \ll 1.$$

11.2.2 Schrittweise Konstruktion von IAS höherer Ordnung

Konstruktion eines IAS 1. Ordnung

Mit einer fast-identischen kanonischen Transformation

$$X, Y \quad \Rightarrow \quad X^{(1)}, Y^{(1)},$$

dargestellt durch die Lie-Reihen

$$X = X^{(1)} + \left\{ X^{(1)}, s^{(1)} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \left\{ X^{(1)}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ \left\{ X^{(1)}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\} + \dots,$$

$$Y = Y^{(1)} + \left\{ Y^{(1)}, s^{(1)} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \left\{ Y^{(1)}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ \left\{ Y^{(1)}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\} + \dots$$

und die *erzeugende Funktion*

$$s^{(1)} = \int R^{(0)} dt = \frac{1}{128} \omega^{-1} \varepsilon a^4 (8 \sin 2f - \sin 4f) = \frac{1}{32} \omega^{-1} \varepsilon (3x^3 y + 5xy^3),$$

erhält man die *transformierte Hamilton-Funktion*

$$F^{(0)} \rightarrow F^{(1)} : F^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) = F^{(0)*}(x^{(1)}, y^{(1)}) + \hat{R}(x^{(1)}, y^{(1)})$$

mit

$$\hat{R}(x^{(1)}, y^{(1)}) = \frac{1}{2!} \left\{ R^{(0)}, s^{(1)} \right\} - \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ R^{(0)}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\} + \frac{1}{4!} \left\{ \left\{ \left\{ R^{(0)}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\}, s^{(1)} \right\} \mp \dots \quad (143)$$

Bildet man die Poisson-Klammern, so bekommt man

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \frac{1}{512} \varepsilon^2 \left(\omega^{-1} (9x^6 + 27x^4 y^2 + 75x^2 y^4 + 25y^6) + 16 \frac{d\omega^{-1}}{da^2} (3x^4 y^4 + 5x^2 y^6) \right) - \\ &- \frac{1}{8192} \varepsilon^3 \left(\omega^{-2} (27x^8 + 108x^6 y^2 - 150x^4 y^4 - 100x^2 y^6 - 125y^8) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \omega^{-1} \frac{d\omega^{-1}}{da^2} (27x^{10} + 135x^8 y^2 - 810x^6 y^4 - 1530x^4 y^6 - 225x^2 y^8 - 125y^{10}) \right) + \\ &+ \frac{1}{131072} \varepsilon^4 (81x^{10} + 405x^8 y^2 + 1530x^6 y^4 - 150x^4 y^6 + 1225x^2 y^8 + 625y^{10}) + O(\varepsilon^5) \\ &= \frac{1}{512} \varepsilon^2 \left(\omega^{-1} a^6 (17 - 9 \cos 2f + \cos 6f) + \frac{1}{4} \frac{d\omega^{-1}}{da^2} a^8 (17 - 10 \cos 2f - 16 \cos 4f + 10 \cos 6f - \cos 8f) \right) - \\ &- \frac{1}{8192} \varepsilon^3 \left(\omega^{-2} a^8 (-30 + 73 \cos 2f - 17 \cos 4f + 3 \cos 6f - 2 \cos 8f) + \frac{1}{3} \omega^{-1} \frac{d\omega^{-1}}{da^2} a^{10} (-54 + \phi_1(f)) \right) + \\ &+ \frac{1}{524288} \varepsilon^4 a^{10} (927 + \phi_2(f)) + O(\varepsilon^5) \end{aligned}$$

mit

$$\phi_1(f) := 75 \cos 2f + 15 \cos 4f - 10 \cos 8f + \cos 10f,$$

$$\phi_2(f) := -858 \cos 2f + 480 \cos 4f - 288 \cos 6f + 5 \cos 8f + 58 \cos 10f.$$

Zerlegung der Klammern in $\hat{R}(x^{(1)}, y^{(1)})$ führt auf

$$F^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) = F^{(1)*}(x^{(1)}, y^{(1)}) + R^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)})$$

mit dem *integrablen* Anteil

$$F^{(1)*} = -\frac{1}{2} a^2 - \frac{3}{32} \varepsilon a^4 + \frac{1}{2048} \left(\varepsilon^2 (68 \omega^{-1} a^6 + 17 \frac{d\omega^{-1}}{da^2} a^8) + \frac{3}{2} \varepsilon^3 (5 \omega^{-2} a^8 + 3 \omega^{-1} \frac{d\omega^{-1}}{da^2} a^{10}) + \frac{927}{256} \varepsilon^4 a^{10} \right) + O(\varepsilon^5)$$

und dem *periodischen* Restanteil

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= -\frac{1}{512} \varepsilon^2 \left(\omega^{-1} a^6 (9 \cos 2f - \cos 6f) + \frac{1}{4} \frac{d\omega^{-1}}{da^2} a^8 (10 \cos 2f + 16 \cos 4f - 10 \cos 6f + \cos 8f) \right) - \\ &- \frac{1}{8192} \varepsilon^3 \left(\omega^{-2} a^8 (73 \cos 2f - 17 \cos 4f + 3 \cos 6f - 2 \cos 8f) \right) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Der Restanteil $R^{(1)}$ ist von der Ordnung $O(\varepsilon^2)$.

Der integrable Anteil $F^{(1)*}$ definiert ein *IAS 1. Ordnung* des Ausgangssystems - formuliert in den transformierten Variablen $(x^{(1)}, y^{(1)})$. Er kann wie folgt durch a^2 ausgedrückt werden:

$$F^{(1)*} = -\frac{1}{2} (a^2 + \frac{3}{16} \varepsilon a^4 - \frac{17}{256} \varepsilon^2 a^6 + \frac{195}{8192} \varepsilon^3 a^8 - \frac{11397}{262144} \varepsilon^4 a^{10}) + O(\varepsilon^5).$$

Für den Restanteil folgt entsprechend

$$R^{(1)} = -\frac{1}{512} \varepsilon^2 a^6 \left((9 - \frac{461}{16} \varepsilon a^2) \cos 2f - \frac{41}{16} \varepsilon a^2 \cos 4f - (1 - \frac{3}{2} \varepsilon a^2) \cos 6f - \frac{7}{32} \varepsilon a^2 \cos 8f \right) + O(\varepsilon^4).$$

Konstruktion eines IAS 3. Ordnung

Vermittels einer *zweiten* kanonischen Transformation

$$X = X^{(2)} + \left\{ X^{(2)}, s^{(2)} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \left\{ X^{(2)}, s^{(2)} \right\}, s^{(2)} \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ \left\{ X^{(2)}, s^{(2)} \right\}, s^{(2)} \right\}, s^{(2)} \right\} + \dots,$$

$$Y = Y^{(2)} + \left\{ Y^{(2)}, s^{(2)} \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \left\{ Y^{(2)}, s^{(2)} \right\}, s^{(2)} \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ \left\{ Y^{(2)}, s^{(2)} \right\}, s^{(2)} \right\}, s^{(2)} \right\} + \dots$$

mit der *erzeugenden* Funktion

$$s^{(2)} = \int R^{(1)} dt = -\frac{1}{1024} \omega^{-1} \varepsilon^2 a^6 \left(\left(9 - \frac{461}{16} \varepsilon a^2 \right) \sin 2f - \frac{41}{32} \varepsilon a^2 \sin 4f - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon a^2 \right) \sin 6f - \frac{7}{128} \varepsilon a^2 \sin 8f \right)$$

erhält man die transformierte Hamilton-Funktion

$$F^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}) = F^{(1)*}(x^{(2)}, y^{(2)}) + \frac{1}{2} \left\{ R^{(1)}, s^{(2)} \right\} + \dots \xrightarrow{\text{Zerlegung}} F^{(2)*} + R^{(2)},$$

deren Zerlegung ein IAS definiert durch

$$F^{(2)*} = F^{(1)*}(x^{(2)}, y^{(2)}) + \frac{515}{524288} \varepsilon^4 a^{10} = -\frac{1}{2} (a^2 + \frac{3}{16} \varepsilon a^4 - \frac{17}{256} \varepsilon^2 a^6 + \frac{195}{8192} \varepsilon^3 a^8 - \frac{1489}{32768} \varepsilon^4 a^{10})$$

mit dem Restanteil

$$R^{(2)} = -\frac{1}{524288} \varepsilon^4 a^{10} (84 \cos 4f - 41 \cos 8f).$$

Da dieser von der Ordnung $R^{(2)} = O(\varepsilon^4)$ ist, liegt mit dem integrablen Anteil ein *IAS 3. Ordnung* vor. Dessen allgemeine Lösung kann in den transformierten Variablen $(x^{(2)}, y^{(2)})$ gemäß

$$x^{(2)} = a \cos f = a \cos(\omega^{(2)} t + f_0), \quad y^{(2)} = a \sin f = a \sin(\omega^{(2)} t + f_0)$$

formuliert werden, worin die *Frequenz* gegeben ist durch

$$\omega^{(2)} = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 - \frac{51}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{195}{2048} \varepsilon^3 a^6 - \frac{7445}{32768} \varepsilon^4 a^8.$$

11.2.3 Genäherte Lösung des Ausgangssystems

Die Lösung des Ausgangssystems wird nach den beiden kanonischen Transformationen durch

$$x = x^{(2)} + \left\{ x^{(2)}, s \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \left\{ x^{(2)}, s \right\}, s \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ \left\{ x^{(2)}, s \right\}, s \right\}, s \right\} + \dots$$

$$y = y^{(2)} + \left\{ y^{(2)}, s \right\} + \frac{1}{2!} \left\{ \left\{ y^{(2)}, s \right\}, s \right\} + \frac{1}{3!} \left\{ \left\{ \left\{ y^{(2)}, s \right\}, s \right\}, s \right\} + \dots$$

genähert beschrieben, wobei die erzeugende Funktion aus den erzeugenden Funktionen der hintereinander geschalteten kanonischen Transformationen zusammengesetzt ist:

$$s = (s^{(1)} + s^{(2)}) + \frac{1}{2} \{ s^{(1)}, s^{(2)} \} + \frac{1}{12} \{ s^{(1)} - s^{(2)}, \{ s^{(1)}, s^{(2)} \} \} + \dots$$

Der Annäherungsgrad an die strenge Lösung ist von 3. Ordnung.

Anmerkungen:

- wenn man mit einer genäherten Lösung 1. Ordnung zufrieden ist, entfällt die Notwendigkeit der zweiten Transformation,
- wenn eine genäherte Lösung höherer Ordnung gewünscht ist, dann werden weitere Transformationen nötig, um IASs höherer Ordnung zu konstruieren.¹⁰

Vermutung: Wenn ein kanonisches System ein IAS 0. Ordnung besitzt, d.h., wenn es zerlegt werden kann in einen integrablen Anteil und in einen periodischen Anteil erster Ordnung, dann scheinen beim Bilden der Poisson-Klammern in (143) keinerlei Terme aufzutreten, die weder konstant noch periodisch sind. Wenn dies zutrifft, dann folgt daraus ein

Theorem: Wenn ein kanonisches System ein IAS 0. Ordnung besitzt, dann ist das System *integrabel*.

¹⁰Eine weitere Transformation kann eingeführt werden zum Erhalt eines genäherten Systems mit einem Residuum der Ordnung $O(\varepsilon^8)$. Dies führt zu einer genäherten Lösung 7. Ordnung. Dazu müssen allerdings die transformierten Hamilton-Funktionen $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ derart berechnet werden, dass sie alle Terme bis zur Ordnung $O(\varepsilon^8)$ enthalten.

11.3 Lösung durch Elimination des Störanteils

Behandelt werden soll auch hier der *reibungsfreie Duffing-Oszillator ohne äußere Anregung*. Mit $\omega_0^2 > 0$ und dem Kleinheitsparameter ε lautet seine allgemeinste Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (144)$$

Bei Beschränkung auf den Sonderfall $\omega_0 = 1$ folgt (136) mit den entsprechenden Aussagen im Abschnitt 11.1. Zunächst soll der *lineare harmonische Oszillator* ($\varepsilon = 0$) betrachtet werden. Man erhält mit der üblichen Variablensubstitution (137) ein kanonisches System mit der Hamilton-Funktion¹¹

$$F = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) =: -\frac{1}{2}\Phi \quad \text{mit} \quad \Phi = \Phi(x^2 + y^2) =: \Phi(a^2)$$

Analog zum Abschnitt 11.2.1 ergibt sich mit $f = \omega t + f_0$ die allgemeine Lösung des Bewegungsproblems zu

$$x = a \cos(\omega t + f_0) \quad y = a \sin(\omega t + f_0) \quad (145)$$

Vorerst wird $\omega = 1$ gesetzt.

Nun kommen wir zum freien Duffing-Oszillator zurück, d. h., es wird $\varepsilon \neq 0$ zugelassen und man erhält die Hamilton-Funktion (138). Um die allgemeine Lösungsform beibehalten zu können, könnte man (140) in (138) einsetzen:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2}(a^2 \cos^2 f + a^2 \sin^2 f) - \frac{1}{4}\varepsilon a^4 \sin^4 f = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{32}\varepsilon a^4 (3 - 4 \cos 2f + \cos 4f) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{3}{32}\varepsilon(x^2 + y^2)^2}_{=: F^{(0)}} + \underbrace{\frac{1}{32}\varepsilon(3x^4 + 6x^2y^2 - 5y^4)}_{=: R^{(0)}} \end{aligned}$$

Man kann dann die Hamilton-Funktion zerlegen in einen *integrablen* Anteil $F^{(0)} = F^{(0)}(a^2)$ und in einen Restanteil $R^{(0)}$, also $F = F^{(0)} + R^{(0)}$.¹² Der integrable Anteil hat die wünschenswerte Funktionsstruktur

$$F^{(0)} = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{32}\varepsilon(a^2)^2 =: -\frac{1}{2}\Phi(a^2)$$

so dass sich in Analogie zu (141) die Frequenz in diesem Bewegungsproblem ergibt zu

$$\omega(a^2) := -2 \frac{dF^{(0)}}{da^2} = -2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\varepsilon a^2 \right) = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2$$

und somit die Lösungsdarstellung (145), hier konkret für die, hinsichtlich $R^{(0)}$, ungestörte Bewegung¹³:

$$x = a \cos \left(\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 \right) t + f_0 \right) \quad y = a \sin \left(\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 \right) t + f_0 \right) \quad (146)$$

Diese Lösung entspricht dem Ergebnis der *Krylov-Bogoliubov-Methode*, vgl. Formel (249) im Anhang, Abschnitt 13.1.¹⁴ Für Lösungen höherer Ordnung müsste der Restanteil $R^{(0)}$ weiter betrachtet werden. Stattdessen werden die in vorangegangenen theoretischen Abschnitten vorgestellten Lösungsverfahren Verwendung finden. Die ungestörte Lösung (140) kann unmittelbar übernommen werden.

Nunmehr soll das *gestörte* Bewegungsproblem gelöst werden.

11.3.1 Ansatz nach dem Propagator-Verfahren

Es werden zunächst die Bewegungsgleichungen 1. Ordnung betrachtet. Als Ausgangspunkt dient das *ungestörte* Bewegungsproblem, definiert durch

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x} = x.$$

Das System der *Bestimmungsgleichungen* für die Koeffizienten $\mathbf{X}_\nu(t)$ lautet

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}'; t), \quad \dot{\mathbf{X}}_1 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_1 \cdot \nabla \mathbf{g}_0 \Big|_0 + \hat{\mathbf{g}}_1 \Big|_0 \quad \text{etc.}$$

Hier ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

¹¹vgl. Formel (139)

¹²Diese Zerlegung erfolgte vergleichbar auch in der *Lösung nach der modifizierten Cui-Methode*; siehe (142) im Abschnitt 11.2.1.

¹³Als *ungestörte Bewegung* wird hier die aus dem Ansatz der Hamilton-Funktion $F^{(0)}$ resultierende Bewegung bezeichnet; also unter Vernachlässigung von (der Störfunktion) $R^{(0)}$.

¹⁴mit den Setzungen $\omega_0 = 1$ in (249) und $f_0 = \pi/2$ in (146)

und

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}; t) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}; t) := \begin{pmatrix} -y^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\nabla \mathbf{g}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} (g_0^x, g_0^y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_0^x}{\partial x} & \frac{\partial g_0^x}{\partial y} \\ \frac{\partial g_0^y}{\partial x} & \frac{\partial g_0^y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(-y)}{\partial x} & \frac{\partial(-y)}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{A},$$

so dass

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_1 \cdot \nabla \mathbf{g}_0 + \hat{\mathbf{g}}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} X_1^x \\ X_1^y \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -y^3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -X_1^y \\ X_1^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1^x \\ \dot{X}_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_1^y \\ X_1^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{X}_1^x + X_1^y &= -y^3 \\ \dot{X}_1^y - X_1^x &= 0 \end{aligned}.$$

Mit $y = a \sin f$ erhält man

$$\dot{X}_1^x + X_1^y = -a^3 \sin^3(t + f_0), \quad (147.1)$$

$$\dot{X}_1^y - X_1^x = 0 \quad (147.2)$$

und daraus

$$\ddot{X}_1^y + X_1^y = -a^3 \sin^3(t + f_0). \quad (148)$$

1. Lösungsweg

Die Formel (148) stellt die Gleichung eines linearen harmonischen Oszillators mit äußerer Erregung dar.¹⁵ Geht man mit der Lösung dieser Schwingungsgleichung in die Gleichung (147.2), so bekommt man die x -Komponente

$$X_1^x(t) = \dot{X}_1^y \leftarrow X_1^y(t) \text{ aus (148).}$$

Damit ist in erster Ordnung die Lösung des Duffing-Oszillators bekannt:

$$x(t) = x' + \varepsilon X_1^x = a \cos(t + f_0) + \varepsilon X_1^x(t) + O(\varepsilon^2),$$

$$y(t) = y' + \varepsilon X_1^y = a \sin(t + f_0) + \varepsilon X_1^y(t) + O(\varepsilon^2).$$

2. Lösungsweg

Die zu lösenden Gleichungen (147) werden umgeschrieben in

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{X}_1^x \\ \dot{X}_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^x \\ X_1^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^3 \sin^3(t + f_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es liegt somit ein Differentialgleichungssystem in der für die Anwendung der *Formel von Dyson* geforderten Gestalt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}$ vor. Damit ergibt sich die Lösungsdarstellung zu

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{P}(t, t_0) \mathbf{X}_{1,0} + \int_{t_0}^t \mathbf{P}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau$$

mit den Anfangswerten $\mathbf{X}_{1,0} = \mathbf{X}_1(t_0)$ und dem Propagator (131), da die Matrix $\mathbf{A}$ hier konstant ist.

Die Lösung lautet somit

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{X}_{1,0} + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{B}(\tau) d\tau.$$

Für die Potenzen der Matrix $\mathbf{A}$ in (131) erhält man $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$, $\mathbf{A}^3 = -\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^6 = -\mathbf{I}$, $\mathbf{A}^7 = -\mathbf{A}$ etc., so dass gilt

$$\mathbf{P}(t, \tau) = e^{(t-\tau)\mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{A} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t-\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\sin(t-\tau)} + \underbrace{\mathbf{I} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t-\tau)^{2n}}{(2n)!}}_{=\cos(t-\tau)},$$

$$\mathbf{P}(t, \tau) = \sin(t - \tau) \mathbf{A} + \cos(t - \tau) \mathbf{I}.$$

¹⁵hier speziell mit $\omega = 1$

Es folgt

$$\mathbf{X}_1 = (\sin(t - t_0) \mathbf{A} + \cos(t - t_0) \mathbf{I}) \mathbf{X}_{1,0} + \int_{t_0}^t \sin(t - \tau) \mathbf{A} \mathbf{B}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \cos(t - \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau$$

bzw.

$$\mathbf{X}_1 = (\sin(t - t_0) \mathbf{A} + \cos(t - t_0) \mathbf{I}) \mathbf{X}_{1,0} + \int_{t_0}^t \sin(t - \tau) \begin{pmatrix} -B^y(\tau) \\ B^x(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \int_{t_0}^t \cos(t - \tau) \begin{pmatrix} B^x(\tau) \\ B^y(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Einsetzen der Einträge von $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{X}_{1,0}$ und $\mathbf{B}$ liefert schließlich $\mathbf{X}_1(t)$ in Komponentenform:

$$\begin{aligned} X_1^x(t) &= \cos(t - t_0) X_{1,0}^x - \sin(t - t_0) X_{1,0}^y - \underbrace{\int_{t_0}^t a^3 \cos(t - \tau) \sin^3(\tau + f_0) d\tau}_{=: I_3^c(t, t_0)}, \\ X_1^y(t) &= \sin(t - t_0) X_{1,0}^x + \cos(t - t_0) X_{1,0}^y - \underbrace{\int_{t_0}^t a^3 \sin(t - \tau) \sin^3(\tau + f_0) d\tau}_{=: I_3^s(t, t_0)}. \end{aligned}$$

Die Integrale $I_3^c(t, t_0)$ und $I_3^s(t, t_0)$ sind geschlossen darstellbar¹⁶ über

$$\begin{aligned} I_3^c &= \frac{a^3}{32} \left(12\tau \sin(t + f_0) + \sum_{\nu=2(2)}^4 \left(\tilde{b}_{\frac{\nu}{2}}^{I_3^c} \sin(t + f_0) \sin(\nu(\tau + f_0)) + \tilde{b}_{\frac{\nu+4}{2}}^{I_3^c} \cos(t + f_0) \cos(\nu(\tau + f_0)) \right) \right) \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} \\ &= \frac{a^3}{32} \left(12(t - t_0) \sin(t + f_0) + \sum_{\nu=1(2)}^3 \left(b_{\frac{\nu+1}{2}}^{I_3^c} \cos(\nu(t + f_0)) + b_{\frac{\nu+5}{2}}^{I_3^c} \sin(t + f_0) \sin((\nu + 1)(t_0 + f_0)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_{\frac{\nu+9}{2}}^{I_3^c} \cos(t + f_0) \cos((\nu + 1)(t_0 + f_0)) \right) \right) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\mathbf{b}}^{I_3^c} := (\tilde{b}_1^{I_3^c}, \tilde{b}_2^{I_3^c}, \tilde{b}_3^{I_3^c}, \tilde{b}_4^{I_3^c})^T = (-8, 1, -4, 1)^T$ bzw. $\mathbf{b}^{I_3^c} := (b_1^{I_3^c}, b_2^{I_3^c}, \dots, b_6^{I_3^c})^T = (-6, 3, 8, -1, 4, -1)^T$

und

$$\begin{aligned} I_3^s &= \frac{a^3}{32} \left(-12\tau \cos(t + f_0) + \sum_{\nu=2(2)}^4 \left(\tilde{b}_{\frac{\nu}{2}}^{I_3^s} \sin(t + f_0) \cos(\nu(\tau + f_0)) + \tilde{b}_{\frac{\nu+4}{2}}^{I_3^s} \cos(t + f_0) \sin(\nu(\tau + f_0)) \right) \right) \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} \\ &= \frac{a^3}{32} \left(-12(t - t_0) \cos(t + f_0) + \sum_{\nu=1(2)}^3 \left(b_{\frac{\nu+1}{2}}^{I_3^s} \sin(\nu(t + f_0)) + b_{\frac{\nu+5}{2}}^{I_3^s} \sin(t + f_0) \cos((\nu + 1)(t_0 + f_0)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_{\frac{\nu+9}{2}}^{I_3^s} \cos(t + f_0) \sin((\nu + 1)(t_0 + f_0)) \right) \right) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\mathbf{b}}^{I_3^s} := (\tilde{b}_1^{I_3^s}, \tilde{b}_2^{I_3^s}, \tilde{b}_3^{I_3^s}, \tilde{b}_4^{I_3^s})^T = (-4, 1, 8, -1)^T$ bzw. $\mathbf{b}^{I_3^s} := (b_1^{I_3^s}, b_2^{I_3^s}, \dots, b_6^{I_3^s})^T = (6, 1, 4, -1, -8, 1)^T$.

Die vollständige Lösung in *erster Ordnung* lautet demnach

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = x(t) = X_1^x(t) &= a \cos(t + f_0) + \varepsilon (-\sin(t - t_0) X_{1,0}^y + \cos(t - t_0) X_{1,0}^x - I_3^c(t, t_0)) + O(\varepsilon^2), \\ u(t) = y(t) = X_1^y(t) &= a \sin(t + f_0) + \varepsilon (\sin(t - t_0) X_{1,0}^x + \cos(t - t_0) X_{1,0}^y - I_3^s(t, t_0)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

¹⁶ *Anmerkung:* Die Auswertung der Integrale gelänge auch, wenn man die Funktionen durch ihre Reihen ersetzt und auf die Integralformeln zurückgreift. Allerdings bekommt man (unendliche) Reihen und keine geschlossenen Ausdrücke. Bei Gradshteyn/Ryshik [13] findet man:

$$\begin{aligned} \int x^n \sin^{2m+1} x dx &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{2m+1}{k} \int x^n \sin(2m - 2k + 1) x dx \\ \int x^{2n} \sin x dx &= (2n)! \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \cos x + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!} \sin x \\ \int x^{2n+1} \sin x dx &= (2n+1)! \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} \cos x + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \sin x \end{aligned}$$

Für einen praktischen Vergleich mit anderen Lösungen erster Ordnung (siehe Anhang, Abschnitt 13.1) werden die Integrationskonstanten so gewählt, dass die dort verwendeten Startwerte $u(t = t_0 = 0) = u_0 = 0.8008$ und $\dot{u}(t = t_0 = 0) = \dot{u}_0 = 0$ gelten. Mit der vereinfachenden Wahl $f_0 = \pi/2$ erhält man die Gleichungen

$$u_0 = a + \varepsilon u_{1,0} = 0.8008, \quad \dot{u}_0 = \varepsilon \dot{u}_{1,0} = 0.$$

Der Duffing-Oszillator wird durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben; somit würde die Vorgabe der beiden Integrationskonstanten a und f_0 genügen, um eine partikuläre Lösung auszuwählen. Da die Lösung im gewählten Verfahren sukzessive aus Anteilen ansteigender Ordnung zusammengesetzt wird, fließen immer mehr frei wählbare Parameter $u_{1,0} = X_{1,0}^y$, $\dot{u}_{1,0} = X_{1,0}^x$, $u_{2,0} = X_{2,0}^y$, $\dot{u}_{2,0} = X_{2,0}^x$ usw. in die resultierenden Startwerte ein. Je nach gewählter Parameterzusammensetzung kommt man zu verschiedenem Lösungsverhalten, statt zu einer tatsächlich partikulären Lösung. Dies ist eine unmittelbare Folge des Approximierens.

In dem obigen Beispiel wäre man für $\varepsilon \neq 0$ auf $\dot{u}_{1,0} = 0$ festgelegt.¹⁷ Die Kombination $(u_{1,0}, a)$ bleibt dagegen noch frei wählbar. Wir wählen hier $u_{1,0} = 0$ und erhalten somit $a = 0.8008$. Mit den genannten nominalen Werten gelangt man schließlich zur Lösungsdarstellung

$$u(t) = a \sin(t + \frac{\pi}{2}) + \frac{\varepsilon a^3}{32} (12t \cos(t + \frac{\pi}{2}) - \sin(t + \frac{\pi}{2}) - \sin(3(t + \frac{\pi}{2}))) + O(\varepsilon^2). \quad (149)$$

Diese Lösung entspricht exakt der Formel (246) im Anhang, Abschnitt 13.1, resultierend aus der asymptotischen Reihenentwicklung nach Poincaré. Wie diese, enthält (149) einen säkularen Term, der durch *Renormierung* vermieden werden kann (siehe Anhang 13).

11.3.2 Notwendigkeit einer Renormierung

Durch eine fast-identische Transformation

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t) \quad (150)$$

soll aus der Bewegungsgleichung des freien ungedämpften Duffing-Oszillators

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad \varepsilon \text{ Kleinheitsparameter}$$

der Störanteil εu^3 eliminiert werden.

Die zu lösenden Differentialgleichungen, die das leisten, lauten (siehe Abschnitt 10.3.2)

$$\begin{aligned} n=0 & \quad \ddot{\mathbf{X}}_0 \equiv \ddot{\mathbf{r}}_{\text{harm}} & \Rightarrow \quad \mathbf{X}_0(t) \equiv \mathbf{r}_{\text{harm}}(t), \\ n=1 & \quad \ddot{\mathbf{X}}_1 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_1(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{F}^{(1)} & \Rightarrow \quad \mathbf{X}_1(t), \\ n=2 & \quad \ddot{\mathbf{X}}_2 = \frac{1}{1!} \mathbf{X}_2(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} + \frac{1}{2!} (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{X}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(1)} & \Rightarrow \quad \mathbf{X}_2(t) \end{aligned}$$

usw. beziehungsweise wegen

$$\mathbf{X}_n := \{u_n\}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(0)} := \{-u\} \Big|_{u_{\text{harm}}(t)} & \Rightarrow \quad \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(0)} = \{\nabla_u(-u)\} \Big|_{u_{\text{harm}}(t)} = -1 \text{ und } \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}^{(0)} = 0, \\ \mathbf{F}^{(1)} := \{-u^3\} \Big|_{u_{\text{harm}}(t)} & \Rightarrow \quad \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{(1)} = \{\nabla_u(-u^3)\} \Big|_{u_{\text{harm}}(t)} = -3u_0^2 \end{aligned}$$

lauten sie¹⁸

$$\begin{aligned} n=1 & \quad \ddot{u}_1 = -u_1 - u_0^3 \\ n=2 & \quad \ddot{u}_2 = -u_2 - 3u_1 u_0^2 \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (151)$$

Gleichungen dieses Typs können mittels diverser Verfahren gelöst werden, siehe Abschnitte 11.3.3 bzw. 11.3.4. Die Lösung für $u_1(t)$ ist u. a. im Buch von Nayfeh [50] zu finden.

$$u_1 = -\frac{3}{8} a^3 t \sin t + \frac{1}{32} a^3 (\cos 3t - \cos t) \quad (152)$$

Diese Lösung kann bestätigt und nach Renormierung auf höhere Ordnungen erweitert werden, vgl. Anhang 13.2.

¹⁷Für die Beispielrechnungen im Anhang wurde $\varepsilon = 0.05 = \frac{1}{20}$ gesetzt.

¹⁸mit $u_{\text{harm}} \equiv u_0$

Zur Lösung der Differentialgleichungen (151) ist es zweckmäßig, die unabhängige Veränderliche t durch eine neue Variable s mittels der fast-identischen Transformation

$$t = s \left(1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \omega_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} \right) \quad (153)$$

zu ersetzen (Bellmann [1], Nayfeh [50]), wobei die frei wählbaren Koeffizienten ω_{σ} so festgelegt werden, dass das Auftreten so genannter *Poisson-Glieder*

$$t \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases} \triangleq \text{Zeitproportionalität}$$

vermieden wird.

Durch diese *Poincaré-Lindstedt-Renormierung* geht die Bewegungsgleichung des freien ungedämpften Duffing-Oszillators (unter Verwendung von $\omega_0 = 1$) über in

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{ds^2 \left(\sum_{\sigma=0}^{\infty} \omega_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} \right)^2} = (-u - \varepsilon u^3) \Rightarrow \frac{d^2 u}{ds^2} = \left(\sum_{\sigma=0}^{\infty} \omega_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} \right)^2 (-u - \varepsilon u^3) = (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 (-u - \varepsilon u^3) \quad (154)$$

Geht man, analog (150), mit einem Lösungsansatz

$$u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(s)$$

in (154) ein und entwickelt beide Seiten in Taylorreihen, so führt ein Koeffizientenvergleich bezüglich des Kleinheitsparameters auf die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{ds^2} + u_0 &= 0, \\ \frac{d^2 u_1}{ds^2} + u_1 &= -u_0^3 - 2\omega_1 u_0, \\ \frac{d^2 u_2}{ds^2} + u_2 &= -2\omega_1 u_0^3 - 3u_1 u_0^2 - u_0 - 2\omega_2 u_0 - 2u_1 \omega_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (155)$$

Dies ist ersichtlich ein System von Bewegungsgleichungen ungedämpfter harmonischer Oszillatoren mit unterschiedlicher äußerer Anregung. Die Gesamtbewegung des Duffing-Oszillators ergibt sich demnach durch Überlagerung der Oszillatorbewegungen

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(s) = u_0(s) + \varepsilon u_1(s) + \varepsilon^2 u_2(s) + \dots$$

Anmerkung: Ohne Renormierung würde man, (152) bestätigend, in erster Ordnung erhalten

$$u_1(t) = \underbrace{-\frac{3}{8}a^3 t \sin t + \frac{1}{32}a^3(\cos 3t - \cos t)}_{\text{Poisson-Glied}}$$

Mit einer Renormierung entsprechend

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2$$

bekommt man hingegen eine Darstellung *ohne (!) Poisson-Glied*:

$$u_1(s) = \frac{1}{32}a^3 \cos 3(s + \phi),$$

so dass in erster Ordnung folgt

$$\begin{aligned} u(s) &= a \cos s + \frac{1}{32}\varepsilon a^3 \cos 3(s + \phi) + \dots \\ &= u_0(s) + \varepsilon u_1(s) + \dots, \end{aligned}$$

und für die Transformation der unabhängigen Variablen

$$t = s \left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon a^2 \right) + \dots$$

Für Lösungen höherer Ordnung bietet sich zur Vermeidung langwieriger Handrechnung die Verwendung von Softwarepaketen zur Formelmanipulation an.

