

Öffentliche Sitzung der K. Akademie der Wissenschaften.

Zur Feier ihres 145. Stiftungstages

wird die K. Akademie der Wissenschaften Montag den 14. März vormittags 11 Uhr eine öffentliche Sitzung halten.

In derselben wird, nach einleitenden Worten des Präsidenten der Akademie, Geheimen Rates Dr. von Heigel, der verstorbenen Mitglieder durch die Klassensekretäre ehrend gedacht werden.

Hierauf wird das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, Professor Dr. Alfred Pringsheim, die Festrede halten:

Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Der Zutritt zu dieser öffentlichen Sitzung steht jedermann frei.

München, den 7. März 1904.

K. B. Akademie der Wissenschaften.

Uebersetzung
der
16.
seiten.
des
alten
der
sen-
chen
im
und
on
en-
Er-

in
in
statisch
eten.
seine
Er-
sein
Aus-
t, be-
seine
paßt
u. be-
nur
seine
und
dürfe
aus-
men-

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 145. Stiftungstages

am 14. März 1904.

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, und brachte in seiner einleitenden Ansprache zunächst den Dank für den höchsten Beweis des Vertrauens zum Ausdruck, das der Regent ihm durch die Ernennung zum Präsidenten bewiesen habe. Er gedachte sodann in längerer, in einer besonderen Schrift der Akademie erschienenen Rede der Verdienste seines Vorgängers, Geheimrats Dr. v. Zittel, um die Wissenschaft im allgemeinen und um die Akademie im besonderen und gelobte, an Hingebung und Pflichttreue keinem seiner Vorgänger nachstehen zu wollen. Er feierte Zittel als den Meister der Paläontologie; als würdigster Nachfolger Pettenkofers habe er das verantwortungsvolle Amt eines Präsidenten der Akademie verwaltet, bedeutende Neuerwerbungen wurden unter seiner Amtstätigkeit gemacht und namhafte Zuwendungen und bedeutende Stiftungen wurden der Akademie zuteil. Wenn auch sein Lieblingsplan, für die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates und die Akademie auf dem Areal der Türkenkaserne einen Neubau entstehen zu sehen, an unüberwindlichen Hindernissen scheiterte, so wurden doch für das alte Akademiegebäude hocheurefreuliche Aufwendungen gemacht. Der K. Staatsregierung und der Volksvertretung gebühre daher der Dank der Akademie für diese Bewilligungen. Eine

Erweiterung der alten Räume sei dringend geboten, und es sei zu hoffen, dass eine solche in Bälde erfolge.

Der Präsident machte sodann folgende geschäftliche Mitteilungen:

Aus unseren Stiftungen konnten eine Reihe wissenschaftlicher Unternehmungen unterstützt und angeregt werden.

So wurden aus der Cramer-Klett-Stiftung und der Münchener Bürgerstiftung bewilligt:

1. 2500 M. für eine Informations- und Sammelreise des Garteninspektors Bernhard Othmer nach Westindien;

2. 2500 M. für eine zoologische Studienreise des zweiten Konservators der zoologischen Staatssammlungen Dr. Doflein in das Gebiet des nördlichen und mittleren Stillen Ozeans. Zu den Kosten dieser Reise hat ihm ausserdem Se. Kgl. Hoheit der Prinz-Regent allergnädigst einen erheblichen Beitrag bewilligt. Ferner haben die Herren Direktoren der Ludwigshafener Farbwerke, Kommerzienräte Brunck und Glaser, Geh. Kommerzienrat R. Siegle in Stuttgart, Reichsrat Graf Moy in München durch Zeichnung von namhaften Summen sich beteiligt; auch sind noch weitere Zuwendungen zu erwarten.

Aus der Königs-Stiftung für chemische Forschungen wurden zu Studienzwecken verliehen:

1. dem Privatdozenten an der Technischen Hochschule Dr. Emil Baur (München) 500 M.;

2. Professor Dr. Oskar Piloty (München) 300 M.;

3. Professor Dr. Karl Hofmann (München) 100 M.

Aus den Renten des Thereianos-Fonds wurde zunächst ein Preis von 800 M. verliehen an

Herrn Ch. Tsountas, Universitäts-Professor in Athen, für sein Werk über Mykenae, das 1897 in englischer Bearbeitung erschienen ist.

Ferner wurden daraus verliehen:

1. 1500 M. an Professor Karl Krumbacher (München) zur Unterstützung der Byzantinischen Zeitschrift;
2. 250 M. an Dr. Paul Marc (München) als weitere nachträgliche Remuneration für das von ihm bearbeitete Verzeichnis mittelgriechischer Urkunden;
3. 900 M. an Professor Adolf Furtwängler (München) zur Fortführung seines Werkes über „Griechische Vasenmalerei“;
4. 1200 M. an Dr. Them. Bolides in Kairo zu Untersuchungen griechischer Handschriften in Ägypten und auf dem Sinai;
5. 600 M. an Gymnasialprofessor Dr. L. Dittmeyer in Würzburg zu den Vorbereitungen für eine neue Ausgabe der zoologischen Schriften des Aristoteles;
6. 600 M. an Gymnasiallehrer und Privatdozent Dr. A. Heisenberg in Würzburg zu Untersuchungen über mittelgriechische Handschriften in Italien;
7. 650 M. zur Anschaffung eines Annackerschen photographischen Apparates zur Aufnahme von Handschriften.

Die Kommission für den Zographos-Fonds hat folgende Preisaufgaben gestellt:

1. „Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums auf Grund der literarischen und monumentalen Überlieferung.“ Endtermin 31. Dezember 1905.
2. „Die Metrik der kirchlichen und profanen Poesie der Byzantiner.“ Endtermin 31. Dezember 1906.

Darauf gedachten die KLASSENSEKRETÄRE der seit März 1903 verstorbenen Mitglieder.

Die philosophisch-philologische Klasse hat zwei Verluste zu beklagen. Am 24. Oktober 1903 starb zu Berlin das korrespondierende Mitglied Professor Dr. ULRICH KÖHLER, ein hervorragender Förderer der griechischen Inschriftenkunde. Ebenfalls zu Berlin starb am 1. November 1903 das auswärtige Mitglied Professor Dr. THEODOR MOMMSEN, der unvergleichliche Kenner des römischen Altertums, welcher unserer Akademie seit dem Jahre 1852 angehört hat.

Die historische Klasse verlor durch den Tod am 19. Mai 1903 ihren Senior JAKOB HEINRICH VON HEFNER-ALTENECK.

Hefner, der seine „mitunter wunderliche Laufbahn“ in seinen „Lebens-Erinnerungen“ selbst beschrieben hat, war am 20. Mai 1811 geboren zu Aschaffenburg, der Residenz des kaum mehr dem Namen nach bekannten, von Napoleon I. für den letzten Mainzischen Fürstprimas Karl von Dalberg geschaffenen Grossherzogtums Frankfurt. In dieser Mainzisch-Aschaffenburg-Atmosphäre wuchs er auch heran. Doch wurde schon der Sinn des Kindes durch das Vaterhaus, einen Musentempel, wie es Dalberg zu nennen pflegte, der Kunst zugewendet. Das Zeichnen und Sammeln wurde seine Lieblingsbeschäftigung, und bald überragte sein Interesse daran das für die gelehrten Studien. Da aber in seiner Jugendzeit die dem deutschen Mittelalter zugewandte romantische Strömung herrschte, widmete er seine Aufmerksamkeit zunächst den gerätlichen Leistungen des Mittelalters — eine Tätigkeit, die freilich damals, wo von Kunstgewerbe kaum mehr die Rede war, „als etwas Absonderliches ohne Wert für das praktische Leben galt“. Tiefer blickte indessen schon der Minister des

Innern, Fürst Ludwig von Öttingen-Wallerstein, der sich die Hebung der Volksbildung, der Gewerbe und der Landwirtschaft zur Aufgabe gesetzt hatte. Er wurde nicht nur der Begründer der Gewerbeschule in Bayern (1833), sein Plan, wie er ihn amtlich vor Hefner und anderen aussprach, ging noch höher: Kunst und Gewerbe sollten nicht länger voneinander geschieden, sondern wieder, wie in der deutschen Vergangenheit, verbunden sein, und zu dem Zwecke neben den Museen für Kunstwerke auch Museen für Industrie und Kunstgewerbe, nicht als Aufbewahrungsorte für Kostbarkeiten und Seltenheiten oder als Schaubuden, sondern als Lehranstalten geschaffen werden. Und wenn der Fürst auch nicht in der Lage war, seinen Gedanken auszuführen, so hatte er doch dem Sammel-fleisse Hefners, wie dieser dankbar anerkannte, eine neue Richtung gezeigt.

Eine noch entscheidendere Anregung erhielt Hefner im Jahre 1839 durch den General Radowitz, in weiteren Kreisen durch seine Tätigkeit im Frankfurter Parlament und als vertrauter Ratgeber König Friedrich Wilhelms IV. von Preussen bekannt. Der geistvolle Mann hatte Wohlgefallen an Hefners Tun, meinte aber, „wenn er etwas schaffen wolle, was Bedürfnis der Zeit sei und eine Zukunft habe, so wäre es ein Werk über die Trachten des Mittelalters, direkt nach gleichzeitigen Kunst-denkmalen und Kunstwerken jeder Art, welche noch nicht veröffentlicht seien“. Der Gedanke, schon 1828 beim Albrecht Dürer-Fest in Nürnberg ausgesprochen, aber nicht ausgeführt, zündete bei Hefner und schon seit 1840 konnten die ersten Lieferungen unter dem Titel „Trachten des christlichen Mittelalters nach gleichzeitigen Kunstdenkmalen“ erscheinen, vollendet 1854 in 3 Bänden mit 420 Kupfertafeln. Das Werk war, obwohl er keine wesentlichen Vorarbeiten benutzen konnte, gleich eine seiner bedeutendsten Leistungen, für die Gegenwart nur dadurch an Wert verringert, dass er genötigt war, in seinen Handzeichnungen zur Darstellung zu bringen, was jetzt auf photographischem Wege ungleich deutlicher und genauer wiederzugeben ist, wenn er auch mit unglaublicher Mühe, die

sich durch den Mangel der rechten Hand erhöhte, es zu seltener Treue freihändiger Wiedergabe gebracht hat.

Das Werk „Kunstwerke und Gerätschaften des Mittelalters und der Renaissance“, drei Bände mit 216 kolorierten Kupfer- tafeln, 1847—1862, steigerte seinen Ruf, der dann in der Publikation „Eisenwerke oder Ornamentik der Schmiedekunst des Mittelalters und der Renaissance“ (1861—70 und 1885—87) seinen Höhepunkt erreichte. Ganz auf seine persönlichen Erfahrungen gestellt und literarischen Studien abhold, sind allerdings die Begleittexte weniger belangvoll als seine Bestimmungen. Auch wurde dieses Missverhältnis fühlbarer im Laufe der Zeit, in welcher sich das literarische Material mächtig häufte. Aber sein seltener Kennerblick blieb ihm nichtsdestoweniger treu, auch durch das zunehmende Alter nicht gemindert.

Hefner war demnach nicht Gelehrter im gewöhnlichen Sinne, aber eine Autorität in seinem Fache und einer der Begründer der deutschen Altertumswissenschaft.

Ein unvergängliches Verdienst hat Hefner sich erworben als Mitschöpfer des Bayerischen Nationalmuseums, das König Maximilian II. hochherzig seinem Volke „zu Ehr und Vorbild“ widmete. Denn er hat nicht bloss einen grossen Teil der kostbaren Sammlungen aus allen Provinzen des Landes zusammengetragen, er hat sie als Vorstand des Museums auch so geordnet, dass sie ein anschauliches Bild von Sitte, Kultur und Kunsttätigkeit Bayerns, ja Deutschlands, von der karolingischen bis in die neuere Zeit bieten. Und was kaum geringer anzuschlagen ist, er verwirklichte auch die Idee des Fürsten Ludwig von Öttingen-Wallerstein und machte das Nationalmuseum zugleich zu einer Lehranstalt für Kunst und Kunstgewerbe. Wenn daher erfreulicherweise der Kunstsinn in immer weitere Schichten unseres Volkes dringt, so hat Hefner einen wesentlichen Anteil daran.

J. H. von Hefner-Alteneck, Lebens-Erinnerungen, München 1899.
H. P[allmann], Jakob Heinrich von Hefner-Alteneck. Zum 90. Geburtstag, Beilage z. Allg. Ztg. 1901, Nr. 113, und J. H. von Hefner-Alteneck. Ein Nachruf, Frankf. Ztg. 1903, Nr. 140, Zweites Morgenblatt.

Ferner starb am 17. Juli 1903 das korrespondierende Mitglied ENGELBERT MÜHLBACHER, Professor an der Universität Wien, ein ausgezeichneter Forscher auf dem Gebiete der älteren deutschen Geschichte.

Öffentliche Sitzung

Zum Schluss hielt Professor Dr. A. PRINGSHEIM, ordentliches Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, die inzwischen im Verlag der Akademie erschienene Festrede:

Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 145. Stiftungstages

am 14. März 1904.

Der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Th. v. Heigel, eröffnete die Sitzung mit einer Rede „zum Andenken an Karl v. Zittel“, welche in einer besonderen Schrift der Akademie erschienen ist.

Sodann machte der Präsident folgende geschäftliche Mitteilungen:

Aus unseren Stiftungen konnten eine Reihe wissenschaftlicher Unternehmungen unterstützt und angeregt werden.

So wurden aus der Cramer-Klett-Stiftung und der Münchener Bürgerstiftung bewilligt:

1. 2500 M. für eine Informations- und Sammelreise des Garteninspektors Bernhard Othmer nach Westindien;

2. 2500 M. für eine zoologische Studienreise des zweiten Konservators der zoologischen Staatssammlungen Dr. Doflein in das Gebiet des nördlichen und mittleren Stillen Ozeans. Zu den Kosten dieser Reise hat ihm ausserdem Se. Kgl. Hoheit der Prinz-Regent allergnädigst einen erheblichen Beitrag bewilligt. Ferner haben die Herren Direktoren der Ludwigshafener Farbwerke, Kommerzienräte Brunck und Glaser, Geh. Kommerzienrat R. Siegle in Stuttgart, Reichsrat Graf Moy in München durch Zeichnung von namhaften Summen sich beteiligt; auch sind noch weitere Zuwendungen zu erwarten.

Aus der Königs-Stiftung für chemische Forschungen wurden zu Studienzwecken verliehen:

1. dem Privatdozenten an der Technischen Hochschule Dr. Emil Baur (München) zu Untersuchungen über die Bildung der Tiefengesteine und der kontaktmetamorphen Gesteine 500 M.;

2. Professor Dr. Oskar Piloty (München) zur Fortsetzung der Untersuchungen über das Murexid und andere Harnsäure-derivate sowie über Derivate des vierwertigen Stickstoffs 300 M.;

3. Professor Dr. Karl Hofmann (München) zur Anschaffung von Präparaten aus Pechblende 100 M.

Der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit teilt mit, dass die mathematisch-physikalische Klasse (am 5. Januar 1904) ihr ordentliches Mitglied Karl Alfred v. Zittel durch den Tod verloren hat; seine Verdienste um die Wissenschaft werden in einer besonderen Gedächtnisrede gewürdigt werden.

Von den korrespondierenden Mitgliedern der Klasse sind im vergangenen Jahre vier gestorben:

der Physiker Josiah Willard Gibbs in New-Haven, am 28. April 1903;

der Mathematiker Luigi Cremona in Rom, am 10. Juni 1903;

der Anatom Karl Gegenbaur in Heidelberg, am 14. Juni 1903;

und der Physiologe Alexander Rollett in Graz, am 1. Oktober 1903.

Hierauf hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr Professor Dr. Alfred Pringsheim, die Festrede: „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.“

Josiah Willard Gibbs.¹⁾

Dem am 28. April 1903 im Alter von 65 Jahren gestorbenen Professor der mathematischen Physik an der Yale Universität in New Haven, Josiah Willard Gibbs, verdankt die Wissenschaft Entdeckungen ersten Ranges in der theoretischen Physik und auch in der reinen Mathematik; er galt darin nach dem Urteile amerikanischer Gelehrter als der Höchststehende von allen lebenden Amerikanern.

Er war am 11. Februar 1839 in New Haven als der Sohn des ausgezeichneten Professors der Theologie an der Yale Universität Willard Gibbs geboren. Den ersten Unterricht empfing er an der Hopkins Grammar School in New Haven; dann am Gymnasium, an dem er wegen seiner Tüchtigkeit vielfach durch Preise belohnt wurde. Im Jahre 1863 erwarb er den Doktorgrad an der Yale Universität und verblieb dann bis zum Jahre 1866 in New Haven, woselbst er Lehrer am Yale Kollege wurde und sich zugleich emsig mit mathematischen und anderen Studien beschäftigte. Er besuchte darauf die Universitäten zu Paris, Berlin und Heidelberg, um sich noch weiter in der Physik und auch in der Mathematik auszubilden. Nach einem Aufenthalte von $3\frac{1}{2}$ Jahren in Europa kehrte er mit allem Wissen in seinem Fache ausgerüstet in die Heimat zurück.

Man erkannte dorten den Wert des jungen Gelehrten und wählte ihn 1871 zum Professor der mathematischen Physik an der Yale Universität zu New Haven; als solcher hat er die Wissenschaft mit seinen hervorragenden Untersuchungen bereichert.

¹⁾ Mit Benutzung des Nachrufs im Yale Alumni Weekly, 1903. 12. Nr. 31; deutsch in Zeitschrift für physikalische Chemie 1903, Bd. 44, S. 1.

Am meisten bekannt ist er durch seine meisterhaften Arbeiten in der Thermodynamik geworden, worin er in der Tat Werke von unvergänglichem Werte geschaffen hat.

Schon seine erste Abhandlung über graphische Methoden in der Thermodynamik der Flüssigkeiten (1873), mit der er seinen ersten Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie lieferte, erwies sein ungewöhnliches Vermögen der Verallgemeinerung. Die zweite gleich darauf folgende Abhandlung: „Eine Methode zur geometrischen Darstellung der thermodynamischen Eigenschaften der Stoffe mittelst Flächen“ rief das grösste Interesse der Fachgenossen hervor. Die bedeutendste ist die berühmte gewordene dritte grosse Monographie über „Das Gleichgewicht heterogener Stoffe“, welche in zwei Teilen in den Jahren 1876 und 1878 in den Transactions of the Connecticut-Academy erschien. In dieser Arbeit sind die Prinzipien der Thermodynamik in allgemeiner und umfassender Weise auf die Gleichgewichtsbedingungen chemischer Verbindungen und physikalischer Mischungen in analytischer Form angewendet. Dieselbe ist der Ausgangspunkt der jetzigen, so viel betriebenen physikalischen Chemie geworden und sie bildet noch immer mit ihrer Fülle von Ergebnissen eine Fundgrube neuer Gesichtspunkte für den theoretischen und experimentellen Physiker; so manche in den letzten Dezennien von verschiedenen Forschern gefundene wichtige thermodynamische Beziehung auf physikalisch-chemischem und rein physikalischem Gebiete ist bereits in jener, früher etwas schwer zugänglichen und deshalb weniger bekannten Schrift teils explizite, teils implizite zu finden. Man kann sagen, dass Gibbs darin einen guten Teil der heutigen physikalischen Chemie durch seinen scharfen Verstand und seine wissenschaftliche Divinationsgabe voraus-erkannte. Die drei thermodynamischen Abhandlungen sind von Ostwald in Leipzig als „thermodynamische Studien“ ins Deutsche übertragen worden; sie sichern Gibbs einen Ehrenplatz für alle Zeiten in der Thermodynamik.