Gegeben sei, wiederum (150) folgend, die Potenzreihe

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n =: \sum_n u_n =: \tilde{u}.$$

Nach einer Renormierung (153) bzw. gemäß

$$t = s \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n =: s \sum_n \omega_n := s \tilde{\omega} \quad (156)$$

mit $\omega_0 := 1$ lautet die Bewegungsgleichung des freien ungedämpften Duffing-Oszillators

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \left(\sum_n \omega_n \right)^2 (-u - \varepsilon u^3) = - \left(\sum_n \omega_n \right)^2 \sum_n u_n - \varepsilon \left(\sum_n \omega_n \right)^2 \left(\sum_n u_n \right)^3.$$

Diese Gleichung soll in Bestimmungsgleichungen für die Koeffizientenfunktionen $u_n(s)$ zerlegt werden, also

$$\frac{d^2 u_n}{ds^2} = \text{Extract}_n \left[- \left(\sum_n \omega_n \right)^2 \sum_n u_n - \varepsilon \left(\sum_n \omega_n \right)^2 \left(\sum_n u_n \right)^3 \right]. \quad (157)$$

Der Operator $\text{Extract}_n[\]$ soll dabei Terme der Ordnung ε^n aus der eckigen Klammer herausziehen. Es beginnt im vorliegenden Beispiel mit¹⁹

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad -u_0, \\ n = 1 & \quad -u_1 - u_0^3 - 2\omega_1 u_0, \\ n = 2 & \quad -u_2 - 2\omega_1 u_0^3 - 3u_1 u_0^2 - \omega_1^2 u_0 - 2\omega_2 u_0 - 2u_1 \omega_1, \\ n = 3 & \quad -u_3 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) u_0^3 - 3(u_2 + 2u_1 \omega_1) u_0^2 - (3u_1^2 + 2(\omega_1 \omega_2 + \omega_3)) u_0 - 2u_2 \omega_1 - u_1(\omega_1^2 + 2\omega_2), \\ n = 4 & \quad -u_4 - 2(\omega_1 \omega_2 + \omega_3) u_0^3 - 3(u_3 + 2u_2 \omega_1) u_0^2 - 6u_1^2 u_0 - (\omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_3 + 2\omega_4) u_0 - u_1^3 - u_2 \omega_1^2 - \\ & \quad - 2u_3 \omega_1 - 2u_2 \omega_2 - u_1(3(\omega_1^2 + 2\omega_2) u_0^2 + 6u_2 u_0 + 2(\omega_1 \omega_2 + \omega_3)). \end{aligned} \quad (158)$$

Das Ergebnis (158) erhält man z. B. unter Verwendung von *MATHEMATICA*TM einfach durch Eingabe von

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= 1 + \text{Sum}[\varepsilon^n \omega_n, \{n, 1, 10\}]; \\ \tilde{u} &= \text{Sum}[\varepsilon^n u_n, \{n, 0, 10\}]; \\ \text{FullSimplify}[\text{Coefficient}[-\tilde{\omega}^2 \tilde{u} - \varepsilon \tilde{\omega}^2 \tilde{u}^3, \varepsilon, n]] \end{aligned}$$

mit gewünschtem Wert für die Ordnung n in der letzten der drei Zeilen.²⁰

Die Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen ergeben sich damit zu

$$\frac{d^2 u_n}{ds^2} = -u_n + f_n(s), \quad (159)$$

wobei die $f_n(s)$ als *Anregungsfunktionen* bezeichnet werden. Es ist also in jeder Ordnung eine Schwingungsgleichung, und zwar die eines linearen harmonischen Oszillators mit äußerer zeitabhängiger Anregung, zu lösen. Dabei ist die Anregungsfunktion einer Ordnung bestimmt durch die Lösungen der niedrigeren Ordnungen, d.h.,

$$f_n(s) := f_n(u_0(s), u_1(s), \dots, u_{n-1}(s)) \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Für die ersten Ordnungen gilt nach (158) z. B.

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad f_0(s) \equiv 0, \\ n = 1 & \quad f_1(s) = f_1(u_0(s)) := -u_0^3(s) - 2\omega_1 u_0(s), \\ n = 2 & \quad f_2(s) = f_2(u_0(s), u_1(s)) := -3u_0^2(s) u_1(s) - 2\omega_1(u_1(s) + u_0^3(s)) - (\omega_1^2 + 2\omega_2) u_0(s) \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (160)$$

Für die 0. Ordnung erhält man sofort

$$u_0(s) = u_0^A \cos(s + \phi_0) \quad (161)$$

¹⁹vgl. (155) oder die Oszillatorgleichungen (ebenfalls nur bis $n = 2$ ausgeführt) in Nayfeh [50], Seite 59, Formeln (3.1.7) - (3.1.9)

²⁰Im Bedarfsfalle müsste das gewählte $n_{max} = 10$ entsprechend erhöht werden. Die Vorgabe ∞ ist nicht praktikabel.

mit den Integrationskonstanten u_0^A (Amplitude) und ϕ_0 (Phase) als Lösung der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 u_0}{ds^2} = -u_0$$

des freien ungedämpften harmonischen Oszillators.

Geht man mit (161) in die Schwingungsgleichung für die 1. Ordnung ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2 u_1}{ds^2} = -u_1(s) - (u_0^A \cos(s + \phi_0))^3 - 2\omega_1 u_0^A \cos(s + \phi_0)$$

als zu lösende Gleichung. Die Konstante ω_1 ist so festzulegen, dass keine monoton wachsende Lösung entsteht, was aus physikalischen Gründen ausgeschlossen werden muss (Vermeidung von Poisson-Gliedern).

Grundsätzlich stellt sich nur noch die Frage, wie Gleichungen der Form (159) gelöst werden können. Dies gilt sowohl für den renormierten als auch den nicht-renormierten Fall. Für letzteren sind lediglich die Anregungsfunktionen bzw. rechten Seiten $f_n(s)$ wieder durch $f_n(t)$ zu ersetzen. Analog (160) folgt aus (151)

$$\begin{aligned} n = 0 \quad f_0(t) &\equiv 0, \\ n = 1 \quad f_1(t) &= f_1(u_0(t)) := -u_0^3(t), \\ n = 2 \quad f_2(t) &= f_2(u_0(t), u_1(t)) := -3u_0^2(t) u_1(t) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{162}$$

In den folgenden zwei Abschnitten soll jeweils ein Verfahren zur Beantwortung der Frage vorgestellt werden und in einem weiteren Abschnitt wird dann die Äquivalenz dieser beiden Verfahren angesprochen.

Anmerkung: Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird für die Herleitung beider Verfahren die Zeitvariable t , dem nicht-renormierten Fall entsprechend, verwendet.

11.3.3 Lösung mittels Laplace-Transformation

Die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizientenfunktionen $u_n(t)$ bzw. $u_n(s)$ sind, wie bereits erwähnt, Schwingungsgleichungen harmonischer Oszillatoren bei äußerer Erregung; insbesondere sind es lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zu deren Lösung kann man als universelles Verfahren die Laplace-Transformation (Simonyi [65], Lippmann [40]) heranziehen:

Für die Differentialgleichung eines linearen harmonischen Oszillators bei äußerer Erregung $k(t)$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) = k(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = k(t) - f(t) \tag{163}$$

ergibt sich, hier o. B. d. A. unter der Annahme von $t_0 = 0$, mittels Laplace-Transformation als Lösung²¹

$$f(t) = f(0) \cos t + \dot{f}(0) \sin t + \int_0^t \sin(t - \tau) k(\tau) d\tau \tag{164}$$

mit den Anfangswerten $f(0)$ und $\dot{f}(0)$. *Anmerkung:* Die Eigenkreisfrequenz ist hier zu $\omega_0 = 1$ angenommen.

²¹Nach Bronstein [2] gilt für die Laplace-Transformation einer Originalfunktion $f(t)$ in eine Bildfunktion $F(p)$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

u. a. ein *Differentiationssatz*, so dass für (163) folgt

$$p^2 \mathcal{L}\{f\} - pf(0) - \dot{f}(0) + \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{k\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}\{f\} = \frac{\mathcal{L}\{k\}}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2} f(0) + \frac{1}{1+p^2} \dot{f}(0).$$

Die Originalfunktion erhält man durch Anwendung der inversen Laplace-Transformation:

$$f = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{k\}}{1+p^2} \right\} + f(0) \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{1+p^2} \right\}}_{\cos t} + \dot{f}(0) \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1+p^2} \right\}}_{\sin t} = f(0) \cos t + \dot{f}(0) \sin t + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L}\{k\} \cdot \frac{1}{1+p^2} \right\}.$$

Für den letzten Term auf der rechten Seite können *Faltungssatz* bzw. *Faltungsintegral* herangezogen werden. Man erhält mit $F_1(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} := \mathcal{L}\{k(t)\} \rightarrow f_1(t) = k(t)$ und $F_2(p) = \mathcal{L}\{f_2(t)\} := 1/(1+p^2) \rightarrow f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/(1+p^2)\} = \sin t$ schließlich

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L}\{k\} \cdot \frac{1}{1+p^2} \right\} = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t k(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Übertragen auf den freien, ungedämpften Duffing-Oszillator erhält man

$$u_n(t) = u_{n0} \cos t + \dot{u}_{n0} \sin t + \int_0^t \sin(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad n = 1, 2, \dots \quad (165)$$

Darin ist nach (135) bzw. (158) oder (162) bzw. (160) für die Anregungsfunktionen $f_n(t)$ bzw. $f_n(s)$ im nicht-renormierten bzw. renormierten Fall einzutragen. Überträgt man die Anfangswerte für alle $n \geq 1$ auf den ungestörten Fall, so bekommt man die gesuchten Koeffizientenfunktionen nach Ausführung von Quadraturen

$$u_n(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad n = 1, 2, \dots \quad (166)$$

Anmerkung: Der Term $\sin(t-\tau)$ im Integranden von (166) wird uns im nachfolgenden Abschnitt 11.3.4 in Form einer Resolvente wiederbegegnen.

Dass (165) die Gleichung

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -u_n + f_n \quad (167)$$

löst, bestätigt man durch Einsetzen in diese Differentialgleichung. Bei der Bildung der zweiten Ableitung ist zu beachten, dass t sowohl in der oberen Integrationsgrenze als auch im Integranden auftritt und sie darum nach folgender Formel²² auszuführen ist (und zwar zweimal hintereinander):

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau) d\tau = \dot{b}(t) f(t, b(t)) - \dot{a}(t) f(t, a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau, \quad (168)$$

wobei speziell für $a = 0$ und $b(t) = t$ folgt

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau = f(t, \tau = t) + \int_0^t \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau \Leftrightarrow f(t, \tau = t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau - \int_0^t \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (169)$$

Die Formeln (168) bzw. (169) stellen ein Hilfsmittel dar, um vermutete Lösungen zu überprüfen. So folgt z. B. für (166) unter Anwendung von (169)

$$\dot{u}_n(t) = \int_0^t \cos(t-\tau) f_n(\tau) d\tau, \quad \ddot{u}_n(t) = f_n(t) - \int_0^t \sin(t-\tau) f_n(\tau) d\tau = f_n(t) - u_n(t)$$

und somit die Bestätigung von (167).

Anmerkung: Man kann nach dem Gesagten (165) als Lösungsansatz wählen für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -u_n(t) + f_n(u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t); t) \quad \text{für} \quad n \geq 1. \quad (170)$$

11.3.4 Lösung mittels Neumann'scher Reihe

Der Bewegungsgleichung (170) bzw.

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -u_n + f_n =: g_n \Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dt^2} - g_n = 0 \quad (171)$$

ist bei Anfangswertdeterminierung äquivalent die *Volterra'sche Integralgleichung* (Schneider [60], 414ff.)

$$u_n(t) = \tilde{u}_n(t) + \int_{t_0}^t (t-\tau) g_n(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_n(t) := u_{n0} + \dot{u}_{n0}(t-t_0).$$

Man bestätigt das durch zweifache Ableitung nach der Zeit, wobei im Folgenden wiederum o. B. d. A. $t_0 = 0$ gesetzt wird:²³

²²siehe Schneider [60], Seite 415

²³mit $t_0 = 0$ folgt unter Verwendung von (169)

$$\dot{u}_n(t) = \dot{u}_{n0} + \int_0^t g_n(\tau) d\tau, \quad \ddot{u}_n(t) = g_n(t).$$

Beachtet man die Definition $g_n(t) := -u_n(t) + f_n(t)$, so lautet die Integralgleichung

$$u_n(t) = \tilde{u}_n(t) + \int_0^t (t-\tau)(-u_n(\tau) + f_n(\tau)) d\tau = \tilde{u}_n(t) + \int_0^t (t-\tau)f_n(\tau) d\tau - \int_0^t (t-\tau)u_n(\tau) d\tau =: h_n(t) - \int_0^t (t-\tau)u_n(\tau) d\tau. \quad (172)$$

Das entspricht einer *linearen Volterra'schen Integralgleichung zweiter Art*

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\phi(y) dy \quad \text{mit} \quad a \leq x \leq b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

unter den Setzungen für das vorliegende Beispiel

$$\phi(x) \triangleq u_n(t), \quad f(x) \triangleq h_n(t), \quad K(x, y) \triangleq K(t, \tau) = t - \tau, \quad \lambda = -1.$$

Ihre Lösung kann allgemein angegeben werden in der Gestalt

$$\phi(x) = \lambda \int_a^x R(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x)$$

mit dem *lösenden Kern (Resolvente)* der *Neumann'schen Reihe*

$$R(x, y, \lambda) := \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K^{(m)}(x, y) \quad (173)$$

und den *iterierten Kernen*

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &:= K(x, y), \\ K^{(2)}(x, y) &:= \int_y^x K(x, \sigma) K(\sigma, y) d\sigma, \\ &\vdots \\ K^{(m+1)}(x, y) &:= \int_y^x K(x, \sigma) K^{(m)}(\sigma, y) d\sigma \quad \text{für } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Im vorliegenden Beispiel hat die Lösung also die Gestalt

$$u_n(t) = h_n(t) + \lambda \int_0^t R(t, \tau; \lambda) h_n(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \lambda = -1$$

mit dem lösenden Kern

$$R(t, \tau, \lambda = -1) := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} K^{(m)}(t, \tau)$$

und den iterierten Kernen

$$\begin{aligned} K^{(1)}(t, \tau) &= t - \tau, \\ K^{(m+1)}(t, \tau) &= \int_{\tau}^t (t - \sigma) K^{(m)}(\sigma, \tau) d\sigma \quad \text{für } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Man erhält

$$K^{(m)}(t, \tau) = \frac{1}{(2m-1)!} (t - \tau)^{2m-1} \quad \text{für } m = 1, 2, \dots$$

und somit, wegen $\lambda = -1$, nach (173) die Resolvente

$$R(t, \tau; \lambda = -1) = \sin(t - \tau),$$

so dass die Lösung geschrieben werden kann als

$$u_n(t) = h_n(t) - \int_0^t \sin(t - \tau) h_n(\tau) d\tau \quad (174)$$

oder mit der Definition von $h_n(t)$

$$u_n(t) = \tilde{u}_n(t) + \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau - \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau. \quad (175)$$

Zur Kontrolle wird diese Lösung in die Bewegungsgleichung eingesetzt. Mit der Differentiationsregel (169) folgt:

1. Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{u}_n(t) &= \dot{\tilde{u}}_n(t) + \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau - \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\} \\ &= \dot{u}_{n0} + \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\} \end{aligned}$$

also

$$\dot{u}_n(t) = \dot{u}_{n0} + \int_0^t f_n(\tau) d\tau - \int_0^t \cos(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau.$$

2. Ableitung

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n(t) &= \ddot{\tilde{u}}_n(t) + \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau - \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\} \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right\} - \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n(t) &= \frac{d}{dt} \dot{u}_n = \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t f_n(\tau) d\tau \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \cos(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\} \\ &= f_n(t) - \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \cos(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\} \\ &= f_n(t) - 1 \cdot \cos(t-t) \left(\tilde{u}_n(t) + \int_0^t (t-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) + 0 \cdot \cos(t-0) \left(\tilde{u}_n(0) + \int_0^0 (0-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) - \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \cos(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \\ &= f_n(t) - \left(\tilde{u}_n(t) + \int_0^t (t-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) + \int_0^t \sin(t-\tau) \left(\tilde{u}_n(\tau) + \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma \right) d\tau \end{aligned}$$

oder nach der Definition von h_n aus (172) und mit (174)

$$\ddot{u}_n(t) = f_n(t) - h_n(t) + \int_0^t \sin(t-\tau) h_n(\tau) d\tau = f_n(t) - u_n(t).$$

Das ist aber die obige Bewegungsgleichung (171) w.z.b.w.

Anmerkung: Die beiden Lösungsdarstellungen (Verwendung von $f_n(t)$ oder $h_n(t)$)²⁴ erfüllen die Bewegungsgleichungen und müssen dieselbe Lösung darstellen, zieht man die Existenz- und Eindeigkeitssätze der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen heran. Danach muss die Differenz der beiden Lösungsdarstellungen identisch verschwinden:

$$u_n^I(t) - u_n^{II}(t) \equiv 0,$$

was man mit $u_n^I(t)$ aus (174) und $u_n^{II}(t)$ aus (175) sofort bestätigt.

²⁴ *Anmerkung:* wenn man (169) zweimal auf $h_n(t)$ anwendet, folgt $\ddot{h}_n(t) = f_n(t)$

11.3.5 Laplace-Transformation vs. Neumann'sche Reihe

Alternativ stehen nun zwei Lösungsdarstellungen zur Verfügung. Überträgt man die Anfangswerte für alle $n \geq 1$ auf den ungestörten Fall²⁵, so muss das Ergebnis (166) nach einer *Laplace-Transformation* mit dem Ergebnis (175) unter Berücksichtigung von $\tilde{u}_n(t) = 0$ nach Anwendung einer *Neumann'schen Reihe* übereinstimmen, d. h.,

$$\int_0^t \sin(t-\tau) f_n(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau - \int_0^t \sin(t-\tau) \int_0^\tau (\tau-\sigma) f_n(\sigma) d\sigma d\tau. \quad (176)$$

Es wurde zuvor gezeigt, dass beide Seiten der Gleichung (176) der notwendigen Bedingung genügen; d. h., beide Lösungsdarstellungen erfüllen die Differentialgleichung (170). Welcher Ansatz effizienter ist, wird in der Praxis von den konkreten Anregungsfunktionen $f_n(t)$ bzw. $f_n(s)$ und den daraus resultierenden Integralen in (176) abhängen, die ja noch zu berechnen sind.

Zur Ableitung einer Lösung höherer Ordnung für den Duffing-Oszillator soll hier im folgenden nur noch das Ergebnis der Laplace-Transformation verwendet werden, d. h. (166). Zu berechnen wären dann also die Integrale

$$u_n(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad \text{bzw.} \quad u_n(s) = \int_0^s \sin(s-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad \text{für} \quad n \geq 1,$$

die sämtlich geschlossen ausführbar zu sein scheinen, wobei die f_n aus (162) bzw. (160) zu entnehmen sind. Für den renormierten Fall sei daran erinnert, dass nach jedem Lösungsschritt der jeweilige Koeffizient ω_n so zu wählen ist, dass das Auftreten eines Poisson-Gliedes vermieden wird.

Als Lösung N ter Ordnung erhält man schließlich

$$u(t) \approx u_0(t) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(t) \quad \text{bzw.} \quad u(s) \approx u_0(s) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(s) \quad (177)$$

mit der Lösung nullter Ordnung

$$u_0(t) = a \cos t \quad \text{bzw.} \quad u_0(s) = a \cos s, \quad (178)$$

welche die Anfangsbedingungen $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = 0$ komplett aufnimmt.

Beispiel 1: Lösung erster Ordnung im nicht-renormierten Fall

$$u_1(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f_1(\tau) d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau) (-u_0^3(\tau)) d\tau = -a^3 \int_0^t \sin(t-\tau) \cos^3 \tau d\tau = -\frac{1}{32} a^3 (\cos t - \cos 3t + 12t \sin t)$$

und damit

$$u(t) = a \cos t - \frac{3}{8} \varepsilon a^3 t \sin t + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 (\cos 3t - \cos t) + O(\varepsilon^2),$$

was die Lösung von Nayfeh [50] bestätigt. Da für den Duffing-Oszillator also bereits in der ersten Ordnung ein physikalisch unsinniger säkularer Term (Poisson-Glied) auftaucht, macht es keinen Sinn, Lösungen höherer Ordnung für den nicht-renormierten Fall abzuleiten. Stattdessen soll im weiteren nur noch der renormierte Fall betrachtet werden.

Beispiel 2: Lösung erster Ordnung im renormierten Fall

$$u_1(s) = \int_0^s \sin(s-\tau) f_1(\tau) d\tau = \int_0^s \sin(s-\tau) (-u_0^3(\tau) - 2\omega_1 u_0(\tau)) d\tau = -a \int_0^s \sin(s-\tau) \cos \tau (a^2 \cos^2 \tau + 2\omega_1) d\tau. \quad (179)$$

Integration liefert

$$u_1(s) = \frac{1}{32} (a^3 (\cos 3s - \cos s) - 4a(3a^2 + 8\omega_1)s \sin s). \quad (180)$$

Der Term mit dem Faktor $s \sin s$ stellt wieder ein Poisson-Glied dar, kann aber offensichtlich mit der Setzung

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} a^2 \quad \rightarrow \quad u_1(s) = \frac{1}{32} a^3 (\cos 3s - \cos s) \quad (181)$$

unterdrückt werden. Es folgt damit

$$u(s) = a \cos s + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 (\cos 3s - \cos s) + O(\varepsilon^2). \quad (182)$$

²⁵andere Verteilungen der Anfangsbedingungen wären durchaus denkbar, sind hier jedoch nicht behandelt worden

Soll die Lösung (182) von der Zeitskala s in die ursprüngliche Zeitskala t transformiert werden, so ist nach (156)

$$t = s\tilde{\omega} \rightarrow s =: \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \tilde{\omega}^{-1}. \quad (183)$$

Für die Lösung erster Ordnung erhält man

$$\tilde{\omega} = 1 + \varepsilon\omega_1 = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon a^2 \rightarrow \omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 + O(\varepsilon^2)$$

und schließlich

$$u(t) = a \cos \omega t + \frac{1}{32}\varepsilon a^3 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + O(\varepsilon^2).$$

Diese Lösung ist konsistent mit der im Anhang 13.2 angegebenen Lösung 10ter Ordnung.²⁶
Im folgenden Abschnitt soll analog eine Lösung höherer Ordnung aufgestellt werden.

11.3.6 Ablaufschema für Lösungen beliebig höherer Ordnung

Die am Ende von Abschnitt 11.3.5 angegebene Lösung lässt sich schrittweise auf beliebige Ordnung erweitern. Der Algorithmus²⁷ läuft folgendermaßen ab:

$u_0(s) = a \cos s$	Formel (178) Lösung 0. Ordnung
$\downarrow$	
$f_1(s) = -\frac{1}{4}(a^3(3 \cos s + \cos 3s) + 8a \cos s \omega_1)$	Formeln (157) - (159), Einsetzen von $u_0(s)$
$\downarrow$	
$u_1(s) = \int_0^s \sin(s-\tau) f_1(\tau) d\tau$	Formel (166), geschlossen lösbar
$= \frac{1}{32}a^3(\cos 3s - \cos s) - a(\frac{3}{8}a^2 + \omega_1)s \sin s$	z. B. mittels <i>MATHEMATICA</i> TM
$\downarrow$	
$\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2$	nötig zur Vermeidung des Poisson-Gliedes in $u_1(s)$
$\downarrow$	
$u_1(s) = \frac{1}{32}a^3(\cos 3s - \cos s)$	jetzt physikalisch plausibel $\rightarrow$ weiterverwendbar
$\downarrow$	
$u(s) = a \cos s + \frac{1}{32}\varepsilon a^3(\cos 3s - \cos s) + O(\varepsilon^2)$	Formel (177) Lösung 1. Ordnung (renormiert)
$\downarrow$	
$f_2(s) = \frac{1}{128}(a^5(57 \cos s + 24 \cos 3s - 3 \cos 5s) - 256a \cos s \omega_2)$	Formeln (157) - (159), Einsetzen von $u_0(s), u_1(s)$
$\downarrow$	
$u_2(s) = \int_0^s \sin(s-\tau) f_2(\tau) d\tau$	Formel (166), geschlossen lösbar
$= \frac{1}{1024}a^5(\cos 5s - 24 \cos 3s + 23 \cos s) + a(\frac{57}{256}a^4 - \omega_2)s \sin s$	z. B. mittels <i>MATHEMATICA</i> TM
$\downarrow$	
$\omega_2 = \frac{57}{256}a^4$	nötig zur Vermeidung des Poisson-Gliedes in $u_2(s)$
$\downarrow$	
$u_2(s) = \frac{1}{1024}a^5(\cos 5s - 24 \cos 3s + 23 \cos s)$	jetzt physikalisch plausibel $\rightarrow$ weiterverwendbar
$\downarrow$	
$u(s) = a \cos s + \frac{1}{32}\varepsilon a^3(\cos 3s - \cos s) +$	Formel (177) Lösung 2. Ordnung (renormiert)
$\vdots$	
$+ \frac{1}{1024}\varepsilon^2 a^5(\cos 5s - 24 \cos 3s + 23 \cos s) + O(\varepsilon^3)$	

Anmerkung: Im Wesentlichen besteht die Rechenarbeit in der mehrfachen Auswertung von Integralen der Form

$$\int_0^s \sin(s-\tau) \cos k\tau d\tau$$

für jede der Koeffizientenfunktion $u_n(s)$ mit $n \geq 1$ und $k = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$.

²⁶vgl. Formeln (257) - (259) unter Beachtung, dass hier im Abschnitt 11.3 die Setzung $\omega_0 \equiv 1$ vorgenommen wurde

²⁷die ersten Schritte wiederholen das Ergebnis aus (179) - (182)

Explizit wurde der Algorithmus bis zur Aufstellung einer (renormierten) Lösung 10. Ordnung angewendet. Werden die einzelnen Terme entsprechend den Teillösungen $u_n(s)$ nach Potenzen von ε sortiert, so erhält man

$$\begin{aligned}
u(s) = & a \cos s + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 (-\cos s + \cos 3s) + \\
& + \frac{1}{1024} \varepsilon^2 a^5 (23 \cos s - 24 \cos 3s + \cos 5s) + \\
& + \frac{1}{32768} \varepsilon^3 a^7 (-547 \cos s + 594 \cos 3s - 48 \cos 5s + \cos 7s) + \\
& + \frac{1}{1048576} \varepsilon^4 a^9 (13426 \cos s - 15121 \cos 3s + 1766 \cos 5s - 72 \cos 7s + \cos 9s) + \\
& + \frac{1}{33554432} \varepsilon^5 a^{11} (-339176 \cos s + 394701 \cos 3s - 58944 \cos 5s + 3514 \cos 7s - \\
& \quad - 96 \cos 9s + \cos 11s) + \\
& + \frac{1}{1073741824} \varepsilon^6 a^{13} (8791304 \cos s - 10531302 \cos 3s + 1879479 \cos 5s - 145200 \cos 7s + \\
& \quad + 5838 \cos 9s - 120 \cos 11s + \cos 13s) + \\
& + \frac{1}{34359738368} \varepsilon^7 a^{15} (-233034230 \cos s + 286361891 \cos 3s - 58529521 \cos 5s + 5480977 \cos 7s - \\
& \quad - 287712 \cos 9s + 8738 \cos 11s - 144 \cos 13s + \cos 15s) + \\
& + \frac{1}{1099511627776} \varepsilon^8 a^{17} (6297662471 \cos s - 7913777523 \cos 3s + 1799860826 \cos 5s - \\
& \quad - 195818280 \cos 7s + 12560763 \cos 9s - 500304 \cos 11s + 12214 \cos 13s - \\
& \quad - 168 \cos 15s + \cos 17s) + \\
& + \frac{1}{35184372088832} \varepsilon^9 a^{19} (-173028708850 \cos s + 221745263658 \cos 3s - 54983271690 \cos 5s + \\
& \quad + 6749957586 \cos 7s - 507272256 \cos 9s + 24812277 \cos 11s - \\
& \quad - 796800 \cos 13s + 16266 \cos 15s - 192 \cos 17s + \cos 19s) + \\
& + \frac{1}{112589906842624} \varepsilon^{10} a^{21} (4821475754931 \cos s - 6287043160531 \cos 3s + 1674301599697 \cos 5s - \\
& \quad - 227078322481 \cos 7s + 19419728994 \cos 9s - 1118691000 \cos 11s + \\
& \quad + 44260735 \cos 13s - 1191024 \cos 15s + 20894 \cos 17s - 216 \cos 19s + \cos 21s).
\end{aligned} \tag{184}$$

Die jeweils zur Vermeidung von Poisson-Gliedern festgelegten ω_n lassen sich gemäß (156) zusammenfassen in

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} = & 1 - \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + \frac{57}{256} \varepsilon^2 a^4 - \frac{315}{2048} \varepsilon^3 a^6 + \frac{30345}{262144} \varepsilon^4 a^8 - \frac{193347}{2097152} \varepsilon^5 a^{10} + \frac{5127969}{67108864} \varepsilon^6 a^{12} - \\
& - \frac{35002539}{536870912} \varepsilon^7 a^{14} + \frac{15627082185}{274877906944} \varepsilon^8 a^{16} - \frac{110848750155}{2199023255552} \varepsilon^9 a^{18} + \frac{3186752642073}{70368744177664} \varepsilon^{10} a^{20}.
\end{aligned}$$

Die eigentlich gesuchte Lösungsdarstellung $u(t)$ lässt sich gewinnen, indem einfach alle in (184) auftretenden s gemäß (183) durch ωt ersetzt werden und indem man dann ω sinnvollerweise gesondert angibt:

$$\begin{aligned}
\omega = \tilde{\omega}^{-1} = & 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 - \frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{81}{2048} \varepsilon^3 a^6 - \frac{6549}{262144} \varepsilon^4 a^8 + \frac{37737}{2097152} \varepsilon^5 a^{10} - \frac{936183}{67108864} \varepsilon^6 a^{12} + \\
& + \frac{6077907}{536870912} \varepsilon^7 a^{14} - \frac{2604833685}{274877906944} \varepsilon^8 a^{16} + \frac{17839453041}{2199023255552} \varepsilon^9 a^{18} - \frac{497158650207}{70368744177664} \varepsilon^{10} a^{20} + O(\varepsilon^{11}).
\end{aligned} \tag{185}$$

Wenn man primär an den auftretenden Frequenzen interessiert ist, dann könnte man die Darstellung von $u(s)$ bzw. $u(t)$ auch nach den Termen $\cos ks$ bzw. $\cos k\omega t$ mit $k = 1, 3, 5, \dots$ sortieren. Eine solche Darstellung findet sich zum Beispiel im Anhang 13.2 mit der Formel (257). Diese wurde nach einem bei Kuypers [34] angegebenen Lösungsverfahren gefunden. Sie ist zur Lösung (184), erzeugt mittels einer Laplace-Transformation, äquivalent.

Damit liegt nunmehr eine gesicherte Lösung 10. Ordnung für den Duffing-Oszillator (136) vor. Im Folgenden soll das hier vorgestellte Lösungsverfahren noch kurz an einem weiteren kleinen Beispiel getestet werden.

11.3.7 Ein weiteres einfaches Beispiel

Es soll der *gedämpfte lineare Oszillator*, gegeben durch die Bewegungsgleichung (Schneider [61], Seite 375)

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\dot{u} = 0 \quad (186)$$

betrachtet werden.

Für dieses Bewegungsproblem existiert in der Literatur die exakte Lösung²⁸

$$u(t) = A_0 e^{-\varepsilon t} \sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} t + \Phi_0\right), \quad A_0, \Phi_0 \text{ Integrationskonstanten.} \quad (187)$$

Durch Bilden der ersten und zweiten Ableitung von (187) lässt sich die Gültigkeit von (186) bestätigen. Die Lösung (187) soll mittels Anwendung der Laplace-Transformation hergeleitet werden. Für einen späteren Vergleich wird die Lösungsdarstellung noch geringfügig von $u = u(A_0, \Phi_0, \varepsilon; t)$ auf $u = u(u_0, \dot{u}_0, \varepsilon; t)$ umgeschrieben.²⁹

Falls $\dot{u}_0 = 0$ für den Startwert $\dot{u}_0 := \dot{u}(t_0 = 0)$ gelten soll, dann erhält man³⁰ mit $A_0 \neq 0$ für Φ_0 die Bedingung

$$\Phi_0 = \arctan \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \arcsin \sqrt{1-\varepsilon^2} = \arccos \varepsilon$$

und deshalb für den anderen Startwert $u_0 := u(t_0 = 0)$

$$u_0 = A_0 \sin \Phi_0 = A_0 \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Die bekannte exakte Lösung nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$u(t) = u_0 \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\varepsilon \sin \sqrt{1-\varepsilon^2} t + \sqrt{1-\varepsilon^2} \cos \sqrt{1-\varepsilon^2} t \right) \quad \text{mit} \quad \dot{u}_0 = 0. \quad (188)$$

Wendet man den Differentiationssatz der Laplace-Transformation auf (186) an, so folgt

$$p^2 \mathcal{L}\{u\} - p u_0 - \dot{u}_0 + \mathcal{L}\{u\} + 2\varepsilon(p \mathcal{L}\{u\} - u_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}\{u\} = u_0 \frac{p+2\varepsilon}{p^2+2\varepsilon p+1} + \dot{u}_0 \frac{1}{p^2+2\varepsilon p+1}$$

also

$$u = u_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+2\varepsilon}{p^2+2\varepsilon p+1} \right\} + \dot{u}_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2+2\varepsilon p+1} \right\}. \quad (189)$$

Für beide Terme auf der rechten Seite von (189) liefert die inverse Laplace-Transformation ein exaktes Ergebnis. Mit Annahme von $\dot{u}_0 = 0$ wird hier nur der erste Term berücksichtigt, so dass

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \frac{e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1})t}}{2\sqrt{\varepsilon^2-1}} \left(\varepsilon \left(e^{2\sqrt{\varepsilon^2-1}t} - 1 \right) + \sqrt{\varepsilon^2-1} \left(e^{2\sqrt{\varepsilon^2-1}t} + 1 \right) \right) \\ &= u_0 \frac{e^{-\varepsilon t} e^{-i\sqrt{1-\varepsilon^2}t}}{2i\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\varepsilon \left(e^{2i\sqrt{1-\varepsilon^2}t} - 1 \right) + i\sqrt{1-\varepsilon^2} \left(e^{2i\sqrt{1-\varepsilon^2}t} + 1 \right) \right) \\ &= u_0 \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\varepsilon \underbrace{\frac{e^{i\sqrt{1-\varepsilon^2}t} - e^{-i\sqrt{1-\varepsilon^2}t}}{2i}}_{=\sin \sqrt{1-\varepsilon^2}t} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \underbrace{\frac{e^{i\sqrt{1-\varepsilon^2}t} + e^{-i\sqrt{1-\varepsilon^2}t}}{2}}_{=\cos \sqrt{1-\varepsilon^2}t} \right) \end{aligned}$$

und damit ist (188) bestätigt.

²⁸Kamel gibt folgende *Näherung* an (Cel. Mech., vol 3, no 1, 1970), bestimmt mit seinem Verfahren:

$$u(t) \approx A_0 e^{-\varepsilon t} \sin \left(\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 - \frac{1}{16}\varepsilon^6 \right) t + \Phi_0 \right).$$

Ergebnis:

1. exponentiell abklingende Amplitude $A = A_0 e^{-\varepsilon t} \approx A_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{1!} t + \dots \right)$,
2. gegenüber ungedämpftem Fall veränderte Kreisfrequenz $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 - \frac{1}{16}\varepsilon^6 \right)$,
3. genäherte Lösung stimmt mit der exakten Lösung bis auf Terme $O(\varepsilon^8)$ überein.

²⁹o. B. d. A. wird im Folgenden wiederum $t_0 = 0$ gesetzt

³⁰mit $A_0 = 0$ würde neben $\dot{u}_0 = 0$ auch $u_0 = 0$, also eine Gleichgewichtslage folgen und damit fände gar keine Oszillation statt

12 Satellitenbahntheorie (Skizze)

Zur Behandlung des aktuellen Bewegungsproblems wird dieses Gesamtproblem gegliedert in ein Hauptproblem und einen Restanteil (siehe Abschnitt 2.2).

12.1 Anwendung des modifizierten Cui-Verfahrens auf das verallgemeinerte Hauptproblem

Die Lösung des (verallgemeinerten) Hauptproblems soll nach dem modifizierten Cui-Verfahren (s. Abschnitt 6) bestimmt werden. Es werden aber auch Alternativen aufgezeigt.

Folgende Einschränkungen werden getroffen:

- (1) Die Erde wird als ein im Raum gleichmäßig um eine unveränderliche Achse rotierender starrer, im Übrigen beliebig aufgebauter Körper betrachtet.
- (2) Bahnen mit der kritischen Bahnneigung sowie Satellitenbewegungen, deren mittleren Bewegungen mit der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung kommensurabel sind, werden ausgeschlossen.

Anmerkung: Das Problem der kritischen Bahnneigung kann mit der Behandlung des so genannten „Ideal Resonance Problem“ durch Garfinkel (Garfinkel [8], [9], [11]) als gelöst betrachtet werden.

Die Ausarbeitung der Bahntheorie soll hier nur in ihrem Ablauf ausführlicher als in Schneider/Cui [64] skizziert werden. Wegen des zu erwartenden Umfangs wird die Ausarbeitung in einer getrennten Studie erfolgen. Während das Konzept a. a. O. nur auf eine Bahntheorie 3. Ordnung ausgelegt war, wird hier eine Lösung 4. Ordnung angestrebt.

12.1.1 Hamilton-Funktion in Hill'schen Variablen

Wenn die modifizierten Hill-Variablen $\{\dot{r}, G, H, \tilde{t}; r, u, \Omega, \tilde{T}\}$ im erweiterten Phasenraum verwendet werden, dann lässt sich die Hamilton-Funktion schreiben in der Gestalt

$$F = T - V_E + \tilde{T} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - R_E + \tilde{T} \quad (190)$$

mit der Anisotropie des Gravitationsfeldes der Erde

$$R_E = R_{2(0)} + R_z + R_t.$$

Darin erfasst

$$R_{2(0)} = \frac{\mu}{r} c_{2(0)} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (F_{(2)01}(i) + 2F_{2(0)0}(i) \cos 2u) \quad (191)$$

bzw. mit $c = \cos i = H/G$

$$R_{2(0)} = \frac{1}{4} \frac{\mu}{r} c_{2(0)} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 ((1 - 3c^2) - 3(1 - c^2) \cos 2u) \quad (192)$$

die statische Abplattung,

$$R_z = \frac{\mu}{r} \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) + 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq p(k)} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)0} F_{(k+2p)0p}(i) (\delta_e \cos ku + \bar{\delta}_e \sin ku) \right) \quad (193)$$

die Zonalen vom Grad $l > 2$ und

$$R_t = \frac{\mu}{r} \sum_{m \geq 1} \sum_k \sum_p \left(\frac{a_e}{r} \right)^{k+2p} F_{(k+2p)mp}(i) \left(\delta_e (c_{(k+2p)m} \cos \alpha_{km} + s_{(k+2p)m} \sin \alpha_{km}) + \bar{\delta}_e (c_{(k+2p)m} \sin \alpha_{km} - s_{(k+2p)m} \cos \alpha_{km}) \right) \quad (194)$$

die tesseralen/sektoriellen Harmonischen, wobei

$$\delta_e = \begin{cases} 1 & \text{für } k-m \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } k-m \text{ ungerade} \end{cases}, \quad \bar{\delta}_e = 1 - \delta_e, \quad \alpha_{kmq} = ku + m(\Omega - \Theta(\tilde{t})) + qf, \quad \alpha_{km} := \alpha_{km0},$$

$$\mu = G(m_E + m), \quad G \dots \text{Gravitationskonstante}, \quad m_E \dots \text{Masse der Erde } (m_E \approx 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg}).$$

Anmerkung: Die Hamilton-Funktion würde im nicht-erweiterten Phasenraum von der Zeit explizit abhängen.

Ein nicht-autonomes System

$$F = F(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t) \quad (195)$$

für die kanonischen Variablen $Q\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $P\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ erhält man durch Einführung eines zusätzlichen Paares konjugierter Variablen, die generalisierte Koordinate y_{n+1} , die physikalisch die Zeit bedeutet, und den entsprechenden generalisierten Impuls x_{n+1} . Man erreicht so ein autonomes System von $n+1$ Freiheitsgraden (Schneider [60]). Die Hamilton-Funktion des autonomen Systems im erweiterten Phasenraum lautet

$$F = F(q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}; p_1, p_2, \dots, p_n) + p_{n+1}. \quad (196)$$

Es lässt sich zeigen, dass die allgemeine Lösung des autonomen Systems (196) die allgemeine Lösung des Systems (195) ergibt. Mit anderen Worten: wenn das System (196) gelöst ist, dann erhält man damit die Lösung des nicht-autonomen Systems (195): Äquivalenz der Systeme (195) und (196). Die Ersetzung eines nicht-autonomen Systems durch ein entsprechendes autonomes System ist vorteilhaft in der Anwendung der Algorithmen für kanonische Transformationen.

In diesem Sinne wird der Satz erweiterter Hill-Variablen

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4\} := \{r, u, \Omega, \tilde{t}\}, \quad \{p_1, p_2, p_3, p_4\} := \{\dot{r}, G, H, \tilde{T}\}$$

zur Beschreibung der Bewegung verwendet werden.

12.1.2 Die Cui-Lösung

Das durch die Hamilton-Funktion (vereinfachter Fall mit $\Psi(G, H, \tilde{t}) \equiv 0$)

$$F^* = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X(G, H) - \Phi(G, H, e^2) + \tilde{T} \quad (197)$$

definierte Bewegungsproblem ist nach Cui integrabel, die Lösung im Abschnitt 4.2.1 angegeben. Für die weitere Anwendung werden die Formeln für u und Ω in

$$u = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \eta \right) f + \eta (f - M) + u^*,$$

$$\Omega = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \varpi \right) f + \varpi (f - M) + \Omega^*$$

umgeschrieben mit den Abkürzungen

$$\eta = n^{-1} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right) - \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} \right),$$

$$\varpi = n^{-1} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right) - \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) (1 - e^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial H} \right). \quad (198)$$

Die beiden Größen η und ϖ sind konstant.

12.1.3 Festlegung des Zielsystems (IAS 0. Ordnung)

Im Störanteil R_E der Hamilton-Funktion (190), d. h., in den Anteilen (191)-(194) sollen die Potenzen

$$\rho^n := \left(\frac{p}{r} \right)^n = X_{n0}(e^2) + 2 \sum_{q \geq 1} X_{nq}(e^2) e^q \cos qf$$

als Funktionen der wahren Anomalie ausgedrückt werden. Diese Reihenentwicklungen in R_E eingeführt, sodann alle von (u, Ω, f) unabhängigen Terme aus R_E zusammengefasst, wobei (57) verwendet wird, erhält man

$$R_E = \frac{\Gamma^2}{r^2} \left(c_{(2)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 F_{2(0)1}(i) + \sum_{p \geq 2} c_{(2p)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} F_{(2p)0p}(i) \right) +$$

$$+ \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) (X_{(2p-1)0}(e^2) - 1) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{R}_f + \tilde{R}_z + R_t \quad (199)$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{R}_f := R_{2(0)} - \frac{\Gamma^2}{r^2} c_{(2)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 F_{2(0)1}(i) = -\frac{\Gamma^2}{r^2} c_{(2)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \left(F_{2(0)1}(i) \left(\frac{p}{r} - 1 \right) + 2F_{2(0)0}(i) \frac{p}{r} \cos 2u \right), \quad (200)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_z &:= R_z - \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} c_{(2p)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} F_{(2p)0p}(i) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) (\bar{X}_{(2p-1)0}(e^2) - 1) (1 - e^2)^{3/2} \\
&= -\Gamma \vartheta^{-1} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) (\bar{X}_{(2p-1)0}(e^2) - 1) \frac{d(f - M)}{dt} - \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) \left(\left(\frac{p}{r} \right)^{2p-1} - \right. \\
&\quad \left. - \bar{X}_{(2p-1)0}(e^2) \right) - 2 \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)0} F_{(k+2p)0p}(i) \left(\frac{p}{r} \right)^{k+2p-1} (\delta_e \cos ku + \bar{\delta}_e \sin ku).
\end{aligned} \tag{201}$$

Damit nimmt die Hamilton-Funktion (190) die Gestalt an

$$F = F^{*(0)} + \tilde{R} \tag{202}$$

mit dem ungestörten Anteil

$$F^{*(0)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(0)}(\Gamma, i) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(0)}(\Gamma, i; e^2) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T}, \tag{203}$$

sowie der Störfunktion

$$\tilde{R} = -\tilde{R}_f - \tilde{R}_z - R_t.$$

Die frei wählbaren Funktionen X und Φ in der Hamilton-Funktion (197) des Cui-Systems seien nun festgelegt durch die in (200) und (201) heraus getrennten Terme

$$\begin{aligned}
\xi^{(0)}(\Gamma, i) &:= c_{(2)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 F_{2(0)1}(i) + \sum_{p \geq 2} c_{(2p)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} F_{(2p)0p}(i), \\
\phi^{(0)}(\Gamma, i; e^2) &:= \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) (X_{(2p-1)0}(e^2) - 1).
\end{aligned} \tag{204}$$

Definiert man Γ implizit durch

$$\Gamma^2 = G^2 - 2\Gamma^2 \xi^{(0)}(\Gamma, i), \tag{44.a}$$

dann erkennt man, dass $\Gamma^2 \xi^{(0)}(\Gamma, i)$ bzw. $\frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(0)}(\Gamma, i; e^2) (1 - e^2)^{3/2}$ eine Funktion von (G, H) bzw. $(G, H; e^2)$ ist. Damit stellt (203) eine integrable Form der Art (197) dar, spezifiziert durch

$$X = \Gamma^2 \xi(\Gamma, i), \quad \Phi = \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi(\Gamma, i; e^2) (1 - e^2)^{3/2}, \quad \Gamma^2 = G^2 - 2\Gamma^2 \xi(\Gamma, i). \tag{205}$$

Darüber hinaus erkennt man, beachtet man die Reihenentwicklung (62), dass $\tilde{R} = -\tilde{R}_{2(0)} - \tilde{R}_z - R_t$ rein periodisch ist. Somit ist (203) ein integrables Näherungssystem 0. Ordnung zu (202).

Aus (204) ist ersichtlich

$$\xi^{(0)} = O(\varepsilon), \quad \phi^{(0)} = O(\varepsilon^2) \tag{206}$$

und

$$X(G, H) = O(\varepsilon), \quad \Phi(G, H; e^2) = O(\varepsilon^2). \tag{206.a}$$

Dabei ist

$$\varepsilon = c_{2(0)}$$

als Kleinheitsparameter angenommen; $c_{(2p)0}$ ($p > 1$) und c_{nm}, s_{nm} werden als ε^2 betrachtet.

Das modifizierte Cui-Verfahren war in Schneider/Cui [64] charakterisiert worden als eine *Exhaustion der Hamilton-Funktion* des aktuellen Bewegungsproblems durch eine integrable Hamilton-Funktion, so dass ein möglichst geringer Restanteil aus der Hamilton-Funktion des aktuellen Bewegungsproblems verbleibt. Mit anderen Worten: Es wird versucht, die Hamilton-Funktion des aktuellen Bewegungsproblems so weit als möglich dadurch anzunähern, dass man ein integrables Bewegungsproblem sucht, dessen Hamilton-Funktion diejenige des aktuellen Bewegungsproblems annähert.

Das modifizierte Cui-Verfahren beginnt mit der Bereitstellung eines integrablen Näherungssystems (IAS) 0. Ordnung. Als solches wird die im Abschnitt 12.1.2 vorgestellte Cui-Lösung gewählt. Die zugehörige Hamilton-Funktion (197) enthält zwei frei wählbare Funktionen, die durch eine Umverteilung von Termen in der Hamilton-Funktion (190) des Hauptproblems geeignet festgelegt worden sind. Diese Festlegung erfolgt derart, dass ein dominierender Anteil aus dem Störanteil der aktuellen Hamilton-Funktion (190) erfasst wird, und zwar von 0. Ordnung (siehe Abschnitt 6.2).

Dazu wurde gesetzt

$$F = F^{*(0)} + R^{(0)} \quad (207)$$

mit

$$F^{*(0)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X^{(0)}(G, H) - \Phi^{(0)}(G, H, e^2) + \tilde{T}. \quad (208)$$

Der Vergleich mit (190) ergab

$$R^{(0)} = \frac{1}{r^2} X(G, H) + \Phi(G, H, e^2) - R_{2(0)} - R_z - R_t.$$

Die frei wählbaren Funktionen in (208) sind gemäß

$$\begin{aligned} X^{(0)}(G, H) &= \Gamma^2 \left(c_{(2)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 F_{2(0)1}(i) + \sum_{p \geq 2} c_{(2p)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} F_{(2p)0p}(i) \right) = \Gamma^2 \xi^{(0)}, \\ \Phi^{(0)}(G, H, e^2) &= \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) (X_{(2p-1)0}(e^2) - 1) (1 - e^2)^{3/2} = \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(0)} (1 - e^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

festgelegt, so dass in (207) der Störanteil

$$R^{(0)} = R_f^{(0)} + R_z^{(0)} - R_t$$

periodisch ist. (208) stellt ein integrables Näherungssystem 0. Ordnung zum gegebenen System (190) dar, wie es im modifizierten Cui-Verfahren vorausgesetzt wird.

Die Störanteile der Hamilton-Funktion (190) sind

$$\begin{aligned} R_f^{(0)} &= -\frac{\Gamma^2}{r^2} c_{(2)0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \left(F_{(2)01}(i) \left(\frac{p}{r} - 1 \right) + 2F_{2(0)0}(i) \frac{p}{r} \cos 2u \right), \\ R_z^{(0)} &= -\Gamma \vartheta^{-1} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) (X_{(2p-1)0}(e^2) - 1) \frac{d(f - M)}{dt} - \\ &\quad - \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{2p} c_{(2p)0} F_{(2p)0p}(i) \left(\left(\frac{p}{r} \right)^{2p-1} - X_{(2p-1)0}(e^2) \right) - \\ &\quad - 2 \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{k \geq 1} \sum_{p \geq 0} \left(\frac{a_e}{p} \right)^{k+2p} c_{(k+2p)0} F_{(k+2p)0p}(i) \left(\frac{p}{r} \right)^{k+2p-1} (\delta_e \cos ku + \bar{\delta}_e \sin ku) \end{aligned} \quad (209)$$

und R_t nach (194).

Die Hamilton-Funktion des hier betrachteten Hauptproblems (190) lautet nach dieser *Umverteilung* von Termen

$$F = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X^{(0)}(G, H) - \Phi^{(0)}(G, H, e^2) + \tilde{T} + R_f^{(0)} + R_z^{(0)} - R_t.$$

12.1.4 Schema der Konstruktion integrierbarer Näherungssysteme höherer Ordnungen

Dem Ablaufschema (Abb. 3 im Abschnitt 6.3.4) folgend wird durch Anwendung einer Folge von Lie-Transformationen ein IAS k -ter Ordnung konstruiert. Diese sollen zunächst für das vorliegende Hauptproblem aufgeführt werden. Dabei wird jeweils mittels des Landau-Symbols $O(\varepsilon^n)$ kenntlich gemacht, von welcher Ordnung im Kleinheitsparameter ε die Ausdrücke sind. Die einzelnen Arbeitsschritte innerhalb einer Lie-Transformation sind gleichartig aufgebaut (siehe Abschnitt 6.3.4).

Ausgehend von einem *Startsystem* (alte Hamilton-Funktion aHF) wird mit einer erzeugenden Funktion ein Anteil aus der aHF eliminiert. Die Elimination des Anteils aus dem Störanteil der aHF erfolgt so, dass dieser in eine höhere Ordnung zurückgedrängt wird, also im Störanteil der nHF in höherer Ordnung auftritt, als in der aHF .

Die *transformierte Hamilton-Funktion* nHF (98) enthält eine Ersatzfunktion (99), die den in höhere Ordnung zurückgedrängten Störanteil beschreibt.

Aus der *Ersatzfunktion* wird sodann ein integrierbarer Anteil abgespalten und mit dem transformierten ungestörten Anteil der aHF zum ungestörten Anteil der nHF zusammengefasst (100). Dieser beschreibt ein IAS höherer Ordnung als der ungestörte Anteil der aHF . Zusammen mit dem bei der Zerlegung der Ersatzfunktion verbleibenden Restanteil bildet er das Startsystem (101) des nächsten Schrittes, der nächsten elementaren Lie-Transformation usw. bis die gewünschte Ordnung des IAS erreicht ist.

Anmerkung: Die (elementaren) Lie-Transformationen ersetzen jeweils einen (periodischen) Störanteil durch eine Ersatzfunktion in höherer Ordnung. Die Form der sonstigen Terme des Störanteils bleibt unverändert, lediglich die alten kanonischen Variablen werden durch die neuen ersetzt.

Aufgeführt werden jetzt die vorgesehenen elementaren Lie-Transformationen, mit denen nach und nach immer mehr Anteile der Anisotropie des Gravitationsfeldes eliminiert, d. h., in höhere Ordnungen zurückgedrängt werden.

12.1.4.1 Die erste Lie-Transformation

Startsystem:

$$F = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(0)} - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(0)} (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} - \tilde{R}_f - \tilde{R}_z - R_t.$$

Ziel: Elimination von $R^{(1)} = -\tilde{R}_f = O(\varepsilon)$.

Es wird der Störanteil (200) zufolge der statischen Abplattung (209) eliminiert, der nach der Umverteilung innerhalb der Hamilton-Funktion (190), (199-200), (202-203) verbleibt. Er wird durch eine Ersatzfunktion ersetzt, die ihn in höherer Ordnung wiedergibt.

Anmerkung: Mit diesem Schritt wird der Dominanz der zweiten Zonalen gegenüber den weiteren Harmonischen im Störpotential Rechnung getragen.

Erzeugende Funktion:

$$s_1 = \int R^{(1)} dt = O(\varepsilon).$$

Transformiertes System:

$$F^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(0)} - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(0)} (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + E_1 - \tilde{R}_z - R_t$$

mit dem *Ersatzterm* (siehe Abschnitt 6.3.2)

$$E_1 = \frac{1}{2!} \{ R^{(1)}, s_1 \} + \frac{1}{3!} \{ \{ R^{(1)}, s_1 \}, s_1 \} + \frac{1}{4!} \{ \{ \{ R^{(1)}, s_1 \}, s_1 \}, s_1 \} + \frac{1}{5!} \{ \{ \{ \{ R^{(1)}, s_1 \}, s_1 \}, s_1 \}, s_1 \} + O(\varepsilon^6). \quad (210)$$

Zerlegung der *Ersatzfunktion* in einen integrablen Anteil einerseits, der zu den Funktionen $\frac{1}{r^2} X(G, H)$ und $\Phi(G, H, e^2)$ der verwendeten integrablen Form passt und einen periodischen Restanteil andererseits.

Definition eines verbesserten integrablen Näherungssystems 0. Ordnung durch Absorption des integrablen Anteils in den ungestörten Anteil der nHF :

$$F^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + R^{(2)} - R_t \quad (211)$$

mit der restlichen periodischen Störkomponente

$$R^{(2)} = E_1 + \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(1)} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(1)} (1 - e^2)^{3/2} - \tilde{R}_z = O(\varepsilon^2). \quad (212)$$

12.1.4.2 Die zweite Lie-Transformation

Startsystem: (211).

Ziel: Elimination von $R^{(2)}$, siehe (212).

Es werden jetzt alle zonalen Anteile (201) sowie der Ersatzterm aus der ersten Lie-Transformation (210) eliminiert bzw. in eine höhere Ordnung zurückgedrängt.

Erzeugende Funktion:

$$s_2 = \int R^{(2)} dt = O(\varepsilon).$$

Transformiertes System:

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + E_2 - R_t$$

mit dem Ersatzterm

$$E_2 = \frac{1}{2!} \{ R^{(2)}, s_2 \} + \frac{1}{3!} \{ \{ R^{(2)}, s_2 \}, s_2 \} + \frac{1}{4!} \{ \{ \{ R^{(2)}, s_2 \}, s_2 \}, s_2 \} + O(\varepsilon^6). \quad (213)$$

Zerlegung der *Ersatzfunktion* in einen integrablen Anteil einerseits, der zu den Funktionen $\frac{1}{r^2} X(G, H)$ und $\Phi(G, H, e^2)$ der verwendeten integrablen Form passt und einen periodischen Restanteil andererseits.

Definition eines verbesserten integrablen Näherungssystems 1. Ordnung durch Absorption des integrablen Anteils in den ungestörten Anteil der nHF :

$$F^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + R^{(3)} \quad (214)$$

mit der restlichen periodischen Störkomponente

$$R^{(3)} = E_2 + \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(2)} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(2)} (1 - e^2)^{3/2} - R_t = O(\varepsilon^2). \quad (215)$$

12.1.4.3 Die dritte Lie-Transformation

Startsystem: (214).

Ziel: Elimination von $R^{(3)}$, siehe (215).

Es werden jetzt alle tesseralen/sektoriellen Anteile sowie die bei der zweiten Lie-Transformation zurückgedrängten zonalen Harmonischen eliminiert bzw. in höhere Ordnung zurückgedrängt.

Erzeugende Funktion:

$$s_3 = \int R^{(3)} dt = O(\varepsilon).$$

Transformiertes System:

$$F^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + E_3$$

mit dem Ersatzterm

$$E_3 = \frac{1}{2!} \{ R^{(3)}, s_3 \} + \frac{1}{3!} \{ \{ R^{(3)}, s_3 \}, s_3 \} + \frac{1}{4!} \{ \{ \{ R^{(3)}, s_3 \}, s_3 \}, s_3 \} + O(\varepsilon^6). \quad (216)$$

Zerlegung der *Ersatzfunktion* in einen integrablen Anteil einerseits, der zu den Funktionen $\frac{1}{r^2} X(G, H)$ und $\Phi(G, H, e^2)$ der verwendeten integrablen Form passt und einen periodischen Restanteil andererseits.

Definition eines verbesserten integrablen Näherungssystems 3. Ordnung durch Absorption des integrablen Anteils in den ungestörten Anteil der nHF :

$$F^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \xi^{(3)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + R^{(4)} \quad (217)$$

mit der restlichen periodischen Störkomponente

$$R^{(4)} = E_3 + \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(3)} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(3)} (1 - e^2)^{3/2} = O(\varepsilon^3). \quad (218)$$

12.1.4.4 Die vierte Lie-Transformation

Startsystem: (217).

Ziel: Elimination von $R^{(4)}$, siehe (218).

Um die angestrebte 4. Ordnung zu erreichen, müssen die in den vorangehenden Lie-Transformationen in höhere Ordnungen zurückgedrängten Harmonischen in noch höhere weiter zurückgedrängt werden. Es verbleibt nach der vierten Transformation ein periodischer Störanteil 5. Ordnung. Der resultierende ungestörte integrable Anteil der transformierten Hamilton-Funktion ist von 4. Ordnung.

Erzeugende Funktion:

$$s_4 = \int R^{(4)} dt = O(\varepsilon^2).$$

Transformiertes System:

$$F^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \xi^{(3)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + E_4$$

mit dem Ersatzterm

$$E_4 = \frac{1}{2!} \{ R^{(4)}, s_4 \} + O(\varepsilon^6). \quad (219)$$

Zerlegung der *Ersatzfunktion* in einen integrablen Anteil einerseits, der zu den Funktionen $\frac{1}{r^2} X(G, H)$ und $\Phi(G, H, e^2)$ der verwendeten integrablen Form passt und einen periodischen Restanteil andererseits.

Definition eines verbesserten integrablen Näherungssystems 4. Ordnung durch Absorption des integrablen Anteils in den ungestörten Anteil der nHF :

$$F^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\Gamma^2}{r^2} (\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \xi^{(3)} + \xi^{(4)}) - \frac{\mu^2}{\Gamma^2} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)}) (1 - e^2)^{3/2} + \tilde{T} + R^{(4)}$$

mit der restlichen periodischen Störkomponente

$$R^{(4)} = E_4 + \frac{\Gamma^2}{r^2} \xi^{(4)} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \phi^{(4)} (1 - e^2)^{3/2} = O(\varepsilon^5).$$

Die Hamilton-Funktion $F^{(4)}$ definiert ein exakt lösbares Bewegungsproblem. Dessen Lösung hat die Funktionsstruktur des Zielsystems, also die der Cui-Lösung. Die darin frei wählbaren Funktionen

$$X(G, H) \quad \text{und} \quad \Phi(G, H, e^2)$$

sind jetzt festgelegt durch

$$\begin{aligned} X(G, H) &= (\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \xi^{(3)} + \xi^{(4)}), \\ \Phi(G, H, e^2) &= (\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)}). \end{aligned}$$

Damit erhält man die Lösung in den transformierten Variablen $X'(t), Y'(t)$. sie hängen mit den Ausgangsvariablen $X(t), Y(t)$ gemäß

$$\begin{aligned} X &= X' + \{X', s\} + \frac{1}{2!} \{\{X', s\}, s\} + \frac{1}{3!} \{\{\{X', s\}, s\}, s\} + \frac{1}{4!} \{\{\{\{X', s\}, s\}, s\}, s\} + \dots \\ Y &= Y' + \{Y', s\} + \frac{1}{2!} \{\{Y', s\}, s\} + \frac{1}{3!} \{\{\{Y', s\}, s\}, s\} + \frac{1}{4!} \{\{\{\{Y', s\}, s\}, s\}, s\} + \dots \end{aligned}$$

zusammen. Die Erzeugende s der Gesamttransformation ist aus den 4 elementaren Lie-Transformationen zusammenzusetzen, als Produkt der elementaren Lie-Transformationen zu bestimmen (s. Abschnitt 5.3). Ein Beispiel für die Hintereinanderschaltung zweier elementarer Lie-Transformationen ist in Abschnitt 11.2.3 zu finden.

12.1.5 Methodische Vorbereitung der praktischen Ausführung des modifizierten Cui-Verfahrens

Die Berechnung der Erzeugenden der obigen Lie-Transformationen erfolgt durch unbestimmte Integration nach der Zeit. Die Ausführung lässt sich vereinfachen, wenn man dabei von der Zeit t auf die wahren Anomalie f aus der Cui-Lösung (siehe Abschnitt 12.1.3) als Integrationsvariable übergeht.

12.1.5.1 Auswertung der unbestimmten Integrale bei der Berechnung der Erzeugenden

Da voraussetzungsgemäß die Erde gleichmäßig rotiert, lässt sich die zeitliche Abhängigkeit des Drehwinkels durch

$$\Theta = \theta_e M + \Theta^*$$

ausdrücken, wobei

$$\theta_e = \frac{\dot{\Theta}}{\dot{M}} = \frac{\Gamma^3}{\vartheta \mu^2} (1 - e^2)^{-3/2} \dot{\Theta}, \quad \dot{\Theta} = \Theta(t^*).$$

Mit der Hilfe von (198) erhält man

$$\alpha_{kmq} = ku + m(\Omega - \Theta(\tilde{t})) + qf = \left(k \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + m \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + q \right) f - (m\theta_e + m\varpi + k\eta)M + \alpha_{km}^*, \quad (220)$$

worin

$$\alpha_{km}^* = ku^* + m\Omega^* - m\Theta^*$$

der Wert von α_{km} zum Perigäumsdurchgang bezeichnet.