Gibbs wandte sich nun noch einem anderen Gebiete zu, dem der reinen Mathematik, in welchem er nicht mindere Er-

folge erzielte wie in der Thermodynamik. Es handelte sich dabei insbesondere um das Problem der multiplen Algebra, welches vorher schon von anderen Mathematikern behandelt worden war. Gibbs verfolgte dasselbe weiter und kam dabei zu seiner berühmten und fruchtbaren Vektoranalysis. Nachdem er (1878) die Grundlage dieser Lehre entwickelt hatte, wendete er dieselbe mit grossem Geschick auf andere Gegenstände an. Er benützte sie zunächst für die Bahnberechnung der Planeten und Kometen, indem er die früheren Verfahren durch eine Methode ersetzte, welche bei ausserordentlicher Genauigkeit rechnerisch viel einfacher ist und einer weitreichenden Verallgemeinerung sich fähig erweist; die Abhandlung wurde von dem Astronomen Klinkerfuss in Göttingen ins Deutsche übersetzt. — In den Jahren 1882—1889 schrieb er ferner vier Abhandlungen, in denen die Vektoranalysis auf die elektromagnetische Theorie des Lichtes von Maxwell Verwertung fand. Er schuf dadurch der letzteren Theorie eine sichere Grundlage, fand damit eine Erklärung der Farbenzerstreuung und zeigte, dass nach derselben die Lichtbrechung in kristallisierten Körpern der Konstruktion von Fresnel folgen müsste, was später durch genaue Messungen bestätigt wurde; auch gab er eine lehrreiche Vergleichung der elektromagnetischen Theorie des Lichtes mit den älteren Theorien desselben. Es folgten dann noch weitere Anwendungen auf die Kristallographie, auf die Störungsrechnung und auf die Theorie der Bivektoren und deren Benützung für die Darstellung der harmonischen Bewegungen. In einer Rede über die multiple Algebra, die er 1886 als Vizepräsident der amerikanischen Association for the Advancement of Science hielt, ist seine Lehre hierüber zusammengefasst.

Sein letztes grösseres Werk war das über die „Elemente der statistischen Mechanik“, welches in den Festschriften zur 200 jährigen Feier der Yale Universität enthalten ist. Er gibt darin eine Darlegung der Methoden bei der Untersuchung dynamischer Systeme mit einer sehr grossen Anzahl von Freiheiten; indem er, wie schon andere Forscher, solche Methoden gebrauchte,

um die Thermodynamik auf Mechanik zurückzuführen, eröffnete er zugleich der mathematischen Physik ein neues, fruchtbares Gebiet.

Gibbs begründete (1877) den für die Entwicklung der Mathematik in Nordamerika so erfolgreich wirkenden Yale Mathematical Club, in dem er seine Forschungen zuerst mitteilte; bei dem 20 jährigen Jubiläum des Klubs hielt er eine geistreiche Rede „Über Werte“, worin er seine Anschauungen über das Ideal des wissenschaftlichen Forschers darlegte.

Gibbs war ein solches Ideal, soweit es ein Mensch sein kann; die schwierigsten Gegenstände handhabte er mit der grössten Einfachheit und Leichtigkeit und bei der Klarheit seines Denkens traf er immer das Wesen der Sache; stets war er bestrebt bei seinen Arbeiten die Hypothesen auf eine möglichst geringe Anzahl zu reduzieren.

Mit grosser Pflichttreue nahm er sich öffentlichen Institutionen an, so z. B. der Hopkins Grammar School, bei deren Verwaltung er während 22 Jahren tätig war. Für seine älteren Schüler wirkte er durch die ausserordentliche Anschaulichkeit seines Unterrichts in hohem Grade anregend. Er war ausserdem von grosser Anspruchslosigkeit, gegen Jedermann freundlich und hilfsbereit und von edler Gesinnung. Der Yale Universität wird Gibbs, welcher ohne Zweifel einer der geistvollsten Vertreter seiner Wissenschaft gewesen ist, immerdar zum Ruhme und Segen gereichen.

Luigi Cremona.¹⁾

Von Aurel Voss.

Mit dem am 10. Juni 1903 verstorbenen italienischen Mathematiker Luigi Cremona, der seit 1878 unserer Akademie als auswärtiges Mitglied angehörte, ist ein Forscher dahingegangen, dessen wissenschaftliche Tätigkeit gerade in die Blütezeit der Geometrie fiel, welche durch Poncelet, Chasles, Steiner, Plücker, Möbius und andere vorbereitet, in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch die vereinigten Forschungen der deutschen und englischen Geometer Hesse, Clebsch, Sturm, Nöther, Salmon und Cayley hervorgerufen wurde.

Cremona hat nicht allein mit einzelnen hervorragenden Arbeiten in diese Entwicklung selbst mit eingegriffen; seinem nachhaltigen Einflusse und seiner Individualität ist es auch vorzugsweise zu verdanken, dass gegenwärtig das Studium der projektiven Geometrie auf der umfassendsten wissenschaftlichen Grundlage gerade in Italien zu fruchtbarster Ausbildung gelangt ist.

Cremona, geboren den 7. Dezember 1830 in Pavia, nahm kaum 18-jährig schon als begeisterter Anhänger der Erhebung von 1848 an der Verteidigung Venedigs teil. An die Universität Pavia zurückgekehrt, bestand er 1853 das Examen als *ingegnere architetto*, bald darauf dasjenige für das Lehramt in der Mathematik und Physik. Schon 1860 erhielt er die Professur für höhere Geometrie an der Universität Bologna. Hier entstanden alsbald auch seine bedeutendsten Forschungen.

¹⁾ Benutzt wurden bei der Abfassung dieses Nachrufes ausser der *Commemorazione* von G. Veronese (*Acc. dei Lincei Rend.* XII, 5, fasc. 12, 1904) und der dort erwähnten Literatur auch die Druckbogen des durch die Redaktion der *Mathematischen Annalen* freundlichst überlassenen Berichtes über Cremona von M. Nöther.

Zunächst schloss er sich, doch mit vorwiegend analytischer Tendenz, an die Altmeister der synthetischen Geometrie Chasles und Steiner an; seine ersten Arbeiten beziehen sich auf die Eigenschaften der Raumkurven 3. und 4. Ordnung in ihrer Verbindung mit der Theorie der Büschel und Netze vor Flächen zweiter Ordnung. Inzwischen aber erstreckten seine Studien sich bereits weit tiefer; dies zeigt das 1861 entstandene bekannte und weit verbreitete Werk *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*. Cremona unternimmt es hier, eine einheitliche Darstellung der Theorie der algebraischen Kurven zu geben, soweit dies mittelst des damaligen, vorzugsweise auf Chasles und Jonquières, sowie auf Steiner fussenden Standpunktes möglich war. Den leitenden Faden fand er in der Polarentheorie Steiners und Plückers, und die Art, wie er sein Programm bis ins Einzelne durchführte, ist von der grössten Wichtigkeit für die Entwicklung der projektiven Geometrie selbst geworden. 1866 entstand sein zweites Hauptwerk, die *preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, welches das scheinbar schwierige Gebiet, auf dem bis dahin fast nur Analytiker ersten Ranges wie Jacobi, Hesse, Clebsch mit Erfolg gearbeitet hatten, meisterhaft zu bewältigen und durchsichtig zu machen versteht. Es gibt, so äussert sich Nöther in seinem in den Mathematischen Annalen erscheinenden Bericht über Cremonas Wirken, kein zusammenfassendes rein geometrisches Werk, das einen grösseren Einfluss auf die Ausbildung und Handhabung der geometrischen Methoden ausgeübt hätte, als Cremonas Schriften über die ebenen Kurven und Flächen.

In dieselbe Zeit fällt nun auch die Arbeit, die mit Cremonas Namen in der Geschichte der Wissenschaft unzertrennlich verbunden bleiben wird: die Lehre von den allgemeinen eindeutig umkehrbaren algebraischen Transformationen zweier Ebenen, dann auch zweier Räume, in einander. Einzelne derselben, wie z. B. die Kollineation, die zu Steiners quadratischer Verwandtschaft erweiterte Theorie der reziproken Radien u. a. m. waren schon länger bekannt; 1859 hatte Jonquières die nach ihm benannte Transformation zur Konstruktion von Raumkurven verwandt;

auch Magnus hatte schon gelegentlich aus quadratischen Transformationen höhere abgeleitet. Aber erst Cremona stellt sich die umfassende Aufgabe, die Eigenschaften dieser Transformationen überhaupt zu erforschen und ihre Bildung aus allgemeinen Gesetzen herzuleiten. Seiner grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1864 folgt dann unter Verwendung zum Teil erweiterter Prinzipien die grosse Untersuchung über die Geometrie auf den Flächen dritten Grades, für die ihm mit R. Sturm zugleich der Steiner'sche Preis der Berliner Akademie zu Teil wurde. So tritt nun Cremona mit den deutschen Mathematikern, namentlich mit A. Clebsch, dessen algebraische Kunst die analytisch-synthetischen Methoden gleichzeitig zur grössten formalen Eleganz ausbildete, in die engste Verbindung; in der Tat begegnen sich häufig die Arbeiten beider in gegenseitiger Ergänzung, so z. B. bei den Untersuchungen über die Abbildung der algebraischen Flächen (1872), und in den Abhandlungen über eindeutige Raumtransformationen (1871/72) sehen wir Cremonas Ideen in Wechselwirkung mit den Arbeiten Cayleys und den bis auf 1869 zurückgehenden Nöthers.

Cremona wirkte seit 1866 mit seinem früheren Lehrer F. Brioschi und F. Casorati an dem Istituto tecnico zu Mailand. Mit Brioschi zusammen führte er auch von 1866—1877 die Redaktion der *annali di matematica*, bis die Fülle der Arbeit eine erweiterte Redaktion erforderte.

Im Jahre 1873 wurde er als Direktor der Scuola d'ingegneri nach Rom berufen. Infolge der umfassenden Arbeit, die er hier als Organisator, dann auch als Staatsmann fand, tritt seine wissenschaftliche Produktion, die in der Zeit von 1860—72 eine so überaus fruchtbare gewesen war, mehr und mehr zurück. Wir erwähnen noch seine bekannten Lehrbücher, die *Elementi di geometria proiettiva*, Mailand 1873, die *Elementi di calcolo grafico*, Turin 1874, denen sich 1879 die Abhandlung über die reziproken Figuren in der graphischen Statik anreihet.

Mit dem Jahre 1884 endet die Reihe seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen. An äusseren Ehren hat es Cremona

nicht gefehlt. Er war Mitglied vieler Akademien, Ehrendoktor von Dublin, Edinburg, Christiania, Ritter des Ordens pour le mérite etc. etc. Auch in seinem Vaterlande wurden ihm die höchsten Auszeichnungen zu Teil. 1879 zum Senatore del regno ernannt, seit 1897 Vizepräsident des Senates, wirkte er als Organisator und Förderer des Unterrichtswesens mit ebensoviel Hingebung als Erfolg. Seiner mit unermüdlichem Eifer inmitten aller dieser Geschäfte verfolgten Lehrtätigkeit nicht zum wenigsten verdankt Italiens geometrische Produktion die führende Stellung, welche sie gegenwärtig einzunehmen berufen erscheint.

Bis in die letzte Zeit seines Lebens blieb er, getreu dem hochherzigen unerschütterlichen Charakter, mit dem er als Jüngling zu den Fahnen des nach Freiheit ringenden Vaterlandes eilte, auf seinem Posten; auch die deutsche Wissenschaft, der er besonders nahe stand, wird seiner stets dankbar gedenken.

Karl Gegenbaur.¹⁾

Der am 14. Juni 1903 im Alter von nahezu 77 Jahren verstorbene Professor der Anatomie an der Universität Heidelberg, Karl Gegenbaur, wird mit Recht als der bedeutendste Morphologe unserer Zeit, der den grössten Anteil an dem tieferen Verständnis der mannigfaltigen Gestaltungen der Tierwelt gehabt hat, bezeichnet.

Karl Gegenbaur wurde am 21. August 1826 zu Würzburg geboren. Der Vater, ein Beamter von strengen Grundsätzen und grosser Pflichttreue, war zuletzt Rentamtmann in Würzburg; die Mutter, die sich ganz der Erziehung ihrer Kinder hingab, hatte einen lebhaften Sinn für die Natur, namentlich

¹⁾ Mit Benutzung des Nekrologs von Max Fürbringer in der Festschrift der Universität Heidelberg zur Zentennarfeier ihrer Erneuerung durch Karl Friedrich, Bd. II, 1903; der Selbstbiographie von Gegenbaur; und der Biographie in der Münchener medizinischen Wochenschrift, 1896, Nr. 33, S. 775.

besass sie eine nicht gewöhnliche Kenntniss der einheimischen Pflanzen; der Sohn blieb ihr stets voll Dankbarkeit zugetan.

In Würzburg besuchte er die Volksschule und das Gymnasium, in dem damals jede freie Geistesregung unterdrückt wurde. Schon frühe sammelte er auf Anregung der Mutter Tiere, Pflanzen und Steine, zeichnete viel und zergliederte Tiere.

Der Vater wünschte, der Sohn möchte die Laufbahn eines Beamten oder allenfalls eines Arztes erwählen, aber dieser hatte sich von Anfang an mit aller Bestimmtheit für die Naturwissenschaften entschieden. Mit 19 Jahren bezog er die Universität Würzburg, in deren medizinische Fakultät er eintrat, um im Notfalle als Arzt ein Auskommen zu finden. In den Beginn seines medizinischen Studiums fiel die so ungemein glückliche Neugestaltung der medizinischen Fakultät durch die Berufung von ausgezeichneten frischen Kräften, was insbesondere der Energie und der klaren Erkenntnis Rineckers zu verdanken war. Zuerst wurde der junge Albert Kölliker, ein Schüler des berühmten Anatomen J. Henle, aus Zürich berufen, der sich schon als ein Meister in der Mikroskopie und Histologie bekannt gemacht hatte; mit erstaunlicher Arbeitskraft bereicherte er seine Wissenschaft mit neuen Beobachtungen und hielt höchst anregende anatomische, histologische, entwicklungsgeschichtliche und physiologische Vorlesungen und Übungen. Dazu kam dann die Berufung von Rudolf Virchow aus Berlin für die pathologische Anatomie, welcher seine bedeutendsten Arbeiten in Würzburg ausführte oder vorbereitete und durch seine geistvollen Vorträge die Schüler mit fortriss; der mächtige Einfluss, den er auf die wissenschaftliche Medizin ausübte, kam zunächst Würzburg zu Gute. Auch Joseph Scherer ist zu nennen, ein früherer Arzt und dann Schüler Liebig's in Giessen, der als einer der ersten medizinische Chemie las und die Chemie zur Erforschung der Zusammensetzung des Körpers anwandte. Diesen schlossen sich bald einheimische jüngere Forscher an: Franz Leydig, der Prosektor am anatomischen Institut und Privatdozent für mikroskopische Anatomie, ein äusserst feiner Beobachter, und Heinrich Müller, dem wir

ausgezeichnete Untersuchungen über die Netzhaut und das Sehen verdanken. Das war eine herrliche Zeit und Jedem, der das Glück hatte, sie mitzuerleben, wird sie unvergesslich bleiben; es war ein Eifer ohne Gleichen, ein gemeinsames frohes Arbeiten von für die Wissenschaft begeisterten Lehrern und Schülern, und die Zeit der höchsten Blüte für die Würzburger medizinische Fakultät. Eine grosse Anzahl von jungen talentvollen Forschern, die ihre ersten wissenschaftlichen Arbeiten bei ihren Lehrern machten, fanden sich zusammen. Auch Gegenbaur empfing diese Anregung und er betrieb, seiner Neigung entsprechend, emsig Anatomie und Zoologie. Bald fing auch er an wissenschaftlich tätig zu sein; noch während seiner Studentenzeit kamen Abhandlungen über den Schädel des merkwürdigen Kiemenmolchs der mexikanischen Seen, des Axolotl, über Tasthaare und über die Entwicklung der zu den Mollusken gehörigen Gastropoden zur Veröffentlichung. Aber er musste, um Doktor der Medizin zu werden, auch klinische Fächer betreiben und die medizinischen Prüfungen bestehen; zu diesem Zwecke nahm er für zwei Jahre eine Stelle als Assistent bei dem erblindeten internen Kliniker K. Fr. Marcus neben Nikolaus Friedreich, dem späteren Heidelberger Kliniker, und Klinger an; er hielt sogar Kurse über Auskultation und Perkussion, wobei ich ihn kennen lernte. Obwohl er durchaus keine Neigung zu der Tätigkeit eines praktischen Arztes hatte, so waren ihm doch später die Kenntnisse in der Medizin von Nutzen für den Unterricht der Mediziner. Im Jahre 1851 promovierte er als Doktor der Medizin mit einer Dissertation: „de limacis evolutione“.

Nun entschloss er sich definitiv, sich ganz der Naturforschung, speziell der Anatomie und Zoologie, zu widmen. Er trat zunächst zu seiner weiteren naturwissenschaftlichen Ausbildung eine grössere Reise nach Norddeutschland an; vor Allem war es hier Johannes Müller in Berlin, der als erster Physiologe seiner Zeit durch seine Werke und seine Vorlesungen auf Jeden einen unauslöschbaren Eindruck machte. Die von seinem mächtigen Geiste ausgehende Bewegung wirkt

noch in unsere Tage fort. Er war auch der Schöpfer der vergleichenden Anatomie der niederen Tiere und damals lebhaft mit solchen Untersuchungen beschäftigt. Auf sein Anraten besuchte Gegenbaur die Insel Helgoland, um die niederen Seetiere kennen zu lernen.

Besonders förderlich für seine weitere Entwicklung war eine mit Kölliker und Heinrich Müller (1852) unternommene wissenschaftliche Reise nach Süditalien und Sizilien zum Studium der reichhaltigen Meeresfauna. Durch die namentlich in Messina während eines Jahres mit dem grössten Fleisse ausgeführten fruchtbringenden Untersuchungen erhielt er die reichste Anregung und das Material zu weiteren Arbeiten; eine Anzahl von wertvollen Schriften über niedere Seetiere enthielten die nächste Ausbeute dieses für ihn so wichtigen Aufenthaltes. Er war vorzüglich die Veranlassung, dass er nicht wie die meisten damaligen Anatomen der Ausbildung der Zell- und Protoplasmatheorie nachging, sondern ganz unbekümmert um die herrschenden Strömungen seinen eigenen Weg einschlug und den grossen Traditionen der vergleichend-anatomischen Forschung von Cuvier, Meckel und Johannes Müller folgte.