Mit $M = f - (f - M)$ geht (220) über in

$$\alpha_{kmq} = I_{kq}^m f + \beta_{km}(f - M) + \alpha_{km}^*, \quad (221)$$

wobei

$$I_{kq}^m = k \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \eta \right) + m \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \varpi \right) - m\theta_e + q, \quad \beta_{km} = m\theta_e + m\varpi + k\eta$$

konstant sind. Es folgt daher

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{kmq} &= \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) \cos \beta_{km}(f - M) - \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) \sin \beta_{km}(f - M), \\ \sin \alpha_{kmq} &= \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) \cos \beta_{km}(f - M) + \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) \sin \beta_{km}(f - M) \end{aligned} \quad (222)$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) &= \cos \alpha_{kmq} \cos \beta_{km}(f - M) + \sin \alpha_{kmq} \sin \beta_{km}(f - M), \\ \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) &= \sin \alpha_{kmq} \cos \beta_{km}(f - M) - \cos \alpha_{kmq} \sin \beta_{km}(f - M).\end{aligned}$$

Mit einer Taylor-Reihenentwicklung erhält man

$$\begin{aligned}\cos \beta_{km}(f - M) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu)!} (-1)^\mu (\beta_{km})^{2\mu} (f - M)^{2\mu}, \\ \sin \beta_{km}(f - M) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu + 1)!} (-1)^\mu (\beta_{km})^{2\mu+1} (f - M)^{2\mu+1}.\end{aligned}\tag{223}$$

Für die Potenzen von $(f - M)$ bekommt man durch Multiplikationen von Fourier-Reihen

$$(f - M)^{2\mu} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2\mu)}(e) \cos jf, \quad (f - M)^{2\mu+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2\mu+1)}(e) \sin jf,\tag{224}$$

wobei sich die Fourier-Koeffizienten mittels

$$\begin{aligned}d_j^{(0)}(e) &= \delta_j^{(0)}, \\ d_j^{(2)}(e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(1)}(e) d_{k-j}^{(1)}(e), \\ d_j^{(2\nu)}(e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(2)}(e) d_{k-j}^{(2\nu-2)}(e), \\ d_j^{(2\nu+1)}(e) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(1)}(e) d_{k-j}^{(2\nu)}(e)\end{aligned}\tag{225}$$

rekursiv bestimmen lassen. Für die Fourier-Koeffizienten gelten die folgenden Symmetrieeigenschaften

$$d_j^{(\mu)}(e) = (-1)^\mu d_{-j}^{(\mu)}(e), \quad d_0^{(2\nu+1)}(e) = 0$$

und die D'Alembert'sche Eigenschaft

$$d_j^{(\mu)}(e) = O(e^j) \quad (j \geq 0)$$

damit lassen sich die entsprechenden modifizierten Fourier-Koeffizienten

$$\bar{d}_j^{(\mu)}(e^2) = d_j^{(\mu)}(e) e^{-j} \quad (j \geq 0)$$

definieren und die Reihenentwicklungen (224) in

$$(f - M)^{2\mu} = \bar{d}_0^{(2\mu)}(e^2) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \bar{d}_j^{(2\mu)}(e^2) e^j \cos jf, \quad (f - M)^{2\mu+1} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \bar{d}_j^{(2\mu+1)}(e^2) e^j \sin jf\tag{224.a}$$

ausdrücken. Führt man (224.a) in (223) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned}\cos \beta_{km}(f - M) &= C_0^{km}(e^2) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{km}(e^2) e^j \cos jf, \\ \sin \beta_{km}(f - M) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{km}(e^2) e^j \sin jf\end{aligned}\tag{226}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}C_0^{km}(e^2) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu)!} (-1)^\mu (\beta_{km})^{2\mu} \bar{d}_0^{(2\mu)}(e^2), \\ C_j^{km}(e^2) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu)!} (-1)^\mu (\beta_{km})^{2\mu} \bar{d}_j^{(2\mu)}(e^2), \\ S_j^{km}(e^2) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu + 1)!} (-1)^\mu (\beta_{km})^{2\mu+1} \bar{d}_j^{(2\mu)}(e^2).\end{aligned}\tag{227}$$

Zur Berechnung der modifizierten Fourier-Koeffizienten geht man von (225) aus, durch Zerlegung der Summationsbereiche und Verwendung der Symmetrieeigenschaften der Fourier-Koeffizienten mit dem Ziel, dass der zweite Index nicht-negativ wird. Damit erhält man

$$\begin{aligned} d_j^{(2)}(e) &= \sum_{k=1}^{j-1} d_{j-k}^{(1)}(e) (-d_k^{(1)}(e) + d_{2j-k}^{(1)}(e)) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+j}^{(1)}(e) (d_k^{(1)}(e) + d_{k+2j}^{(1)}(e)), \\ d_j^{(2\nu)}(e) &= d_0^{(2)}(e) d_j^{(2\nu-2)}(e) + \sum_{k=1}^{j-1} d_{j-k}^{(2)}(e) (d_k^{(2\nu-2)}(e) + d_{2j-k}^{(2\nu-2)}(e)) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+j}^{(2)}(e) (d_k^{(2\nu-2)}(e) + d_{k+2j}^{(2\nu-2)}(e)), \\ d_j^{(2\nu+1)}(e) &= \sum_{k=1}^{j-1} d_{j-k}^{(1)}(e) (d_k^{(2\nu)}(e) - d_{2j-k}^{(2\nu)}(e)) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+j}^{(1)}(e) (d_k^{(2\nu)}(e) - d_{k+2j}^{(2\nu)}(e)). \end{aligned}$$

Die ersten Summationen in den Formeln verschwinden für $j < 2$, weil die Indexmenge $0 \leq k \leq 1 - j$ leer ist. Beachtet man die Definition der modifizierten Koeffizienten, so ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \bar{d}_j^{(2)}(e^2) &= -\sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_{j-k}^{(1)}(e^2) (\bar{d}_k^{(1)}(e^2) - e^{2(j-k)} \bar{d}_{2j-k}^{(1)}(e^2)) + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_{k+j}^{(1)}(e^2) (\bar{d}_k^{(1)}(e^2) + e^{2j} \bar{d}_{k+2j}^{(1)}(e^2)) e^{2k}, \\ \bar{d}_j^{(2\nu)}(e^2) &= \bar{d}_0^{(2)}(e^2) \bar{d}_j^{(2\nu-2)}(e^2) + \sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_{j-k}^{(2)}(e^2) (\bar{d}_k^{(2\nu-2)}(e^2) + e^{2(j-k)} \bar{d}_{2j-k}^{(2\nu-2)}(e^2)) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_{k+j}^{(2)}(e^2) (\bar{d}_k^{(2\nu-2)}(e^2) + e^{2j} \bar{d}_{k+2j}^{(2\nu-2)}(e^2)) e^{2k}, \\ \bar{d}_j^{(2\nu+1)}(e^2) &= \sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_{j-k}^{(1)}(e^2) (\bar{d}_k^{(2\nu)}(e^2) - e^{2(j-k)} \bar{d}_{2j-k}^{(2\nu)}(e^2)) + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_{k+j}^{(1)}(e^2) (\bar{d}_k^{(2\nu)}(e^2) - e^{2j} \bar{d}_{k+2j}^{(2\nu)}(e^2)) e^{2k}. \end{aligned}$$

Einführung von (226) in (222) ergibt weiter

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{kmq} &= C_0^{km} \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) - \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{km} e^j \left(\cos(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) - \cos(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{km} e^j \left(\cos(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) + \cos(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right), \\ \sin \alpha_{kmq} &= C_0^{km} \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) - \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{km} e^j \left(\sin(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) - \sin(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{km} e^j \left(\sin(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) + \sin(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right). \end{aligned} \tag{228}$$

Mittels (228) sind die Funktionen $\cos \alpha_{kmq}$ und $\sin \alpha_{kmq}$ in je einer Fourier-Reihe von f ausgedrückt. Damit lassen sich die o. g. Quadraturen über die Variablen f direkt berechnen; man erhält (bei Verwendung von (49))

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{r^2} \int \cos \alpha_{kmq} dt &= \vartheta^{-1} \int \cos \alpha_{kmq} df = C_0^{km} J_{kq}^m \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{km} e^j \left(J_{k(q-j)}^m \sin(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) - J_{k(q+j)}^m \sin(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{km} e^j \left(J_{k(q-j)}^m \sin(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) + J_{k(q+j)}^m \sin(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right), \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int \sin \alpha_{kmq} dt &= \vartheta^{-1} \int \sin \alpha_{kmq} df = -C_0^{km} J_{kq}^m \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{km} e^j \left(J_{k(q-j)}^m \cos(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) - J_{k(q+j)}^m \cos(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{km} e^j \left(J_{k(q-j)}^m \cos(I_{k(q-j)}^m f + \alpha_{km}^*) + J_{k(q+j)}^m \cos(I_{k(q+j)}^m f + \alpha_{km}^*) \right) \end{aligned} \tag{229}$$

mit der Abkürzung

$$J_{kq}^m = (\vartheta I_{kq}^m)^{-1} = \vartheta^{-1} \left(k \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \eta \right) + m \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \varpi \right) - m\theta_e + q \right)^{-1}. \quad (230)$$

Im weiteren werden vom Index j unabhängige Größen möglichst aus den Summationen herausgezogen; es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{r^2} \int \cos \alpha_{kmq} dt &= \vartheta^{-1} \int \cos \alpha_{kmq} df = A_{kq}^m \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) + B_{kq}^m \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int \sin \alpha_{kmq} dt &= \vartheta^{-1} \int \sin \alpha_{kmq} df = -A_{kq}^m \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) + B_{kq}^m \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_{kq}^m &= C_0^{km} J_{kq}^m - \sum_{j=1}^{\infty} \left(S_j^{km} (J_{k(q-j)}^m - J_{k(q+j)}^m) - C_j^{km} (J_{k(q-j)}^m + J_{k(q+j)}^m) \right) e^j \cos jf, \\ B_{kq}^m &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(S_j^{km} (J_{k(q-j)}^m + J_{k(q+j)}^m) - C_j^{km} (J_{k(q-j)}^m - J_{k(q+j)}^m) \right) e^j \sin jf. \end{aligned} \quad (231)$$

Aus (221) folgt weiter $I_{kq}^m f + \alpha_{km}^* = \alpha_{kmq} - \beta_{km}(f - M) = \alpha_{km} + qf - \beta_{km}(f - M)$ und daher

$$\begin{aligned} \sin(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) &= (\cos qf \cos \beta_{km}(f - M) + \sin qf \sin \beta_{km}(f - M)) \sin \alpha_{km} + \\ &\quad + (\sin qf \cos \beta_{km}(f - M) - \cos qf \sin \beta_{km}(f - M)) \cos \alpha_{km}, \\ \cos(I_{kq}^m f + \alpha_{km}^*) &= (\cos qf \cos \beta_{km}(f - M) + \sin qf \sin \beta_{km}(f - M)) \cos \alpha_{km} - \\ &\quad - (\sin qf \cos \beta_{km}(f - M) - \cos qf \sin \beta_{km}(f - M)) \sin \alpha_{km}. \end{aligned}$$

Führt man letztere in (229) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{r^2} \int \cos \alpha_{kmq} dt &= X_{kq}^m \sin \alpha_{km} + Y_{kq}^m \cos \alpha_{km}, \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int \sin \alpha_{kmq} dt &= -X_{kq}^m \cos \alpha_{km} + Y_{kq}^m \sin \alpha_{km} \end{aligned} \quad (232)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} X_{kq}^m &= (A_{kq}^m \cos \beta_{km}(f - M) + B_{kq}^m \sin \beta_{km}(f - M)) \cos qf + (A_{kq}^m \sin \beta_{km}(f - M) - B_{kq}^m \cos \beta_{km}(f - M)) \sin qf, \\ Y_{kq}^m &= (A_{kq}^m \cos \beta_{km}(f - M) + B_{kq}^m \sin \beta_{km}(f - M)) \sin qf - (A_{kq}^m \sin \beta_{km}(f - M) - B_{kq}^m \cos \beta_{km}(f - M)) \cos qf. \end{aligned} \quad (233)$$

Anmerkung: Die hier vorgestellte Methode zur Berechnung der Integrale $\frac{1}{r^2} \int \cos \alpha_{kmq} dt$ und $\frac{1}{r^2} \int \sin \alpha_{kmq} dt$ stellt sich als eine Alternative dar zur Verwendung der Hansen-Koeffizienten, basierend auf einer gleichmäßig drehenden elliptischen Bahn, wie bei Kaula. Allgemeiner gesagt: Da α_{kmq} eine von f proportionale Komponente als auch eine von der Zeit (oder M) proportionale Komponente besitzt, lässt sich entweder eine Reihenentwicklung von M ersetzen durch die Einführung der zu f proportionalen Komponente oder umgekehrt und somit die Integration durchführen. Die Wahl, in welche Richtung vorzugehen ist, entscheidet sich durch zwei Kriterien: (1) die Einfachheit der Abhängigkeit des Ergebnisses von den verwendeten kanonischen Variablen; (2) die Konvergenzeigenschaft der Reihenentwicklung. Wählt man f statt M , dann erhält man eine einfachere Abhängigkeit von $r, \dot{r}, G$ und H . Im anderen Fall würden anstelle von (223) die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \cos \left(k \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + m \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + q \right) (f - M) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu)!} (-1)^\mu \left(k \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + m \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + q \right)^{2\mu} (f - M)^{2\mu}, \\ \sin \left(k \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + m \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + q \right) (f - M) &= \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{(2\mu + 1)!} (-1)^\mu \left(k \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + m \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + q \right)^{2\mu + 1} (f - M)^{2\mu + 1} \end{aligned}$$

eingeführt werden. Da $|k \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + m \frac{\partial \Gamma}{\partial H} + q|$ in den Laufbereichen von k, m und q die Größe $|\beta_{km}|$ weit überschreiten kann, sollte die Konvergenzeigenschaft der Reihen (223) wesentlich besser sein, als die der letzteren.

Für $m = 0$ gilt

$$\beta_{k0} = k\eta = O(k\varepsilon^2),$$

$$\cos \beta_{k0}(f - M) = 1 - \frac{1}{2}(k\eta)^2 d_0^{(2)}(e) - (k\eta)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \bar{d}_j^{(2)}(e^2) e^j \cos jf + O((ke)^4 \varepsilon^8),$$

$$\sin \beta_{km}(f - M) = 2(k\eta) \sum_{j=1}^{\infty} \bar{d}_j^{(1)}(e^2) e^j \sin jf + O((ke)^3 \varepsilon^6).$$

Damit lässt sich (227) auf

$$\begin{aligned} C_0^{k0}(e^2) &= 1 - \frac{1}{2}(k\eta)^2 \bar{d}_0^{(2)}(e^2) + O((ke)^4 \varepsilon^8), \\ C_j^{k0}(e^2) &= -\frac{1}{2}(k\eta)^2 \bar{d}_j^{(2)}(e^2) + O((ke)^4 \varepsilon^8), \\ S_j^{km}(e^2) &= k\eta \bar{d}_j^{(1)}(e^2) + O((ke)^3 \varepsilon^6) \end{aligned} \quad (227.a)$$

reduzieren. Einführung in (232), (233) und (231) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{r^2} \int \cos(ku + qf) dt &= X_{kq}^0 \sin ku + Y_{kq}^0 \cos ku + O((ke)^3 \varepsilon^5), \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int \sin(ku + qf) dt &= -X_{kq}^0 \cos ku + Y_{kq}^0 \sin ku + O((ke)^3 \varepsilon^5), \end{aligned} \quad (232.a)$$

$$\begin{aligned} X_{kq}^0 &= (A_{kq}^0 \cos k\eta(f - M) + B_{kq}^0 \sin k\eta(f - M)) \cos qf + (A_{kq}^0 \sin k\eta(f - M) - B_{kq}^0 \cos k\eta(f - M)) \sin qf, \\ Y_{kq}^0 &= (A_{kq}^0 \cos k\eta(f - M) + B_{kq}^0 \sin k\eta(f - M)) \sin qf - (A_{kq}^0 \sin k\eta(f - M) - B_{kq}^0 \cos k\eta(f - M)) \cos qf, \end{aligned} \quad (233.a)$$

$$\begin{aligned} A_{kq}^0 &= (1 - \frac{1}{2}(k\eta)^2 \bar{d}_0^{(2)}(e^2)) J_{kq}^0 - k\eta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{d}_j^{(1)}(e^2) (J_{k(q-j)}^0 - J_{k(q+j)}^0) + \frac{1}{2} k\eta \bar{d}_j^{(2)}(e^2) (J_{k(q-j)}^0 + J_{k(q+j)}^0) \right) e^j \cos jf, \\ B_{kq}^0 &= k\eta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{d}_j^{(1)}(e^2) (J_{k(q-j)}^0 + J_{k(q+j)}^0) + \frac{1}{2} k\eta \bar{d}_j^{(2)}(e^2) (J_{k(q-j)}^0 - J_{k(q+j)}^0) \right) e^j \sin jf \end{aligned} \quad (231.a)$$

und

$$J_{kq}^0 = (\vartheta I_{kq}^0)^{-1} = \vartheta^{-1} \left(k \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \eta \right) + q \right)^{-1} = (1 - (\vartheta - 1)) (k + q + k(\sigma - \eta))^{-1}. \quad (230.a)$$

Aus (232.a) erhält man für $k = 0$, $q = 0$ und für die Kombination $(k, \pm q)$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{r^2} \int e^q \cos qf dt &= e^q Y_{0q}^0 + O((ke)^3 \varepsilon^6) = e^q J_{0q}^0 \sin qf + O((ke)^3 \varepsilon^6), \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int \cos ku dt &= X_{k(0)}^0 \sin ku + Y_{k(0)}^0 \cos ku + O((ke)^3 \varepsilon^5), \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int \sin ku dt &= -X_{k(0)}^0 \cos ku + Y_{k(0)}^0 \sin ku + O((ke)^3 \varepsilon^5), \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int e^q (\cos(ku - qf) + \cos(ku + qf)) dt &= \hat{X}_{kq}^0 \sin ku + \hat{Y}_{kq}^0 \cos ku + O((ke)^3 \varepsilon^5), \\ \frac{\Gamma}{r^2} \int e^q (\sin(ku - qf) + \sin(ku + qf)) dt &= -\hat{X}_{kq}^0 \cos ku + \hat{Y}_{kq}^0 \sin ku + O((ke)^3 \varepsilon^5) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{X}_{kq}^0 &:= e^q (X_{k(-q)}^0 + X_{kq}^0) = (\hat{A}_{kq}^0 \cos k\eta(f - M) + \hat{B}_{kq}^0 \sin k\eta(f - M)) e^q \cos qf - \\ &\quad - (\tilde{A}_{kq}^0 \sin k\eta(f - M) - \tilde{B}_{kq}^0 \cos k\eta(f - M)) e^q \sin qf, \\ \hat{Y}_{kq}^0 &:= e^q (Y_{k(-q)}^0 + Y_{kq}^0) = -(\tilde{A}_{kq}^0 \cos k\eta(f - M) + \tilde{B}_{kq}^0 \sin k\eta(f - M)) e^q \sin qf - \\ &\quad - (\hat{A}_{kq}^0 \sin k\eta(f - M) - \hat{B}_{kq}^0 \cos k\eta(f - M)) e^q \cos qf, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{kq}^0 &:= A_{k(-q)}^0 + A_{kq}^0 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}(k\eta)^2 \bar{d}_0^{(2)}(e^2)\right) \hat{J}_{kq}^0 - k\eta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{d}_j^{(1)}(e^2) (\tilde{J}_{k(q+j)}^0 - \tilde{J}_{k(q-j)}^0) + \frac{1}{2}k\eta \bar{d}_j^{(2)}(e^2) (\hat{J}_{k(q+j)}^0 + \hat{J}_{k(q-j)}^0)\right) e^j \cos jf, \\
\hat{B}_{kq}^0 &:= B_{k(-q)}^0 + B_{kq}^0 = k\eta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{d}_j^{(1)}(e^2) (\hat{J}_{k(q+j)}^0 + \hat{J}_{k(q-j)}^0) + \frac{1}{2}k\eta \bar{d}_j^{(2)}(e^2) (\tilde{J}_{k(q+j)}^0 - \tilde{J}_{k(q-j)}^0)\right) e^j \sin jf, \\
\tilde{A}_{kq}^0 &:= A_{k(-q)}^0 - A_{kq}^0 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}(k\eta)^2 \bar{d}_0^{(2)}(e^2)\right) \tilde{J}_{kq}^0 - k\eta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{d}_j^{(1)}(e^2) (\hat{J}_{k(q+j)}^0 - \hat{J}_{k(q-j)}^0) + \frac{1}{2}k\eta \bar{d}_j^{(2)}(e^2) (\tilde{J}_{k(q+j)}^0 + \tilde{J}_{k(q-j)}^0)\right) e^j \cos jf, \\
\tilde{B}_{kq}^0 &:= B_{k(-q)}^0 - B_{kq}^0 = k\eta \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{d}_j^{(1)}(e^2) (\tilde{J}_{k(q+j)}^0 + \tilde{J}_{k(q-j)}^0) + \frac{1}{2}k\eta \bar{d}_j^{(2)}(e^2) (\hat{J}_{k(q+j)}^0 - \hat{J}_{k(q-j)}^0)\right) e^j \sin jf, \\
J_{k(-q)}^0 &= \frac{1}{k-q} \left(1 - \frac{k}{k-q}(\sigma - \eta) + \frac{k^2}{(k-q)^2} \sigma(\sigma - 2\eta) - \frac{k^3}{(k-q)^3} \sigma^3 - (\vartheta - 1) + \frac{k}{k-q} \sigma(\vartheta - 1)\right) + O(\varepsilon^4), \\
J_{kq}^0 &= \frac{1}{k+q} \left(1 - \frac{k}{k+q}(\sigma - \eta) + \frac{k^2}{(k+q)^2} \sigma(\sigma - 2\eta) - \frac{k^3}{(k+q)^3} \sigma^3 - (\vartheta - 1) + \frac{k}{k+q} \sigma(\vartheta - 1)\right) + O(\varepsilon^4), \\
\hat{J}_{kq}^0 &= \frac{1}{k-q} + \frac{1}{k+q} - \left(\frac{k}{(k-q)^2} + \frac{k}{(k+q)^2}\right) (\sigma - \eta) + \left(\frac{k^2}{(k-q)^3} + \frac{k^2}{(k+q)^3}\right) \sigma(\sigma - 2\eta) - \\
&\quad - \left(\frac{k^3}{(k-q)^4} + \frac{k^3}{(k+q)^4}\right) \sigma^3 - \left(\frac{1}{k-q} + \frac{1}{k+q}\right) (\vartheta - 1) + \left(\frac{k}{(k-q)^2} + \frac{k}{(k+q)^2}\right) \sigma(\vartheta - 1) + O(\varepsilon^4), \\
\tilde{J}_{kq}^0 &= \frac{1}{k-q} - \frac{1}{k+q} - \left(\frac{k}{(k-q)^2} - \frac{k}{(k+q)^2}\right) (\sigma - \eta) + \left(\frac{k^2}{(k-q)^3} - \frac{k^2}{(k+q)^3}\right) \sigma(\sigma - 2\eta) - \\
&\quad - \left(\frac{k^3}{(k-q)^4} - \frac{k^3}{(k+q)^4}\right) \sigma^3 - \left(\frac{1}{k-q} - \frac{1}{k+q}\right) (\vartheta - 1) + \left(\frac{k}{(k-q)^2} - \frac{k}{(k+q)^2}\right) \sigma(\vartheta - 1) + O(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

und für $(q \neq k)$

$$\begin{aligned}
J_{k(-k)}^0 &= \frac{1}{k\sigma} \left(\sum_{n=0}^4 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n - (\vartheta - 1) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n \right) + O(\varepsilon^4), \\
J_{k(k)}^0 &= \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{1}{2}(\sigma - \eta) + \frac{1}{4}\sigma(\sigma - 2\eta) + \frac{1}{8}\sigma^3 - ((\vartheta - 1) - \frac{1}{2}\sigma(\vartheta - 1)) \right) + O(\varepsilon^4), \\
\hat{J}_{k(k)}^0 &= \frac{1}{k\sigma} \left(\sum_{n=0}^4 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n - (\vartheta - 1) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n \right) + \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{1}{2}(\sigma - \eta) + \frac{1}{4}\sigma(\sigma - 2\eta) + \frac{1}{8}\sigma^3 - ((\vartheta - 1) - \frac{1}{2}\sigma(\vartheta - 1)) \right) + O(\varepsilon^4), \\
\tilde{J}_{k(k)}^0 &= \frac{1}{k\sigma} \left(\sum_{n=0}^4 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n - (\vartheta - 1) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n \right) - \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{1}{2}(\sigma - \eta) + \frac{1}{4}\sigma(\sigma - 2\eta) + \frac{1}{8}\sigma^3 - ((\vartheta - 1) - \frac{1}{2}\sigma(\vartheta - 1)) \right) + O(\varepsilon^4),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
J_{k0}^0 &= \frac{1}{k} (1 - (\sigma - \eta) - (\vartheta - 1) + \sigma(\sigma - 2\eta) - \sigma^3 + \sigma(\vartheta - 1)) + O(\varepsilon^4), \\
J_{0q}^0 &= \frac{1}{q} (1 - (\vartheta - 1)) + O(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$\sigma := \frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1.$$

12.1.5.2 Berechnung der auf das integrable Näherungssystem bezogenen Größen und deren Ableitungen

Die Größe Γ

Aus der dritten Gleichung von (205) erhält man

$$(1 + 2\xi(\Gamma, i))\Gamma^2 = G^2. \quad (234)$$

Setzt man $\gamma = \Gamma/G$, dann erhält man die Iterationsformel

$$(\gamma^{(k+1)})^2 = (1 + 2\xi(\gamma^{(k)}, i))^{-1}$$

mit dem Startwert $\gamma^{(0)} = 1$ und dem Kriterium zur Beendigung der Iteration

$$|\gamma^{(k)} - \gamma^{(k-1)}| < O(\varepsilon^6).$$

Unter der Genauigkeitsforderung erhält man letztlich

$$\Gamma = \gamma^{(k)} G.$$

Differentiation von (234) ergibt

$$2\Gamma(1 + 2\xi(\Gamma, i)) d\Gamma + 2\Gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} d\Gamma + 2\Gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial i} di = 2G dG.$$

Daraus erhält man

$$d\Gamma = \left(\Gamma(1 + 2\xi(\Gamma, i)) + \Gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \right)^{-1} \left(G - \Gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial G} \right) dG - \left(\Gamma(1 + 2\xi(\Gamma, i)) + \Gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \right)^{-1} \Gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial H} dH$$

und daher die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial G} &= \left((1 + 2\xi(\Gamma, i)) + \Gamma \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \right)^{-1} \left(\frac{G}{\Gamma} - \Gamma \frac{\partial \xi}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial G} \right), \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial H} &= - \left((1 + 2\xi(\Gamma, i)) + \Gamma \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \right)^{-1} \Gamma \frac{\partial \xi}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial H}. \end{aligned} \quad (235)$$

Aus (206), (234) und (235) erhält man

$$\frac{\Gamma}{G} = 1 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial G} = 1 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial H} = O(\varepsilon).$$

Die Exzentrizität e

Aus der ersten Gleichung in (52) erhält man

$$de^2 = -2 \frac{\Gamma^2}{\mu r^2} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1 \right) dr + 2 \frac{\Gamma^2}{\mu^2} \dot{r} d\dot{r} + 2 \left(\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^2 - (1 - e^2) \right) \frac{1}{\Gamma} d\Gamma. \quad (236)$$

Die Funktion $\Phi(G, H, e^2)$ und darauf bezogene Größen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial e^2} \right) &= \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial e^2} - 3\phi (1 - e^2)^{-1} \right) (1 - e^2)^{3/2}, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G} \right) &= \frac{\mu^2}{\Gamma^3} \left(\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma} - 2\phi \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + \frac{\partial \phi}{\partial i} \frac{\Gamma \cos i}{G \sin i} \right) (1 - e^2)^{3/2}, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right) &= \frac{\mu^2}{\Gamma^3} \left(\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma} - 2\phi \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \frac{\partial \phi}{\partial i} \frac{\Gamma}{G \sin i} \right) (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Einführung in (49) und (198) ergibt

$$\vartheta = 1 - 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial e^2} - 3\phi (1 - e^2)^{-1} \right) (1 - e^2)^{3/2}$$

und

$$\begin{aligned} \eta &= \vartheta^{-1} \left(\left(4\phi + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma} - 2(1 - e^2) \frac{\partial \phi}{\partial e^2} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial G} + \frac{\partial \phi}{\partial i} \frac{\Gamma \cos i}{G \sin i} \right), \\ \varpi &= \vartheta^{-1} \left(\left(4\phi + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma} - 2(1 - e^2) \frac{\partial \phi}{\partial e^2} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \frac{\partial \phi}{\partial i} \frac{\Gamma}{G \sin i} \right). \end{aligned} \quad (237)$$

Aus (206) und (237) erhält man die Größenabschätzung

$$\vartheta = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \eta = O(\varepsilon^2), \quad \varpi = O(\varepsilon^2).$$

Die Differentiale für $e^j \cos jf$ und $e^j \sin jf$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} d(e^j \cos jf) &= j e^{j-1} \left(-\frac{\Gamma^2}{\mu r^2} \cos(j-1)f \, dr - \frac{\Gamma}{\mu} \sin(j-1)f \, d\dot{r} + \left(2 \cos(j-1)f \frac{\Gamma^2}{\mu r} - \sin(j-1)f \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \right) \frac{d\Gamma}{\Gamma} \right), \\ d(e^j \sin jf) &= j e^{j-1} \left(-\frac{\Gamma^2}{\mu r^2} \sin(j-1)f \, dr + \frac{\Gamma}{\mu} \cos(j-1)f \, d\dot{r} + \left(2 \sin(j-1)f \frac{\Gamma^2}{\mu r} + \cos(j-1)f \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \right) \frac{d\Gamma}{\Gamma} \right) \end{aligned}$$

und speziell für $j = 1$, $j = 2$ erhält man

$$\begin{aligned} d(e \cos f) &= -\frac{\Gamma^2}{\mu r^2} dr + 2 \frac{\Gamma^2}{\mu r} \frac{d\Gamma}{\Gamma}, \\ d(e \sin f) &= \frac{\Gamma}{\mu} d\dot{r} + \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \frac{d\Gamma}{\Gamma}, \\ d(e^2 \cos 2f) &= -2 \frac{\Gamma^2}{\mu r^2} e \cos f \, dr - 2 \frac{\Gamma}{\mu} e \sin f \, d\dot{r} + 2 \left(2e \cos f \frac{\Gamma^2}{\mu r} - e \sin f \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \right) \frac{d\Gamma}{\Gamma}, \\ d(e^2 \sin 2f) &= -2 \frac{\Gamma^2}{\mu r^2} e \sin f \, dr + 2 \frac{\Gamma}{\mu} e \cos f \, d\dot{r} + 2 \left(2e \sin f \frac{\Gamma^2}{\mu r} + e \cos f \frac{\Gamma \dot{r}}{\mu} \right) \frac{d\Gamma}{\Gamma}. \end{aligned}$$

Die Differentiale für $f - M$

Die Differentiale

$$d(f - M) = \left((1 - e^2) + \frac{\beta}{e} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^2 \right) \frac{\dot{r}}{\Gamma} dr + \left(2(1 - e^2)^{1/2} + \frac{\beta}{e} \frac{\Gamma^2}{\mu r} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right) \right) \frac{r}{\Gamma} d\dot{r} - \frac{\beta}{e} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} + 1 \right) \frac{\dot{r}}{\mu} d\Gamma$$

lassen sich mittels der Potenzreihe

$$\frac{\beta}{e} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6 + \frac{7}{128}e^8 + \frac{21}{512}e^{10} + \frac{33}{1024}e^{12} + \dots \right)$$

ausdrücken bzw. berechnen.

12.1.5.3 Eigenschaften der Poisson-Klammern

Die Berechnung der Ersatzterme (210), (213), (216) und (219) erfordert die Bildung von Poisson-Klammern (67); und zwar mehrfach geschachtelte. Dabei sind folgende Eigenschaften dieser Klammern nützlich (Schneider [60]): Sind u, v, w Funktionen der kanonischen Variablen q_i, p_j $i, j = 1, \dots, n$ im $2n$ -dimensionalen Phasenraum, so gilt für deren Poisson-Klammern

- | | |
|----------------------------------|--|
| a) Antisymmetrie | $\{u, v\} = -\{v, u\}, \quad \{u, u\} = 0,$ |
| b) Linearität | $\{c_1 u + c_2 v, w\} = c_1 \{u, w\} + c_2 \{v, w\},$
$\{u, c_1 v + c_2 w\} = c_1 \{u, v\} + c_2 \{u, w\},$ |
| c) Existenz eines Null-Elements | $\{u, c\} = 0 \quad \text{falls } c = \text{const.},$ |
| d) Produktregeln | $\{uv, w\} = u\{v, w\} + \{u, v\}w,$
$\{u, vw\} = v\{u, w\} + \{u, v\}w,$ |
| e) Jacobi-Identität | $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0,$ |
| f) Fundamentale Poisson-Klammern | $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$ |

Hinzu kommt die *Invarianz der Poisson-Klammern* gegenüber kanonischen Transformationen (Heil/Kitzka [16], Petry/Metsch [52]), speziell bei Lie-Transformationen. Das erlaubt es, die Bildung der Poisson-Klammern bezüglich eines beliebigen Satzes kanonischer Variablen auszuführen. In diesem Zusammenhang sind auch verschiedene Theoreme über die Poisson-Matrix von Bedeutung (Schneider [61]).

Endlich sei noch auf die in Abschnitt 5.2 genannten Eigenschaften der Erzeugenden, insbesondere deren Invarianz bei elementaren Lie-Transformationen hingewiesen.

12.1.6 Bisherige Ergebnisse

Von den aufgeführten vier Lie-Transformationen ist bislang die erste ausgeführt. Damit liegt ein verbessertes integrables Näherungssystem 0. Ordnung vor. Die Funktionsstruktur des ungestörten Anteils der nHF stimmt mit derjenigen der Hamilton-Funktion des Cui-Systems überein.

Mit der zweiten Lie-Transformation wird ein IAS 1. Ordnung erreicht werden, mit der dritten bzw. vierten Lie-Transformation ein IAS 3. bzw. 4. Ordnung, so dass eine Approximation des aktuellen Bewegungsproblems in 4. Ordnung erreicht wird. Die verbleibende periodische Störkomponente ist von 5. Ordnung.

Während nach der ersten Lie-Transformation die statische Abplattung in ihrer Auswirkung eliminiert ist bzw. in eine höhere Ordnung zurückgedrängt ist, werden durch die zweite/dritte/vierte Lie-Transformation nacheinander die zonalen und tesseralen/sektoriellen Harmonischen aus der Hamilton-Funktion eliminiert bzw. in höhere Ordnungen zurückgedrängt. In dem Ergebnis, dass der auf die statische Abplattung zurückzuführende Störanteil nicht vollständig eliminiert werden konnte, zeigt die Nichtintegrabilität des klassischen Hauptproblems an, die mit Hilfe des Ziglin'schen Theorems (Schneider/Cui [64]) bewiesen worden ist.

12.2 Alternative Entwicklungen einer hochgenauen Bahntheorie

12.2.1 Anwendung des Verfahrens der Elimination von Störkräften

Die im Abschnitt 11.3 geschilderten Verfahren zur Lösung der Volterra'schen Integralgleichungen und auch die Anwendung der Laplace-Transformation setzen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten als Bewegungsgleichungen voraus. Das ist beim Duffing-Oszillator gegeben, bei gestörten Keplerbahnen hingegen nicht, selbst wenn eine gestörte kreisnahe Satellitenbahn betrachtet wird. Hier wird man auf eine lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten geführt. Das sieht man unmittelbar ein, wenn man die Grundgleichung der Theorie der Koordinatenstörungen heranzieht (Schneider [61]). Die Untersuchung solcher Bewegungsgleichungen soll an anderer Stelle erfolgen.

12.2.1.1 Linearisation

Die im Abschnitt 11.3 geschilderten Verfahren zur Lösung von Volterra'schen Integralgleichungen und auch die Anwendung der Laplace-Transformation setzen die Linearität der Bewegungsgleichung voraus.

Beispiele linearer Bewegungsgleichungen sind die

- des Duffing-Oszillators,
- der Polbewegung (Schneider [63]),
- von kreisnahen Satellitenbahnen,
- von kreisnahen Planetenbahnen.

Die Einschränkung auf Kreisbahnnähe ist nicht zwingend, da sich durch *Linearisation* die Bewegungsgleichung auf die Gestalt einer linearen Differentialgleichung bringen lässt (Schneider [63]).³¹

Damit aber ist eine Fülle von Bewegungsproblemen nach den genannten Verfahren lösbar.

12.2.1.2 Volterra-Gleichung gestörter Bewegungen

Angenommen, die gestörte Bewegung lässt sich mittels einer Bewegungsgleichung der Form

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + B(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt} + A(t) \mathbf{r} = \mathbf{F}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (238)$$

beschreiben, worin $A(t)$ und $B(t)$ i. A. zeitabhängige Matrizen sein können.

³¹Durch eine projektive Aufspaltung des Ortsvektors

$$\mathbf{r} = r\mathbf{U}$$

lässt sich die Newton-Euler'sche Bewegungsgleichung eines Massepunktes

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{K} =: \mathbf{F}$$

zerlegen in ein System der zwei folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{r} = \frac{\mathbf{N}^2}{r^3} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \quad \frac{d^2}{df^2} + 1 \quad \mathbf{U} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F}^*) \mathbf{W}$$

mit $\mathbf{F}^* := r^3/C^2$ und dem Bahndrehimpuls $\mathbf{N} = C\mathbf{W}$, wobei $\mathbf{W}$ die Bahnnormale symbolisiert. Die zweite Differentialgleichung ist bereits eine im Richtungsvektor $\mathbf{U}$ lineare Differentialgleichung.

Eine Anfangswertaufgabe in der Form

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (239)$$

wird durch die Volterra-Gleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau); \tau)}{m} d\tau \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0(t - t_0)$$

formuliert, wie man durch zweifache Zeitableitung sehen kann.

Sonderfall 1

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) := A \mathbf{r} \quad \text{mit einer Matrix} \quad A = A_0 = \text{const.}$$

Dann resultiert die *lineare* Volterra-Gleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + A_0 \int_{t_0}^t K(t, \tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau.$$

Sonderfall 2

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) := B(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt} + A(t) \mathbf{r}.$$

Dann bestätigt man wiederum durch zweifache Zeitableitung, dass die Volterra-Gleichung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t) + \int_{t_0}^t K_G(t, \tau) \mathbf{r}(\tau) d\tau \quad (240)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &:= \mathbf{r}_0 + (\dot{\mathbf{r}}_0 + B(t_0) \mathbf{r}_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau, \\ K_G(t, \tau) &:= \left(\frac{dA(\tau)}{d\tau} - B(\tau) \right) (t - \tau) - A(t) \end{aligned} \quad (241)$$

nunmehr gleichwertig zu (238) ist.

Beispiel 1

Betrachtet sei neben der Bewegungsgleichung des aktuellen Bewegungsproblems (239) das Näherungsproblem

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^I}{dt^2} = \frac{1}{m} \mathbf{K}^I(\mathbf{r}^I, \dot{\mathbf{r}}^I; t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}^I = \mathbf{r}^I(t)$$

also

$$O(|\mathbf{K} - \mathbf{K}^I|) = \varepsilon \ll 1.$$

Entwickelt man die aktuelle Kraftfunktion um die genäherte Lösung in eine Taylorreihe, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) &\approx \mathbf{K}^I(\mathbf{r}^I, \dot{\mathbf{r}}^I; t) + \Delta \mathbf{r} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{K})_I + \Delta \dot{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \mathbf{K})_I + \dots \\ &= \mathbf{K}^I(\mathbf{r}^I, \dot{\mathbf{r}}^I; t) + A \Delta \mathbf{r} + B \Delta \dot{\mathbf{r}} + \dots \end{aligned}$$

mit

$$\Delta \mathbf{r} := \mathbf{r} - \mathbf{r}^I, \quad \Delta \dot{\mathbf{r}} := \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}^I, \quad A := (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{K})_I^T, \quad B := (\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \mathbf{K})_I^T$$

vorausgesetzt, es gilt für die Kraftfunktion, d. h., die Funktionsstrukturen stimmen überein:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}^I, \dot{\mathbf{r}}^I; t) \equiv \mathbf{K}^I(\mathbf{r}^I, \dot{\mathbf{r}}^I; t).$$

Beispiel 2

Die Gleichung (240) kann ersetzt werden durch

$$\Delta(t) = \mathbf{f}(t) + \int_{t_0}^t K_G(t, \tau) \Delta(\tau) d\tau$$

mit $K_G(t, \tau)$ wie in (241) und

$$\mathbf{f}(t) := \Delta_0 + (\dot{\Delta}_0 + B(t_0) \Delta_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t - \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau,$$

worin zu setzen ist, vgl. Abschnitt 2.2,

$$\begin{aligned} A(t) &:= -\left(\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{Z}(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h; t)\right)_h^T, \\ B(t) &:= -\left(\nabla_{\mathbf{r}} (\mathbf{G}_H(\mathbf{r}_h, t) + \mathbf{G}_R(\mathbf{r}_h, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h; t))\right)_h^T, \\ \mathbf{F}(t) &:= \mathbf{G}_R(\mathbf{r}_h, t) + \mathbf{Z}(\mathbf{r}_h, \dot{\mathbf{r}}_h; t). \end{aligned}$$

12.2.1.3 Linearisation der Volterra-Gleichung im Falle elliptischer Bahnen

Unter der Voraussetzung, dass nur konservative Störkräfte berücksichtigt werden, erhält man aus (238) als einen Spezialfall die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}} U_G(\mathbf{r}, t),$$

wobei $U_G(\mathbf{r}, t)$ ein orts- und zeitabhängiges Gravitationspotential symbolisiert.³² Unter Beschränkung auf den Zentralkörper Erde und nach Abspaltung des Kepler-Terms $U_{G,00}$ erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}} (U_{G,00}(\mathbf{r}) + T(\mathbf{r}, t)),$$

wobei $T(\mathbf{r}, t)$ als *Störpotential* bezeichnet wird.³³

Daraus folgt als Bewegungsgleichung für gestörte elliptische Kepler-Bahnen

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{GM_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r}, t). \quad (242)$$

Nach dem Abschnitt 12.2.1.2 ist die Formulierung (242) mit $A(t) := GM_{\oplus}/r^3(t)$ bei Anfangswertdeterminierung äquivalent der Volterra'schen Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + GM_{\oplus} \int_0^t (t - \tau) (-A(\tau) \mathbf{r} + \nabla_{\mathbf{r}} T) d\tau = \tilde{\mathbf{r}}(t) + GM_{\oplus} \int_0^t (t - \tau) (-A(\tau) \mathbf{r}) d\tau + GM_{\oplus} \int_0^t (t - \tau) (\nabla_{\mathbf{r}} T) d\tau \quad (243)$$

oder mit

$$B(t) := GM_{\oplus} \int_0^t (t - \tau) (\nabla_{\mathbf{r}} T) d\tau$$

äquivalent der Volterra'schen Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + GM_{\oplus} \int_0^t (t - \tau) (-A(\tau) \mathbf{r}) d\tau + B(t).$$

³² *Anmerkung:* da die Störungen in diesem Falle geschwindigkeitsunabhängig sind, entfallen alle Terme mit $\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}$

³³ Wird die Darstellung für das Gravitationspotential

$$U_G(\mathbf{r}, t) = G \iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{\xi}, t)}{l} dV$$

mit den Ortsvektoren zum Quellpunkt $\boldsymbol{\xi}$ bzw. Aufpunkt $\mathbf{r}$, dem Abstand l zwischen Quell- und Aufpunkt, der Dichte ρ und dem Volumen V in Polarkoordinaten entwickelt, so erhält man die übliche Darstellung

$$U_G(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l U_{G,lm}(r, \vartheta, \lambda) \quad \text{mit} \quad U_{G,lm}(r, \vartheta, \lambda) = GM_{\oplus} \frac{a_{\oplus}^l}{r^{l+1}} P_{lm}(\cos \vartheta) c_{lm} \cos m\lambda + s_{lm} \sin m\lambda.$$

Details zur Darstellung des Gravitationspotentials finden sich im Abschnitt 1.4. Mit $c_{00} \equiv 1$ und $c_{10} \equiv 0$ erhält man z. B.

$$U_{G,00} = GM_{\oplus} \cdot \frac{1}{r} \cdot 1 \cdot c_{00} = \frac{GM_{\oplus}}{r}, \quad U_{G,10} = \frac{GM_{\oplus}}{r} \frac{a_{\oplus}}{r} \cos \vartheta c_{10} = 0, \quad U_{G,20} = \frac{GM_{\oplus}}{r} \frac{a_{\oplus}^2}{r^2} \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} c_{20}.$$

Eine solche Linearisation der Volterra-Gleichung (243) ist auf verschiedene Weise möglich:

- Entwicklung des Vorfaktors von $\mathbf{r}$ in eine Fourierreihe $A(t) := \frac{GM_{\oplus}}{r^3} = GM_{\oplus} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \sin(\nu M)$,
- Neudefinition des Integralgleichungskerns $K(t, \tau) := A(t)(t - \tau)$ und Neuberechnung der iterierten Kerne bzw. der Resolvente, sofern zulässig,
- Linearisation mittels projektiver Zerlegung nach Deprit et. al. (Schneider [63], § 52.2).

12.2.1.4 Alternativen zu den quadratisch konvergenten Lösungsverfahren

Die Hamilton-Funktion des Hauptproblems soll aufgetrennt werden entsprechend

$$F = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\dot{r} + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X^{(0)}(G, H) - \Phi^{(0)}(G, H, e^2) + \tilde{T} + R_f^{(0)} + R_z^{(0)} - R_t}_{=: F_0} + \underbrace{\phantom{\frac{1}{2} \left(\dot{r} + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r^2} X^{(0)}(G, H) - \Phi^{(0)}(G, H, e^2) + \tilde{T} + R_f^{(0)} + R_z^{(0)} - R_t}}_{=: F_1}.$$

Durch den ersten Anteil wird das streng lösbares Cui-Problem definiert, das als ungestörtes Bewegungsproblem verwendet werde.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, t) := \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{Y}}, -\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{X}} \right)^T$$

also

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{Y}} \\ -\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{X}} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, t).$$

Durch den Anteil F_1 wird die Störung des Cui-Problems beschrieben, das gestörte Hamilton'sche System also durch

$$\dot{\mathbf{x}} \hat{=} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Y}} \\ -\left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{X}} \right) \end{pmatrix} \hat{=} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t).$$

Dieses Bewegungsproblem kann nach dem im Abschnitt 10.4 dargestellten Verfahren gelöst werden ausgehend von den Bestimmungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{X}}_{\nu} = \mathbf{X}_{\nu} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}_0 + \mathbf{F}_{\nu}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\nu-1}; \mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1; t) \quad \text{für} \quad \nu \geq 1$$

für die Koeffizientenfunktionen $\mathbf{X}_{\nu}(t)$ in der Lösungsfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{X}_{\nu}(t),$$

worin $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ das ungestörte Cui-Problem löse und $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ Integrationskonstanten bezeichnen.

Die Lösung der Bestimmungsgleichungen kann nach dem Propagator-Verfahren erfolgen (siehe Abschnitt 9.3.1).

Anmerkungen:

1. Der vorstehende Lösungsweg hat gegenüber den im Teil II angegebenen quadratisch konvergenten Lösungsverfahren nur den Konvergenzgrad 1. Er kann aber als deren Ersatz verwendet werden oder hybrid mit diesen, zumal dann, wenn sich die dort erforderliche Zerlegung der Ersatzfunktion von einem gewissen Transformationsschritt an nicht mehr durchführen lässt. Diese Möglichkeit der hybriden Verwendung bleibt näher zu untersuchen.
2. Der Lösungsweg ist verallgemeinerbar in dem Sinne, dass anstelle des Cui-Problems ein anderes, geeignetes Bewegungsproblem als ungestörtes herangezogen werden kann oder ein hinreichend genau lösbares. Das Kepler-Problem als ungestörtes ist natürlich eingeschlossen.

Für kanonische Integrationskonstanten $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ kann man Variationsgleichungen der Gestalt (129) aufschreiben und diese nach dem Eliminationsverfahren lösen. Das ergäbe dann eine Alternative zum klassischen Poisson-Verfahren (siehe Abschnitt 5.1.1).

12.2.1.5 Lösung der Volterra-Gleichung nach dem Poisson-Verfahren

Die Volterra-Gleichung zur Newton'schen Bewegungsgleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) - \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau); \tau) d\tau,$$

die eine halb-explicite Lösungsdarstellung vermittelt, soll für den Fall

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau) := -\mathbf{K}(\mathbf{r}, \tau) = m(\mathbf{f}^0(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{f}^1(\mathbf{r}, t)) =: m\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$$

gelöst werden.

Als Lösungsansatz sei gewählt

$$\mathbf{r}(t) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}(t)$$

mit $\mathbf{r}_0(t)$ als bekannter Lösung des ungestörten Bewegungsproblems

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{f}^0(\mathbf{r}_0).$$

Eintragen des Lösungsansatzes in die Integralgleichung ergibt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^t (t-\tau) \mathbf{f}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}(\tau), \tau\right) d\tau.$$

Zu bestimmen sind die Koeffizientenfunktionen $\mathbf{r}_{\nu}(t)$ im Lösungsansatz. Dazu werden zunächst die Funktionen

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{f}^n\left(\mathbf{r}_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}(t)\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} D_{\sigma} \mathbf{f}^n(\mathbf{r}, t)_{\mathbf{r}_0(t)}$$

mit dem in iterierender Weise σ -mal auf die Funktionen anzuwendenden Differentialoperator

$$D_{\sigma} := \left(\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}(t) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right)^{(\sigma)}$$

in Taylorreihen entwickelt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathbf{r}_{\nu}(t) &= \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^t (t-\tau) \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} D_{\sigma} (\mathbf{f}^0(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{f}^1(\mathbf{r}, \tau))_{\mathbf{r}_0(t)} d\tau \\ &= \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^t (t-\tau) \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} (D_{\sigma} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(t)} d\tau + \varepsilon \int_{t_0}^t (t-\tau) \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} (D_{\sigma} \mathbf{f}^1(\mathbf{r}, \tau))_{\mathbf{r}_0(t)} d\tau. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen im Kleinheitsparameter ε ergibt:

in 0.ter Ordnung

$$\mathbf{r}_0(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^t (t-\tau) \mathbf{f}^0(\mathbf{r}_0(\tau)) d\tau \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t),$$

in 1.ter Ordnung

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_1(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} + \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau)_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_1(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau + \mathbf{r}_1^R(t), \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{r}_1^R(t) = \int_{t_0}^t (t-\tau) \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} d\tau \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_1(t) \text{ und } \mathbf{r}_1^R(t),$$

in 2.ter Ordnung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2(t) &= \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_2(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^0(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} + (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau)_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_2(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau + \mathbf{r}_2^R(t),\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{r}_2^R(t) = \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\frac{1}{2} (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^0(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} + (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau)_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_2(t) \text{ und } \mathbf{r}_2^R(t)$$

usw.

Damit ergibt sich die Lösung der Volterra-Gleichung in zweiter Ordnung zu

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \varepsilon (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_1^R(t)) + \varepsilon^2 (\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_2^R(t)) + O(\varepsilon^3).$$

Beispiel: Klassisches Hauptproblem

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{r}) := -\frac{GM_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r}, \quad \varepsilon \mathbf{f}^1(\mathbf{r}) := \nabla_{\mathbf{r}} U_{G,20} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = C_{20}.$$

Eine kreisförmige Polbahn in der (y, z) -Ebene wird dargestellt durch

$$\mathbf{r}_0(t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos nt \\ \sin nt \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad n := \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a^3}}.$$

Aufgabe: Lösung der Volterra-Gleichungen für $\mathbf{r}_{1,2}(t)$

1. Ordnung

$$\mathbf{r}_1(t) = \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_1(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau + \mathbf{r}_1^R(t),$$

und 2. Ordnung

$$\mathbf{r}_2(t) = \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_2(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau + \mathbf{r}_2^R(t).$$

Hier sei nur der Sonderfall der kreisnahen Bahnen betrachtet.

Wegen

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_0(t)} = -\frac{GM_{\oplus}}{a^3} \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{r} = -n^2 \mathbf{E} \quad \text{für Kreisbahn}$$

folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1,2}(t) &= \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_{1,2}(\tau) \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau + \mathbf{r}_{1,2}^R(t) \\ &= -n^2 \int_{t_0}^t (t-\tau) \left(\mathbf{r}_{1,2}(\tau) \cdot [\mathbf{E}]_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau + \mathbf{r}_{1,2}^R(t) \\ &= -n^2 \int_{t_0}^t (t-\tau) \mathbf{r}_{1,2}(\tau) d\tau + \mathbf{r}_{1,2}^R(t).\end{aligned}$$

Beide Integralgleichungen können mittels Laplace-Transformation (siehe Abschnitt 11.3.3) oder mittels der Neumann'schen Reihe (siehe Abschnitt 11.3.4) gelöst werden. Im letzteren Fall ist

$$\mathbf{r}_{1,2}(t) = \mathbf{r}_{1,2}^R(t) - n^2 \int_{t_0}^t R(t, \tau, \lambda = -n^2) \mathbf{r}_{1,2}^R(\tau) d\tau$$

mit der *Resolventen*

$$R(t, \tau, \lambda = -n^2) = \sin(t - \tau).$$

Nach Berechnung der unbestimmten Integrale $\mathbf{r}_{1,2}^R(t)$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1^R(t) &= \int_{t_0}^t (t - \tau) \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} d\tau, \\ \mathbf{r}_2^R(t) &= \int_{t_0}^t (t - \tau) \left(\frac{1}{2} (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^0(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} + (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau)_{\mathbf{r}_0(\tau)} \right) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t (t - \tau) (\mathbf{r}_1(\tau) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{f}^1(\mathbf{r}(\tau), \tau)_{\mathbf{r}_0(\tau)} d\tau,\end{aligned}$$

die geschlossen ausführbar ist, erhält man die Lösung in 2. Ordnung zu

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \varepsilon (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_1^R(t)) + \varepsilon^2 (\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_2^R(t)) + O(\varepsilon^3) = \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i \left(\int_{t_0}^t \sin(t - \tau) (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}^i) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} d\tau + \mathbf{r}_i^R(t) \right) + O(\varepsilon^3)$$

mit

$$(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}^i) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} := (\mathbf{r}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{f}^0(\mathbf{r})) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} = -\frac{GM_{\oplus}}{a^3} (\mathbf{r}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} = -n^2 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}) \Big|_{\mathbf{r}_0(\tau)} = -n^2 \mathbf{r}_i(\tau)$$

also

$$\mathbf{r}(t) = -n^2 \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i \left(\int_{t_0}^t \sin(t - \tau) \mathbf{r}_i(\tau) d\tau + \mathbf{r}_i^R(t) \right) + O(\varepsilon^3).$$

Anmerkungen:

1. Höhere Ordnungen lassen sich analog ermitteln.
2. Um das mögliche Auftreten von Poisson-Termen zu unterdrücken, kann die renormierte unabhängige Variable s eingeführt werden. Das soll hier nicht ausgeführt werden.
3. Auf diesem Weg sollten bei kreisnahen Satellitenbahnen höhere Ordnungen erreichbar sein, wie erste Versuche zeigen.

12.3 Offene Fragen und Qualitätsbeurteilung der Lösungen

12.3.1 Resonanzen

12.3.1.1 Fragestellung

Am Beispiel der Bahntheorie 1. Ordnung von Kaula soll die Fragestellung aufgezeigt werden.

Die Lösung der Variationsgleichungen für die Kepler'schen Bahnelemente ergibt nach dem Poisson-Verfahren in 1. Ordnung für die periodische Störungen der *Lageelemente*

$$\begin{aligned}(\Delta i^{(1)})_{lmpq} &= \mu a_{\oplus}^l \frac{1}{na^{l+3} \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial F_{lmp}}{\partial i} G_{lpq} \frac{S_{lmpq}}{\dot{\phi}_{lmpq}}, \\ (\Delta \Omega^{(1)})_{lmpq} &= \mu a_{\oplus}^l \frac{(l-2p) \cos i - m}{na^{l+3} \sqrt{1-e^2} \sin i} F_{lmp} G_{lpq} \frac{\tilde{S}_{lmpq}}{\dot{\phi}_{lmpq}}, \\ (\Delta \omega^{(1)})_{lmpq} &= \mu a_{\oplus}^l \frac{1}{na^{l+3}} \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{lmp} \frac{\partial G_{lpq}}{\partial e} - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial F_{lmp}}{\partial i} G_{lpq} \right] \frac{\tilde{S}_{lmpq}}{\dot{\phi}_{lmpq}}\end{aligned}$$

und für die periodische Störungen der *phoronomischen Elemente*

$$\begin{aligned}(\Delta a^{(1)})_{lmpq} &= \mu a_{\oplus}^l \frac{2(l-2p+q)}{na^{l+2}} F_{lmp} G_{lpq} \frac{S_{lmpq}}{\dot{\phi}_{lmpq}}, \\ (\Delta e^{(1)})_{lmpq} &= \mu a_{\oplus}^l \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^{l+3} e} \left[\sqrt{1-e^2} (l-2p+q) - (l-2p) \right] F_{lmp} G_{lpq} \frac{S_{lmpq}}{\dot{\phi}_{lmpq}}, \\ (\Delta M^{(1)})_{lmpq} &= \mu a_{\oplus}^l \frac{1}{na^{l+3}} \left[-\frac{1-e^2}{e} \frac{\partial G_{lpq}}{\partial e} + 2(l+1) G_{lpq} \right] F_{lmp} \frac{\tilde{S}_{lmpq}}{\dot{\phi}_{lmpq}}.\end{aligned}$$

Es bedeuten

$$S_{lmq} := \begin{bmatrix} -C_{lm} \\ S_{lm} \end{bmatrix} S(t) + \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{bmatrix} C(t) \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} S(t) \\ C(t) \end{pmatrix} := \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} ((l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \Theta))$$

und

$$\tilde{S}_{lmq} := \int S_{lmq}(\phi_{lmq}) d\phi_{lmq}$$

mit

$$\phi_{lmq} := ((l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \Theta)) \Rightarrow \dot{\phi}_{lmq} = ((l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Theta})).$$

Die periodischen Störungen $(\Delta\varepsilon^{(1)})_{lmq}$ mit $\varepsilon \in \{i, \Omega, \omega, a, e, M\}$ fallen besonders groß aus, wenn der Nenner

$$\dot{\phi}_{lmq} \approx 0.$$

Es kommt zu einer resonanzartigen Überhöhung der Amplituden. Mit

$$A_{lm}^2 := C_{lm}^2 + S_{lm}^2, \quad \Phi_{lm} := \arctan \frac{S_{lm}}{C_{lm}} + \begin{cases} 0 & (l-m) \text{ gerade} \\ \frac{\pi}{2} & (l-m) \text{ ungerade} \end{cases}$$

lässt sich der den Zeitverlauf der periodischen Störungen beschreibende Faktor in der folgenden Gestalt angeben:

$$\frac{S_{lmq}}{\dot{\phi}_{lmq}} = A_{lm} \frac{\cos(\dot{\phi}_{lmq} t - \Phi_{lm})}{\dot{\phi}_{lmq}}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die periodischen Anteile an der Gesamtstörung *Periodenlängen*

$$\begin{aligned} P_{lmq} = \frac{2\pi}{|\dot{\phi}_{lmq}|} &= \frac{2\pi}{|(l-2p)\dot{\omega}_{sec} + (l-2p+q)\bar{n} + m(\dot{\Omega}_{sec} - \dot{\Theta}_0)|} \\ &= \frac{2\pi}{\dot{\Theta}_0} \frac{1}{\left| (l-2p)\frac{\dot{\omega}_{sec}}{\dot{\Theta}_0} + (l-2p+q)\frac{\bar{n}}{\dot{\Theta}_0} + m\left(\frac{\dot{\Omega}_{sec}}{\dot{\Theta}_0} - 1\right) \right|} \end{aligned}$$

aufweisen. Darin bedeutet $\bar{n}/\dot{\Theta}_0 =: s$ die Anzahl der (*anomalistischen*) Umläufe des Satelliten je Sterntag. Die Amplituden dieser periodischen Anteile sind bestimmt einerseits durch

$$\frac{A_{lmq}}{\dot{\phi}_{lmq}} = \frac{\sqrt{C_{lm}^2 + S_{lm}^2}}{\dot{\phi}_{lmq}}$$

und andererseits durch die Vorfaktoren in obigen Darstellungen. Letztere enthalten die Exzentrizitätsfunktionen bzw. deren Ableitungen. Für die Größenordnung der Exzentrizitätsfunktionen gilt

$$G_{lpq}(e) \sim e^{|q|},$$

so dass sie betragsmäßig für kleine q am größten sind.

Da im Falle der Erdsatelliten

$$|\dot{\omega}_{sec}|, |\dot{\Omega}_{sec}| \ll \dot{\Theta}_0$$

gilt, wobei die säkularen Änderungsraten $\dot{\omega}_{sec}$ und $\dot{\Omega}_{sec}$ von Apsiden- und Knotenlinie in der hier betrachteten 1. Ordnung konstant sind (Schneider [63]), läuft $\dot{\phi}_{lmq} \approx 0$ auf die Bedingung

$$(l-2p+q)\bar{n} \approx m\dot{\Theta}_0 \rightarrow s = \frac{\bar{n}}{\dot{\Theta}_0} = \frac{m}{l-2p+q}$$

hinaus, d. h., auf eine genäherte/strenge Kommensurabilität von mittlerer Bewegung $\bar{n}$ des Satelliten und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}_0$ der Erddrehung.

12.3.1.2 Entstehen der Resonanzen in der Kaula-Theorie und deren Beseitigung

Die Lösungsdarstellung für die periodischen Anteile wird unbrauchbar, wenn $\dot{\phi}_{lmpq} \approx 0$. Es liegt dann eine *Singularität* vor. Es soll untersucht werden, ob man diese evtl. durch eine andere Variablenwahl beheben kann. Dazu soll das Zustandekommen der verschwindenden Nenner in der Darstellung der periodischen Anteile genauer betrachtet werden.

Bei der Herleitung der periodischen Anteile werden die Integrale

$$\int_0^t \sin(A + Bt') dt' = \begin{cases} t \sin A & \text{für } B = 0 \\ -\frac{1}{B} \cos(A + Bt) & \text{für } B \neq 0 \end{cases},$$

$$\int_0^t \cos(A + Bt') dt' = \begin{cases} t \cos A & \text{für } B = 0 \\ \frac{1}{B} \sin(A + Bt) & \text{für } B \neq 0 \end{cases}$$

ausgewertet (Schneider [63]), wobei $A := \phi_{lmpq}$ und $B := (l - 2p + q)n - m\dot{\Theta}_0$ symbolisieren.

Ersetzt man im Rahmen einer *Renormierung* die Zeit t als Integrationsvariable durch die Variable s gemäß

$$t =: Bs \quad (244)$$

und wählt B entsprechend

$$B := \dot{\phi}_{lmpq_{sec}} = (l - 2p)\dot{\omega}_{sec} + (l - 2p + q)\bar{n} + m(\dot{\Omega}_{sec} - \dot{\Theta}_0)$$

so ergeben sich die Integrale zu

$$\int_0^t \sin(A + B^2 s') d(Bs') = \begin{cases} 0 & \text{für } B = 0 \text{ (säkulare Störungen)} \\ -\frac{1}{B} \cos(A + B^2 s) & \text{für } B \neq 0 \text{ (periodische Störungen)} \end{cases},$$

$$\int_0^t \cos(A + B^2 s') d(Bs') = \begin{cases} 0 & \text{für } B = 0 \text{ (säkulare Störungen)} \\ \frac{1}{B} \sin(A + B^2 s) & \text{für } B \neq 0 \text{ (periodische Störungen)} \end{cases}.$$

Der jeweils erste Fall ($B = 0$) bedeutet gerade die *Resonanzbedingung* in einer Theorie 1. Ordnung.³⁴

Mit anderen Worten: Nimmt man einen Wechsel der unabhängigen Variablen gemäß (244) vor, so entfallen die Terme mit den verschwindenden Nennern. Die Resonanzterme sind damit aus der Lösungsdarstellung beseitigt. Dieses Vorgehen erinnert an die *Poincaré-Lindstedt-Renormierung*, die das Auftreten von physikalisch unsinnigen Poisson-Termen in der Lösungsdarstellung bei Schwingungssystemen verhindert (siehe Abschnitt 11). Eine ähnliche Situation liegt auch im Fall der Satellitenbewegung vor. Bei der Herleitung der *säkularen* Anteile an der Gesamtstörung findet man als Bedingung (Schneider [63])

$$(l - 2p + q)n - m\dot{\Theta}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N := \frac{n}{\dot{\Theta}_0} = \frac{m}{l - 2p + q}$$

also eine *strenge Kommensurabilität* von mittlerer Bewegung des Satelliten und Drehbewegung des Zentralkörpers. Diese Bedingung gleicht der *Resonanzbedingung* bei den periodischen Störungen. Dies führt bei Integration über die Zeit t zu Poisson-Termen $t \sin A$ bzw. $t \cos A$, die durch die Renormierung vermieden werden.