Nach Würzburg zurückgekehrt habilitierte er sich (1854) für Anatomie und Physiologie mit einer ausgezeichneten Abhandlung: Zur Lehre vom Generationswechsel und der Fortpflanzung bei Medusen und Polypen, durch welche er viel zur Aufklärung dieser durch Steenstrup entdeckten merkwürdigen Fortpflanzungsweise beitrug.

Es folgte eine arbeitsfreudige Zeit, in der viele bedeutende Beiträge zur Kenntnis des Baues und der Entwicklung wirbelloser Tiere entstanden, aus denen die Untersuchungen über die Anatomie und die Entwicklungsgeschichte der im Tiefmeer vorkommenden Schneckenordnungen der Pteropoden und Heteropoden hervorzuheben sind.

Gegenbaur hatte sich eben um die zootomische Prosektur an der anatomischen Anstalt an Leydigs Stelle beworben, als (1855) ein Ruf als ausserordentlicher Professor der Zoologie bei der medizinischen Fakultät der Universität Jena an Oskar

Schultzes Stelle an ihn erging. Man hätte keine bessere Wahl treffen und Gegenbaur keinen besseren Ort für seine Tätigkeit erhalten können als das liebliche Jena, wo er volle geistige Freiheit der Forschung, den Einfluss alter grosser Traditionen und den Umgang mit bedeutenden Menschen fand. Es war für ihn wohl die glücklichste Periode seines Lebens, voll von Schaffenslust und von Erfolgen.

Nachdem er drei Jahre in dieser Stellung Vorlesungen über Zoologie, vergleichende Anatomie, allgemeine Anatomie und Entwicklungsgeschichte sowie zootomische und histologische Übungen gehalten hatte, wurde er nach dem Tode von Huschke (1858) zum ordentlichen Professor der Anatomie und Zoologie gewählt; die Physiologie wurde damals auf den Wunsch Gegenbaur's von der Anatomie abgetrennt, da das Gebiet für den akademischen Lehrer zu gross geworden war und er nicht mehr die nötigen physikalischen und chemischen Kenntnisse zu besitzen glaubte.

Seine bemerkenswerte Eintrittsrede in die Fakultät hatte den Titel: *de animalium plantarumque regni terminis et differentiis*.

Die neue Stellung als deskriptiver Anatom mit ihren vielen Verpflichtungen als Lehrer veranlassten ihn seine wissenschaftliche Tätigkeit mehr der Erforschung der Wirbeltiere zuzuwenden und die Untersuchung der Wirbellosen aufzugeben. Damit schloss die erste Periode seiner wissenschaftlichen Tätigkeit (1851—1862), in der er sich als einen der hervorragendsten Förderer der vergleichenden Anatomie erwiesen hatte, ab. Aber die neue Richtung zeitigte erst die reifsten Früchte seiner Forschung; er begann seine berühmten Lehrbücher herauszugeben sowie seine Arbeiten auf dem Gebiete der Entwicklungsgeschichte und Gewebelehre der Wirbeltiere auszuführen, insbesondere die zur vergleichenden Anatomie des Skelets, welche ihn unbestritten zum ersten deutschen Morphologen erhoben.

Ein glückliches Geschick liess ihn mit Ernst Haeckel bekannt werden. Die beiden hatten sich in Würzburg kennen gelernt, als Gegenbaur eben von seiner sizilianischen Reise

zurückgekehrt war und der 7 $\frac{1}{2}$ Jahre jüngere Haeckel in Würzburg Medizin studierte, und gegenseitig tiefen Eindruck aufeinander gemacht; später trafen sie sich wieder in Jena, wohin Haeckel, erfüllt von seinem Aufenthalt bei Johannes Müller, gekommen war. Auf Zureden Gegenbaurs habilitierte sich Haeckel in Jena für Zoologie, von wo ab beide eine innige, für beide Teile gleich fruchtbare Freundschaft verband. Auf der einen Seite der ernste erfahrene Forscher, der seine Schlüsse auf die möglichst feste Basis von Beobachtungen aufbaute, auf der anderen Seite der feurige, begeisterte Denker mit öfter allzu kühnem Ideenfluge, der allerdings später in seinem Streite um die Weltanschauungen die strengen Bahnen der Naturforschung verliess.

Gegenbaur nahm im Jahre 1873, nachdem er ein Jahr vorher einen Ruf nach Strassburg abgelehnt hatte, einen solchen an die Universität Heidelberg an. Mit schwerem Herzen trennte er sich von dem geliebten Jena. Er sollte aber in Heidelberg, woselbst er eine ungemein produktive Tätigkeit als Forscher und als akademischer Lehrer entfaltete, den Höhepunkt seines Schaffens erreichen; aus seiner Schule gingen daselbst zahlreiche talentvolle Schüler, die er zu selbständigem Denken anzuleiten wusste, hervor.

Vier Dezennien hindurch (seit 1861) beschäftigte ihn die Aufhellung des Baues, der vergleichenden Anatomie und der Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere sowie die so vielfach diskutierte Auffassung ihrer einzelnen Teile. Es sind zunächst histologische Fragen z. B. über den Bau und die Entwicklung der Wirbeltiereier, dann über die Bildung des Knochengewebes, über primäre und sekundäre Knochenbildung mit besonderer Beziehung auf die Lehre vom Primordialschädel, welche zu den grössten Leistungen der Histogenese gehören.

Die zahlreichen Arbeiten Gegenbaurs über die Genese des Skeletsystems der Wirbeltiere, das Rumpf-, Kopf- und Gliedmassenskelet, enthalten seine hervorragendsten Leistungen; die Schlussfolgerungen, die er aus seinen Beobachtungen unter meisterhafter Verbindung der vergleichend-anatomischen und

entwicklungsgeschichtlichen Betrachtung zog, haben diesem Teil der Morphologie eine ganz neue Richtung gewiesen.

Es dienten ihm dabei vorzüglich die Selachier, eine Fischordnung, zu der der Haifisch gehört, als Objekte für die Erkenntnis der Skelettformen der höheren Wirbeltiere. In seinen Abhandlungen über das Kopfskelett der Selachier und über die Metamerie des Kopfes und die Wirbeltheorie des Kopfskelettes betrat er das berühmte Problem der Wirbeltheorie des Schädels. Nachdem zuvor Huxley die Unhaltbarkeit der von Göthe und Oken gegebenen Formulierung dieser Theorie nachgewiesen hatte, benützte Gegenbaur ein neues Mittel, nämlich die Zahl der Visceralbogen und die Art der Kopfnervenverteilung, um die Zahl der im Schädel enthaltenen Wirbel zu bestimmen.

Über das Rumpfskelett berichtet vorzüglich seine Arbeit über die Entwicklung der Wirbelsäule bei den Amphibien und Reptilien, über das Gliedmassenskelett die bahnbrechenden Abhandlungen über die Bildung des Fuss skeletts der Vögel und des Brustgürtels der Fische, über den Carpus und Tarsus, den Schulter- und Beckengürtel der Wirbeltiere und die Brustflossen der Fische. Indem er von der Ontogenese ausgehend bis zu den höchsten Entwicklungsformen der Gliedmassen vordrang, kam er zu seiner noch bestrittenen Archipterygiumtheorie, die es ermöglichte, die mannigfachen Formen des Extremitätenskeletts bei den Wirbeltieren auf eine gemeinsame Grundform zurückzuführen.

In seinen Abhandlungen über die Stellung und Bedeutung der Morphologie, über Caenogenese sowie über Ontogenie und Anatomie in ihren Wechselbeziehungen betrachtet wird die Methodik seiner Forschung dargelegt.

Im Jahre 1875 begründete er das reichhaltige morphologische Jahrbuch, eine Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte, von der er 29 Bände herausgab.

Schliesslich müssen auch seine ausgezeichneten Lehrbücher Erwähnung finden. Zuerst erschienen die Grundzüge der vergleichenden Anatomie in 2 Auflagen, dann der weit verbreitete

Grundriss der vergleichenden Anatomie ebenfalls in 2 Auflagen, in denen er die Wirbellosen und die Wirbeltiere behandelte und die Lehre von der Descendenz und Selektion zur vollen Geltung brachte. Hierauf folgte die grosse zweibändige vergleichende Anatomie der Wirbeltiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen, die reife Frucht zwanzigjähriger Arbeit; er gibt darin eine genealogische Darstellung der Organe von ihren ersten Anfängen bis zu ihren höchsten, in der Zuchtauslese mehr und mehr vervollkommeneten Entwicklungsstufen. Das Lehrbuch der Anatomie des Menschen, welches 7 Auflagen erlebte, ist keine trockene Aufzählung und Beschreibung der Teile, es brachte vielmehr die fertigen anatomischen Formen des Menschen in innigen Zusammenhang mit denen der übrigen Tiere, sowie mit ihrer Entwicklung und ihren physiologischen Leistungen, so dass ihre morphologische und physiologische Bedeutung klar hervortritt. So entstand ein lebensvolles Bild des Werdens des Menschen und seiner Verwandtschaft mit den anderen Organismen, durch das die descriptive Anatomie als eine erklärende Wissenschaft sich darstellt.

Gegenbaur hat nach dem Gesagten die Morphologie mit einer grossen Anzahl wichtiger Tatsachen bereichert und durch seine grossen Erfahrungen und sein tiefes Denken der vergleichenden Forschung neue fruchtbare Probleme eröffnet sowie ihr die nächsten Wege und Ziele gewiesen. Er war eine ernste, nur seiner Wissenschaft dienende Natur, eine vornehme, imponierende Persönlichkeit und trotz aller Ehrungen und Anerkennungen, denen er abhold war, ein von jeder Eitelkeit freier, zielbewusster, wahrheitsliebender Naturforscher, der für die von ihm klar erkannte Aufgabe alle seine Kräfte einsetzte. Auch als Mensch war er durch seine Zuverlässigkeit und die Reinheit seines Charakters ein leuchtendes Vorbild.

Alexander Rollett.¹⁾

Am 1. Oktober 1903 ist der Professor der Physiologie und mikroskopischen Anatomie an der Universität zu Graz, Alexander Rollett, im Alter von 69 Jahren gestorben. Mit ihm ist wieder einer der älteren Vertreter seiner Wissenschaft, welche den Jüngeren die Wege geebnet haben, dahin gegangen. Er hat als Histologe die feinere Struktur der Gebilde des Tierkörpers und als Physiologe die verwickelten Erscheinungen des Lebens mit grösster Gewissenhaftigkeit, Scharfsinn und Ausdauer durch Beobachtungen und Versuche zu erforschen und die Ergebnisse nüchtern und vorurteilsfrei zu deuten gesucht; er hat dadurch der Histologie und Physiologie in mehreren wichtigen Gebieten sichere Grundlagen geschaffen.

Alexander Rollett wurde als der Sohn eines angesehenen Arztes zu Baden bei Wien am 14. Juli 1834 geboren; auch der Grossvater war Arzt. Vater und Grossvater hatten, wie früher so viele Ärzte, lebhaftes Interesse für die umgebende Natur; sie legten reiche naturhistorische und anthropologische Sammlungen an, welche sie der Stadt Baden zum Geschenke machten, woselbst sie in dem Rollett-Museum aufgestellt sind. Von ihnen hatte der junge Rollett die Liebe zur Naturwissenschaft und die Befähigung zu scharfer Beobachtung erhalten, so dass er als Mediziner die damaligen grossen Lehrer der Wiener Schule: Hyrtl, Rokitansky, Scoda, Oppolzer, Arlt, Schuh mit vollem Verständnis auf sich wirken lassen konnte. Neben der Medizin betrieb er eifrig Botanik bei Unger, sowie

¹⁾ Mit Benutzung der Nekrologe von O. Zoth, Archiv für die gesamte Physiologie, 1904, Bd. 101; von v. Ebner, Wiener klinische Wochenschrift, 1903, Nr. 48; Klemensiewicz, Mitteilungen des Vereines der Ärzte in Steiermark, 1904, Nr. 1. — Klemensiewicz, Festrede aus der Grazer Tagespost, 1893, Nr. 333.

Chemie bei Schrötter und Redtenbacher. Das war noch die gute alte Zeit, in welcher der Mediziner an den Naturwissenschaften denken und den Sinn für Beobachtung schärfen lernte, gegenüber der hastigen Gegenwart, in der so Viele ohne eine sichere Grundlage und ohne genügendes Verständnis der Vorgänge des Lebens ans Krankenbett zu kommen trachten, um nützliche Regeln für ihr praktisches Handeln zu erlernen. Schon als Student fing Rollett an im physiologischen Laboratorium bei Ernst Brücke zu arbeiten, der dadurch auf den talentvollen Jüngling aufmerksam wurde und ihn alsbald nach Vollendung der medizinischen Studien zum Assistenten erwählte. Nun begann eine Zeit emsiger Arbeit, besonders angeregt durch seine Lehrer Brücke und Carl Ludwig und den Umgang mit deren reiferen Schülern. Wie hoch ihn seine Lehrer schätzten und wie viel sie sich von ihm versprochen, das beweist, dass sie ihn dringend für die Professur der Physiologie und mikroskopischen Anatomie an der Universität Graz, die damals durch Errichtung einer medizinischen Fakultät vervollständigt worden war, empfohlen. So wurde der junge Dr. Rollett im Alter von 29 Jahren ordentlicher Professor. Er hat seine Gönner nicht getäuscht; mit ihm zog der Geist strenger naturwissenschaftlicher Forschung in die medizinische Fakultät ein. Bald hatte er sich durch seine wissenschaftliche Tätigkeit, in einem vorläufig notdürftig eingerichteten Laboratorium, zu einem der vortrefflichsten und angesehensten Physiologen aufgeschwungen; es sammelten sich zahlreiche Schüler um ihn und die Universität Graz, der er 40 Jahre getreu angehörte, pries ihn als eine ihrer ersten Kräfte. Später wurde ihm ein neues Institut gebaut, das mit allen Hilfsmitteln für den Unterricht und die Forschung versehen war und das dadurch als eines der besten seiner Zeit galt.

Rollett war noch ein allseitig ausgebildeter Physiologe, er verstand es alle Hilfsmittel zur Untersuchung der Lebensvorgänge: die Lehren und Methoden der Physik, der Chemie und der mikroskopischen Anatomie, welche letztere damals noch zu den Aufgaben des Physiologen gehörte, mit Meister-

schaft anzuwenden. Als solcher war er einer der letzten Abkömmlinge der durch Johannes Müller inaugurierten grossen deutschen physiologischen Schule in der Mitte des vorigen Jahrhunderts, welche durch das Experiment die Vorgänge des Lebens zu ergründen suchte. In dieser Blütezeit der Physiologie, wo jedes Eindringen reiche Ernte gab, glaubte man viele dieser Vorgänge auf einfache physikalische und chemische Prinzipien zurückgeführt und erklärt zu haben; aber es zeigte sich bei weiterer Verfolgung, dass die Vorgänge doch viel verwickelter sind als man sich dies bei der ersten Inangriffnahme gedacht hatte. Die Nachfolger hatten es ungleich schwieriger mit dem weiteren Ausbau der Lehre, so dass man sogar zu zweifeln begann, ob man mit den physikalischen und chemischen Kräften ausreiche und glaubte, noch unbekannte Kräfte zu Hilfe nehmen zu müssen, wie zur Zeit der Naturphilosophie. Dies verführte auch so Manche dazu, sich in gewagten Spekulationen über das Geschehen im Organismus zu ergehen. Es ist allerdings verlockender in kurzer Zeit durch überraschende Hypothesen zu glänzen oder bestehende Anschauungen auf ungenügende Versuche hin zu bezweifeln, als Jahre lang der strengen Arbeit des Experiments zu obliegen und nur Schritt für Schritt vorwärts zu kommen. Ein solcher echter Naturforscher letzterer Art war Rollett. Mit ausgebreiteten Kenntnissen und Erfahrungen in fast allen Gebieten der Physiologie ausgerüstet, hatte er sich das Vermögen scharfer Beobachtung erworben, durch die er alsbald das Wesentliche einer Erscheinung erkannte; von unermüdlicher Ausdauer und Lust zum Arbeiten ruhte er nicht eher bis er durch zahlreiche mit peinlicher Sorgfalt und mit feinsten Methodik angestellte Beobachtungen und Versuche das vorgesteckte Ziel so weit als möglich erreicht hatte. Er war wohl auch ein tiefer Denker, der die Möglichkeiten bei Erklärung der Erscheinungen erwog, dieselben aber nur benützte, um sie durch weitere Untersuchungen zur Entscheidung zu bringen. Er hielt daran fest, dass bei dem jetzigen Stande der Physiologie die Ermittlung von Kenntnissen das Wichtigste und Notwendigste sei. Dadurch

waren seine Arbeiten Muster der Zuverlässigkeit und sie bereicherten die Wissenschaft mit Erkenntnissen, die wertvolle Bausteine zu der Lehre vom Leben bilden. Er konnte zwar ein recht scharfer Kämpfer gegen unberechtigte Einwände und Angriffe sein, aber von dem persönlichen Ton, wie er sich jetzt leider öfters in der Wissenschaft findet, hielt er sich frei; seine Polemik bestand meist darin, durch erneute Beobachtungen den Gegner zu überzeugen.

Vitalistischen Anschauungen war er von Grund aus abgeneigt. Wenn er auch zugab, dass wir mit unseren heutigen physikalischen und chemischen Kenntnissen nicht ausreichen, um die Lebenserscheinungen zu erklären, so war er doch überzeugt, dass ausser diesen Kräften keine anderen wirksam sind und wir nur noch zu wenig von ihnen wissen.

Die wertvollsten und zahlreichsten Arbeiten von Rollett, die ihn während 25 Jahren beschäftigten, sind die über die feinere Struktur und die Physiologie des quergestreiften Muskels. Bei seinen Lehrern Brücke und Ludwig hatte er das Mikroskop als Hilfsmittel für die Lösung physiologischer Fragen zu gebrauchen gelernt; man hatte früher vorzüglich nur die toten Gebilde betrachtet, bis man einsah, dass die Beobachtung der Gebilde in ihrer lebendigen Tätigkeit, im überlebenden Zustande, die wichtigsten Aufschlüsse für das Geschehen in ihnen gibt. Rollett war es, der durch seine mikroskopischen Beobachtungen viel zu dieser Erkenntnis beigetragen hat. Es war hauptsächlich das seit langer Zeit die Forschung beschäftigende merkwürdige Problem der Muskelkontraktion, welches ihn dazu führte; durch drei grosse histologische Untersuchungen hat er eine feste Grundlage für eine einstige Theorie der Muskelkontraktion geschaffen, jedoch konnte er sich nicht entschliessen, eine neue Hypothese zu den vielen vorhandenen über das Zustandekommen der Muskelkontraktion aufzustellen. Zahllose Arbeiten der Histologen lagen damals hierüber vor, jedoch mit den widersprechendsten Resultaten und Ansichten; Rollet gelang es durch eiserne Ausdauer, durch Einführung neuer wertvoller Untersuchungsmethoden z. B. der Vergoldungsmethode, des Polari-

spektromikroskops oder des Spektropolarisators, zu dessen Herstellung er eingehende physikalische Studien über die Farben der Newton'schen Ringsysteme und die Farbenordnung dünner Blättchen von Newton gemacht hatte, ferner durch Beobachtung der Muskeln vieler Tiere, namentlich niederer Tiere wie der Käfer, Wespen, Ameisen, Fliegen, Grillen, Krebse, der Seepferdchen und der Fledermäuse eine Fülle von Tatsachen über den sehr verwickelten feineren Bau der Muskeln aufzufinden. Er lehrte uns die kleinsten Teilchen kennen, aus denen die Muskelfasern zusammengesetzt sind, ihr merkwürdiges Verhalten zum polarisierten Lichte, die Lageveränderungen derselben und die Änderung der doppelbrechenden und einfach brechenden Substanz bei der Kontraktion. Es wurde dadurch der Grund der grossen Verschiedenheit in der Struktur der Muskeln verschiedener Tiere aufgehehlt.