12.3.2 Möglichkeiten der Qualitätsbeurteilung der analytischen Lösungen

Möglichkeiten, um die Qualität der „Lösung“ eines Bewegungsproblems zu bewerten, können sein:

1. Einsetzen der „Lösung“ in die Bewegungsgleichung,
2. Vergleich der „Lösung“ mit einer numerisch ermittelten,
3. Abschätzung auf Grund des verwendeten Lösungsverfahrens,
4. Anwendung der Abschätzungstheoreme (siehe Abschnitt 5.4),
5. Überprüfung der „Lösung“ über damit gerechnete testbare Funktionale.

³⁴Anmerkung: Die Bedingung $B = 0$ stellt einen integrablen differentiellen Zwang dar. Dieser führt zu einem geometrischen Zwang $A = \text{const.}$ Dadurch wird eine der drei Größen ω , M , Ω ihre Unabhängigkeit verlieren und sich das Gleichungssystem auf ein System 5. Ordnung reduzieren. Untersuchungen darüber sind aus der Literatur nicht bekannt.

ad 1.

Setzt man beispielsweise die gefundene „Lösung“ der Newton-Euler'schen Bewegungsgleichung ein, so kann man eine Kräftefunktion $\mathbf{K}_N$ ermitteln und diese mit der ursprünglich angenommenen $\mathbf{K}$ vergleichen:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \Rightarrow \mathbf{r}_N(t) \rightarrow m \ddot{\mathbf{r}}_N(t) = \mathbf{K}_N \rightarrow \Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) - \mathbf{K}_N \begin{cases} \neq \mathbf{0} ? \Rightarrow O(\Delta \mathbf{K}) ? \\ = \mathbf{0} ? \end{cases}.$$

ad 2.

Der Vergleich mit einer numerisch bestimmten Lösung $\mathbf{r}_{\text{num}}(t_i)$ $i = 1, 2, \dots, M$ gelingt nur über endlich viele diskret liegende Zeitpunkte:

$$\Delta \mathbf{r} := \mathbf{r}_N(t_i) - \mathbf{r}_{\text{num}}(t_i) \begin{cases} \neq \mathbf{0} \\ = \mathbf{0} \end{cases}.$$

Der erstere Fall $\Delta \mathbf{r}(t_i) \neq \mathbf{0}$ wird die Regel sein. Für die Bewertung der gefundenen Lösung ist von Bedeutung

- der Fehlerhaushalt des numerischen Verfahrens,
- Welches *Ersatzproblem* wird durch das numerische Verfahren gelöst ? (Schneider [61])

ad 3.

Die Lösungsverfahren werden in der Anwendung sämtlich bis zu einer gewissen Ordnung des Kleinheitsparameters ε eingesetzt. Damit ist eine entsprechende Genauigkeit der Lösung $\mathbf{r}_N(t)$ erreichbar.

ad 4.

Im Abschnitt 5.4 wurden verschiedene *Abschätzungstheoreme* angegeben. Sie ermöglichen, die Qualität der gefundenen Lösung $\mathbf{r}_N(t)$ abzuschätzen. Damit gelingen auch Aussagen über das Stabilitätsverhalten der Lösung.

ad 5.

Theorien der Bewegung müssen sich empirisch bewähren. Ist eine für ausreichend genau eingestufte Bahntheorie gefunden, so kann sie über testbare Funktionale A geprüft werden, denen Beobachtungen bzw. Messungen O gegenübergestellt werden. Dabei werden sich aus verschiedenen Gründen *Widersprüche*

$$O_i - A_i \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

ergeben. Diese können herrühren von unzureichend bekannten Werten der in die Lösung $\mathbf{r}_N(t)$ eingehenden Parameter der Kräftefunktion $\mathbf{K}_N(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$, aber auch ungenügender Integrationskonstanten α_k . Hinzu kommen Parameter aus der Berechnung der testbaren Funktionale wie Transformationselemente, Daten der Beobachtungs- bzw. Meßstandorte, Parameter aus der zeitlichen Einordnung der Observablen, d. h., Uhrenparameter.

Die Widersprüche versucht man durch Korrekturen $\Delta \mathbf{P}$ der genannten Modellparameter sowie über eine Arbeitshypothese über das Fehlverhalten der Observablen zu beseitigen.

Dazu wird eine linearisierte Beobachtungsgleichung formuliert und für jeden Beobachtungs- bzw. Meßzeitpunkt τ^* aufgeschrieben und das entstehende Gleichungssystem nach den Parameterkorrekturen $\Delta \mathbf{P}$ aufgelöst.

Im Sinne der differentiellen Korrektur der Modellparameter erfolgt die Widerspruchsbeseitigung ausgehend von der Forderung

$$O + \Delta O - (A(\mathbf{P}^0, \tau^*) + \Delta A) = 0.$$

Nach Taylor-Reihenentwicklung des testbaren Funktionals um die *a priori*-Werte $\mathbf{P}^0$ der Parameter

$$A(\mathbf{P}^0 + \Delta \mathbf{P}, \tau^* + \Delta \tau) = A(\mathbf{P}^0, \tau^*) + \underbrace{\Delta \tau \frac{\partial A}{\partial \tau} \bigg|_{\mathbf{P}^0, \tau^*} + \Delta \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{P}} A \bigg|_{\mathbf{P}^0, \tau^*}}_{\approx \Delta A} + \dots$$

erhält man als *linearisierte Beobachtungsgleichung*

$$\Delta \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{P}} A \bigg|_{\mathbf{P}^0, \tau^*} + \Delta \tau \frac{\partial A}{\partial \tau} \bigg|_{\mathbf{P}^0, \tau^*} \approx O + \Delta O - A(\mathbf{P}^0, \tau^*).$$

Um die Gesamtheit der anfallenden Beobachtungsgleichungen nach den Parameterkorrekturen $\Delta \mathbf{P}$ auflösen zu können, werden Arbeitshypothesen über die Epochenkorrekturen $\Delta \tau$ und über die Verbesserungen ΔO an den Meß- und Beobachtungsdaten benötigt.

Diese Arbeitshypothesen müssen in quantitativer Form zum Ausdruck bringen, wie

- das jeweilige Meß- bzw. Beobachtungsverfahren,
- die zugehörige Aufbereitung der rohen Daten O^* ,
- das Uhrenverhalten,

hinsichtlich systematischer und/oder stochastischer Fehler bewertet bzw. eingeschätzt wird und

- ob das Systemmodell und die Zuordnungsvorschriften $A(\dots)$ als qualitativ vollständig angesehen werden.³⁵

Die Epochen bräuchte man dann nicht auf die den Messdaten O korrespondierenden theoretischen Epochen τ zu korrigieren, wenn man in der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{a}}{d\tau^2} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}; \tau) = \mathbf{0} \quad \mathbf{a} \text{ bahnbeschreibende Variablen} \quad (245)$$

von τ auf τ^* als unabhängige Variable überwechseln könnte. Da man aber $\Delta\tau(\tau)$ a priori nicht kennt, kann die entsprechende Kraftkomponente in der Bewegungsgleichung nicht angegeben werden (Schneider [59]).

In der linearisierten Beobachtungsgleichung werden die partiellen Ableitungen des testbaren Funktionals $\partial A / \partial P_i$ als Funktionen der Zeit benötigt. Sie können neben der Lösung von (245) mit Hilfe der Lösungen der *Variationsgleichungen 2. Ordnung*

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial P_i} \right) = \begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial F_i} \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{f} - \frac{\partial \dot{\mathbf{a}}}{\partial F_i} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{a}}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial F_i} & P_i = F_i \quad \text{Feldparameter} \\ -\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha_i} \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{f} - \frac{\partial \dot{\mathbf{a}}}{\partial \alpha_i} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{a}}} \mathbf{f} & P_i = \alpha_i \quad \text{Integrationskonstanten} \end{cases}$$

bestimmt werden. Man erhält die partiellen Ableitungen $\partial \mathbf{a} / \partial P_i$ und $\partial \dot{\mathbf{a}} / \partial P_i$. Diese werden ihrerseits wieder benötigt in den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial P_i} \cdot \nabla_{\mathbf{a}} A + \frac{\partial \dot{\mathbf{a}}}{\partial P_i} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{a}}} A & P_i \in \{\alpha_1, \dots, F_1, \dots\} \\ \frac{\partial A}{\partial Q_i} & P_i \in \{Q_1, \dots\} \end{cases}.$$

Beachtet man die Abhängigkeit des testbaren Funktionals von den einzelnen Parametergruppen

$$\mathbf{P} = \{ \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_6}_{\text{Integrationskonstanten}} ; \underbrace{F_1, \dots}_{\text{Feld- und Wechselwirkungsparameter}} ; \underbrace{Q_1, \dots}_{\text{Meßstandpunkte}} \},$$

so gilt

$$A = A(\mathbf{a}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}; \tau), \dot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}; \tau), \mathbf{Q}; \tau).$$

Die partiellen Ableitungen $\nabla_{\mathbf{a}} A$, $\nabla_{\dot{\mathbf{a}}} A$ und $\partial A / \partial Q_i$ ergeben sich unmittelbar aus dem vorliegenden Funktional $A(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}; \tau)$.³⁶ Festgehalten sei im Hinblick auf ihre Lösung, daß die Variationsgleichungen *lineare* gewöhnliche Differentialgleichungen sind.

³⁵siehe Schneider [59]

³⁶Wird das Bewegungsproblem durch Gleichungen der Form $d\mathbf{y}/dx = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ beschrieben, so können für ein testbares Funktional $A = A(x, \mathbf{y}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}, x), \mathbf{Q})$ analog *Variationsgleichungen 1. Ordnung* hergeleitet werden (Schneider [59]).

Zusammenfassung und Ausblick

Nach einer Zerlegung des Gesamtproblems in ein verallgemeinertes Hauptproblem und einen Restanteil wurden quadratisch konvergente Lösungsverfahren zur Lösung des Hauptproblems vorgestellt und weiter ein Verfahren zur Berücksichtigung des Restanteils bzw. dessen Elimination aus einer gegebenen Lösung des Gesamtproblems.

Um die Verfahren zu testen, wurden sie auf den Duffing-Oszillator angewendet. Nachdem das erfolgreich verlaufen war, wurde das modifizierte Cui-Verfahren auf das verallgemeinerte Hauptproblem Satellitenbahnthorie angewendet. Entsprechend einem schon früher entwickelten Konzept wurde das bis zur dritten Ordnung im Einzelnen ausgeführt. Die erzielten Ergebnisse lassen es zu, eine Ephemeridenrechnung für das verallgemeinerte Hauptproblem mit einem Genauigkeitsgrad durchzuführen, der der vierten Potenz des gewählten Kleinheitsparameters (statische Abplattung der Erde) entspricht. Ausgeschlossen werden die Bahnkonfigurationen der kritischen Bahnneigung und kommensurabler Bewegungen.

Für den in den Anwendungen häufigen Sonderfall kreisnaher Satellitenbahnen wurde ein detailliertes Konzept für die Anwendung des Verfahrens der Mitführung/Elimination eines Störanteils ausgearbeitet, das an anderer Stelle ausgeführt werden soll. Zur Beseitigung von Resonanzen bei kommensurablen Bahnen wurde eine Renormierung der Zeitvariablen angegeben. Weiter wurde das auf der Lösung der der Bewegungsgleichung korrespondierenden Volterra'schen Integralgleichung basierende Verfahren auf elliptische Bahnen verallgemeinert.

Die geschilderten Verfahren können auf eine Reihe anderer himmelsmechanisch interessierender Bewegungsprobleme angewendet werden, beispielsweise auf die Planeten/Planetoiden-Bewegung oder auf die Mondbewegung wie auch auf die Drehbewegung von Himmelskörpern. Vorarbeiten hierfür, insbesondere die Konstruktion integrierbarer Näherungssysteme 0. Ordnung im modifizierten Cui-Verfahren wurden bereits in der Studie Schneider/Cui [64] geleistet.

Aufbauend auf der vorliegenden Studie können folgende Fragen angegangen werden:

1. Ausarbeitung eines Programmsystems für die Ephemeridenrechnung von Satelliten sowie die zeitliche Entwicklung testbarer Funktionale der Satellitenbewegung und ferner für die Lösung der Variationsgleichungen im Rahmen der differentiellen Korrektur von Modellparametern,
2. Ausarbeitung einer Bahntheorie für kreisnahe Satellitenbahnen, wie sie in neueren Satellitenmissionen zur Gravitationsfeldbestimmung vorliegen, und Erweiterung auf gestörte elliptische Satellitenbahnen,
3. Übertragung der Methodik in die Planeten- und Mondtheorie sowie die Theorie der Rotation von Himmelskörpern,
4. Erhöhung des Näherungsgrades der Satellitenbahnthorie im Hinblick auf die Gravitationsfeldbestimmung, etwa die Entwicklung einer Bahntheorie 4. bis 6. Ordnung,
5. Untersuchung des Henon-Heiles-Problems,
6. Beseitigung von Resonanzen durch Renormierung der unabhängigen Variablen,
7. Anwendungen des modifizierten Kamel-Deprit-Verfahrens und Vergleich mit derjenigen nach dem modifizierten Cui-Verfahren,
8. Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Lösungen im Hinblick auf das Langzeitverhalten der Lösungen

Literaturverzeichnis

- [1] R. Bellman: *Methoden der Störungsrechnung in Mathematik, Physik und Technik*, Oldenbourg Verlag, München (1967)
- [2] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (1995)
- [3] D. Brouwer und G.M. Clemence: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York (1961)
- [4] J.R. Cary: *Lie Transforms and Their Use in Hamiltonian Perturbation Theory*, Lawrence Berkeley Laboratory Report 6350, Ph. D. Thesis, University of California Berkeley, California (1979)
- [5] C. Cui: *Die Bewegung künstlicher Satelliten im anisotropen Gravitationsfeld einer gleichmäßig rotierenden starren Modellerde*, DGK, Reihe C, Heft Nr. 357, München (1990)
- [6] C. Cui: *Satellite Orbit Integration based on Canonical Transformations with Special Regard to the Resonance and Coupling Effects*, DGK, Reihe A, Heft Nr. 112, München (1997)
- [7] M. Ettl: in Vorbereitung
- [8] B. Garfinkel: *On the Ideal Resonance Problem*, Celestial Mechanics, Vol. 2 (1970)
- [9] B. Garfinkel: *The Global Solution of the Problem of the Critical Inclination*, Celestial Mechanics, Vol. 7 (1973)
- [10] B. Garfinkel: *Theory of Trojan Asteroids*, Astronomical Journal, Vol. 82, No. 5 (1977)
- [11] B. Garfinkel: *On Resonance in Celestial Mechanics (A Survey)*, Celestial Mechanics, Vol. 28 (1982)
- [12] G.E.O. Giacaglia: *Perturbation Methods in Non-Linear Systems*, Springer Verlag, Reihe Applied Mathematical Sciences, Vol. 8 (1972)
- [13] I.S. Gradshteyn und I.M. Ryshik: *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York (1965)
- [14] Y. Hagihara: *Celestial Mechanics, Vol. III, Part 1 - Differential Equations in Celestial Mechanics*, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo (1974)
- [15] L.M. Healy: *The Main Problem in Satellite Theory Revised*, Celestial Mechanics, Vol. 76, No. 2 (2000)
- [16] M. Heil und F. Kitzka: *Grundkurs Theoretische Mechanik*, Teubner Verlag, Stuttgart (1984)
- [17] W. Heinrich und K. Hennig: *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme*, Vieweg Verlag und Akademie Verlag, Berlin (1978)
- [18] M. Hiller: *Mechanische Systeme - Eine Einführung in die analytische Mechanik und Systemdynamik*, Springer Verlag, Berlin (1983)
- [19] R.A. Howland: *Computer Implementation of an Algorithm for the Quadratic Analytical Solution of Hamiltonian Systems*, Celestial Mechanics, Vol. 26, No. 1 (1982)
- [20] R.A. Howland und D.L. Richardson: *The Hamiltonian Transformation in Quadratic Lie-Transforms*, Celestial Mechanics, Vol. 32, No. 2 (1984)
- [21] M. Irigoyen und C. Simo: *Non-Integrability of the J2-Problem*, Celestial Mechanics, Vol. 55, No. 3 (1993)
- [22] A.A. Kamel: *Expansion Formulae in Canonical Transformations depending on a Small Parameter*, Celestial Mechanics, Vol. 1, No. 2 (1969)

- [23] A.A. Kamel: *Perturbation Method in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Celestial Mechanics, Vol. 3, No. 1 (1970)
- [24] R.P. Kanwal: *Linear Integral Equations - Theory and Technique*, Academic Press, New York (1971)
- [25] W.M. Kaula: *Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites*, Geophysical Journal, Vol. 5 (1961)
- [26] W.M. Kaula: *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts (1966)
- [27] J. Kevorkian und J.D. Cole: *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Applied Mathematical Sciences 34, Springer Verlag, Berlin (1968)
- [28] D. King-Hele: *Satellite Orbits in an Atmosphere: Theory and Applications*, Blackie and Son Ltd., Glasgow and London (1987)
- [29] U. Kirchgraber: *Error bounds for Perturbation Methods*, Celestial Mechanics, Vol. 14, No. 3 (1976)
- [30] U. Kirchgraber und E. Stiefel: *Methoden der analytischen Störungsrechnung und ihre Anwendungen*, Teubner Verlag, Stuttgart (1978)
- [31] H. Kleinert: *Pfadintegrale*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim (1993)
- [32] A.N. Kolmogorov: *On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Dokl. Akad. Nauk SSR 98, No. 4 (1954)
- [33] S.M. Kudryavtsev: *The fifth-order analytical solution of the equations of motion of a Satellite in orbit around a non-spherical planet*, Celestial Mechanics, Vol. 61 (1995)
- [34] F. Kuypers: *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH, Berlin (2005)
- [35] M. Lagally und W. Franz: *Vorlesungen über Vektorrechnung*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1964)
- [36] J.W. Leech: *Classical Mechanics*, Chapman & Hall, Science Paperbacks 8 (1965)
- [37] D. Lelgemann: *A Linear Solution of the Equations of Motion of an Earth-Orbiting Satellite Based on a Lie-Series*, Celestial Mechanics, Vol. 30 (1983)
- [38] A.J. Lichtenberg und M.A. Lieberman: *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, New York (1983)
- [39] A.J. Lichtenberg und M.A. Lieberman: *Regular and Chaotic Dynamics*, Applied Mathematical Sciences 38, 2nd edition, Springer Verlag, Berlin (1992)
- [40] H. Lippmann: *Schwingungslehre*, Hochschultaschenbuch, Nr. 189/189a, Bibliographisches Institut, Mannheim (1968)
- [41] E. Mai und D. Lelgemann: *Zur numerischen Integration mechanischer Bewegungsgleichungen mittels Liereiher-Entwicklung*, Zeitschrift für Vermessungswesen, (2007)
- [42] L. Meirowitch: *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, New York (1970)
- [43] K.R. Meyer und G.R. Hall: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer Verlag, Reihe Applied Mathematical Sciences, Vol. 90 (1992)
- [44] O. Meyer: *Analytische Störungsrechnung mit ANALYTOS*, DGK, Reihe C, Heft Nr. 507, München (1999)
- [45] O. Meyer, B. Reichhoff und M. Schneider: *Analytical Theories of Satellite Motion Constructed with a new Package of Formula Manipulation and Compared with Numerical Integration*, Celestial Mechanics, Vol. 76, No. 2 (2000)
- [46] A. Milani, A.M. Nobili und P. Farinella: *Non-gravitational perturbations and Satellite Geodesy*, Adam Hilger, Bristol (1987)
- [47] J. Moser: *Rapidly convergent Iteration Method of Nonlinear Differential Equations II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966)
- [48] J. Moser: *Stable and random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press (1973)

- [49] P.C. Müller und W.O. Schiehlen: *Lineare Schwingungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1976)
- [50] A.H.. Nayfeh: *Perturbation Methods*, Jon Wiley & Sons, New York (1973)
- [51] W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik - Bd. 5, Teil 1*, Vieweg Verlag, Braunschweig (2000)
- [52] H.R. Petry und B.C. Metsch: *Theoretische Mechanik*, Oldenbourg Verlag, München (2005)
- [53] H. Poincaré: *Les Methodés nouvelles de la mécanique céleste*, Dover Publ., New York (1957) (Nachdruck)
- [54] A.D. Polyanin und V.A. Zaitsev: *Handbuch der Linearen Differentialgleichungen - Exakte Lösungen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1996)
- [55] A.D. Polyanin und A.V. Manshirov: *Handbuch der Integralgleichungen - Exakte Lösungen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1999)
- [56] L. Rade und B. Westergren: *Springers MATHE - Mathematische Formeln*, Springer Verlag, Berlin (2000)
- [57] R.M. Santilli: *Foundations of Theoretical Mechanics I+II*, Springer Verlag, Berlin (1978)
- [58] E. Schmutzer: *Grundlagen der Theoretische Physik - Teil II*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim (1989)
- [59] M. Schneider: *Satellitengeodäsie - Grundlagen*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim (1988)
- [60] M. Schneider: *Himmelsmechanik - Bd. I Grundlagen, Determinierung*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg (1992)
- [61] M. Schneider: *Himmelsmechanik - Bd. II Systemmodelle*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg (1993)
- [62] M. Schneider: *Himmelsmechanik - Bd. III Gravitationstheorie*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg (1996)
- [63] M. Schneider: *Himmelsmechanik - Bd. IV Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg (1999)
- [64] M. Schneider und C. Cui: *Theoreme über Bewegungsintegrale und ihre Anwendung in Bahntheorien*, DGK, Reihe A, Heft Nr. 121, München (2005)
- [65] K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik*, 7. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1979)
- [66] W.M. Smart: *Celestial Mechanics*, Longmans, London (1953)
- [67] W.H. Steeb und A. Kunick: *Painleve property of anharmonic systems with an external periodic field*, Physics Letters, Vol. 95 A, 6 (1983)
- [68] W.H. Steeb und A. Kunick: *Chaos in dynamischen Systemen*, Wissenschaftsverlag: Bibliographisches Institut Mannheim (1989)
- [69] K. Stumpff: *Himmelsmechanik - Bd. I Das Zweikörperproblem und die Methoden der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1959)
- [70] K. Stumpff: *Himmelsmechanik - Bd. II Das Dreikörperproblem*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1965)
- [71] K. Stumpff: *Himmelsmechanik - Bd. III Allgemeine Störungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1974)
- [72] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Lehrbuch, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin (1990)
- [73] H. Yoshida: *A Criterion for the Non-Existence of an Additional Integral in Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential*, Physica 20 D (1987)

Anhang

13 Details zum Duffing-Oszillator

13.1 Bekannte Lösungen

Zum Problem des nicht-angeregten, reibungsfreien Duffing-Oszillators (144) existieren in der Literatur zur Störungsrechnung, z. B. bei Nayfeh [50], zahlreiche Lösungsvorschläge. Einige beziehen sich dabei auf den Sonderfall $\omega_0 = 1$. Im folgenden werden Endformeln verschiedener Methoden zusammengetragen und verglichen³⁷.

Die *asymptotische Reihenentwicklung nach Poincaré* liefert als Lösung erster Ordnung in ε :

$$u(t) = a_P \cos t + \varepsilon a_P^3 \left(-\frac{3}{8}t \sin t + \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (246)$$

mit der Konstanten a_P . Die Differentialgleichung (144) ist von 2. Ordnung, so dass eine zweite Integrationskonstante auftauchen muss; (246) wurde aufgestellt für die Anfangsbedingungen $u(t_0 = 0) = u_0 = a_P$ und $\dot{u}(t_0 = 0) = \dot{u}_0 = 0$. Aus dem Term $t \sin t$ ist ersichtlich, dass diese Lösung unbefriedigend ist, da sie einen säkularen Trend bedeutet, der hier gar nicht auftreten kann; u muss für alle Zeiten ($t \rightarrow \infty$) beschränkt bleiben.³⁸

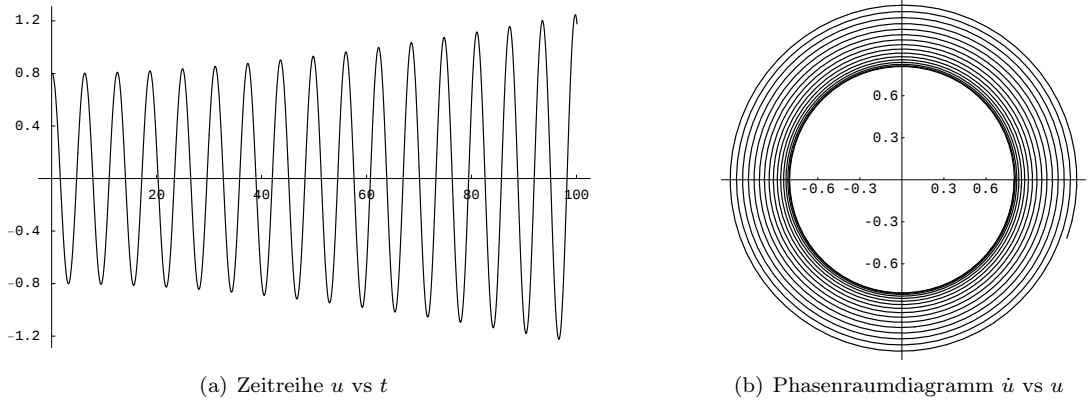


Abb. 4: Lösung des Duffing-Oszillators (144) nach Poincaré (246) für $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $a_P = 0.8008$ mit $t \in (0, 100)$

Alle weiteren Verfahren vermeiden säkulare Trends. Abhilfe kann z. B. die Einführung einer „optimalen Variable“ schaffen, etwa $\zeta := (1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2)t \Leftrightarrow t = (1 - \frac{3}{8}\varepsilon a^2)\zeta + O(\varepsilon^2)$. Man spricht in diesem Falle von der so genannten *Renormierung*. Es folgt mit $a_R = \text{const} = a_P$ als Lösung erster Ordnung:

$$u(t) = a_R \cos \zeta(t) + \frac{\varepsilon a_R^3}{32} (\cos 3\zeta(t) - \cos \zeta(t)) + O(\varepsilon^2). \quad (247)$$

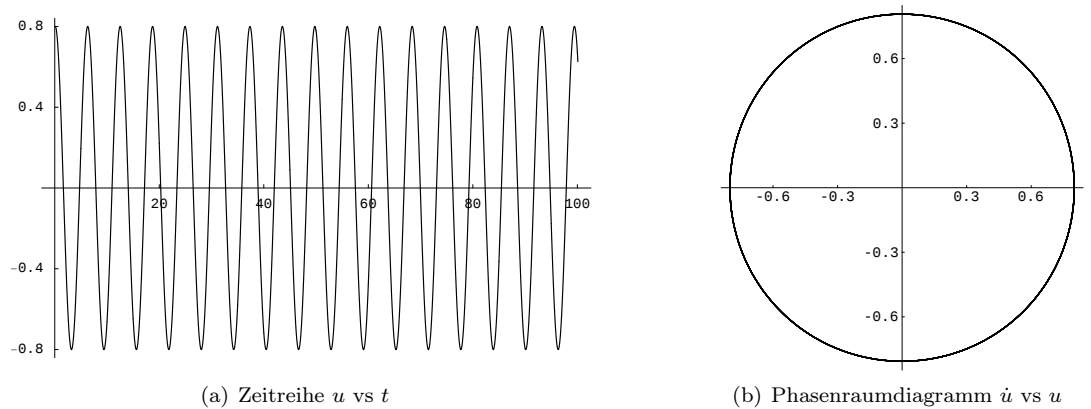


Abb. 5: Lösung des Duffing-Oszillators durch Renormierung (247) für $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $a_R = 0.8008$ mit $t \in (0, 100)$

³⁷Besonderes Augenmerk ist der Vergleichbarkeit der Anfangsbedingungen bzw. Integrationskonstanten zu schenken.

³⁸Zudem erhalte man für den Fall $t = O(1/\varepsilon)$ einen Widerspruch zum eigentlichen Ansatz von Poincaré.

Die *Lindstedt-Poincaré-Methode* liefert mit Einführung von $\omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 - \frac{15}{256}\varepsilon^2 a^4 + O(\varepsilon^3)$ das Ergebnis

$$u(t) = a_{\text{LP}} \cos(\omega t + \phi_{\text{LP}}) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos(3(\omega t + \phi_{\text{LP}})) + O(\varepsilon^2) \quad (248)$$

mit den beiden Konstanten a_{LP} und ϕ_{LP} . Für einen quantitativen Vergleich mit anderen Lösungen müssen die Konstanten jeweils so gewählt werden, dass sie identische Startwerte u_0 und $\dot{u}_0$ liefern. Die zuvor gewählten Startwerte sind z.B. mit den Festlegungen $a_{\text{LP}} = 0.8$ und $\phi_{\text{LP}} = 0$ verträglich. Eine fehlerhafte Wahl fällt bei der Differenzbildung sofort im Diagramm auf, da dann der Graph nicht im Koordinatenursprung beginnt und zudem einen nicht zu erwartenden unregelmäßigen Verlauf nimmt.

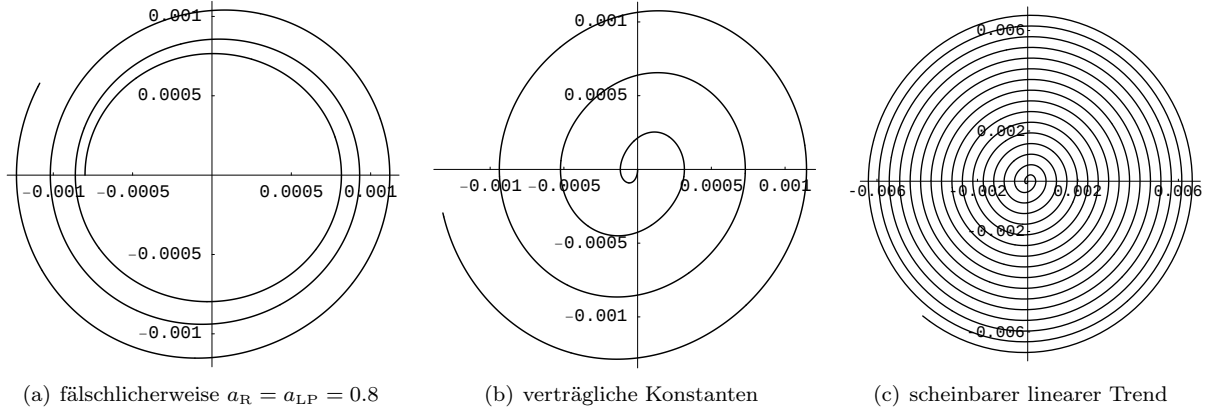


Abb. 6: Vergleich der Renormierung (247) mit der Lindstedt-Poincaré-Methode (248), jeweils $\Delta \dot{u}$ vs Δu

Durch die unterschiedlichen Frequenzen in den Winkelformen der trigonometrischen Funktionen in (247) bzw. (248) kommt es zu einer Drift zwischen den verschiedenen Lösungen für $u(t)$ (und damit auch für $\dot{u}(t)$). Im Phasenraumdiagramm würde sich der Differenzengraph für $t \rightarrow \infty$ in allen Achsrichtungen bis zum Wert $\pm \pi/2$ fortsetzen.

Die *Krylov-Bogoliubov-Methode* wurde für beliebige Werte ω_0 in (144) entwickelt. Als Lösung erster Ordnung erhält man

$$u(t) = a_{\text{KB}} \cos\left(\omega_0 t \left(1 + \frac{3\varepsilon a_{\text{KB}}^2}{8\omega_0^2}\right)\right) + O(\varepsilon^2). \quad (249)$$

Für einen Vergleich setzen wir hier $\omega_0 = 1$. Man sieht zudem, dass die Wahl $a_{\text{KB}} = 0.8008$ mit den vorangegangenen Startwerten in unserer Beispielrechnung verträglich ist. Ein Vergleich mit den anderen Techniken kann wiederum über die Differenzbildung der Zeitreihen für $u(t)$ bzw. $\dot{u}(t)$ erfolgen. Systematische Effekte lassen sich, wie bereits angedeutet, manchmal besser erkennen, wenn man die Differenzen der Zeitreihen in der Art eines Phasenraumdiagrammes gegeneinander aufträgt.