Darnach kamen Arbeiten zur Physiologie der Muskeln.

In einer interessanten Untersuchung über die verschiedene Erregbarkeit funktionell verschiedener Nervmuskelpreparate (1870—1875) wurde die zuerst von Ritter gemachte Beobachtung mit Sicherheit bestätigt, dass bei elektrischer Erregung der motorischen Nerven des Frosches die Beugemuskeln der Beine bei geringerer Reizstärke antworten als die Streckmuskeln und sich kräftiger zusammenziehen; dass sich bei wachsender Reizstärke die beiden das Gleichgewicht halten, bei grosser Reizstärke aber die Strecker überwiegen. Er erklärte dies anfangs durch die Annahme, dass schwache Reize in jedem Massenelement der Beuger eine grössere Summe lebendiger Kraft auslösen als in jedem Massenelement der Strecker, und dass bei zunehmender Reizstärke das Maximum der lebendigen Kräfte bei den Beugern früher erreicht wird als bei den Streckern; oder dass die Nervenfasern für die Beuger eine höhere Erregbarkeit haben als die für die Strecker; später schloss er sich Grützner an, nach dem in den funktionell verschiedenen Muskeln flinke und träge Fasern in ungleichem Verhältnis sich vorfinden. Bei diesen Versuchen bediente er

sich mit Vorteil des von ihm erfundenen Antagonistographen und des rotierenden Quecksilberschlüssels.

An die drei grossen anatomischen Untersuchungen über den feineren Bau des Muskels schloss sich (1887) eine umfassende Arbeit zur Physiologie der Käfermuskeln an. An den kleinen Schenkelmuskeln dieser Tiere machte er mit Hilfe des Marey'schen Myographen, dessen Angaben er einer eingehenden mathematischen Analyse unterworfen hatte, seine subtilen Experimente über den Zuckungsverlauf; er zeigte, dass die Muskeln von *Dytiscus*, eines fleischfressenden Schwimmkäfers, äusserst flinke und energische, aber rasch sich erschöpfende Bewegungen machen, während die des pflanzenfressenden Schwimmkäfers *Hydrophilus*, träge und ausdauernde Kontraktionen ausführen; der dem *Dytiscus* nahestehende *Cybister* hat flinke Muskeln, der Hirschkäfer, die Laufkäfer, der Maikäfer dagegen träge wie der *Hydrophilus*. Auch bei den Muskeln höherer Tiere zeigten sich ähnliche Verschiedenheiten des Zuckungsverlaufes. Die der Fledermäuse sind träger als die der Frösche, so träge wie die trägsten Käfermuskeln von $\frac{1}{2}$ Sekunde Zuckungsdauer; noch viel träger als weisse Kaninchenmuskeln, jedoch flinker als rote Kaninchenmuskeln und Schildkrötenmuskeln.

Weiterhin untersuchte er das von besonderen Bedingungen abhängige, oft Stunden lang andauernde merkwürdige Wellenspiel an überlebenden Insektenmuskeln, das er an durchsichtigen Mückenlarven (*Corethra plumicornis*) oder an frisch geschnittenen Insektenmuskeln mit dem Mikroskop beobachtete. Es sind freiwillige teils blitzschnelle, energische totale Zusammenziehungen eines Muskelbündels noch lebenskräftiger Tiere, teils sehr langsam ablaufende kurze Knoten bei absterbenden Muskeln. Es wurde die Verschiedenheit dieser Welle von der viel rascher sich fortpflanzenden langen Kontraktionswelle am Froschmuskel nachgewiesen, sowie von der langsamen und kurzen Welle, welche sich nach mechanischer Reizung des Muskels bei Wirbeltieren nach beiden Seiten hin fortpflanzt. Die weissen Wirbeltiermuskeln zeigen eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit und grössere Veränderlichkeit als die

roten. Es kam auch die Beziehung der Kontraktionswellen zu der Einzelzuckung der quergestreiften Muskelwellen in Betracht.

Die zweitgrösste Arbeit Rolletts zur Muskelphysiologie (1896) handelt von der Veränderlichkeit des Zuckungsverlaufes quergestreifter Muskeln bei fortgesetzter periodischer Erregung und bei der Erholung nach derselben. Die Versuche wurden an Froschmuskeln, wiederum mit dem Marey'schen Myographen und dem rotierenden Quecksilberschlüssel angestellt. Es gelang ihm an Muskelpräparaten mit erhaltenem Kreislauf Reihen bis zu 3600 Einzelzuckungen in genau bestimmten Intervallen und nach verschiedenen langen Erholungspausen zu erhalten. Später wiederholte er diese Versuche an Säugetiermuskeln, wobei er die physiologische Verschiedenheit der quergestreiften Muskeln der Kalt- und Warmblüter fand; für letztere verwendete er den Abziehermuskel seines eigenen kleinen Fingers. Er zeigte, dass beim Warmblütermuskel die Zuckungsdauer in Reihen von Einzelzuckungen erhalten bleibt, während sie bei Kaltblütermuskeln eine sehr grosse und zunehmende Dehnung erfährt.

Eine zweite wichtige Reihe von Arbeiten Rolletts, die sich auf die Jahre 1861—1881 erstreckt, befasst sich mit dem Blute. Es waren mikroskopische, physikalische und physiologisch-chemische Untersuchungen über die roten Blutkörperchen und den in ihnen enthaltenen merkwürdigen roten eiweissartigen Farbstoff, der bei der Aufnahme des Sauerstoffs in den Körper eine so grosse Rolle spielt. Er gab zunächst viele Aufschlüsse über die Struktur der roten Blutkörperchen; im Anschluss an die Lehren Brückes waren sie ihm Zellen mit einem elastischen membranlosen hyalinen Stroma von wabigem Bau, in dessen Maschen das formlose Endosoma des Farbstoffs liegt. Indem er die Blutkörperchen in Leimgallerte einschloss, konnte er durch Druck auf feine Schnittchen die grosse Dehnbarkeit derselben schlagend dartun, während er ihre Kontraktilität widerstritt. Er studierte ferner die Wirkung von allerlei Einflüssen auf die Blutkörperchen mit dem Mikroskop; die von Salz- und

Zuckerlösungen, die des Gefrierens, insbesondere aber die der Elektrizität. Es wurden zuerst konstante elektrische Ströme angewendet, welche elektrolytisch wirken und die Blutkörperchen verändern; indem er die Ströme durch dünne Schichten Bluts leitete, vermochte er an der Aufhellung die Stromverteilung objektiv darzustellen. Dann wurde der elektrische Leitungswiderstand des Blutes ermittelt und gezeigt, dass die Blutkörperchen sich dabei wie Isolatoren verhalten, während die Blutflüssigkeit den elektrischen Strom leitet. Die Kondensatorentladungen der Leydener Flasche haben andere Wirkungen; sie bringen ebenfalls allerlei Formveränderungen der Blutkörperchen hervor, indem die Zellen hier nicht mehr Isolatoren sind, sondern durchbrochen werden, wodurch sie sekundären Veränderungen verfallen. Ludimar Hermann hatte bei Versuchen mit Induktionswechselströmen wahrgenommen, dass dabei die Aufhellung des Blutes durch Wärmewirkung stattfindet und vermutet, dass bei den von Rollett angewandten Kondensatorentladungen das Gleiche stattfindet. Rollett tat dagegen dar, dass bei seinen Kondensatorentladungen keine merkliche Erwärmung des Blutes eintritt; auch zeigt das durch Kondensatorentladungen lackfarben gewordene Blut herabgesetzte elektrische Leitfähigkeit, das durch Wärme lackfarbene dagegen erhöhte. In letzter Zeit hat Max Cremer dargetan, dass möglicher Weise doch eine Wärmewirkung vorliegt, wenn man annimmt, dass das schlechte Leitvermögen der Blutkörperchen von einer sehr dünnen Oberflächenschicht herrührt.

Weiterhin beschäftigte sich Rollett mit dem physikalischen und chemischen Verhalten des in den Zellen eingelagerten Farbstoffs, des Hämoglobins. Mit Viktor Lang wurden die Kristalle dieses komplizierten Eiweissstoffes einer genauen kristallographischen und optischen Analyse unterworfen und gezeigt, dass sie alle in verschiedener Form des rhombischen Systemes kristallisieren mit Ausnahme des im hexagonalen System kristallisierenden Eichhörnchenblutes, woraus hervorgeht, dass es verschiedene Arten von Hämoglobin geben muss. Die Hämoglobin- und Hämin-Kristalle lassen nach ihm den soge-

nannten Pleochroismus erkennen. Er stellte ferner grosse Kristalle von reduziertem und Kohlenoxyd-Hämoglobin dar, deren optische Eigenschaften er untersuchte, ebenso die reinen Kristalle des Säurehämins, auch zeigte er die Reduktion des Sauerstoffhämoglobins ausser durch Eisenfeile oder Zinn etc. durch die Gewebsteile. Diese Erfahrungen führten ihn zu ihren Anwendungen für den forensen Nachweis kleiner Blutmengen, worin er sich eine ausserordentliche Übung erworben hatte; namentlich benützte er dabei mit Vorteil das Kaliumhydroxyd.

Aus den übrigen zahlreichen Arbeiten Rolletts in anderen Gebieten der Physiologie erwähne ich noch die wertvollen zur physiologischen Optik. Hierher gehören die über das binokuläre Sehen mit der einfachen Demonstration des Einflusses der Konvergenz der Augen auf die Schätzung der Grösse und der Entfernung der Gegenstände durch seine Konvergenzplatten; die Versuche über das Sehen in der dritten Dimension und das stereoskopische Sehen. Dann seine schönen Versuche über das Abklingen der Farben und die subjektiven Kontrastfarben, die er mit Hilfe des Projektionsapparates Jedem leicht sichtbar darstellte; er sprach sich dabei gegen die Erklärung dieser subjektiven Farbenercheinungen durch die von Helmholtz angenommene Urteilstäuschung aus; er suchte nach einer physiologischen Erklärung, indem er das Prinzip der Gegenwirkung gleicher Qualitäten einführte.

Endlich seien noch genannt einige bedeutungsvolle histologische Untersuchungen: über die Struktur des Bindegewebes, dessen Fibrillen er durch übermangansaures Kali isolieren lehrte, über die Hornhaut des Auges, an deren Zellen er die Eigenschaft der Kontraktilität und Reizbarkeit nachwies, und die sehr wichtige über den feineren Bau der Magendrösen, an welchen er gleichzeitig mit Heidenhain durch differentielle Färbungen zwei verschiedene Zellenformen von verschiedener Funktion, die von ihm sogenannten delomorphen und adelomorphen Zellen, erkannte.

Chemische Arbeiten liegen von ihm vor über die Eiweisskörper des Bindegewebes, über die Acidalbuminate und Alkali-

albuminate, und über Lösungsgemenge aus Alkalialbuminat und phosphorsauren Alkalisalzen, die dabei die Eigenschaften des Caseins der Milch erhalten.

Auch eine experimentell-physiologische Untersuchung über die Veränderungen, welche nach einseitiger Durchschneidung des Nervus trigeminus in der Mundhöhle auftreten, war von Bedeutung; es handelte sich namentlich um die Veränderungen der Kieferknochen der gesunden Seite, die er auf rein mechanische Einwirkungen zurückführte, während er trophische Einflüsse leugnete.

Endlich mögen noch angeführt werden die Beiträge zur Physiologie des Geruchs, des Geschmacks, der Hautsinne und der Sinne im Allgemeinen. Dieselben gründen sich grösstenteils auf Selbstbeobachtungen; die höchst interessanten über den Geruch sind von ihm angestellt worden, als er den Geruchssinn nach einer Vergiftung mit Gymnomasäure verloren hatte, indem er die einzelnen Geruchsqualitäten während der Vergiftung und bei der allmählichen Wiederkehr der Empfindung prüfte.

Als Lehrer bei den Vorlesungen übte Rollett eine höchst segensreiche Wirksamkeit aus; er wollte seinen Schülern naturwissenschaftliches Denken beibringen, indem er ihnen einige bevorzugte Kapitel der Physiologie ausführlich in ihrer historischen Entwicklung vorführte; er suchte weniger das fertige Wissen, das man aus jedem Lehrbuch erfahren kann, zu bieten, sondern vielmehr die Wege zu zeigen, auf denen die Forschung zu den Erkenntnissen gelangt ist. Nachdem vor ihm in den physiologischen Vorlesungen kaum experimentiert worden war, war Rollett einer der ersten, der in ausgedehnter Weise und in richtiger Auswahl den demonstrativen Unterricht einführte.

Im Laboratorium wirkte er auf die vorgerückteren Schüler weniger durch direkte Mitarbeit, als durch sein Beispiel in der Freude am Schaffen und in der umsichtigen Art seiner Forschung; er hat dadurch eine grosse Anzahl von wissenschaftlich tätigen jungen Forschern um sich versammelt, deren Unter-

suchungen in 3 Heften aus dem Grazer Institut für Physiologie und Histologie erschienen sind.

Durch seine ideale Auffassung von den Aufgaben der Universität sowie der akademischen Freiheit war er bei den deutschen Studierenden der Universität Graz äusserst beliebt und wie ein sorgender Vater verehrt; nur die klerikalen und anti-deutschen waren ihm abgeneigt. — Die medizinische Fakultät und die Universität erblickten in ihm ihre festeste Stütze in allen sie fördernden Angelegenheiten; für ihre Rechte und ihre Interessen ist er stets mit allem Mut eingetreten. Viermal war er Rektor der Universität und öfters war er auswärts bei besonderen Gelegenheiten ihr Vertreter.

Daneben übte er eine ausgedehnte öffentliche Wirksamkeit aus. Ohne Parteimann zu sein, nahm er den regsten Anteil an dem politischen Leben des Deutschtums in Österreich und an seiner freiheitlichen Gestaltung. Bei allen gemeinnützigen, der Allgemeinheit dienenden Unternehmungen war er an der Spitze: im Gemeinderate der Stadt, im steiermärkischen Volksbildungsverein, bei dem volkstümlichen Hochschulunterricht etc. Er wurde dadurch zu einer der bekanntesten und beliebtesten Persönlichkeiten der Stadt Graz. Gerne machte er sein Wissen in wissenschaftlichen und gemeinverständlichen Vorträgen nutzbringend; in dieser Weise wirkte er in vielen gedankenreichen Reden und Aufsätzen allgemeinen Inhalts.

Im medizinischen Leben von Steiermark nahm er eine führende Stelle ein; er kannte die hohe Bedeutung des ärztlichen Standes und die Wichtigkeit einer wissenschaftlichen Ausbildung desselben. Als Organisator und beständiger Präsident der Ärztekammer für Steiermark war er der Vorkämpfer für die Interessen der Ärzte; den Naturheilpfuschern war er ein unerbittlicher und mächtiger Gegner.

Wegen dieser seiner Verdienste wurden ihm oft und von allen Seiten Ehrungen und Huldigungen zu Teil, insbesondere bei dem 30 jährigen Jubiläum seiner Wirksamkeit in Graz, obgleich er als bescheidener Mann nicht nach äusseren Ehren strebte. Er wollte nur ein einfacher Mitarbeiter an dem grossen

Werke der menschlichen Erkenntnis sein und seine Befriedigung in dem Bewusstsein finden seinen Teil zur Mehrung der idealen Güter der Menschheit beigetragen zu haben. Dass er nicht nur ein einseitiger Naturforscher war, sondern von Jugend an einen regen Sinn für alles Gute und Schöne dieser Erde besass, erfuhr ich aus einem Briefe, den er mir nach seiner Wahl zum korrespondierenden Mitgliede unserer Akademie schrieb; er sagt darin, er habe als Knabe von 15 Jahren seine Verwandten mütterlicherseits in Regensburg und München besucht, „wobei alle die Herrlichkeiten, mit welchen König Ludwig I. von Bayern diese Städte ausgestattet hatte, in die leicht empfängliche Seele des Jünglings fielen, um immer lebendig zu bleiben.“

Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.

Festrede

gehalten in der

öffentlichen Sitzung der K. B. Akademie der Wissenschaften
zu München

zur Feier ihres 145. Stiftungstages

am 14. März 1904

von

Alfred Pringsheim

o. Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse.

München 1904.

Verlag der K. B. Akademie

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

in
italien
eilen.
seine
Er-
lein
Aus-
be-
teine
paßt
be-
nur
teine
und
dürfe
aus-
men.

trage
e der
16.
eiten.
des

alten
der
sen-
phen
im
und
von
en-
Er-

Der Mathematiker, dem die hohe Ehre zuteil wird, von dieser Stelle aus über seine Wissenschaft zu sprechen, befindet sich, wenn er auch diese Ehre vollkommen zu würdigen weiss, in einer keineswegs beneidenswerten Lage. Er gleicht einem Ausländer, der allenfalls in seiner Muttersprache mancherlei ganz Erträgliches zu sagen wüsste, doch nur mühsam und unvollkommen dies und jenes in gebrochenem Deutsch auszudrücken vermag und dabei noch Gefahr läuft, von seinen Landsleuten für recht trivial gehalten zu werden. Man hat zwar die Mathematik, weil ihr ganzer Inhalt auf einer geringen Zahl allgemein verständlicher Grundsätze durch rein logische Deduktion sich aufbaut, nicht unzutreffend als die Wissenschaft vom Selbstverständlichen bezeichnet. Das ändert aber nichts an der Erfahrungstatsache, dass sie bis heute für die Ueberzahl der Gebildeten, ja sogar der Gelehrten, die Wissenschaft vom Unverständlichen geblieben ist. Mit der schon von Euklid behaupteten Unmöglichkeit eines Königsweges zur Mathematik scheint es leider seine Richtigkeit zu haben, wenn auch der Bologneser Pietro Mengoli allen Ernstes das Gegenteil behauptet und durch die Tat zu beweisen versucht hat.¹⁾ Seine 1655 der Königin Christine von Schweden dedizierte „Via regia ad mathematicas“ erweist sich bei näherer Betrachtung lediglich als eine Sammlung höchst schauderhafter lateinischer Disticha, vermittelt deren die Elemente der Arithmetik, Algebra und Planimetrie in einer — wohl nur nach des Verfassers Meinung — besonders einfachen und eindringlichen Art gelehrt werden sollen. Aber auch der ganz anders ernsthaft zu nehmenden Behauptung des 1873 verstorbenen Mathematikers

in
nati
eigen.
seine
Er-
sein
Aus-
Be-
teine
pakt
be-
nur
teine
und
dürfe
aus-
men-

trage
e der
16.
eiten.
des

alten
der
sen-
chen
im
und
on-
en-
Er-

Hermann Hankel, dass mit der sogenannten projektiven Geometrie der Königsberg zur Mathematik gefunden zu sein scheine,²⁾ wird man doch kaum anders als äusserst skeptisch gegenüberstehen können. Im übrigen, wie dem auch sei: soviel darf wohl als feststehend betrachtet werden, dass in den weitesten Kreisen die Mathematik sich einer glänzenden Unpopularität erfreut. Bedürfte es hierfür noch irgend eines äusseren Beleges, so könnte man vielleicht auf den Umstand hinweisen, dass, ohne Uebertreibung, das mathematische Wissensgebiet wohl das einzige ist, dessen unser sonst allwissender Journalismus noch in keiner Weise sich bemächtigt hat. In allzu respektvoller Entfernung verharrend bringt zwar die Majorität der Gebildeten der Mathematik eine gewisse Hochachtung entgegen: zu meist freilich wohl wegen des anerkannten Nutzens, den sie den Naturwissenschaften und vor allem der mächtig emporgewachsenen, in alle Zweige des menschlichen Lebens eingreifenden Technik gebracht hat. Das verhindert dann keineswegs, dass gar viele den „reinen“ Mathematiker, wenn auch nicht geradezu als „reinen Toren“, so doch zum mindesten als ziemlich überflüssigen Vertreter einer eingebildeten und abstrusen Brahminenweisheit ansehen. Andere, die bei ihrer Schätzung der Mathematik vielleicht mehr durch das Gefühl, als durch verstandesmässige Erwägungen sich leiten lassen, erblicken in ihr eine ihnen zwar unbegreifliche, aber doch wohl bewunderungswürdige Äusserung menschlicher Geisteskraft und sind allenfalls geneigt, die Mathematik eher zu hoch als zu niedrig zu bewerten. Ein interessantes literarisches Beispiel dieses Typus in seiner höchsten Potenz bietet der Romantiker Novalis, dessen Aussprüche über Mathematik einen kaum minder religiös-schwärmerischen Charakter tragen, als seine Dichtungen: „Das Leben der Götter ist Mathematik. Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker weiss alles. Er könnte es, wenn er es nicht wüsste u. s. f.“³⁾ Man wird einigermassen erstaunt sein, die nach der landläufigen Meinung so „trockene“ Mathematik hier im trauesten Verein mit der

„blauen Blume der Romantik“ zu finden. Des Rätsels Lösung ist nicht so schwierig, wie es auf den ersten Blick vielleicht scheint. Das gemeinsame Band bildet die wunderreiche Zahlenwelt, deren mystische Geheimnisse den religiösen Schwärmer nicht weniger in ihren Bann ziehen, wie eben auch den forschenden Mathematiker. Und das geheimnisvolle Wissen, welches nur dieser durch die Zauber-
kraft seiner Methoden erwirbt, das gerade ist es, was jenes ersteren
überschwängliche Bewunderung hervorruft.

Im übrigen ist dafür gesorgt, dass die Bäume der so „einzig glücklich“ gepriesenen Mathematiker nicht in den Himmel wachsen. Denn auch an Feinden hat es der Mathematik bis auf den heutigen Tag nicht gefehlt, ja an völligen Verächtern, die ihr jeden Wert absprechen, soweit sie nicht blossen Nützlichkeitszwecken dient. Meine Absicht, zu einer angemesseneren Wertschätzung der Mathematik mein bescheidenes Teil beizutragen, glaube ich am besten dadurch zu erreichen, dass ich zunächst die wesentlichsten gegen sie erhobenen Vorwürfe zu entkräften versuche und, daran anschliessend, einige allgemeine Bemerkungen über Ziel und Zweck des mathematischen Schulunterrichts und der mathematischen Wissenschaft folgen lasse.

Mit ganz besonderer Schärfe hat sich bekanntlich Schopenhauer an verschiedenen Stellen seiner Schriften gegen die Mathematik gewendet. Das ist nun zwar schon ziemlich lange her: trotzdem sind seine Ausführungen meines Wissens niemals widerlegt worden, vielleicht nur deshalb, weil ihre Widerlegung, als gar zu einfach, den Mathematikern nicht der Mühe wert schien. Da aber bis in die neueste Zeit, namentlich in Schriften und Aufsätzen, die einer Einschränkung des mathematischen Unterrichts an den Mittelschulen das Wort reden, mit fast unfehlbarer Regelmässigkeit versucht wird, Schopenhauers Autorität als eine besonders gewichtige in die Wagschale zu werfen, so scheint es mir dringend wünschenswert, die Schopenhauerischen Argumente, die wissenschaftliche Legitima-

tion ihres Autors und seine, wie ich nachweisen werde, keineswegs ganz sauberen Praktiken einmal einer öffentlichen Prüfung zu unterziehen.

Was Schopenhauer über die Elementar-Geometrie sagt,⁴⁾ kommt für unsere Zwecke nur insofern in Betracht, als schon bei dieser Gelegenheit sein Mangel an jeder tieferen mathematischen Einsicht deutlich zum Ausdruck gelangt. Kann man auch die von ihm hervorgehobene didaktische Unzweckmässigkeit der Euklidischen Beweismethoden ihm ohne weiteres zugestehen, so liegen doch die weitaus wesentlicheren Mängel des Euklidischen Lehrgebäudes sehr viel tiefer, nämlich in den grundlegenden Definitionen und Axiomen: und gerade hierfür hat Schopenhauer nicht das geringste Verständnis, macht sich vielmehr über die von den Mathematikern in dieser Hinsicht geäusserten Bedenken in recht billiger Weise lustig.⁵⁾ Will man aber mit Schopenhauer jene Fundamente beibehalten, so bleiben Euklids Elemente auch heute noch ein in ihrer Art bewunderungswürdiges Werk von hoher Vollkommenheit. Und bei den meisten Euklidischen Beweisen ist das, was dem Lernenden die Einsicht erschwert, keineswegs der Inhalt, sondern lediglich die rein synthetische Form des Vortrages, welche von jedem geschickten Lehrer mit Leichtigkeit durch eine mehr analytisch-genetische und zugleich geometrisch anschaulichere ersetzt werden kann. Ein schlagendes Beispiel hierfür bietet gerade der von Schopenhauer als „stolzbeinig, ja hinterlistig“ charakterisierte Euklidische Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes, welcher bei unerheblicher Änderung der Darstellungsform geradezu als glänzendes Muster eines tadellosen elementar-geometrischen Beweises erscheint, während das, was Schopenhauer als Ersatz zu bieten wagt, gelinde gesagt, als äusserst naiv bezeichnet werden muss. Und nicht einmal an dem armseligen Spezialfall,⁶⁾ auf den sein ganzer (übrigens uralter) Beweis sich beschränkt, gelingt ihm dasjenige, was er eigentlich prätendiert: nämlich anstatt des beim Euklidischen „Mausefallenbeweis“ lediglich zum Vorschein kommenden Erkenntnisgrundes den angeblich existierenden, wahren Seinsgrund⁷⁾ aufzudecken. Jeder Sachkundige

sieht unmittelbar, dass Schopenhauer in Wahrheit um kein Haar mehr gibt als Euklid: nämlich den Erkenntnisgrund.⁸⁾

Zum Kapitel „Arithmetik“ äussert sich Schopenhauer folgendermassen:⁹⁾ „Dass die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische sei, wird dadurch belegt, dass sie die einzige ist, welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann; wie denn jetzt in England dergleichen Rechenmaschinen bequemiichkeitshalber schon in häufigem Gebrauch sind. Nun läuft alle analysis finitorum et infinitorum im Grunde doch auf Rechnen zurück. Danach bemesse man den „mathematischen Tiefsinn“, über welchen schon Lichtenberg sich lustig macht, indem er sagt: „Es ist fast mit der Mathematik, wie mit der Theologie. Sowie die der letzteren Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen, Anspruch auf einen besonderen Kredit von Heiligkeit und eine nähere Verwandtschaft mit Gott machen, obgleich sehr viele darunter wahre Taugenichtse sind, so verlangt sehr oft der sogenannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die grössten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine als des Denkens sind.““ (S. Lichtenbergs vermischte Schriften, Göttingen 1801, Bd. II, S. 287 ff.)“

Nochmals kurz zusammengefasst: Nur die arithmetische Geistestätigkeit kann durch Maschinen ausgeführt werden, folglich ist sie die allerniedrigste. Alle Analysis läuft aber auf Rechnen hinaus, folglich hat Lichtenberg ganz recht, wenn er die Mathematiker für Plunderköpfe erklärt. Ein wundervoller Schluss vom besonderen zum allgemeinen, der die herrlichsten Perspektiven eröffnet. Z. B.: Stanley Jevons hat eine Maschine konstruiert,¹⁰⁾ mittels deren man gewisse logische Schlussformen auf rein mechanischem Wege erzeugen kann. Damit wäre vor allem belegt, dass die logische Geistestätigkeit der arithmetischen an Niedrigkeit nichts nachgibt. Nun läuft aber alles vernünftige Denken im Grunde doch auf

in
mathem.
eigen.
seine
Er-
sein
Aus-
be-
eine
pöft
be-
nur
eine
und
dürfe
aus-
men.

trage
e der
16.
eiten.
des

alten
der
sen-
chen
im
und
von
en-
Er-

logisches Schliessen zurück. Man bemesse danach den „philosophischen Tiefsinn“ der sogenannten Denker u. s. f.

Jene ganze Schopenhauer'sche Schlussweise beruht auf dem Missbrauche, welcher mit dem Worte arithmetische Tätigkeit getrieben wird. In Wahrheit handelt es sich hier doch ausschliesslich um das gewöhnliche numerische Rechnen, d. h. um die Ausführung der vier Spezies an gegebenen Zahlen. Will man diese, allerdings ziemlich untergeordnete, geistige Tätigkeit mit dem pompösen Namen einer arithmetischen beehren, so ist dagegen vom rein etymologischen Standpunkte kaum etwas einzuwenden. In der Tat findet man den entsprechenden Lehrgegenstand auf den Lehrplänen der bayerischen Gymnasien nach altem scholastischen Brauch schlechthin als „Arithmetik“ bezeichnet. Doch scheint mir dieser einigermassen luxuriöse Usus wenig empfehlenswert: einmal schon deshalb, weil nicht recht abzusehen ist, warum man ungefähr dasselbe Gericht,¹¹⁾ welches auf den Volksschulen weit bescheidener und zweckmässiger als „Rechnen“ dargeboten wird, den gymnasialen oberen Zehntausend unter einem so viel feineren, weit grössere Erwartungen erregenden Namen serviert; sodann aber, weil man auf diese Weise die an sich schon äusserst dunklen Vorstellungen, welche in weiteren Kreisen über Wesen und Inhalt der Mathematik herrschen, nur noch verdunkeln hilft. Die Arithmetik, auch die elementare, ist eine Wissenschaft; sie lehrt, gewisse allgemeine Gesetze in systematischer Form aufzustellen und logisch zu begründen. Das Rechnen ist im wesentlichen ein Können, kein Wissen — eine in der Hauptsache rein technische Fertigkeit, deren Ziel und Zweck in der zahlenmässigen Anwendung eines verhältnismässig sehr geringen Bestandes von zumeist nur notdürftig erklärten und unzulänglich bewiesenen arithmetischen Regeln besteht. Usurpiert man hierfür die viel zu anspruchsvolle Benennung Arithmetik (die älteren Lehrbücher sagen in diesem Zusammenhange wenigstens „gemeine“ Arithmetik), so bringt man damit die Arithmetik in einen gänzlich falschen Gegensatz zur „eigentlichen Mathe-

matik“ oder man erweckt den irrigen Glauben, dass die Mathematik, abgesehen von der reinen Geometrie, dem numerischen Rechnen eng verwandt oder gar im wesentlichen damit identisch sei. So ungefähr scheint auch Schopenhauer sich die Sache vorgestellt zu haben. Und doch involviert sein Ausspruch, dass die gesamte Analysis auf ein der Tätigkeit einer Rechenmaschine vergleichbares Rechnen hinauslaufe, eine vollendete *petitio principii*, welche unwiderleglich zeigt, dass er von den Methoden und dem Inhalte jener Wissenschaft auch nicht die leiseste Ahnung besitzt.

Hiervon werden wir uns im folgenden alsbald noch des genaueren überzeugen. Zuvor aber wollen wir noch feststellen, dass jenes Lichtenberg-Zitat, durch welches Schopenhauer die Lacher auf seine Seite zu ziehen und seine fadenscheinige Argumentation zu stützen sucht, bei näherer Betrachtung als eine vollkommen bewusste, recht plumpe und bösertige Fälschung sich erweist. Der fragliche Ausspruch Lichtenbergs beginnt nämlich in Wahrheit mit den Worten: „Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht.“ Schopenhauer, der ja gerade die geistige Minderwertigkeit der Mathematik zu beweisen wünscht, entblödet sich nicht, diesen einen, das völlige Gegenteil besagenden Satz kurzweg zu unterschlagen,¹²⁾ um so im Leser die irrige Meinung hervorzurufen, als habe Lichtenberg durch seinen Ausfall auf gewisse Mathematiker die Mathematik selbst treffen wollen. Im übrigen kann für jeden, der mit der Geschichte der Mathematik einigermaßen vertraut ist, kaum ein Zweifel darüber bestehen, auf welche Mathematiker jener Angriff gemünzt ist. Es handelt sich dabei offenbar um die Anhänger der, heute fast völliger Vergessenheit anheimgefallenen, sogenannten kombinatorischen Schule, welche gegen Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts fast alle mathematischen Lehrstühle an den deutschen Universitäten okkupierten und deren weitschweifige, zumeist in ödesten Formalismus sich verlierende Produktionen einem geistreichen Kopfe wie Lichtenberg, der ja

in
rati
eilen.
seine
Er-
lein
Aus-
t. be-
teine
pft
be-
nur
teine
und
dürfe
aus-
men.

trage
e der
16.
eilen.
des

alten
der
sen-
chen
im
und
on-
en-
Er-

überdies als Professor der Physik (in Göttingen) mathematisch selbst wohlbewandert war, nur höchstes Missbehagen verursachen konnten.

Doch, kehren wir wieder zu Schopenhauer zurück! Um seine völlige Unkenntnis des Wesens der Analysis zu charakterisieren, führe ich zunächst die folgende Stelle an:¹³⁾

„Will man von den räumlichen Verhältnissen abstrakte Erkenntnis haben, so müssen sie erst in zeitliche Verhältnisse, d. h. in Zahlen, übertragen werden. . . . Diese Notwendigkeit, dass der Raum, mit seinen drei Dimensionen, in die Zeit, welche nur eine Dimension hat, übersetzt werden muss, wenn man eine abstrakte Erkenntnis seiner Verhältnisse haben will, diese Notwendigkeit ist es, welche die Mathematik so schwierig macht.¹⁴⁾ Dies wird sehr deutlich, wenn wir die Anschauung der Kurven vergleichen mit der analytischen Berechnung(!) derselben, oder auch nur die Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen mit der Anschauung der wechselnden Verhältnisse der Teile des Dreiecks, welche durch jene ausgedrückt werden(?): was hier die Anschauung in einem Blick, vollkommen und mit äusserster Genauigkeit(?) auffasst, nämlich wie der Kosinus abnimmt, indem der Sinus wächst, wie der Kosinus des einen Winkels der Sinus des andern(?) ist, das umgekehrte Verhältnis(?) der Ab- und Zunahme beider Winkel, u. s. f., welches ungeheure Gewebe von Zahlen, welche mühselige Rechnung bedurfte es nicht, um dies in abstrakto auszudrücken!“

Ohne auf die groben, einem einigermaßen mathematisch gebildeten Leser unmittelbar ersichtlichen Ungereimtheiten einzugehen, die jeder einzelne dieser Sätze darbietet, will ich mich nur an das Endergebnis halten: darnach soll der Mathematiker, um eine einfache geometrische Beziehung in abstrakto auszudrücken, eines nur durch „mühsälteste“ Rechnung zu gewinnenden „ungeheuren Zahlengewebes“ bedürfen. Ach nein! Das leistet er mit Hilfe einer einzigen Formel. Und noch mehr: diese ersetzt ihm nicht nur die Anschauung, sondern sie präzisiert mit absoluter Genauigkeit,

was jene nur in grobem Umrisse zeigt. Auch enthält eine einzige Formel unendlich viel mehr, als sämtliche Logarithmentafeln der Erde: denn sie umfasst die unbegrenzte Mannigfaltigkeit aller überhaupt denkbaren Fälle, während jene Logarithmentafeln, mögen sie noch so zahlreich und noch so dick sein, immer nur auf eine begrenzte Anzahl von bestimmten Fällen sich erstrecken können. Von der wahren Bedeutung und der wunderbaren Kraft einer analytischen Formel hat Schopenhauer gar keine Vorstellung. Die Analysis, die nach seiner Meinung nur mit Hilfe „ungeheurer Zahlengewebe“ d. h. Tabellen sich verständlich macht, besitzt dazu ein unendlich viel ausdrucksvolleres und kürzeres Hilfsmittel: die Funktion, gewissermassen eine auf den minimalen Umfang von wenigen Zeichen reduzierte Tabelle von unbegrenzter Feinheit. Die Analysis begnügt sich nicht, wie die Algebra, zu fragen: „Wie berechnet man aus einer Gleichung, die neben gewissen gegebenen Zahlen eine unbekannte Zahl y enthält, dieses unbekannte y ?“ Vielmehr nimmt sie ihren Ausgang von der folgenden weit allgemeineren Fragestellung (in welcher offenbar die eben genannte als spezieller Fall enthalten ist): „Welche Folge von Zahlenwerten durchläuft jenes y , wenn die betreffende Gleichung ausser den fest gegebenen Zahlen noch eine sogenannte veränderliche Zahl enthält, d. h. einen Buchstaben x , an dessen Stelle man sich successive eine Menge verschiedener Zahlen, z. B. jede überhaupt mögliche Zahl gesetzt denkt?“ Einen derartigen Zusammenhang zwischen zwei gleichzeitig mit einander veränderlichen Zahlen x und y , wobei also, gerade wie in einer Tabelle mit zwei, x und y überschriebenen Kolonnen, jedem Zahlenwerte x immer wieder ein gewisser Zahlenwert y zugehört (eventuell auch deren mehrere), bezeichnet der Mathematiker mit dem Ausdrücke: es sei y eine Funktion von x .