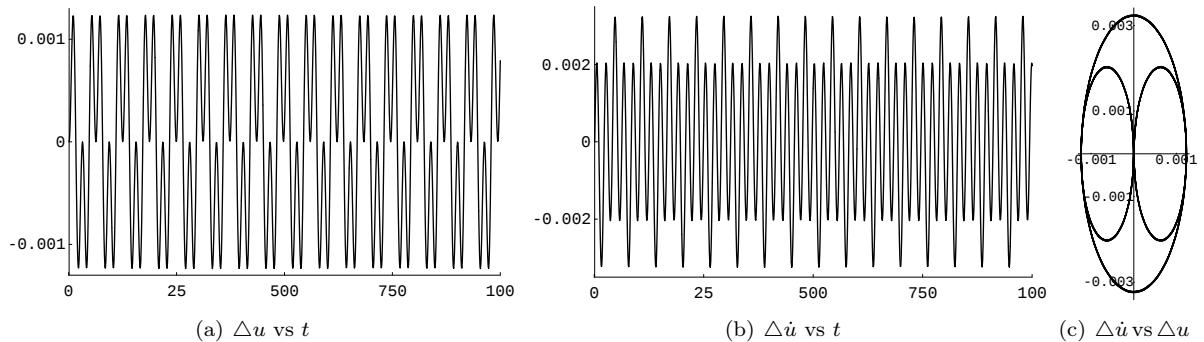


Abb. 7: Vergleich der Krylov-Bogoliubov-Methode (249) mit der Renormierung (247)

Dies wird besonders deutlich, wenn man z.B. die Lösungen aus der Krylov-Bogoliubov-Methode mit denen aus der Lindstedt-Poincaré-Methode vergleicht.

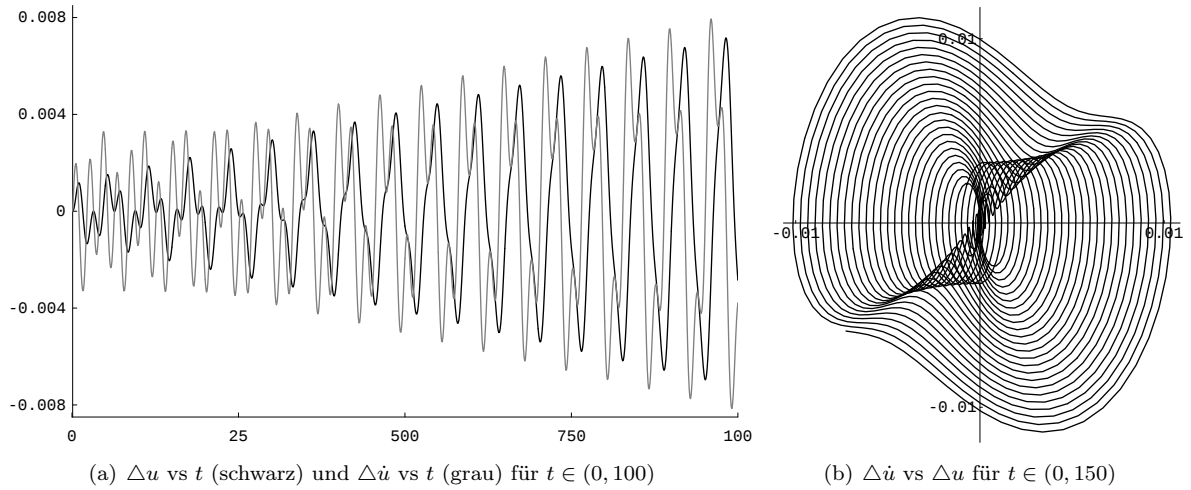


Abb. 8: Vergleich der Krylov-Bogoliubov-Methode (249) mit der Lindstedt-Poincaré-Methode (248)

Die von Zeipel-Prozedur liefert als Lösung zum Duffing-Oszillator (144) die Darstellung

$$u(t) = a_{vz} \sin(\omega t + \beta_{vz}) - \frac{\varepsilon a_{vz}^3}{32\omega_0^2} \sin(3(\omega t + \beta_{vz})) + O(\varepsilon^2). \quad (250)$$

Mit der Setzung $\omega = \omega_0 (1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2/\omega_0^2 - \frac{15}{256}\varepsilon^2 a^4/\omega_0^4) + O(\varepsilon^3)$ ist diese Formulierung vergleichbar mit der Lindstedt-Poincaré-Methode. Wir setzen wieder $\omega_0 = 1$ und für unser Beispiel mit $\varepsilon = 0.05 = \frac{1}{20}$ erhalten wir schließlich zwei Bestimmungsgleichungen³⁹ für die Integrationskonstanten a_{vz} und β_{vz} :

$$\begin{aligned} a_{vz} \sin \beta_{vz} - \frac{1}{640} a_{vz}^3 \sin 3\beta_{vz} &= u_0 = 0.8008, \\ \cos \beta_{vz} - \frac{3}{640} a_{vz}^2 \cos 3\beta_{vz} &= \dot{u}_0 = 0. \end{aligned} \quad (251)$$

Das Gleichungssystem (251) lässt sich sehr schnell (numerisch) lösen. Man erhält eine Vielzahl von Lösungspaaren, darunter auch 6 reellwertige: $(a_{vz}, \beta_{vz})_{1,2} = (\pm 0.8, \pm \pi/2)$ und mit den beiden speziellen Zahlenwerten $a_{vz}^* = 16.654608758300134272$ bzw. $\beta_{vz}^* = 0.242627291225409526$ die restlichen vier Lösungspaare $(a_{vz}, \beta_{vz})_{3,4,5,6} = (\pm a_{vz}^*, \mp(\beta_{vz}^* \vee (\pi - \beta_{vz}^*)))$. Alle diese Wertepaare liefern die Startwerte $u_0 = 0.8008$ bzw. $\dot{u}_0 = 0$ mit einer Genauigkeit von mindestens 16 signifikanten Stellen. Durch die stets endliche Rechengenauigkeit können die den einzelnen Startwertepaaren zugeordneten Zeitreihen für $t \rightarrow \infty$ erheblich voneinander abweichen.⁴⁰

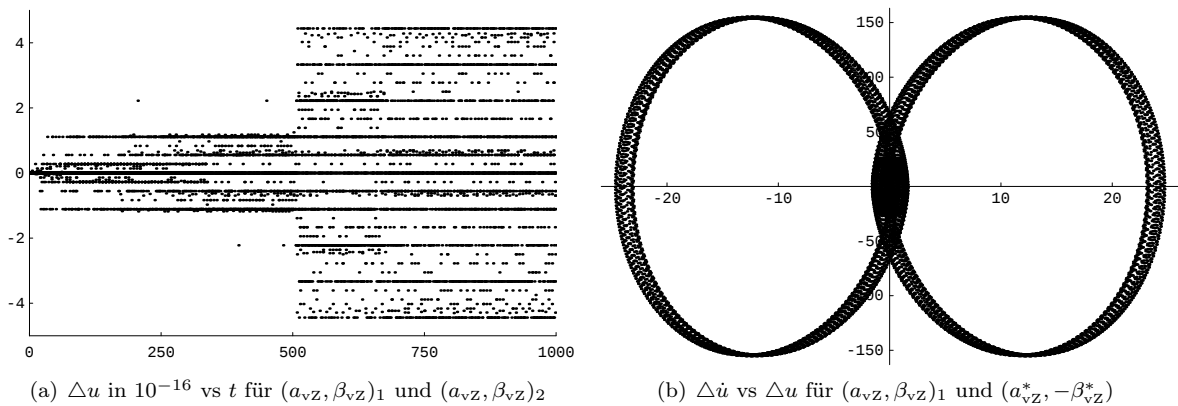


Abb. 9: Auswirkung unterschiedlicher Startwerte in der von Zeipel-Prozedur (250) für $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = 0.05$ mit $t \in (0, 1000)$

Es wurden weitere numerische Experimente zur Rechengenauigkeit durchgeführt, deren Darstellung hier zu weit führt. Stattdessen sollen einige analytische Lösungen zweiter Ordnung vorgestellt werden.

³⁹Für die zweite Gleichung in (251) wurde u. a. eine Division durch ω durchgeführt. Dies ist, unter der obigen Setzung $\omega_0 = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{20}$, in Strenge nur mit der Einschränkung $|a_{vz}| \neq 12.9812 \dots$ erlaubt.

⁴⁰Dies gilt für alle Lösungsverfahren. Der Duffing-Oszillator reagiert empfindlich auf Änderungen der Startwerte.

Struble's Methode gibt (mit ω -Setzung wie in von Zeipel's Methode) eine Lösung zweiter Ordnung an:

$$u(t) = a_s \cos(\omega t - \theta_s) + \frac{\varepsilon a_s^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \frac{21\varepsilon a_s^2}{32\omega_0^2}\right) \cos(3(\omega t - \theta_s)) + \frac{\varepsilon^2 a_s^5}{1024\omega_0^4} \cos(5(\omega t - \theta_s)) + O(\varepsilon^3). \quad (252)$$

Wieder sei $\omega_0 = 1$ und $\varepsilon = 0.05 = \frac{1}{20}$ gesetzt, so dass zwei Bestimmungsgleichungen für a_s und θ_s folgen:

$$\begin{aligned} a_s \cos \theta_s + \left(\frac{1}{640} a_s^3 - \frac{21}{409600} a_s^5\right) \cos 3\theta_s + \frac{1}{409600} a_s^5 \cos 5\theta_s &= u_0 = 0.8008, \\ \sin \theta_s + 3\left(\frac{1}{640} a_s^2 - \frac{21}{409600} a_s^4\right) \sin 3\theta_s + \frac{1}{81920} a_s^4 \sin 5\theta_s &= \dot{u}_0 = 0. \end{aligned} \quad (253)$$

Das Gleichungssystem (253) lässt sich numerisch lösen. Unter den vielen Lösungspaaren findet man 9 reellwertige. Mit den speziellen Zahlenwerten $a_s^{*1} = 0.800015953733282649$, $a_s^{*2} = 12.8208882217830543$ und $a_s^{*3} = 12.4642040335371202$ kann man die Lösungspaare $(a_s, \theta_s)_i = ((-1)^{i+1} a^{*i}, 0)$ für $i = 1, 2, 3$ und $(a_s, \theta_s)_{i+3} = ((-1)^i a^{*i}, \pi)$ bzw. $(a_s, \theta_s)_{i+6} = ((-1)^i a^{*i}, -\pi)$ formulieren. Alle diese Wertepaare liefern wieder die Startwerte $u_0 = 0.8008$ bzw. $\dot{u}_0 = 0$ mit einer Genauigkeit von 16 signifikanten Stellen.

Die *Krylov-Bogoliubov-Mitropolski Technik* liefert ein äquivalentes Ergebnis:

$$u(t) = a_{\text{KBM}} \cos \psi + \frac{\varepsilon a_{\text{KBM}}^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi - \frac{\varepsilon^2 a_{\text{KBM}}^5}{1024\omega_0^4} (21 \cos 3\psi - \cos 5\psi) + O(\varepsilon^3)$$

mit $\psi = \omega_0 t \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 / \omega_0^2 - \frac{15}{256} \varepsilon^2 a^4 / \omega_0^4\right) + \psi_{\text{KBM}} + O(\varepsilon^3)$. Für diese Darstellung erhält man dieselben Integrationskonstanten, wie bei Struble's Methode.⁴¹

Sogenannte *multiple scales*-Ansätze können ebenfalls auf die Lösung von Struble's Methode zurückgeführt werden, zudem mit vergleichsweise klarer Herleitung. Sowohl die *derivative-expansion method* als auch die *two variable expansion procedure* liefern im Ergebnis die Formulierung (252), lediglich mit positivem Vorzeichen für den Phasenwinkel. Die ω -Setzung ist jeweils identisch.

Bei Kuypers [34] findet man für eine Variation des Duffing-Oszillators ($\ddot{u} + \omega_0^2 u - \varepsilon u^3 = 0$ statt $\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0$ wie in (144)) mit den Anfangsbedingungen $u_0 = a_K$ und $\dot{u}_0 = 0$ die folgende analytische Lösung in zweiter Näherung:

$$u(t) = \left(1 + \frac{1}{32} \frac{\varepsilon a_K^2}{\omega_0^2} + \frac{23}{1024} \frac{\varepsilon^2 a_K^4}{\omega_0^4}\right) a_K \cos \omega t - \left(\frac{1}{32} + \frac{3}{128} \frac{\varepsilon a_K^2}{\omega_0^2}\right) \frac{\varepsilon a_K^3}{\omega_0^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{1024} \frac{\varepsilon^2 a_K^5}{\omega_0^4} \cos 5\omega t + O(\varepsilon^3)$$

mit der amplitudenabhängigen Eigenfrequenz

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\varepsilon a_K^2}{\omega_0^2} - \frac{21}{256} \frac{\varepsilon^2 a_K^4}{\omega_0^4}\right). \quad (254)$$

Die Festlegung (254) ist nötig, um das Auftreten von physikalisch unsinnigen säkularen Termen zu vermeiden.

13.2 Lösungen nach dem Eliminationsverfahren

In Bellman [1], Nayfeh [50] und Kuypers [34] sind Lösungen 2. Ordnung ausgearbeitet. Hier konnten mittels *MATHEMATICA*TM weit höhere Ordnungen erzielt werden. Der hier beschrittene Lösungsweg ist analog zu dem in den zitierten Arbeiten, geht aber von einem anderen Leitgedanken aus, der Elimination von Störanteilen (s. Abschnitt 10). Es wurden bisher Lösungen 10., 20. und 30. Ordnung ausgearbeitet.

Für eine *Lösung 10. Ordnung* erhält man mit $u_0 = a_M$ und $\dot{u}_0 = 0$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{10} \varepsilon^n u_n(t) + O(\varepsilon^{11}) = \sum_{n=1(2)}^{21} a_M \left(\varepsilon \frac{a_M^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n\omega t) \sum_{k=0(2)}^{21-n} \frac{c_{n,k}}{32^{\frac{k+n-1}{2}}} \left(-\varepsilon \frac{a_M^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{k}{2}} + O(\varepsilon^{11}), \quad (255)$$

wobei zur Vermeidung säkularer Terme ω festgelegt werden muss auf

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \sum_{n=1}^{10} \frac{3c_n}{8^{2n-1}} \left(-\varepsilon \frac{a_M^2}{\omega_0^2}\right)^n\right).$$

Die Koeffizienten c_n bzw. $c_{n,k}$ sind jeweils Integerzahlen, für deren Sequenz noch kein allgemeines Bildungsgesetz gefunden werden konnte. Sie werden deshalb nachfolgend explizit in Vektorform $c := (c_1, c_2, \dots, c_{10})^T$ bzw. Matrizenform $C := (c_{n,k})$ angegeben:

$$c = (1, 14, 432, 17464, 805056, 39943808, 2074592256, 111139570560, 6089199971328, 339393638541312)^T.$$

⁴¹bis auf ein unterschiedliches Vorzeichen zwischen θ_s und ψ_{KBM}

Die Matrix C lässt sich als obere Dreiecksmatrix auffassen:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 k=0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\
 n=1 & \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 1 & 1 & 23 & 547 & 13426 & 339176 & 8791304 & 233034230 & 6297662471 & 173028708850 & 4821475754931 \\
 3 & 1 & 24 & 594 & 15121 & 394701 & 10531302 & 286361891 & 7913777523 & 221745263658 & 6287043160531 \\
 5 & 1 & 48 & 1766 & 58944 & 1879479 & 58529521 & 1799860826 & 54983271690 & 1674301599697 \\
 7 & 1 & 72 & 3514 & 145200 & 5480977 & 195818280 & 6749957586 & 227078322481 \\
 9 & 1 & 96 & 5838 & 287712 & 12560763 & 507272256 & 19419728994 \\
 11 & 1 & 120 & 8738 & 500304 & 24812277 & 1118691000 \\
 13 & 1 & 144 & 12214 & 796800 & 44260735 \\
 15 & 1 & 168 & 16266 & 1191024 \\
 17 & 1 & 192 & 20894 \\
 19 & 1 & 216 \\
 21 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array} \quad (256)$$

Für einen besseren Vergleich mit den zuvor genannten Lösungen sei noch die ausführliche Darstellung angegeben:

$$\begin{aligned}
 u(t) = & a_M \cos \omega t \left(1 - \frac{1}{32}q + \frac{23}{1024}q^2 - \frac{547}{32768}q^3 + \frac{6713}{524288}q^4 - \frac{42397}{4194304}q^5 + \frac{1098913}{134217728}q^6 - \frac{116517115}{17179869184}q^7 + \right. \\
 & \left. + \frac{6297662471}{1099511627776}q^8 - \frac{86514354425}{17592186044416}q^9 + \frac{4821475754931}{1125899906842624}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 3\omega t \left(\frac{1}{32}q - \frac{3}{128}q^2 + \frac{297}{16384}q^3 - \frac{15121}{1048576}q^4 + \frac{394701}{33554432}q^5 - \frac{5265651}{536870912}q^6 + \frac{286361891}{34359738368}q^7 - \right. \\
 & \left. - \frac{7913777523}{1099511627776}q^8 + \frac{110872631829}{17592186044416}q^9 - \frac{6287043160531}{1125899906842624}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 5\omega t \left(\frac{1}{1024}q^2 - \frac{3}{2048}q^3 + \frac{883}{524288}q^4 - \frac{921}{524288}q^5 + \frac{1879479}{1073741824}q^6 - \frac{58529521}{34359738368}q^7 + \frac{899930413}{549755813888}q^8 - \right. \\
 & \left. - \frac{27491635845}{17592186044416}q^9 + \frac{1674301599697}{1125899906842624}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 7\omega t \left(\frac{1}{32768}q^3 - \frac{9}{131072}q^4 + \frac{1757}{16777216}q^5 - \frac{9075}{67108864}q^6 + \frac{5480977}{34359738368}q^7 - \frac{24477285}{137438953472}q^8 + \right. \\
 & \left. + \frac{3374978793}{17592186044416}q^9 - \frac{227078322481}{1125899906842624}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 9\omega t \left(\frac{1}{1048576}q^4 - \frac{3}{1048576}q^5 + \frac{2919}{536870912}q^6 - \frac{8991}{1073741824}q^7 + \frac{12560763}{1099511627776}q^8 - \right. \\
 & \left. - \frac{7926129}{549755813888}q^9 + \frac{9709864497}{562949953421312}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 11\omega t \left(\frac{1}{33554432}q^5 - \frac{15}{134217728}q^6 + \frac{4369}{17179869184}q^7 - \frac{31269}{68719476736}q^8 + \right. \\
 & \left. + \frac{24812277}{3518437208832}q^9 - \frac{139836375}{140737488355328}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 13\omega t \left(\frac{1}{1073741824}q^6 - \frac{9}{2147483648}q^7 + \frac{6107}{549755813888}q^8 - \frac{6225}{274877906944}q^9 + \frac{44260735}{1125899906842624}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 15\omega t \left(\frac{1}{34359738368}q^7 - \frac{21}{137438953472}q^8 + \frac{8133}{17592186044416}q^9 - \frac{74439}{70368744177664}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 17\omega t \left(\frac{1}{1099511627776}q^8 - \frac{3}{549755813888}q^9 + \frac{10447}{562949953421312}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 19\omega t \left(\frac{1}{3518437208832}q^9 - \frac{27}{140737488355328}q^{10} \right) + \\
 & + a_M \cos 21\omega t \frac{1}{1125899906842624}q^{10} + O(\varepsilon^{11})
 \end{aligned} \quad (257)$$

mit der Abkürzung

$$q := \varepsilon \frac{a_M^2}{\omega_0^2} \quad (258)$$

und der Eigenfrequenz

$$\begin{aligned}
 \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8}q - \frac{21}{256}q^2 + \frac{81}{2048}q^3 - \frac{6549}{262144}q^4 + \frac{37737}{2097152}q^5 - \frac{936183}{67108864}q^6 + \frac{6077907}{536870912}q^7 - \right. \\
 \left. - \frac{2604833685}{274877906944}q^8 + \frac{17839453041}{2199023255552}q^9 - \frac{497158650207}{70368744177664}q^{10} \right).
 \end{aligned} \quad (259)$$

Um diese hochgenaue Lösung überprüfen zu können, wäre z. B. eine ebenfalls hochgenaue numerische Integration der Bewegungsgleichung (144) geeignet. Mit diesem zusätzlichen Verfahren sind jedoch potentiell zusätzliche

Fehlerquellen verbunden und schließlich die Frage, welchem der Verfahren dann mehr Vertrauen geschenkt werden kann. Deshalb wird hier der direkte Weg eingeschlagen, d. h., die Lösung (257) in Verbindung mit (258) und (259) wird direkt in die ursprüngliche Bewegungsgleichung, also (144), eingesetzt. Die rechte Seite von (144) sollte dann nach einer Auswertung nur mit einem maximalen Fehler der Ordnung $O(\varepsilon^{11})$ von Null verschieden sein. Um diese Untersuchung durchführen zu können, werden die Einzeltermine der Lösung (257) zunächst derart umsortiert, dass, dem ursprünglichen Ansatz (255) folgend, ein Polynom in ε entsteht. Durch den Term $+\varepsilon u^3$ in (144) folgt dann für die rechte Seite in der Praxis nach Einsetzen der Lösung 10. Ordnung⁴²

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = P_{31}(\varepsilon; \omega_0, a_M; t) = \sum_{k=0}^{31} \varepsilon^k f_k(\varepsilon, \omega_0, a_M; t) \stackrel{!}{=} O(\varepsilon^{11}). \quad (260)$$

Mittels *MATHEMATICA*TM kann man nachweisen, dass tatsächlich $f_k(\varepsilon, \omega_0, a_M; t) \equiv 0$ für $(k = 0, 1, \dots, 10)$ gilt. Es bleibt zu untersuchen, ob

$$\sum_{k=11}^{31} \varepsilon^k f_k(\varepsilon, \omega_0, a_M; t) =: \sum_{i=1}^{21} r_i(\varepsilon, \omega_0, a_M; t) \stackrel{!}{=} O(\varepsilon^{11})$$

für beliebige Werte $\varepsilon, \omega_0, a_M$ gilt. Es stellt sich also die Frage, ob die Faktoren f_k die Ordnungsrelation zerstören bzw. ob die Summe der einzelnen Residuen einen Toleranzwert nicht überschreitet. Die Abbildung 10(a) zeigt für einen speziellen Fall, dass nur bestimmte Startwerte a_M zu einem maximalen Residuum der Ordnung $O(\varepsilon^{11})$ führen. Die Ordnungsrelation bleibt dagegen stets erhalten. Das gezeigte Beispiel verwendete $\omega_0 = 1$, so dass die Faktoren f_k alle 2π -periodisch sind und die globalen Maxima der Teilresiduen in diesem Grundintervall enthalten sind. Bei Berechnungen mit anderen ω_0 -Werten wurde das Grundintervall entsprechend angepasst.⁴³

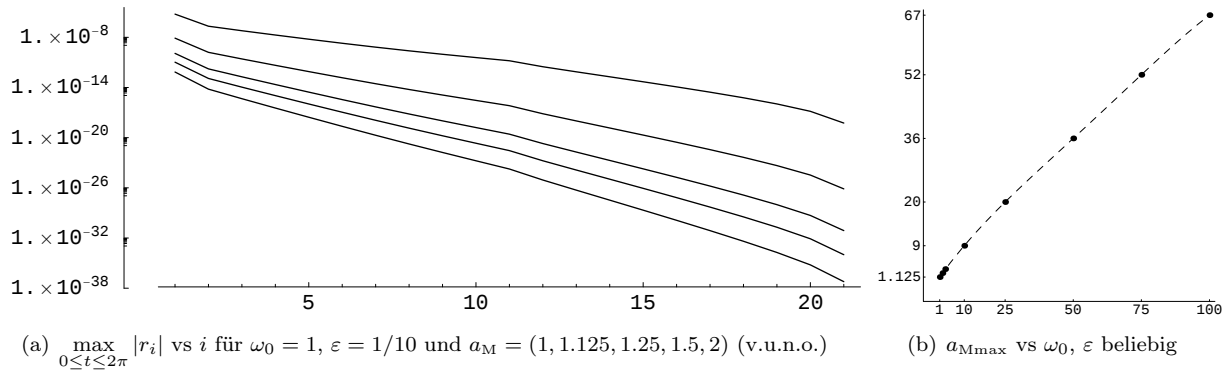


Abb. 10: Untersuchung der rechten Seite von (144)

Das Ergebnis aller vorgenommenen Untersuchungen für $\omega_0 \geq 1$ zeigt die Abbildung 10(b). Man erkennt für die Gültigkeit der angegebenen Lösung 10. Ordnung einen einfachen Zusammenhang für mögliche Kombinationen von ω_0 und a_M und zwar *unabhängig* (!) von ε . Die Tatsache, dass keine beliebige Wahl möglich ist, drückt sich letztlich auch in (258) aus. Die Abbildung 10(b) deutet an, dass für kleine Werte ω_0 bzw. $a_{M,max}$ ein nahezu linearer Zusammenhang besteht. Die gestrichelte Linie gibt ein berechnetes Approximationspolynom wieder. Es genügt hier ein Polynomgrad von 4, konkret erhält man

$$a_{M,max} \doteq P_4(\omega_0) = 0.23161 + 0.96392 \omega_0 - 0.0095280 \omega_0^2 + 0.00011659 \omega_0^3 - 0.00000050934 \omega_0^4. \quad (261)$$

Unter Beachtung von (261) stellen die kompakten Formeln (255) bis (256) bzw. die ausführlicheren Formeln (257) bis (259) eine Lösung 10. Ordnung für den Duffing-Oszillator (144) dar.⁴⁴ Zumindest wird die Bewegungsgleichung mit der entsprechenden Genauigkeit erfüllt, so dass die notwendige Bedingung erfüllt ist.

Mittels der Laplace-Transformation (siehe Abschnitt 11.3.3) wurde schließlich für den klassischen Duffing-Oszillator eine Lösung 30. Ordnung hergeleitet (vgl. Abschnitt 11.3.6). Dabei sind die Anfangswerte $u_0 := u(t_0 = 0) = a_M$ und $\dot{u}_0 := \dot{u}(t_0 = 0) = 0$ verwendet worden. Die Lösung gilt für beliebige Parameter ω_0 und ε .

Durch das Erhöhen der Ordnung erweitert sich die ω -Darstellung aus (185) bzw. (259) unter Berücksichtigung der Setzung (258) und bei Zulassung beliebiger Werte $\omega_0 \neq 0$ zu

⁴²die „31“ in (260) folgt hier demnach aus $3n_{max} + 1$ mit $n_{max} = 10$

⁴³für $\omega_0 > 1$ kann es verkleinert werden, für $\omega_0 < 1$ muss es vergrößert werden

⁴⁴für Werte $\omega_0 < 1$ steht noch die Formulierung einer Bedingung der Form (261) aus

$$\begin{aligned}
\omega = \omega_0 & \left(1 + \frac{3}{8}q - \frac{21}{256}q^2 + \frac{81}{2048}q^3 - \frac{6549}{262144}q^4 + \frac{37737}{2097152}q^5 - \frac{936183}{67108864}q^6 + \frac{6077907}{536870912}q^7 - \frac{2604833685}{274877906944}q^8 \right. \\
& + \frac{17839453041}{2199023255552}q^9 - \frac{497158650207}{70368744177664}q^{10} + \frac{3511276321347}{562949953421312}q^{11} - \frac{401225915283063}{72057594037927936}q^{12} + \frac{2892201453147555}{576460752303423488}q^{13} \\
& - \frac{84053106665670789}{18446744073709551616}q^{14} + \frac{614845335384090729}{147573952589676412928}q^{15} - \frac{1158192705499996341141}{302231454903657293676544}q^{16} \\
& + \frac{8566538482894401288225}{2417851639229258349412352}q^{17} - \frac{254612814518190043882263}{77371252455336267181195264}q^{18} + \frac{1899627691040292362960331}{618970019642690137449562112}q^{19} \\
& - \frac{227596989316436230247319519}{79228162514264337593543950336}q^{20} + \frac{1709927715033995335998264315}{633825300114114700748351602688}q^{21} - \frac{51540365604229690710497415957}{20282409603651670423947251286016}q^{22} \\
& + \frac{389438690970876750046440420489}{162259276829213363391578010288128}q^{23} - \frac{188795142527417230943052740506743}{83076749736557242056487941267521536}q^{24} \\
& + \frac{143335417288839436206957799960651}{664613997892457936451903530140172288}q^{25} - \frac{43620287139590359353779051871097077}{2126764793255865396646091296448513216}q^{26} \\
& + \frac{332511114668281231541162666697706977}{170141183460469231731687303715884105728}q^{27} - \frac{40627902280574750800614874972113342213}{21778071482940061661655974875633165533184}q^{28} \\
& + \frac{310776231991264191653072549572442092905}{174224571863520493293247799005065324265472}q^{29} - \frac{9523718690685384379797012321894208868127}{5575186299632655785383929568162090376495104}q^{30} + O(\varepsilon^{31}) \Big).
\end{aligned}$$