Der Nutzen und die Wichtigkeit des soeben rein arithmetisch definierten Funktions-Begriffes dürfte einigermaßen deutlich werden, wenn wir auf seinen geometrischen Ursprung und damit zugleich auf eine seiner fruchtbarsten Anwendungen in Kürze eingehen, nämlich

auf den Grundgedanken der sogenannten analytischen Geometrie, deren Erfindung durch Cartesius (= Descartes, 1637) und Fermat (ungefähr gleichzeitig) den vollständigen Bruch mit der bis dahin allein herrschenden geometrischen Tradition der Griechen und den Beginn einer ganz neuen mathematischen Aera bezeichnet. Man denke sich auf einem Blatte quadratisch linierten Papiers, wie es die Anfänger zum Rechnen benützen, die Vertikal-, wie auch die Horizontal-Linien mit den Nummern 0, 1, 2 . . . u. s. f. versehen. Dann ist durch die Aussage: „es liege ein Punkt in einer bestimmten Vertikale, z. B. Nr. 3, und einer bestimmten Horizontale, z. B. Nr. 5,“ — offenbar ein einziger Punkt vollständig bestimmt. Das hierbei auftretende Zahlenpaar (3, 5) kann also dazu dienen, einen bestimmten Punkt eindeutig zu charakterisieren. Denkt man sich jetzt neue Vertikalen und Horizontalen gezogen, welche die bisher vorhandenen Zwischenräume gerade halbieren, und numeriert dieselben demgemäss mit: $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$. . . u. s. f., so ist ohne weiteres klar, dass jetzt auch Zahlenpaare, wie: $(3\frac{1}{2}, 5)$, $(3, 5\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, je einen bestimmten Punkt charakterisieren. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise und Heranziehung gewisser Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs (auf die ich hier nicht eingehe) gelangt man zu dem Resultate: Man kann jedem Punkte einer Ebene ein ganz bestimmtes Zahlenpaar (x, y) zuordnen, welches man als seine Koordinaten bezeichnet, und umgekehrt entspricht dann auch jedem Zahlenpaare (x, y) ein und nur ein bestimmter Punkt.

Ist jetzt in der fraglichen Ebene irgend eine Kurve, d. h. eine beliebige krumme Linie verzeichnet, so können wir auf Grund des oben gesagten die Gesamtheit ihrer Punkte ersetzen durch einen Komplex von unendlich vielen Zahlenpaaren (x, y) . Zu jeder hierbei vorkommenden Zahl x gehört also (mindestens) eine bestimmte Zahl y — das ist aber genau dasselbe, was wir oben durch den Ausdruck bezeichneten: y ist eine Funktion von x . Mit anderen Worten: es findet eine funktionale Beziehung d. h. eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und y statt, welche gewisser-

massen als das arithmetische Abbild jener Kurve erscheint und schlechthin die Gleichung der Kurve genannt wird. Umgekehrt wird man in entsprechender Weise für eine Gleichung zwischen x und y eine gewisse Kurve als geometrisches Abbild erhalten. Diese Wechselbeziehung zwischen Kurven und Gleichung gestattet dem Mathematiker, die Eigenschaften der Kurven an ihren Gleichungen zu studieren, und auf arithmetischem Wege gewonnene Erkenntnisse in geometrische Anschauung umzusetzen. Gleichwie der Musiker im Stande ist, aus dem blossen Anblicke einer Partitur sich eine akustische Vorstellung von dem Eindrucke eines nie zuvor gehörten Tonstückes zu bilden, so liefert dem Mathematiker die Gleichung einer Kurve, die er nie gesehen, ein vollkommenes Bild ihres Verlaufes. Ja noch mehr: wie dem Musiker die Partitur oft Feinheiten enthüllt, die seinem Ohre bei der Komplikation und dem raschen Wechsel der Gehöreindrücke entgehen würden, so ist die Einsicht, die der Mathematiker der Gleichung einer Kurve entnimmt, eine viel tiefere, als die durch blosser Anschauung vermittelte. Denn abgesehen von der schon oben kurz hervorgehobenen, an und für sich viel grösseren Präzision der arithmetischen Darstellung gegenüber der blossen Anschauung, besitzt der Mathematiker in dem von Newton und Leibniz (1675) erfundenen Infinitesimal-Kalkül ein mit gleichsam mikroskopischer Schärfe arbeitendes Instrument der rechnerischen Analyse.

Diese Betrachtungen lassen sich auch leicht von der Ebene auf den Raum übertragen. Und ähnliche Dienste wie der Geometrie leistet die Einführung des Funktions-Begriffs der Mechanik. Die Lage, also die Koordinaten eines beweglichen Punktes erscheinen hier als Funktionen einer neuen Veränderlichen: der Zeit (die man sich, von einem bestimmten Momente an nach irgend einer Zeiteinheit gemessen, als blosser Zahl vorzustellen hat); und die Differentialrechnung gibt die nötigen Mittel an die Hand, um auch Begriffe, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung analytisch zu formulieren, d. h. in Funktions-Begriffe umzusetzen. Die Auffindung

in in
riatisch
eigen.
Er-
sein
Aus-
t, be-
eine
paßt
n be-
nur
eine
und
dürfte
aus-
men-

frage
e der
a 16.
eiten.
des

alten
der
ssen-
chen
im
und
von
sen-
Er-

von Bewegungsgesetzen wird auf diese Weise wieder auf das Studium gewisser Funktional-Beziehungen (Integration von Differential-Gleichungen), also auf „Analysis“ zurückgeführt.

Für Schopenhauer, nach dessen Meinung „die Mathematik, wie sie von Eukleides als Wissenschaft aufgestellt wurde, bis auf den heutigen Tag geblieben ist“,¹⁶⁾ existiert das alles nicht.

„Rechnungen“, sagt er, „haben bloss Wert für die Praxis, nicht für die Theorie. Sogar kann man sagen, wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf. Denn der mit Zahlen beschäftigte Kopf ist, während er rechnet, dem kausalen Zusammenhang des physischen Hergangs gänzlich entfremdet: er steckt in lauter abstrakten Zahlbegriffen. Das Resultat besagt nie mehr als Wieviel, nie Was.“

Und an einer anderen Stelle:¹⁷⁾

„Sie hören nicht auf, die Zuverlässigkeit und Gewissheit der Mathematik zu rühmen. Aber was hilft es mir, noch so gewiss und zuverlässig etwas zu wissen, daran mir gar nichts gelegen ist — das Wieviel.“

Ich hoffe, die zuvor gegebenen, freilich recht unvollkommenen Andeutungen werden immerhin erkennen lassen, dass die auf dem Funktionsbegriffe aufgebaute Analysis eben nicht bloss auf die Frage Wieviel, sondern ganz wesentlich auf die Frage Was antwortet.¹⁸⁾ Sie zeigt (wenn wir des leichteren Verständnisses halber von der reinen Funktionenlehre absehend, uns auf deren Anwendungen beschränken) z. B. nicht nur, wie man etwa die Länge eines Kurvenbogens, den Inhalt eines irgendwie begrenzten Flächenstückes berechnet; sondern sie gibt Auskunft über die allgemeinen Eigenschaften und Lagenverhältnisse geometrischer Gebilde. Sie erfindet dem Astronomen und Physiker nicht bloss die Formeln zur Berechnung irgendwelcher Entfernungen, Zeiten, Geschwindigkeiten, physikalischer Konstanten; sie verschafft ihm vielmehr Einsicht in die Gesetze der Bewegungsvorgänge, lehrt ihn, aus gewonnenen Erfahrungen zukünftige voraussagen und liefert ihm die Hilfsmittel

zu naturwissenschaftlicher Erkenntnis, d. h. zur Zurückführung ganzer Gruppen verschiedener, oft äusserst heterogener Erscheinungen auf ein Minimum einfacher Grundgesetze.

Dass der Mathematiker, so lange er rechnet, dem kausalen Zusammenhange eines Vorganges mehr oder weniger entfremdet ist, darf zugegeben werden: liegt doch gerade darin die erstaunliche Kraft der Analysis, dass die ihr eigentümliche Zeichensprache gestattet, verwickelte Gedankenreihen durch einfache Zeichenoperationen zu ersetzen, ohne dass derjenige, welcher sich ihrer zu bedienen versteht, genötigt ist, den gedanklichen Inhalt dieser Operationen immer wieder in allen Einzelheiten nachzuprüfen. Es wird doch auch niemanden einfallen, allemal wenn ihm eine tadellose Reichsbanknote in Zahlung gegeben wird, nach Berlin zu reisen, um sich zu überzeugen, ob die Reichsbankhauptkasse ihm, wie geschrieben steht, den Betrag bar ausbezahlt. Wesentlich ist eben nur, dass jede analytische Zeichenoperation in ihrer Anwendung auf Grössenbeziehungen einen bestimmten Gedankeninhalt repräsentiert und dass zwar nicht das „Rechnen“ an sich, d. h. das mechanische Operieren mit gewissen Symbolen, wohl aber die Auflösung jener Operationen in ihren Gedankeninhalt auch wirkliche Einsicht in das Zustandekommen des Endergebnisses verschafft. Es wäre nicht schwierig, das an einfacheren Fällen vollständig durchzuführen. Andererseits soll nicht geleugnet werden, dass mit zunehmender Komplikation der Probleme die Schwierigkeit und Weitläufigkeit der gedanklichen Analyse ins Ungemessene wächst. Das Gebiet, über welches die Sprache der Analysis ihre Macht erstreckt, ist zwar ein relativ begrenztes: doch innerhalb desselben ist sie der gewöhnlichen Sprache so unendlich überlegen, dass diese schon nach wenigen Schritten es aufgeben muss, ihr bis ans Ziel zu folgen. Der Mathematiker aber, der in jener wunderbar kondensierten Sprache zu denken versteht, ist vom mechanischen Rechner himmelweit verschieden.

Es kann nach dem bisher Gesagten nicht wundernehmen, dass Schopenhauer von dem allgemeinen Bildungswerte der Mathematik

in
statist.
eigen.
seine
Er-
sein
Aus-
t, be-
keine
paßt
u be-
nur
feine
und
dürfe
aus-
men-

litrage
e der
a 16.
eigen.
des

alten
der
ssen-
chen
im
und
von
sen-
Er-

eine überaus geringe Meinung hat. Im Anschlusse an eine Abhandlung des schottischen Philosophen Hamilton,¹⁹⁾ auf die wir noch zurückkommen werden, gelangt er zu dem folgenden, für die Mathematik nicht eben schmeichelhaften Endergebnis:²⁰⁾

„Der einzige unmittelbare Nutzen, welcher der Mathematik gelassen wird, ist, dass sie unstäte und flatterhafte Köpfe gewöhnen kann, ihre Aufmerksamkeit zu fixieren. — Sogar Cartesius, der doch selbst als Mathematiker berühmt war, urteilt ebenso über die Mathematik. In der *Vie de Descartes*, par Baillet 1693 heisst es Liv. II, ch. 6, p. 54: Seine eigene Erfahrung hatte ihn von dem geringen Nutzen der Mathematik überzeugt, zumal wenn man sie nur wegen ihrer selbst treibt. ... Nichts erschien ihm zweckloser, als mit blossen Zahlen und eingebildeten Figuren sich zu beschäftigen u. s. f.“²¹⁾

Ich kann nicht verhehlen, dass ein so vernichtendes Urteil gerade aus dem Munde eines bahnbrechenden Mathematikers und auch sonst so vielseitigen und tiefen Denkers, wie Descartes, seinerzeit einen grossen Eindruck auf mich machte. Es war mir daher ein wahrer Trost, als ich gelegentlich entdeckte, dass auch dieses Schopenhauer'sche Zitat auf einer Fälschung beruht. Durch Verstümmelung des Zusammenhanges hat es Schopenhauer wahrhaftig fertig gebracht, den wahren Sinn von Descartes Urteil in das vollkommene Gegenteil zu verwandeln. Zwischen den beiden von Schopenhauer zitierten Sätzen steht in Baillets Descartes-Biographie die Bemerkung, dass zu einer gewissen Zeit, nämlich 1623, Descartes aufhörte, sich mit Mathematik zu beschäftigen.²²⁾ Zur Motivierung dieser Tatsache folgt dann der zweite von Schopenhauer angeführte Satz:

„Nichts erschien ihm zweckloser, als mit blossen Zahlen und eingebildeten Figuren sich zu beschäftigen“,

aber mit dem von Schopenhauer unterdrückten Zusatze:

„ohne seine Blicke weiter zu richten“,

einer Einschränkung, durch welche jener Hauptsatz schon an und für

sich eine ganz andere Bedeutung bekommt. Sodann, nach einer Bemerkung des Inhalts, dass Descartes die mathematischen Beweise — wohlgerneht die mathematischen Beweise jener Zeit — oberflächlich und unzulänglich fand, heisst es weiter:

„Aber man darf sagen, dass er das Spezialstudium der Arithmetik und Geometrie nur aufgab, um sich ganz der Beschäftigung mit jener allgemeinen, aber wahren und unfehlbaren Wissenschaft hinzugeben, die von den Griechen scharfsinnig Mathesis (d. h. „Wissenschaft“ überhaupt) genannt wurde, und die alle mathematischen Disziplinen als Teile enthält. Er behauptete, dass diese Spezialkenntnisse sich mit Verhältnissen, Proportionen und Massbeziehungen beschäftigen müssten, wenn sie den Namen Mathematik verdienen sollten. Und er schloss daraus, dass es eine allgemeine Wissenschaft gebe, zur Aufklärung aller Fragen, die man in Bezug auf Verhältnisse, Proportionen und Massbeziehungen stellen könnte, sofern man diese als losgelöst von jeder Materie betrachtet; und dass diese allgemeine Wissenschaft mit vollem Rechte den Namen Mathesis oder Allgemeine Mathematik tragen dürfte, weil sie alles in sich enthält, was innerhalb unserer sonstigen Kenntnisse den Namen Wissenschaft und Mathematik verdient.“

Hierin liegt die Lösung der Schwierigkeit, welche man darin finden müsste, anzunehmen, dass Descartes gänzlich auf die Mathematik verzichtet haben sollte — zu einer Zeit, wo es ihm nicht mehr frei stand, darin unwissend zu sein.“

Mit dieser auf das Jahr 1623 bezüglichen Aussage vergleiche man nun die Tatsache, dass Descartes im Jahre 1637 seine berühmte *Géométrie* publizierte, jenes Werk, welches eben die früher erwähnten Fundamente der analytischen Geometrie enthält und eine der wichtigsten Grundlagen unserer modernen Mathematik bildet. Wie sehr Descartes der Neuheit und Tragweite seiner Erfindung sich bewusst war, beweist folgende Stelle aus einem seiner Briefe (an Pater Mersenne):²³⁾

„Es ist mir recht peinlich, mich selbst loben zu müssen. Aber da nur wenige Leute fähig sind, meine Geometrie zu verstehen, und da Sie mich danach fragen, was ich von ihr halte, so scheint es mir angemessen, Ihnen zu sagen: Sie ist genau so, dass ich nichts mehr wünsche. In meiner Dioptrik und der Schrift über die Meteore habe ich wohl den Leser zu überzeugen versucht, dass meine Methode besser sei, als die bisher übliche; aber ich behaupte, durch meine Geometrie das wirklich bewiesen zu haben.“

Und nachdem er hervorgehoben, dass die Tragweite seiner Methode alles frühere weit übertreffe, fügt er nach Erwähnung der hauptsächlichsten zeitgenössischen Produktionen hinzu:

„Keiner dieser Modernen hat etwas zustande gebracht, was nicht schon die Alten gekannt haben.“²⁴⁾

Überhaupt richtet sich alles, was er gelegentlich an der Mathematik auszusetzen scheint, niemals gegen diese selbst, sondern immer nur gegen ihre mangelhafte Behandlung. Arithmetik und Geometrie erklärt er ausdrücklich für die einzigen Wissenschaften, die nichts Falsches oder Ungewisses enthalten:²⁵⁾ nur an den Autoren, die sich damit befasst hätten, sei mancherlei auszusetzen und nur sie treffe die Schuld, wenn gerade viele gut beanlagte Geister diese Wissenschaften als leere und kindische Spielereien verachtet oder nach wenigen Anfangsversuchen wieder aufgegeben hätten.²⁶⁾

Dass Schopenhauer trotz alledem gewagt hat, diesen grossen Mathematiker als einen seiner Eideshelfer für den Unwert der Mathematik zu zitieren, muss nach dem Gesagten als eine unerhörte und nichtswürdige Geschichtsfälschung bezeichnet werden.

Charakteristisch für das unglaublich niedrige Niveau, auf welches Schopenhauer bei seinem Feldzuge gegen die Mathematik herabsteigt, ist der Umstand, dass er die oben erwähnte Hamilton'sche Abhandlung als „eine sehr gründliche und kenntnisreiche“ dringend empfiehlt. Das Ergebnis derselben, nämlich dass die Mathematik der allgemeinen Ausbildung des Geistes keineswegs förderlich, ja sogar

entschieden hinderlich sei, werde „nicht nur durch gründliche dianoilogische Untersuchung der mathematischen Geistestätigkeit dargetan, sondern auch durch eine sehr gelehrte Anhäufung von Beispielen und Autoritäten befestigt“. — Ich kann es mir, um den Geist der so dringend empfohlenen Schrift zu kennzeichnen, nicht versagen, einen grossen Teil jener „Autoritäten“ wenigstens zu nennen: Aristo von Chios; Philoponus; Fracastorius; Klumpp; Kenelm Digby; Sorbière; Poiret; Buddeus; Barbeyrac; Salat; Kirwan; Monboddo; Gundling u. s. f. Ich muss zu meiner Schande gestehen, dass ich vor der Lektüre der Hamilton'schen Abhandlung keine einzige dieser glänzenden Autoritäten auch nur dem Namen nach kannte; zu meiner Entschuldigung dient vielleicht der Umstand, dass ich einzelne von ihnen sogar nicht einmal a posteriori in den Adressbüchern der Wissenschaft ausfindig machen konnte. Freilich wird auch eine Anzahl bekannterer Namen ins Treffen geführt: zunächst natürlich, wie es für einen gründlichen Philosophen sich ziemt, die Vor-Euklidiker Sokrates, Plato, Aristoteles; dann: Cicero, Seneca, Plinius, Albertus Magnus; der Mystiker und Kabbalist Pico von Mirandula; der Dichter Coleridge; der Historiker Gibbon; Frau von Staël; der Memoiren-Schriftsteller Walpole; die Philologen Wolf und Bernhardi u. s. f. — lauter Leute, die keinesfalls durch ein Übermass mathematischer Kenntnisse daran verhindert waren, über den Wert der Mathematik sich ein massgebendes Urteil zu bilden. Als besonders schwerwiegend erscheinen dann noch der heilige Augustinus, der die Mathematik „als von Gott abwendend“, der heilige Hieronymus, der sie als „nicht die Frömmigkeit lehrend“ erwähnt, während der heilige Ambrosius erklärt: „Sich mit Astronomie und Geometrie beschäftigen, heisse die Sache der Erlösung verlassen und die des Irrtums ergreifen.“ Fast noch Schlimmeres freilich lässt uns Hamilton durch den Mund des Mystikers Poiret, „eines der tiefsten Denker seiner Zeit“, vernehmen: „Der mathematische Genius pflegt die Gemüter seiner allzu

in in
hialisch
weisen.
feine
Er-
fein
Mus-
t, be-
feine
paßt
u be-
nur
feine
und
dürfte
aus-
men-

frage
ie der
a 16.
eiten.
des

alten
der
ssen-
chen
im
und
von
sen-
Er-

heftigen Anhänger mit den böartigsten Neigungen zu erfüllen. Denn er infiziert sie mit Fatalismus, religiöser Gleichgültigkeit, Unglauben, Roheit und einem nahezu unheilbaren Hochmut.“ — Sapiienti sat! Und ferne sei es von mir, den Frankfurter Philosophen um solche Bundesgenossen beneiden zu wollen.

Wenn Hamilton der Mathematik vorwirft, dass ihr intensives Studium den Geist für anderweitige Betätigung, wie sie z. B. die Philosophie und das Leben erfordern, unfähig mache,²⁷⁾ so meine ich, der erste Teil dieses Vorwurfs dürfte dahin zu berichtigen sein, dass allerdings die Mathematiker für nebelhafte und haltlose metaphysische Spekulationen wenig Sinn und Neigung zu besitzen pflegen. Und wenn sie es demnach zumeist für nützlicher hielten, mathematische Werte zu schaffen, statt den Wust blühenden Unsinns, den zahlreiche Metaphysiker im Laufe der Jahrhunderte angehäuft haben, vermehren zu helfen, so kann ich darin allenfalls nur ein Verdienst, sicherlich aber kein Zeichen eines geistigen Defektes erblicken. Andererseits genügt es wohl, die Namen Descartes und Leibniz zu nennen, um nachzuweisen, dass führende Mathematiker auch führende Philosophen sein können.

Wird aber den Mathematikern nachgesagt, dass ihre Wissenschaft sie den Forderungen des praktischen Lebens entfremde, so trifft dieser Vorwurf, soweit er berechtigt ist, die Mathematiker nicht mehr, als die Gelehrten überhaupt. Um sich zu überzeugen, dass die Mathematik an sich hieran völlig unschuldig ist, braucht man nur den Blick zu unseren westlichen Nachbarn zu wenden, bei denen seit dem 18. Jahrhundert gerade die Mathematiker eine ganz hervorragende Rolle im öffentlichen Leben gespielt haben, nicht etwa blosse Auch-Mathematiker, sondern zum Teil produktive mathematische Geister hohen und höchsten Ranges. Um nur die bedeutendsten zu nennen: Gaspard Monge (1746—1818), den Schöpfer der *Géométrie descriptive* (1799) und Verfasser der *Applications de l'analyse à la géométrie* (1801), zweier klassischer Werke, deren Einfluss bis auf die heutige Zeit reicht, finden wir 1792 als Marine-

minister; im folgenden Jahre leistet er geradezu Märchenhaftes in der Herbeischaffung von Kriegsmaterial für die Landesverteidigung, gründet 1794 die École polytechnique, begleitet 1798 seinen Freund Napoléon Bonaparte nach Ägypten, führt dort ein kriegerisches, an Gefahren und Entbehrungen überreiches Leben und ist dabei zugleich die Seele der wissenschaftlichen Untersuchungen zur Erforschung der ägyptischen Altertümer. — Lazare Carnot (1753—1823), des Konvents und später Bonapartes genialer Kriegsminister, schreibt mitten in seiner erfolgreichen politischen Wirksamkeit seine vielgenannten *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* und seine, die Entwicklung der neueren Geometrie vorbereitende *Géométrie de position*. — Joseph Fourier (1768 bis 1830), der unsterbliche Schöpfer der *Théorie analytique de la chaleur* gehörte auch zu den Teilnehmern der Napoleonischen Expedition nach Ägypten. Als Kommissär beim ägyptischen Divan entfaltet er eine geradezu glänzende diplomatische Tätigkeit, unterdrückt mit höchster Umsicht und Unerschrockenheit einen Aufstand der Bewohner von Kairo, publiziert bei alledem eine Anzahl mathematischer Abhandlungen und ist zugleich auch eifriger Mitarbeiter an der archäologischen *Déscription de l'Égypte*. Später (1802) wird er Préfekt des Jsère-Departements und vollbringt die lange vergeblich angestrebte Austrocknung der Sümpfe von Bourgoin.²⁸⁾ — François Arago (1786—1853), der Erbe von Monges geometrischem Lehrstuhl, bekannter durch seine physikalischen und astronomischen Leistungen, seit 1830 beständiger Sekretär der Akademie und als solcher „unerreicht und ohnegleichen“, war zugleich unter dem Juli-Königtum als Deputierter der gefürchtetste Redner der Opposition. Bei der provisorischen Regierung von 1848 finden wir ihn als Minister des Krieges und der Marine, später als energisches und durch persönliche Tapferkeit ausgezeichnetes Mitglied der Exekutiv-Kommission. — Jean Victor Poncelet²⁹⁾ macht 1812 als Leutnant den russischen Feldzug mit, wird in der Schlacht bei Krasnoi (18. November 1812) verwundet und gefangen, nach Saratow an der Wolga

in in
hialisch
seilen.
seine
Er-
sein
Aus-
t, be-
seine
paßt
n be-
nur
seine
und
dürfte
aus-
men-

frage
e der
n 16.
eilen.
des

alten
der
ssen-
chen
im
und
von
sen-
Er-

geschleppt und entwirft dort in der Gefangenschaft, von allen wissenschaftlichen Hilfsmitteln entblösst, die Grundlagen seines epochemachenden Werkes: *Traité des propriétés projectives des figures*, das ihm, als dem Begründer der projektiven Geometrie, einen hervorragenden Platz unter den Geometern aller Zeiten sichert. Nach Frankreich zurückgekehrt (1814) tritt er wieder in die Armee ein, entwickelt später, trotz gleichzeitiger Fortsetzung seiner rein geometrischen Arbeiten, eine umfangreiche Tätigkeit als Genieoffizier, wird 1848 General, in welcher Eigenschaft er noch 1852 die zu Paris vereinigten Nationalgarden kommandiert. — Schliesslich noch einen Namen, der zwar nicht die wissenschaftliche Bedeutung der bisher genannten, dafür aber den Vorzug der Aktualität besitzt: Freycinet, welcher als Minister und Ministerpräsident durch seine verständige und friedliche Politik sich auch in Deutschland seinen guten Namen gemacht hat, ist Mathematiker und ein keineswegs unbedeutender Mathematiker: er hat ausser einem zweibändigen *Traité de mécanique rationnelle* zwei beachtenswerte Bücher über die philosophischen Grundlagen der Infinitesimal-Analysis und der Mechanik publiziert.³⁰⁾ — Die vorstehenden Beispiele, die sich leicht vermehren liessen, dürften für unseren Zweck genügen. Wenn in Deutschland die Göttin Justitia nicht die leidige Gewohnheit hätte, die Minister-Portefeuilles nur ihren eigenen Sprösslingen in die Wiege zu legen, wer weiss, ob nicht schon mancher deutsche Mathematiker einen trefflichen Minister abgegeben hätte!

Ohne auf weitere Einzelheiten der Hamilton'schen Abhandlung einzugehen, möchte ich, nur an eine besonders prägnante und auf den ersten Blick verblüffend annehmbar erscheinende Stelle anknüpfend, nunmehr versuchen festzustellen, welchen Bildungswert wir der Mathematik etwa beimessen können, soweit sie als Lehrgegenstand der höheren Schulen, insbesondere der humanistischen Gymnasien in Betracht kommt. Selbst ihre Verächter pflegen in diesem Zusammenhange meist zuzugestehen, dass sie als eine Art praktische Schule der Logik vor allen anderen Wissenschaften geeignet sei, die formale

Verstandesbildung wesentlich zu fördern: in der Tat verdankt sie ja zunächst wohl hauptsächlich diesem Umstande ihre Aufnahme in die Lehrpläne der Gelehrtenschulen. Hiergegen bemerkt nun Hamilton:³¹⁾

„Die Kunst richtig zu schliessen, wird sicherlich nicht durch ein Verfahren gelehrt, bei welchem es kein unrichtiges Schliessen gibt. Durch Vorübung in einem Bassin voll Quecksilber lernen wir nicht im Wasser schwimmen. Wenn also die Mathematik empfohlen wird, um unserer natürlichen Neigung zum Irrtum entgegen zu wirken, warum schlägt man nicht auch das Quecksilber vor, um unsere natürliche Neigung zum Untersinken zu paralysieren?“

Nun, darauf wäre zu erwidern: Man schlägt es in Wahrheit nicht bloss vor, sondern man wendet es sogar konsequent an — NB. nachdem man es von den ihm anhaftenden metaphysischen Schlacken gründlich gereinigt hat. Der Metaphysiker Hamilton übersieht nämlich, dass das spezifische Gewicht des Quecksilbers etwa 13 mal so gross ist, wie das des Menschen, so dass der letztere überhaupt nicht tief genug eintauchen würde, um darin Schwimmbewegungen ausführen zu können. Und das wäre doch erforderlich, wenn das angewandte Bild überhaupt einen Sinn haben soll — denn logische Schwimmbewegungen, d. h. Schlüsse werden ja wirklich in der Mathematik ausgeführt. Hamilton will also in Wahrheit nur sagen, der Mensch könne nicht die Fertigkeit erwerben, im Wasser zu schwimmen, wenn er seine Übungen in einer Flüssigkeit anstellt, die spezifisch so schwer sei, dass er darin nicht untersinken könne. Und nun sage ich: der Kulturmensch pflegt wirklich in einem solchen Quasi-Quecksilber seine Schwimmstudien zu machen, nachdem Archimedes, der glücklicherweise ein Mathematiker und kein Methaphysiker war, ihn gelehrt hat, wie er sich eine solche Flüssigkeit aus gewöhnlichem Wasser in der denkbar einfachsten und billigsten Weise herstellen kann: nämlich, indem er, statt die Flüssigkeit spezifisch schwerer zu machen, sich selbst

in in
statisch
eifen.
seine
a Gr-
sein
Aus-
t, be-
seine
paßt
u be-
nur
seine
und
dürfte
aus-
men-

Frage
ie der
a 16.
eiten.
des

alten
der
ssen-
chen
in im
und
von
ten-
Er-

in ein spezifisch leichteres Wesen verwandelt. Er bindet sich eben einfach einen Schwimmgürtel um und erlernt sodann die Technik des Schwimmens, nicht obgleich, sondern gerade weil er nunmehr gegen das Untersinken gesichert ist. Und wenn er dann diese Technik vollständig beherrscht, so hält sie ihn schliesslich auch ohne Schwimmgürtel über Wasser, zumal wenn durch allmähliche Abschwächung seiner Wirkung er sich nach und nach davon entwöhnt. In ganz analoger Weise wirkt auch ein richtig geleiteter mathematischer Schulunterricht. Nur die Anfangsgründe der Geometrie sind von der Art, dass sie bei genügender Präzisierung der zu Grunde gelegten Axiome die Möglichkeit logischer Irrtümer so ziemlich ausschliessen. Das gilt aber nicht einmal in gleichem Masse von den Elementen der Arithmetik und Algebra. Und wenn nun gar der Schüler beginnt, die erlernten Sätze zur Lösung von geometrischen und algebraisch-geometrischen Aufgaben zu verwerten, geometrische und algebraische Erkenntnisse auf physikalische Probleme anzuwenden, konkrete Fragen mannigfacher Art in die abstrakte Form der mathematischen Zeichensprache, z. B. in algebraische Gleichungen zu übersetzen, so wird er zu Irrtümern und Fehlschlüssen ausreichende Gelegenheit finden, um allmählich auch ohne Euklidischen Schwimmgürtel schwimmen zu lernen. Im übrigen schätzt man die Einwirkung der Mathematik auf die formale Verstandesbildung von vornherein viel zu niedrig ein, wenn man, wie häufig geschieht, lediglich annimmt, sie sei eine nützliche Übung für die Kunst, logisch zu schliessen, d. h. aus gegebenen Prämissen richtige Schlussfolgerungen zu ziehen. Denn schon bei zweckmässiger Unterweisung in den Hauptsätzen der Elementargeometrie besteht der bei weitem schwierigere und wichtigere Teil der Verstandestätigkeit nicht in der Schlussbildung selbst, sondern gerade in der Auffindung der zur Fortführung des Schlussverfahrens tauglichen, durch genaue Beobachtung des Sachverhaltes und geschickte Heranziehung schon erworbener Erkenntnisse zu gewinnenden Prämissen. Und der weitere Verlauf eines guten

mathematischen Schulunterrichts bietet reiches Material, um den Schüler nicht bloss zu richtigem Beobachten und Schliessen, sondern vor allem zu logischem und selbsttätigem Denken anzuleiten. Zugleich wird ihm eine unvergleichliche Gelegenheit gegeben, an scharfe und genaue Begriffsbestimmungen sich zu gewöhnen, sowie Klarheit und Präzision des sprachlichen Ausdrucks sich anzueignen — eine Gelegenheit, die freilich bei weitem nicht genügend ausgenützt zu werden scheint, wenigstens soweit meine bei Studenten gemachten Erfahrungen reichen. Fügt man hierzu noch die von der Geometrie, insbesondere von deren stereometrischem Teile dargebotene Übung zur Ausbildung des Anschauungsvermögens, so wird man die formalen Bildungsmöglichkeiten, welche dem mathematischen Schulunterrichte innewohnen, als überaus reichhaltige und wesentliche anerkennen müssen.

Fassen wir ferner die Mathematik, wie sie auf den Gymnasien gelehrt wird oder doch gelehrt werden sollte, dem Inhalte nach ins Auge, so wird man ihren Nutzen für die allgemeine geistige Ausbildung der Schüler vor allem darin zu suchen haben, dass sie unter den Lehrgegenständen der einzige ist, welcher ihnen das Beispiel einer wirklichen Wissenschaft, als eines Inbegriffs wohlervorbener und systematisch verknüpfter Erkenntnisse gibt. Zweitens erweist sie sich als unentbehrlich für den Unterricht in der Physik und den Elementen der Astronomie (der sogenannten mathematischen Geographie), soll dieser nicht, statt wirkliche Einsicht in die einfacheren physikalischen und astronomischen Erscheinungen zu verschaffen, zu einer blossen Mitteilung empirischer Tatsachen herabsinken. Und drittens gestattet sie zahlreiche und nützliche Anwendungen auf mannigfache Fragen des praktischen Lebens (sogenannte Textgleichungen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Feldmesskunde).

Aus dem Zusammenwirken von Form und Inhalt der Mathematik erwächst schliesslich dem Schüler die Bekanntschaft mit Methoden, welche ihn befähigen, innerhalb gewisser, wenn auch

bescheidener Grenzen selbständig zu produzieren und durch eigenes Nachdenken seine Erkenntnis zu erweitern. Die mit dieser Art der Betätigung verbundene Steigerung des geistigen Kraftgefühls und das allmähliche Erwachen geistiger Selbständigkeit darf wohl als das schönste und höchste Resultat der mathematischen Erziehung bezeichnet werden.

Obschon ich von der Richtigkeit der vorstehenden Darlegungen aufs tiefste überzeugt bin, so kann ich mir nicht verhehlen, dass dieselben manches enthalten, was sein sollte und wohl auch sein könnte, aber im allgemeinen nicht ist. Denn es wäre abgeschmackt, leugnen zu wollen, dass bei einem grossen, ja sogar bei dem grösseren Teile der Schüler die Früchte des mathematischen Unterrichts recht kümmerliche sind. Man hat zur Erklärung dieser Tatsache das Märchen erfunden, dass die Fähigkeit, das mathematische Schulpensum zu bewältigen, eine ganz spezielle mathematische Begabung erfordere;³²⁾ und gewisse, glücklicherweise wohl allmählich seltener werdende Schulphilologen, namentlich aber mitleidige Eltern unternormal oder anormal begabter, oft aber auch nur schlechthin fauler Schüler haben redlich dazu beigetragen, jenem Märchen in den weitesten Kreisen Glauben zu verschaffen. Wenn zur Unterstützung dieses Glaubens häufig angeführt wird, mit der relativen Seltenheit der mathematischen Begabung verhalte es sich ähnlich, wie etwa bei der musikalischen, so kann man dieser Analogie wohl zustimmen, aber gerade um daraus die entgegengesetzten Konsequenzen zu ziehen. Gewiss ist derjenige Grad von musikalischer Begabung, welcher erforderlich ist, um mit Erfolg sich der Musik zu widmen oder gar schaffender Musiker zu werden, ein relativ seltener. Aber ein gewisses Mass von musikalischer Begabung, welches dazu befähigt, Freude an der Musik zu empfinden und bei richtiger Anleitung auch mehr oder weniger wirkliches Verständnis dafür zu gewinnen, darf doch geradezu als Regel angesehen werden. Wie wollte man sonst die dominierende Rolle erklären, welche heutzutage die Musik nicht bloss innerhalb des eigentlichen Kunstlebens, sondern im gesamten

Kulturleben des Volkes spielt? — So besitzt nach der Meinung aller Einsichtigen auch jeder normal begabte Schüler ein genügendes Mass geistiger Fähigkeiten, um dem mathematischen Unterrichte das nötige Verständnis entgegenzubringen.

„Den Gedankengang eines Platonischen Dialogs, einer Horazischen Epistel scharf und genau darstellen, die Idee eines Shakespeareschen Dramas, den Charakter einer seiner Personen entwickeln, einer Dichtung Goethes in alle ihre Beziehungen folgen, das sind Übungen, die eine Kraft und Beweglichkeit der Intelligenz hervorzubringen geeignet sind, der auch die Schwierigkeit mathematischer und physikalischer Begriffe und Methoden nicht unüberwindlich sein wird“, —

sagt Friedrich Paulsen,²³⁾ freilich mit einer ganz anderen Tendenz, als die hier vorliegende: nämlich, um zu beweisen, dass die humanistischen Fächer für die logische Verstandesausbildung mindestens dasselbe leisten, wie die Mathematik. Nun, ohne meinerseits diese nämliche Folgerung an das obige Diktum knüpfen zu wollen, sein Inhalt erscheint mir im wesentlichen zutreffend, d. h., dass Schüler, die in den humanistischen Fächern wirklich Tüchtiges leisten, auch für die Mathematik ausreichende Begabung besitzen dürften. Zugleich wird man aber zugeben müssen, dass ein ganz ansehnlicher Teil der Gymnasialabiturienten auch von all den schönen Dingen, welche Paulsen anführt, recht wenig vermag: Leute, welche es allenfalls dazu bringen, über einen gewissen Vorrat gedächtnismässig eingepprägter Sprachkenntnisse und historischer Daten zu verfügen und nach bewährtem Rezept, mit dem nötigen Aufwande klassischer Zitate, moralischer Gemeinplätze und patriotischer Phrasen, einen sogenannten deutschen Aufsatz anzufertigen. Für deren mathematische Begabung einzustehen, fühle ich mich in keiner Weise berufen.