Die Lösung 30. Ordnung lässt sich dann darstellen als

$$\begin{aligned}
u(t) = a_M & \left(\cos \omega t \left(1 - \frac{1}{32}q + \frac{23}{1024}q^2 - \frac{547}{32768}q^3 + \frac{6713}{524288}q^4 - \frac{42397}{4194304}q^5 + \frac{1098913}{134217728}q^6 - \frac{116517115}{17179869184}q^7 \right. \right. \\
& + \frac{6297662471}{1099511627776}q^8 - \frac{86514354425}{17592186044416}q^9 + \frac{4821475754931}{1125899906842624}q^{10} - \frac{33994478482815}{9007199254740992}q^{11} \\
& + \frac{3874660107331169}{1152921504606846976}q^{12} - \frac{111391885334848731}{36893488147419103232}q^{13} + \frac{3227105934789100625}{1180591620717411303424}q^{14} \\
& - \frac{94120845010257353085}{37778931862957161709568}q^{15} + \frac{1380658603415603787053}{604462909807314587353088}q^{16} - \frac{10179295836724880779113}{4835703278458516698824704}q^{17} \\
& + \frac{2412738004747834229141665}{1237940039285380274899124224}q^{18} - \frac{71781387388905823709170565}{39614081257132168796771975168}q^{19} \\
& + \frac{1071771218660833281046214453}{633825300114114700748351602688}q^{20} - \frac{64226710135623222180785821023}{40564819207303340847894502572032}q^{21} \\
& + \frac{965158070418423146176292462973}{649037107316853453566312041152512}q^{22} - \frac{58177313623056655039773345463363}{41538374868278621028243970633760768}q^{23} \\
& + \frac{1757879987380772276130133027508963}{1329227995784915872903807060280344576}q^{24} - \frac{3327555471552234776321093654312305}{2658455991569831745807614120560689152}q^{25} \\
& + \frac{202000502521443685197632340045769411}{170141183460469231731687303715884105728}q^{26} - \frac{24574241831162198673025903553231735701}{21778071482940061661655974875633165533184}q^{27} \\
& + \frac{748782020105080267447901510389266391779}{696898287454081973172991196020261297061888}q^{28} - \frac{45710070181154029374769136437004522513923}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} \\
& + \frac{1397458339604731700720188861999298400715611}{1427247692705959881058285969449495136382746624}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 3\omega t \left(\frac{1}{32}q - \frac{3}{128}q^2 + \frac{297}{16384}q^3 - \frac{15121}{1048576}q^4 + \frac{394701}{33554432}q^5 - \frac{5265651}{536870912}q^6 + \frac{286361891}{34359738368}q^7 \right. \\
& - \frac{7913777523}{1099511627776}q^8 + \frac{110872631829}{17592186044416}q^9 - \frac{6287043160531}{1125899906842624}q^{10} + \frac{180061881670737}{36028797018963968}q^{11} \\
& - \frac{5201952344930925}{1152921504606846976}q^{12} + \frac{37853953425262849}{9223372036854775808}q^{13} - \frac{4436232477579737889}{1180591620717411303424}q^{14} \\
& + \frac{65360362106746252083}{18889465931478580854784}q^{15} - \frac{3871401446655252024431}{1208925819614629174706176}q^{16} + \frac{7198116552647696632749}{2417851639229258349412352}q^{17} \\
& - \frac{3439914400292444410467111}{1237940039285380274899124224}q^{18} + \frac{161152956832660510108705}{618970019642690137449562112}q^{19} \\
& - \frac{775235720234809814233861995}{316912650057057350374175801344}q^{20} + \frac{93529193337970816505998419549}{40564819207303340847894502572032}q^{21} \\
& - \frac{2828543473278803269413050442671}{1298074214633706907132624082305024}q^{22} + \frac{85751378017385685267442321914519}{41538374868278621028243970633760768}q^{23} \\
& - \frac{2605520208075263413616929390764321}{1329227995784915872903807060280344576}q^{24} + \frac{79331501455502638366634747126575385}{42535295865117307932921825928971026432}q^{25} \\
& - \frac{2420061213240127351067587179316578927}{1361129467683753853853498429727072845824}q^{26} + \frac{2311136254652117287568655701413426593}{1361129467683753853853498429727072845824}q^{27} \\
& - \frac{4421490962035288978970028606515660363}{2722258935367507707706996859454145691648}q^{28} + \frac{69401193940186552887483474722071270893555}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} \\
& - \frac{266333729584928893948357717516326330507153}{178405961588244985132285746181186892047843328}q^{30} \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos 5\omega t \left(\frac{1}{1024}q^2 - \frac{3}{2048}q^3 + \frac{883}{524288}q^4 - \frac{921}{524288}q^5 + \frac{1879479}{1073741824}q^6 - \frac{58529521}{34359738368}q^7 + \frac{899930413}{549755813888}q^8 \right. \\
& - \frac{27491635845}{17592186044416}q^9 + \frac{1674301599697}{1125899906842624}q^{10} - \frac{50923370042121}{36028797018963968}q^{11} + \frac{1548798547447735}{1152921504606846976}q^{12} \\
& - \frac{23568926500162441}{18446744073709551616}q^{13} + \frac{89762727881709651}{73786976294838206464}q^{14} - \frac{21907804924712841081}{18889465931478580854784}q^{15} \\
& + \frac{1338611646509109059903}{1208925819614629174706176}q^{16} - \frac{40955216528185753651165}{38685626227668133590597632}q^{17} + \frac{313711270255111099229169}{309485009821345068724781056}q^{18} \\
& - \frac{38502010448841111245337353}{39614081257132168796771975168}q^{19} + \frac{1182956413273077847557409451}{1267650600228229401496703205376}q^{20} \\
& - \frac{36393366454397765182409579379}{40564819207303340847894502572032}q^{21} + \frac{560516461124139158199682395955}{649037107316853453566312041152512}q^{22} \\
& - \frac{17286268106597736891761473614639}{20769187434139310514121985316880384}q^{23} + \frac{266854963699262491015290724951411}{332306998946228968225951765070086144}q^{24} \\
& - \frac{515496501381764520593279604469697}{664613997892457936451903530140172288}q^{25} + \frac{1020748548861266039091115961442634967}{1361129467683753853853498429727072845824}q^{26} \\
& - \frac{31611999325815268110279722937619280893}{43556142965880123323311949751266331066368}q^{27} + \frac{979905015646592163568816943951696714553}{1393796574908163946345982392040522594123776}q^{28} \\
& - \frac{30401483361757343976637467139410966391875}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} + \frac{471992960695040613113778764015547265376913}{713623846352979940529142984724747568191373312}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 7\omega t \left(\frac{1}{32768}q^3 - \frac{9}{131072}q^4 + \frac{1757}{16777216}q^5 - \frac{9075}{67108864}q^6 + \frac{5480977}{34359738368}q^7 - \frac{24477285}{137438953472}q^8 + \frac{3374978793}{17592186044416}q^9 \right. \\
& - \frac{227078322481}{1125899906842624}q^{10} + \frac{3754917537603}{18014398509481984}q^{11} - \frac{122666023469979}{576460752303423488}q^{12} + \frac{1985719319161929}{9223372036854775808}q^{13} \\
& - \frac{255450243946186791}{1180591620717411303424}q^{14} + \frac{8174496176392338115}{37778931862957161709568}q^{15} - \frac{130298256726036341717}{604462909807314587353088}q^{16} \\
& + \frac{8283609037641435556559}{38685626227668133590597632}q^{17} - \frac{262728518424732020038689}{1237940039285380274899124224}q^{18} + \frac{2079669258630238002260667}{9903520314283042199192993792}q^{19} \\
& - \frac{131523012206279334202771263}{633825300114114700748351602688}q^{20} + \frac{8309446930399666300046129161}{40564819207303340847894502572032}q^{21} \\
& - \frac{131144125561782448137150025721}{649037107316853453566312041152512}q^{22} + \frac{1034292270881387268297372433325}{5192296858534827628530496329220096}q^{23} \\
& - \frac{260915459898446708776571447480341}{1329227995784915872903807060280344576}q^{24} + \frac{2056220810125497735340335858452839}{10633823966279326983230456482242756608}q^{25} \\
& - \frac{64804334562088456156267772341769137}{340282366920938463374607431768211456}q^{26} + \frac{8168374470758547508906736191424726861}{43556142965880123323311949751266331066368}q^{27} \\
& - \frac{257377762523744501704617217560778978207}{1393796574908163946345982392040522594123776}q^{28} + \frac{8109453384704900809936151549208237818131}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} \\
& - \frac{255513945727742054144770850029909339878713}{1427247692705959881058285969449495136382746624}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 9\omega t \left(\frac{1}{1048576}q^4 - \frac{3}{1048576}q^5 + \frac{2919}{536870912}q^6 - \frac{8991}{1073741824}q^7 + \frac{12560763}{1099511627776}q^8 - \frac{7926129}{549755813888}q^9 \right. \\
& + \frac{9709864497}{562949953421312}q^{10} - \frac{22357870047}{1125899906842624}q^{11} + \frac{25619187243231}{1152921504606846976}q^{12} - \frac{897767137630945}{36893488147419103232}q^{13} \\
& + \frac{15468760461309465}{590295810358705651712}q^{14} - \frac{526069048857354993}{18889465931478580854784}q^{15} + \frac{885150408065156695}{302231454903657293676544}q^{16} \\
& - \frac{1181338515895467035397}{38685626227668133590597632}q^{17} + \frac{4892729905546457195205}{154742504910672534362390528}q^{18} \\
& - \frac{644729285051571665235441}{19807040628566084398385987584}q^{19} + \frac{42275873120222621894128587}{1267650600228229401496703205376}q^{20} \\
& - \frac{345122247470174833584678525}{10141204801825835211973625643008}q^{21} + \frac{44926261771370361515736022907}{1298074214633706907132624082305024}q^{22} \\
& - \frac{11389544308812199682704555257}{324518553658426726783156020576256}q^{23} + \frac{23595728370141349882917223575657}{664613997892457936451903530140172288}q^{24} \\
& - \frac{1524377510114921644212993481980573}{42535295865117307932921825928971026432}q^{25} + \frac{49150706466392447088664227728912775}{1361129467683753853853498429727072845824}q^{26} \\
& - \frac{791135462981018615385000042407818125}{21778071482940061661655974875633165533184}q^{27} + \frac{50866879369023539548783371941593111827}{1393796574908163946345982392040522594123776}q^{28} \\
& - \frac{1633308921659184741688187704728092087709}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} + \frac{52389623563287454391573160139550614067043}{1427247692705959881058285969449495136382746624}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 11\omega t \left(\frac{1}{33554432}q^5 - \frac{15}{134217728}q^6 + \frac{4369}{17179869184}q^7 - \frac{31269}{68719476736}q^8 + \frac{24812277}{35184372088832}q^9 - \frac{139836375}{140737488355328}q^{10} \right. \\
& + \frac{23576116241}{18014398509481984}q^{11} - \frac{118193461617}{72057594037927936}q^{12} + \frac{18257246043143}{9223372036854775808}q^{13} - \frac{85568580170385}{36893488147419103232}q^{14} \\
& + \frac{3133983155741631}{1180591620717411303424}q^{15} - \frac{3604130742375408385}{1208925819614629174706176}q^{16} + \frac{127531716008295276501}{38685626227668133590597632}q^{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2227549098184091813211}{618970019642690137449562112}q^{18} + \frac{76983855543196468952349}{19807040628566084398385987584}q^{19} - \frac{5273064992506897100583843}{1267650600228229401496703205376}q^{20} \\
& + \frac{179203012621414023448497753}{40564819207303340847894502572032}q^{21} - \frac{3025000896541805481652974397}{649037107316853453566312041152512}q^{22} \\
& + \frac{101544938135650695491447154029}{20769187434139310514121985316880384}q^{23} - \frac{6783770225036287542652756629747}{1329227995784915872903807060280344576}q^{24} \\
& + \frac{225620202310114848525484810306079}{42535295865117307932921825928971026432}q^{25} - \frac{3737743876466051791567405468619349}{680564733841876926926749214863536422912}q^{26} \\
& + \frac{246860338991248566162339384727447927}{43556142965880123323311949751266331066368}q^{27} - \frac{253997884252607209850738934368219505}{43556142965880123323311949751266331066368}q^{28} \\
& + \frac{266912405602043009405229300380324111743}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} - \frac{273269141380577858205178085691344582751}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 13\omega t \Big(\frac{1}{1073741824}q^6 - \frac{9}{2147483648}q^7 + \frac{6107}{549755813888}q^8 - \frac{6225}{274877906944}q^9 + \frac{44260735}{1125899906842624}q^{10} \\
& - \frac{137797233}{2251799813685248}q^{11} + \frac{50765007337}{576460752303423488}q^{12} - \frac{68868926577}{576460752303423488}q^{13} + \frac{182795980818221}{1180591620717411303424}q^{14} \\
& - \frac{456960170972337}{2361183241434822606848}q^{15} + \frac{142002422305063843}{604462909807314587353088}q^{16} - \frac{42072298909516713}{151115727451828646838272}q^{17} \\
& + \frac{200200505748764361347}{618970019642690137449562112}q^{18} - \frac{14638265948130760915489}{39614081257132168796771975168}q^{19} + \frac{131906365631698242585529}{316912650057057350374175801344}q^{20} \\
& - \frac{9394357228788556822106301}{20282409603651670423947251286016}q^{21} + \frac{5172775212796738077414569}{10141204801825835211973625643008}q^{22} \\
& - \frac{23122647151762264092388640049}{41538374868278621028243970633760768}q^{23} + \frac{100142937478526364715663323035}{16615349947311448412975882535043072}q^{24} \\
& - \frac{13782959374844333127420073724585}{21267647932558653966460912964485513216}q^{25} + \frac{942712960849721898089715580942969}{1361129467683753853853498429727072845824}q^{26} \\
& - \frac{16032590720899096777878930958979643}{21778071482940061661655974875633165533184}q^{27} + \frac{542705126894092844763566481082721939}{696898287454081973172991196020261297061888}q^{28} \\
& - \frac{9145824278300848196578701810108867585}{11150372599265311570767859136324180752990208}q^{29} + \frac{614134008964127158792090706089322473689}{713623846352979940529142984724747568191373312}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 15\omega t \Big(\frac{1}{34359738368}q^7 - \frac{21}{137438953472}q^8 + \frac{8133}{17592186044416}q^9 - \frac{74439}{70368744177664}q^{10} + \frac{73263129}{36028797018963968}q^{11} \\
& - \frac{499623993}{144115188075855872}q^{12} + \frac{99873004825}{18446744073709551616}q^{13} - \frac{583572383823}{73786976294838206464}q^{14} + \frac{207097918029177}{18889465931478580854784}q^{15} \\
& - \frac{1101118383076293}{75557863725914323419136}q^{16} + \frac{181027928487647319}{9671406556917033397649408}q^{17} - \frac{903987705646291797}{38685626227668133590597632}q^{18} \\
& + \frac{1128399207720642485559}{39614081257132168796771975168}q^{19} - \frac{5391906398126395414335}{158456325028528675187087900672}q^{20} + \frac{810324712851202898965539}{20282409603651670423947251286016}q^{21} \\
& - \frac{59988234886966619177820625}{1298074214633706907132624082305024}q^{22} + \frac{547966978345711579626727539}{10384593717069655257060992658440192}q^{23} \\
& - \frac{39592403406450440680154556459}{664613997892457936451903530140172288}q^{24} + \frac{177020048789385589346796276671}{2658455991569831745807614120560689152}q^{25} \\
& - \frac{100419542564118386675521171397919}{1361129467683753853853498429727072845824}q^{26} + \frac{883154661207672144678683874822285}{10889035741470030830827987437816582766592}q^{27} \\
& - \frac{61704134546274950797928057424846009}{696898287454081973172991196020261297061888}q^{28} + \frac{535533200137059610882769226114928593}{5575186299632655785383929568162090376495104}q^{29} \\
& - \frac{147899461740377531005772086290320616093}{1427247692705959881058285969449495136382746624}q^{30} \Big) + \\
& + \cos 17\omega t \Big(\frac{1}{1099511627776}q^8 - \frac{3}{549755813888}q^9 + \frac{10447}{562949953421312}q^{10} - \frac{53025}{1125899906842624}q^{11} + \frac{114508227}{1152921504606846976}q^{12} \\
& - \frac{212241627}{1152921504606846976}q^{13} + \frac{183082770177}{590295810358705651712}q^{14} - \frac{573251356053}{1180591620717411303424}q^{15} \\
& + \frac{867113176371531}{1208925819614629174706176}q^{16} - \frac{305508238557921}{302231454903657293676544}q^{17} + \frac{848281497157308969}{618970019642690137449562112}q^{18} \\
& - \frac{2226924492440998995}{1237940039285380274899124224}q^{19} + \frac{177762898477173365}{77371252455336267181195264}q^{20} - \frac{14194831623969455193}{4951760157141521099596496896}q^{21} \\
& + \frac{568783255863224343852197}{162259276829213363391578010288128}q^{22} - \frac{1366948921423508836567365}{324518553658426726783156020576256}q^{23} \\
& + \frac{6625995798145571991029730249}{1329227995784915872903807060280344576}q^{24} - \frac{247572522857131912151395435585}{42535295865117307932921825928971026432}q^{25} \\
& + \frac{4570466011622699585690002999027}{680564733841876926926749214863536422912}q^{26} - \frac{166977816950787710704034509722537}{21778071482940061661655974875633165533184}q^{27} \\
& + \frac{6043080607007496743893788338842109}{696898287454081973172991196020261297061888}q^{28} - \frac{433722904913199878362962864356400093}{44601490397061246283071436545296723011960832}q^{29} \\
& + \frac{3861599517167249695173095652632936727}{356811923176489970264571492362373784095686656}q^{30} \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos 19\omega t \left(\frac{1}{3518437208832} q^9 - \frac{27}{140737488355328} q^{10} + \frac{13049}{18014398509481984} q^{11} - \frac{145497}{72057594037927936} q^{12} \right. \\
& + \frac{171016573}{36893488147419103232} q^{13} - \frac{1369759755}{147573952589676412928} q^{14} + \frac{317039711489}{18889465931478580854784} q^{15} \\
& - \frac{2118784372461}{75557863725914323419136} q^{16} + \frac{212706297401123}{4835703278458516698824704} q^{17} - \frac{1267709148810489}{19342813113834066795298816} q^{18} \\
& + \frac{463360952208257291}{4951760157141521099596496896} q^{19} - \frac{2553098002357268211}{19807040628566084398385987584} q^{20} + \frac{6986167939736723133689}{40564819207303340847894502572032} q^{21} \\
& - \frac{36371418247020245360967}{162259276829213363391578010288128} q^{22} + \frac{5923392511237683038081833}{20769187434139310514121985316880384} q^{23} \\
& - \frac{29554422137125193172453837}{83076749736557242056487941267521536} q^{24} + \frac{18548969288135533076000260691}{42535295865117307932921825928971026432} q^{25} \\
& - \frac{89561300153823800097018100305}{170141183460469231731687303715884105728} q^{26} + \frac{13649879114212508171083678641407}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{27} \\
& - \frac{1027545915611040381247134241593073}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{28} + \frac{38254708458629748905688445393419973}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{29} \\
& - \frac{705104216249397920798468775539577891}{713623846352979940529142984724747568191373312} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 21\omega t \left(\frac{1}{112589906842624} q^{10} - \frac{15}{2251799813685248} q^{11} + \frac{15939}{576460752303423488} q^{12} - \frac{48411}{576460752303423488} q^{13} \right. \\
& + \frac{246140487}{1180591620717411303424} q^{14} - \frac{1059116499}{2361183241434822606848} q^{15} + \frac{523824087161}{604462909807314587353088} q^{16} \\
& - \frac{232615558059}{151115727451828646838272} q^{17} + \frac{3164082583620153}{1237940039285380274899124224} q^{18} - \frac{9942033609231363}{2475880078570760549798248448} q^{19} \\
& + \frac{3818400132854215119}{633825300114114700748351602688} q^{20} - \frac{5509528830263219553}{633825300114114700748351602688} q^{21} \\
& + \frac{7873526432580357772829}{649037107316853453566312041152512} q^{22} - \frac{21352810736961141851325}{1298074214633706907132624082305024} q^{23} \\
& + \frac{7228864084586636268074805}{332306998946228968225951765070086144} q^{24} - \frac{4675996580746262141418525}{166153499473114484112975882535043072} q^{25} \\
& + \frac{24302354276291411326525907235}{680564733841876926926749214863536422912} q^{26} - \frac{60620479858408143090500649045}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{27} \\
& + \frac{19060456030026987396817921728117}{348449143727040986586495598010130648530944} q^{28} - \frac{23090407443079639766787477778137}{348449143727040986586495598010130648530944} q^{29} \\
& + \frac{113164754006873705742320652470645775}{1427247692705959881058285969449495136382746624} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 23\omega t \left(\frac{1}{36028797018963968} q^{11} - \frac{33}{144115188075855872} q^{12} + \frac{19117}{18446744073709551616} q^{13} - \frac{251355}{73786976294838206464} q^{14} \right. \\
& + \frac{343564065}{37778931862957161709568} q^{15} - \frac{3161702349}{151115727451828646838272} q^{16} + \frac{832018661065}{19342813113834066795298816} q^{17} \\
& - \frac{6263670166539}{77371252455336267181195264} q^{18} + \frac{2810198255502023}{19807040628566084398385987584} q^{19} - \frac{18575589773875407}{79228162514264337593543950336} q^{20} \\
& + \frac{3740364580335991701}{10141204801825835211973625643008} q^{21} - \frac{22572323211828498219}{40564819207303340847894502572032} q^{22} \\
& + \frac{33642271086975829633115}{41538374868278621028243970633760768} q^{23} - \frac{189861599239960952907399}{166153499473114484112975882535043072} q^{24} \\
& + \frac{33367642377516442587290399}{21267647932558653966460912964485513216} q^{25} - \frac{178922948891016402190043925}{85070591730234615865843651857942052864} q^{26} \\
& + \frac{60114210327702636267493722831}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{27} - \frac{309674871626618805065699375871}{87112285931760246646623899502532662132736} q^{28} \\
& + \frac{50192961498876998998435088818945}{11150372599265311570767859136324180752990208} q^{29} - \frac{250396414148846588013198184093143}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 25\omega t \left(\frac{1}{1152921504606846976} q^{12} - \frac{9}{1152921504606846976} q^{13} + \frac{22583}{590295810358705651712} q^{14} - \frac{159747}{1180591620717411303424} q^{15} \right. \\
& + \frac{467303179}{1208925819614629174706176} q^{16} - \frac{286222881}{302231454903657293676544} q^{17} + \frac{1277871909201}{618970019642690137449562112} q^{18} \\
& - \frac{5080946001291}{1237940039285380274899124224} q^{19} + \frac{9598760754173175}{1267650600228229401496703205376} q^{20} - \frac{16646385797839737}{1267650600228229401496703205376} q^{21} \\
& + \frac{14031120687967626069}{649037107316853453566312041152512} q^{22} - \frac{44193317577821685621}{1298074214633706907132624082305024} q^{23} \\
& + \frac{17148402020382083976733}{332306998946228968225951765070086144} q^{24} - \frac{12571105535036053026885}{166153499473114484112975882535043072} q^{25} \\
& + \frac{4582728618067524982694357}{42535295865117307932921825928971026432} q^{26} - \frac{12719717699362498927412403}{85070591730234615865843651857942052864} q^{27} \\
& + \frac{282670914608060543113334646631}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{28} - \frac{375651878468779012875432569715}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{250951105270250193264750180698961}{713623846352979940529142984724747568191373312} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 27\omega t \Big(\frac{1}{36893488147419103232} q^{13} - \frac{39}{147573952589676412928} q^{14} + \frac{26337}{18889465931478580854784} q^{15} \\
& - \frac{398925}{75557863725914323419136} q^{16} + \frac{621705477}{38685626227668133590597632} q^{17} - \frac{6464300031}{154742504910672534362390528} q^{18} \\
& + \frac{1906556777841}{19807040628566084398385987584} q^{19} - \frac{15970742625897}{79228162514264337593543950336} q^{20} + \frac{3960596317057749}{10141204801825835211973625643008} q^{21} \\
& - \frac{28772046117767403}{40564819207303340847894502572032} q^{22} + \frac{3166623590997146445}{2596148429267413814265248164610048} q^{23} \\
& - \frac{20788621638704329761}{10384593717069655257060992658440192} q^{24} + \frac{134221490621328814580253}{42535295865117307932921825928971026432} q^{25} \\
& - \frac{816993543691833389670015}{170141183460469231731687303715884105728} q^{26} + \frac{154279630453440092574141765}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{27} \\
& - \frac{885792464869111983652821525}{87112285931760246646623899502532662132736} q^{28} + \frac{635256076721505481796624393661}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{29} \\
& - \frac{3482144386219551430149564229947}{178405961588244985132285746181186892047843328} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 29\omega t \Big(\frac{1}{1180591620717411303424} q^{14} - \frac{21}{2361183241434822606848} q^{15} + \frac{30379}{604462909807314587353088} q^{16} \\
& - \frac{30657}{151115727451828646838272} q^{17} + \frac{811450383}{1237940039285380274899124224} q^{18} - \frac{4461226389}{2475880078570760549798248448} q^{19} \\
& + \frac{2773524993161}{633825300114114700748351602688} q^{20} - \frac{6103005379527}{633825300114114700748351602688} q^{21} + \frac{25374337872077957}{1298074214633706907132624082305024} q^{22} \\
& - \frac{96333156132605733}{2596148429267413814265248164610048} q^{23} + \frac{4422427204825159547}{664613997892457936451903530140172288} q^{24} \\
& - \frac{37764022972220823699}{33230699894622898225951765070086144} q^{25} + \frac{126611984050990917193143}{680564733841876926926749214863536422912} q^{26} \\
& - \frac{399472942426750001175777}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{27} + \frac{156144412906920550667590467}{348449143727040986586495598010130648530944} q^{28} \\
& - \frac{231597370627609704725685951}{348449143727040986586495598010130648530944} q^{29} + \frac{342764136311965381533367727091}{356811923176489970264571492362373784095686656} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 31\omega t \Big(\frac{1}{37778931862957161709568} q^{15} - \frac{45}{151115727451828646838272} q^{16} + \frac{34709}{19342813113834066795298816} q^{17} \\
& - \frac{595119}{77371252455336267181195264} q^{18} + \frac{1041549097}{39614081257132168796771975168} q^{19} - \frac{12075641121}{158456325028528675187087900672} q^{20} \\
& + \frac{3945956922361}{20282409603651670423947251286016} q^{21} - \frac{36410446011591}{81129638414606681695789005144064} q^{22} \\
& + \frac{19787997822337717}{20769187434139310514121985316880384} q^{23} - \frac{156758980546738761}{83076749736557242056487941267521536} q^{24} \\
& + \frac{37462075008920823635}{10633823966279326983230456482242756608} q^{25} - \frac{265926005204513086545}{42535295865117307932921825928971026432} q^{26} \\
& + \frac{462389898951899921462527}{43556142965880123323311949751266331066368} q^{27} - \frac{3021399864491401860311727}{174224571863520493293247799005065324265472} q^{28} \\
& + \frac{610522624064861970238320347}{22300745198530623141535718272648361505980416} q^{29} - \frac{3739610443428028787407930605}{89202980794122492566142873090593446023921664} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 33\omega t \Big(\frac{1}{1208925819614629174706176} q^{16} - \frac{3}{302231454903657293676544} q^{17} + \frac{39327}{618970019642690137449562112} q^{18} \\
& - \frac{356805}{1237940039285380274899124224} q^{19} + \frac{1317344595}{1267650600228229401496703205376} q^{20} - \frac{4015386333}{1267650600228229401496703205376} q^{21} \\
& + \frac{5504306986273}{649037107316853453566312041152512} q^{22} - \frac{26566822019265}{1298074214633706907132624082305024} q^{23} \\
& + \frac{60280919175511011}{1329227995784915872903807060280344576} q^{24} - \frac{62175006739401723}{664613997892457936451903530140172288} q^{25} \\
& + \frac{123572576972321009409}{680564733841876926926749214863536422912} q^{26} - \frac{455136947374091154471}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{27} \\
& + \frac{102485091641215670141565}{174224571863520493293247799005065324265472} q^{28} - \frac{173177659841033873492001}{174224571863520493293247799005065324265472} q^{29} \\
& + \frac{289162632544936653152207187}{178405961588244985132285746181186892047843328} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 35\omega t \Big(\frac{1}{38685626227668133590597632} q^{17} - \frac{51}{154742504910672534362390528} q^{18} + \frac{44233}{19807040628566084398385987584} q^{19} \\
& - \frac{846849}{79228162514264337593543950336} q^{20} + \frac{1644511629}{40564819207303340847894502572032} q^{21} - \frac{21034904499}{162259276829213363391578010288128} q^{22} \\
& + \frac{7543944623457}{20769187434139310514121985316880384} q^{23} - \frac{76037079725541}{83076749736557242056487941267521536} q^{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5617877981501421}{2658455991569831745807614120560689152} q^{25} - \frac{48208253505503535}{10633823966279326983230456482242756608} q^{26} \\
& + \frac{49733543903045529897}{5444517870735015415413993718908291383296} q^{27} - \frac{379695212996723931897}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{28} \\
& + \frac{1415608228387683015179201}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{29} - \frac{9887397161061941567555223}{178405961588244985132285746181186892047843328} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 37\omega t \Big(\frac{1}{1237940039285380274899124224} q^{18} - \frac{27}{2475880078570760549798248448} q^{19} + \frac{49427}{633825300114114700748351602688} q^{20} \\
& - \frac{248925}{633825300114114700748351602688} q^{21} + \frac{2029056727}{1298074214633706907132624082305024} q^{22} \\
& - \frac{13584255927}{2596148429267413814265248164610048} q^{23} + \frac{10176890805785}{664613997892457936451903530140172288} q^{24} \\
& - \frac{13364274811041}{332306998946228968225951765070086144} q^{25} + \frac{131482223258054161}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{26} \\
& - \frac{585846713865095319}{2722258935367507707706996859454145691648} q^{27} + \frac{313305378067197491879}{696898287454081973172991196020261297061888} q^{28} \\
& - \frac{619036987577620067187}{696898287454081973172991196020261297061888} q^{29} + \frac{1192886339735257421599825}{713623846352979940529142984724747568191373312} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 39\omega t \Big(\frac{1}{39614081257132168796771975168} q^{19} - \frac{57}{158456325028528675187087900672} q^{20} + \frac{54909}{20282409603651670423947251286016} q^{21} \\
& - \frac{1161027}{81129638414606681695789005144064} q^{22} + \frac{2477318193}{41538374868278621028243970633760768} q^{23} \\
& - \frac{34654210101}{166153499473114484112975882535043072} q^{24} + \frac{13533650105513}{21267647932558653966460912964485513216} q^{25} \\
& - \frac{147952078280835}{85070591730234615865843651857942052864} q^{26} + \frac{94503080988363075}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{27} \\
& - \frac{873389723875918515}{87112285931760246646623899502532662132736} q^{28} + \frac{241834266671782198929}{11150372599265311570767859136324180752990208} q^{29} \\
& - \frac{1976365018693736716743}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 41\omega t \Big(\frac{1}{126765060022829401496703205376} q^{20} - \frac{15}{126765060022829401496703205376} q^{21} \\
& + \frac{60679}{649037107316853453566312041152512} q^{22} - \frac{671847}{1298074214633706907132624082305024} q^{23} \\
& + \frac{2995966107}{1329227995784915872903807060280344576} q^{24} - \frac{5462985843}{664613997892457936451903530140172288} q^{25} \\
& + \frac{17765138313841}{680564733841876926926749214863536422912} q^{26} - \frac{100896436826679}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{27} \\
& + \frac{267416100878425615}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{28} - \frac{639971669767464507}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{29} \\
& + \frac{733144260743284341549}{713623846352979940529142984724747568191373312} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 43\omega t \Big(\frac{1}{40564819207303340847894502572032} q^{21} - \frac{63}{162259276829213363391578010288128} q^{22} \\
& + \frac{66737}{20769187434139310514121985316880384} q^{23} - \frac{1544565}{83076749736557242056487941267521536} q^{24} \\
& + \frac{3592002325}{42535295865117307932921825928971026432} q^{25} - \frac{54550469415}{170141183460469231731687303715884105728} q^{26} \\
& + \frac{23044705610961}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{27} - \frac{271601339274081}{87112285931760246646623899502532662132736} q^{28} \\
& + \frac{93223364602481379}{11150372599265311570767859136324180752990208} q^{29} - \frac{923251592748397221}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 45\omega t \Big(\frac{1}{1298074214633706907132624082305024} q^{22} - \frac{33}{2596148429267413814265248164610048} q^{23} \\
& + \frac{73083}{664613997892457936451903530140172288} q^{24} - \frac{220563}{332306998946228968225951765070086144} q^{25} \\
& + \frac{4272760479}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{26} - \frac{33724460601}{2722258935367507707706996859454145691648} q^{27} \\
& + \frac{29570255287593}{696898287454081973172991196020261297061888} q^{28} - \frac{90284679892125}{696898287454081973172991196020261297061888} q^{29} \\
& + \frac{513072957187964637}{1427247692705959881058285969449495136382746624} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 47\omega t \Big(\frac{1}{41538374868278621028243970633760768} q^{23} - \frac{69}{166153499473114484112975882535043072} q^{24} \\
& + \frac{79717}{21267647932558653966460912964485513216} q^{25} - \frac{2004375}{85070591730234615865843651857942052864} q^{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5045905977}{43556142965880123323311949751266331066368} q^{27} - \frac{82677235977}{174224571863520493293247799005065324265472} q^{28} \\
& + \frac{37566458018009}{22300745198530623141535718272648361505980416} q^{29} - \frac{474843291131199}{89202980794122492566142873090593446023921664} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 49\omega t \Big(\frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} q^{24} - \frac{9}{664613997892457936451903530140172288} q^{25} \\
& + \frac{86639}{680564733841876926926749214863536422912} q^{26} - \frac{1132521}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{27} \\
& + \frac{5919436003}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{28} - \frac{25134358431}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{29} \\
& + \frac{47287061684545}{713623846352979940529142984724747568191373312} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 51\omega t \Big(\frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} q^{25} - \frac{75}{170141183460469231731687303715884105728} q^{26} \\
& + \frac{93849}{21778071482940061661655974875633165533184} q^{27} - \frac{2547369}{87112285931760246646623899502532662132736} q^{28} \\
& + \frac{6901679517}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{29} - \frac{121356555867}{178405961588244985132285746181186892047843328} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 53\omega t \Big(\frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} q^{26} - \frac{39}{2722258935367507707706996859454145691648} q^{27} \\
& + \frac{101347}{696898287454081973172991196020261297061888} q^{28} - \frac{713055}{696898287454081973172991196020261297061888} q^{29} \\
& + \frac{8001297255}{1427247692705959881058285969449495136382746624} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 55\omega t \Big(\frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} q^{27} - \frac{81}{174224571863520493293247799005065324265472} q^{28} \\
& + \frac{109133}{22300745198530623141535718272648361505980416} q^{29} - \frac{3180459}{89202980794122492566142873090593446023921664} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 57\omega t \Big(\frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{28} - \frac{21}{1393796574908163946345982392040522594123776} q^{29} \\
& + \frac{117207}{713623846352979940529142984724747568191373312} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 59\omega t \Big(\frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} q^{29} - \frac{87}{178405961588244985132285746181186892047843328} q^{30} \Big) + \\
& + \cos 61\omega t \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} q^{30} + O(\varepsilon^{31}).
\end{aligned}$$

Die vorstehende Lösung des freien, ungedämpften Duffing-Oszillators wurde eingehend geprüft:

- a) von Mai/Lelgemann [41] mittels numerischer Integration, basierend auf einer Lierihen-Entwicklung,
- b) von Ettl [7] mittels hochgenauer numerischer Integration, basierend auf einem Programm, das die Integration von Differentialgleichungen mit beliebig vielen signifikanten Nachkommastellen erlaubt.

Eine weitere Kontrolle erlaubt das Bestehen eines Bewegungsintegrals beim freien, ungedämpften Duffing-Oszillator (siehe Abschnitt 11).

Danksagung

Die Autoren danken Herrn Prof. Dr. Dieter Lelgemann für die Unterstützung während ihrer Zusammenarbeit und Herrn Dipl.-Inform. (FH) Martin Ettl für zahlreiche Testrechnungen zur numerischen Absicherung diverser Anwendungsbeispiele.