Aber, selbst wenn man von der letztgenannten Kategorie absieht, so bleibt immerhin die Tatsache bestehen, dass gar mancher unter den besseren Schülern nur notdürftige Kenntnisse in der Mathematik erwirbt, ja, dass nur eine verhältnismässig geringe Anzahl aus dem

mathematischen Unterrichte sichtlichen und nachhaltigen Gewinn zieht. Ich will auch nicht verschweigen, dass ein sehr angesehener mathematischer Kollege (Professor Moritz Pasch³⁴) in Giessen) zur Erklärung dieser Erscheinung die Hypothese aufgestellt hat, das mathematische Denken müsse wohl der menschlichen Natur im Grunde zuwiderlaufen. Ich kann mich dieser pessimistischen Auffassung nicht anschliessen und bin vielmehr geneigt, den Hauptgrund für die wenig günstigen Ergebnisse des mathematischen Schulunterrichts in seiner Unvollkommenheit zu erblicken. Dass heutzutage nicht wenige rein als Broterwerb den mathematischen Lehrerberuf ergreifen, die dazu in keiner Weise veranlagt sind, erwähne ich nur nebenbei. Nachdrücklich möchte ich jedoch hervorheben, dass nach meinem Dafürhalten die Ausbildung der Lehrer gerade in Bezug auf denjenigen Punkt, der mir der wichtigste scheint, nicht bloss viel, sondern geradezu alles zu wünschen übrig lässt. Lehren ist eine schwere Kunst, und das Lehren der mathematischen Anfangsgründe der schwersten eine. Nun wird man ja niemals darauf rechnen dürfen, durch Unterweisung Künstler zu erziehen. Aber das Können, welches die Grundlage jeder Kunst bildet, wird doch wohl am besten durch Unterweisung erworben, ja es kann von jemandem, der nicht ein Genie oder wenigstens ein hervorragendes Talent ist, überhaupt auf keinem anderen Wege gründlich erlernt werden. In dieser Richtung bietet aber das Universitätsstudium dem zukünftigen Lehrer der Mathematik nicht die geringste Handhabe, was um so schwerer ins Gewicht fällt, als in keinem anderen Lehrfache die Divergenz zwischen dem Inhalte der meisten Universitäts-Vorlesungen und den Lehrgegenständen der Schule eine so vollständige ist, wie gerade in der Mathematik. Ich möchte diese Bemerkung nicht etwa in dem Sinne verstanden wissen, dass ich die mit jenen Universitäts-Vorlesungen bezweckte höhere wissenschaftliche Ausbildung der Lehrer für überflüssig halte: ganz im Gegenteil! Aber ebenso notwendig, ja noch notwendiger wäre doch eine systematische Ausbildung in der Kunst, Elementar-Mathematik zu lehren. Dass das in Preussen eingeführte

und, wie ich höre, auch für Bayern in Aussicht genommene sogenannte Probejahr der Lehramtskandidaten diesen Zweck nicht erfüllen kann, liegt auf der Hand und wird durch die Praxis bestätigt. Überdies will mir das gewohnheitsmässige und bewusste Experimentieren an Schülern der Unterklassen, quasi in corpore vili, vom ethischen Standpunkte äusserst bedenklich erscheinen.

Was uns in Wahrheit not täte, das sind Universitäts-Vorlesungen und Seminar-Übungen aus dem Gebiete der mathematischen Pädagogik, welche sich auf alle einzelnen in den Mittelschulen zu lehrenden Disziplinen zu erstrecken hätten. Inwieweit die jetzigen Vertreter der Universitäts-Mathematik für einen derartigen Zuwachs an Tätigkeit etwa noch Zeit, Neigung und — worauf es offenbar ganz wesentlich ankommt — auch praktische Schulerfahrung besitzen, entzieht sich meiner Beurteilung. Aber, ohne etwa von mir auf andere schliessen zu wollen, aller Wahrscheinlichkeit nach würde die Durchführung jenes Planes die Errichtung besonderer Lehrstühle für mathematische Pädagogik erfordern. Damit greift dann freilich diese ganze Erörterung in jenes Gebiet hinüber, in welchem bekanntlich die Gemütlichkeit aufhört: sie dürfte daher in unserer, für höhere Kulturzwecke so äusserst geldknappen Zeit zunächst wenig Aussicht haben, aus dem Stadium mathematischer Idealisierung heraustretend, reale Gestalt zu gewinnen.

Etwas leichter realisierbare, wenn auch nicht allzu sanguinische Hoffnungen liessen sich vielleicht an die Bemerkung knüpfen, dass die Mathematik innerhalb des Lehrplanes der bayerischen humanistischen Gymnasien noch keineswegs denjenigen Platz einnimmt, welcher erforderlich wäre, um die in ihr enthaltenen, oben geschilderten Bildungsmöglichkeiten zu voller Entwicklung zu bringen. Zwar wird man es als einen Fortschritt begrüssen müssen, dass man neuerdings an Stelle der sphärischen Trigonometrie die Elemente der analytischen Geometrie eingeführt hat — vorausgesetzt, dass dabei weniger auf eine möglichst grosse Zahl formaler Einzelkenntnisse, als auf die Herausarbeitung des Funktionsbegriffes und

in in
hialich
beiten.
feine
n Er-
fein
Aus-
t, be-
feine
paßt
n be-
nur
feine
und
dürfte
aus-
men-

frage
ie der
n 16.
eiten.
des

alten
der
ssen-
chen
im
und
von
sen-
Er-

seiner graphischen Darstellung, sowie auf die Herleitung der für die Naturwissenschaften unentbehrlichen Haupteigenschaften der Kegelschnitte Gewicht gelegt und durch Behandlung des Tangentenproblems, etwa an der Parabel, ein Ausblick auf die Differentialrechnung geschaffen wird. Dagegen scheint mir das arithmetisch-algebraische Pensum noch einer mässigen Abrundung nach oben zu bedürfen, wenn dasselbe einigermaßen den Charakter wissenschaftlicher Geschlossenheit und den durchaus wünschenswerten Kontakt mit den unteren Grenzen der höheren Mathematik erlangen soll.³⁵⁾ (Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen,³⁶⁾ möchte ich nur, um jedes Missverständnis auszuschliessen, bemerken, dass ich mit dem Gesagten nicht etwa die Einführung der Elemente der Differentialrechnung befürworten will.) Schliesslich müsste noch für etwas reichlichere, das mathematische Interesse der Schüler anregende und an sich nützliche Anwendungen Platz geschaffen werden. Diese Forderungen dürften manchem als äusserst anspruchsvoll und verwerflich erscheinen. Demgegenüber möchte ich hervorheben, dass ja die Mathematik auf den humanistischen Gymnasien offiziell neben Deutsch und Latein als eins der drei Hauptfächer gilt. Wie reimt sich hiermit die Tatsache zusammen, dass in der Oberklasse, also dort, wo der Geist der Schüler am reifsten ist oder doch sein soll, von 27 obligatorischen Wochenstunden 12 auf Latein und Griechisch, dagegen im ganzen 4, sage vier, nicht etwa auf Mathematik, nein auf Mathematik, Physik und mathematische Geographie entfallen (also zirka nur $\frac{1}{7}$ aller Unterrichtsstunden)? In der siebenten und achten Klasse gibt es allerdings je 5 Stunden Mathematik und Physik, in der sechsten 4 Stunden Mathematik (keine Physik); dagegen auf den preussischen Gymnasien, allerdings bei 28 Wochenstunden, je 4 Stunden Mathematik und 2 Stunden Physik in jeder der genannten vier oberen Klassen. Ich sollte meinen, es müsste zu ermöglichen sein, ohne Vermehrung der obligatorischen Schulstunden und ohne den Charakter des Gymnasiums als eines „humanistischen“ wesentlich zu beeinträchtigen, die Anzahl der Mathematik-

und Physikstunden wenigstens in den drei oberen Klassen auf sechs zu erhöhen. Das könnte natürlich nur auf Kosten der klassischen Sprachen geschehen. Aber sollte wirklich die „humanistische“ Seite der Bildung eine so merkliche Schädigung erleiden, wenn man sich entschlösse, an der Klassikerlektüre einige Einsparungen zu machen? Von dem unechten Pathos und der geschwellenen, bis zur Widerwärtigkeit selbstgefälligen Rhetorik der Ciceronischen Reden dürften die Schüler schon durch Verabreichung ziemlich bescheidener Dosen einen ausreichenden Begriff bekommen; und es wäre lediglich ein Akt weiser und gerechter Oekonomie, wenn man ein reichlicheres Auskosten des Entzückens, welches ja die Latinisten beim Genusse der mehr wort- als inhaltreichen Ciceronischen Perioden erfahrungsgemäss empfinden sollen, dem Universitätsstudium der zukünftigen Philologen aufsparte. Und sollte wirklich die trostlos-öde Lektüre von Ciceros philosophischen Schriften ein so unentbehrliches Hilfsmittel allgemeiner Geistesbildung darbieten? Ja, ich kann mich sogar des ketzerischen Gedankens nicht erwehren, dass der geistige Gewinn, den jugendliche Köpfe aus der Beschäftigung mit der ermüdend weitläufigen Dialektik Platonischer Dialoge, trotz aller darin verborgenen Weisheit, etwa davontragen mögen, wohl wesentlich überschätzt wird; und dass das mühselige und zeitraubende Zusammenbuchstabieren Sophokleischer Chöre eher dazu beitragen dürfte, den Schülern die Sophokleslektüre zu verleiden, als bei ihnen wahre Liebe für den grossen Tragiker zu erwecken und sein tieferes Verständnis zu fördern. Ich fürchte, dass diese Bemerkungen bei den klassischen Philologen ein mehr oder weniger allgemeines Schütteln des Kopfes hervorrufen werden. Aber gerade weil ich ein aufrichtiger Verehrer des klassischen Altertums und, cum grano salis, auch der humanistischen Bildung bin, so hege ich die Meinung, dass die humanistischen Gymnasien noch zu gewissen Konzessionen in der angedeuteten Richtung sich entschliessen sollten, auf dass sie nicht allmählich zu blossen Fachschulen für Philologen, Theologen und (wer weiss wie lange noch?) Juristen herabsinken.

Habe ich mich bei der Schulmathematik etwas länger aufgehalten, weil die Frage nach ihrer angemessenen Wertschätzung noch immer viel umstritten wird und zugleich auch weitere Kreise lebhafter zu interessieren pflegt, so kann ich bezüglich des Nutzens der Mathematik als Hilfswissenschaft für naturwissenschaftliche Erkenntnis und verschiedenartige praktische Zwecke mich um so kürzer fassen, als dieser heutzutage kaum mehr ernstlich in Zweifel gezogen wird. Auch würde es die Grenzen dieses Vortrages weit überschreiten, wollte ich nur versuchen, in äusserster Kürze auseinander zu setzen, was Physik, Astronomie, Geodäsie, Geophysik und Ingenieurwissenschaften, als die Hauptanwendungsgebiete der Mathematik, ihr verdanken. Wird doch selbst der Mathematiker, der, wie ich, den Anwendungen ferner steht, von Staunen erfüllt, wenn er beispielsweise aus der im Erscheinen begriffenen Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (einschliesslich der Disposition der noch nicht erschienenen Teile) einen Überblick gewinnt über die ungeheure Anzahl und Mannigfaltigkeit den genannten Wissenschaften angehöriger Einzelgebiete, welche die Dienste der Mathematik in Anspruch nehmen. Damit ist indessen ihre Anwendungsfähigkeit noch bei weitem nicht erschöpft: zeigt sich doch bei allen Disziplinen, in denen Quantitäten eine Rolle spielen, das Bestreben, sich der mathematischen Methoden zu bemächtigen — freilich mit verschiedenem Erfolge. Wir können heute nur darüber lächeln, wenn wir Kunde empfangen von einer „*Nova medicinae methodus ex mathematica ratione morbos curandi*“, die ein gewisser Virdungus 1532 veröffentlicht hat.³⁷⁾ Auch „Herrn George Sarganecks Versuch einer Anwendung der Mathematik in dem Artikel von der Grösse der Sündenschulden“ (1749)³⁸⁾ dürfte wohl nicht zu den besonders glücklichen Anwendungen der Mathematik gehören. Wenn aber selbst ein so enthusiastischer Verehrer der Mathematik, wie Auguste Comte,³⁹⁾ es für unwahrscheinlich gehalten hat, dass Chemie, Physiologie und Sozialwissenschaft zu Gegenständen mathematischer Behandlung werden könnten,⁴⁰⁾ so hat ihm die Entwicklung jener Wissenschaften Un-

recht gegeben: die Chemie ist mit wachsendem Erfolge bestrebt, ihre Fundamente auf mathematisch-physikalischen Betrachtungen aufzubauen;⁴¹⁾ in die Physiologie haben mathematische Methoden erfolgreichen Eingang gefunden;⁴²⁾ und den Versuchen, auch Teile der Nationalökonomie auf mathematische Grundlage zu stellen,⁴³⁾ wird man zum mindesten ein theoretisches Interesse nicht absprechen können, mag auch ihre praktische Bedeutung zweifelhaft erscheinen. Unbestritten ist hingegen der Nutzen der Mathematik auf den Nachbargebieten der Statistik⁴⁴⁾ und des Versicherungswesens.⁴⁵⁾

Bei Gelegenheit der Erwähnung Comtes scheint es vielleicht nicht uninteressant, an eine andere seiner Voraussagen zu erinnern, welche in noch viel drastischerer Weise durch die Macht der Tatsachen widerlegt worden ist und ein überaus lehrreiches Beispiel dafür gibt, wie vorsichtig man in den exakten Wissenschaften mit negativen Prophezeiungen sein muss.

„Wir begreifen die Möglichkeit, Gestalt, Entfernung, Grösse und Bewegungen der Gestirne zu bestimmen; aber niemals werden wir imstande sein, durch irgend ein Mittel ihre chemische Zusammensetzung zu studieren.“ — so schreibt Comte⁴⁶⁾ im Jahre 1835: nur 24 Jahre später entdecken Kirchhoff und Bunsen die Spektralanalyse,⁴⁷⁾ durch welche das für unmöglich gehaltene zur Wirklichkeit wird. Und, was ich in dem hier vorliegenden Zusammenhange noch ganz besonders hervorheben möchte: die endgültige Berechtigung dazu, die Resultate von Spektralbeobachtungen auf die chemische Analyse der Sonnenatmosphäre und der Gestirne anzuwenden, beruht gerade auf den mathematisch-physikalischen Untersuchungen Kirchhoffs.⁴⁸⁾

Herbarts Versuch, auch die Psychologie mathematisch zu behandeln,⁴⁹⁾ darf zwar als misslungen gelten, insofern er die fehlenden experimentellen Grundlagen durch Hypothesen zu ersetzen suchte: immerhin hat er die Möglichkeit dargetan, Mathematik auf Psychologie anzuwenden.⁵⁰⁾ Der von Fechner betretene Weg des psychophysischen Experiments und die Weiterbildung der experimentellen

Methoden, namentlich durch Wilhelm Wundt, hat dann in der Tat die nötigen Vorbedingungen geschaffen, um bestimmte Kategorien psychologischer Probleme einer exakten mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.⁵¹⁾

Greift hiermit die Mathematik in das Gebiet der Philosophie hinüber, so wird man diesen Erfolg nicht allzu hoch anschlagen dürfen: es liegt in der Natur der Sache, dass die direkte Anwendungsfähigkeit der Mathematik hier immer eine eng begrenzte bleiben wird, auch wenn man zu den „philosophischen“ Anwendungen der Mathematik noch den von George Boole begründeten Logik-Kalkül⁵²⁾ rechnet.

Viel wesentlicher ist, dass die Bestrebungen der Mathematiker, namentlich der modernen Mathematiker, die Grundlagen ihrer Wissenschaft zu vertiefen, die Begriffe der Zahl, des Raumes, der Zeit und des Unendlichen zu erforschen und zu fixieren, zugleich einen wertvollen Zuwachs an philosophischem Wissen repräsentieren. Auch wird man nicht vergessen dürfen, dass die moderne Weltanschauung durchaus auf dem Boden der exakten mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung erwachsen ist, und dass die Philosophie diesem Einflusse nie mehr sich wird entziehen können. Was schon Leonardo da Vinci, eines jener merkwürdigen Universalgenies der Renaissance, vor 400 Jahren gesagt hat,⁵³⁾ gilt heute mehr, denn je:

„Wer die höchste Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung und wird niemals Schweigen auferlegen den Widersprüchen der sophistischen Wissenschaften, durch die man nur ein ewiges Geschrei erlernt.“

Der soeben gegebene kurze Überblick dürfte immerhin ausreichen, um deutlich zu machen, wie zahlreich und verschiedenartig die Gebiete sind, die alle an den Erfolgen der Mathematik ihren Anteil heischen. Und nun —

„Ganz spät, nachdem die Teilung längst geschehen,
Naht der Poet“, —

der „reine“ Mathematiker, der die Mathematik nicht nur um ihrer selbst willen treibt, sondern noch obendrein behauptet, sie sei auch

in erster Linie um ihrer selbst willen da. Sie verdanke ihre wahre Existenz einem rein idealistischen Bedürfnisse, welches dem Bedürfnisse nach Naturerkenntnis zwar verwandt und seiner Befriedigung in hohem Grade förderlich sei, aber weder in ihm allein wurzle, noch jemals darin aufgehen wolle: gerade so wenig, wie wir wiederum das Endziel aller Erkenntnis der Naturkräfte in deren Beherrschung zum Zwecke des praktischen Nutzens erblicken können. Es ist eine unbestreitbare Tatsache, dass ausgedehnte Gebiete der Mathematik, vor allem die sogenannte Zahlentheorie, der bei weitem grössere Teil der höheren Algebra, der Funktionentheorie, ja sogar der Geometrie, bisher keine aussermathematische Anwendung gefunden haben oder, wie eine stark euphemistische Ausdrucksweise lautet, „noch der Anwendung harren“. In Wahrheit „harren“ sie überhaupt nicht oder doch zumeist vergebens! Und es wäre gerade so irrig, ja ich möchte sagen, unaufrichtig, die Existenzberechtigung jener rein mathematischen Untersuchungen aus der entfernten Möglichkeit anderweitiger Anwendung herleiten zu wollen, wie wenn man etwa die Forderung der nötigen Geldmittel für eine Polar-expedition damit motivieren wollte, es erscheine gar nicht ausgeschlossen, dass mit der Zeit noch sehr gewinnbringende Handelsbeziehungen daraus erwachsen könnten.

Nun darf man immerhin sagen, der endgültige Nutzen einer mathematischen Untersuchung lasse sich von vornherein keineswegs voraussehen; der dabei gewonnene rein mathematische Kraftvorrat komme vielleicht anderen, nützlicheren Untersuchungen zustatten; auch ergebe sich zuweilen zwischen scheinbar weit auseinander liegenden Untersuchungsgebieten plötzlich ein so überraschender Zusammenhang, dass man schon aus diesen Gründen jene rein theoretischen Forschungen nicht von der Hand weisen könne. Und wenn etwa die staatlich angestellten Mathematiker des 20. Jahrhunderts durch einen Erlass angewiesen würden, nur die Dinge zu lehren und mit solchen Problemen sich zu beschäftigen, welche sichere Aussicht bieten, den Naturwissenschaften und womöglich der Technik dienlich zu sein, so

würde man der mathematischen Forschung gleichzeitig mit ihrer Freiheit auch einen grossen Teil ihrer nutzbringenden Kraft entziehen.⁵⁴⁾ Das ist sicherlich richtig, trifft aber doch nicht den eigentlichen Kern der Sache. Denn bei dieser Auffassung würde ein beträchtlicher Teil der Mathematik immer nur als eine Art notwendigen Übels erscheinen. Wir sehen vielmehr in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommnung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Symptom einer dem menschlichen Geiste zukommenden höheren Verpflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl- und Raumgebilde in ihrem weitesten Umfange zu ergründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher, nicht nur, soweit sie als Mittel für andere Zwecke dienen, sondern an sich als wertvoll, und wir erblicken zugleich in ihrem systematischen Auf- und Ausbau die vollendetste und reinste Form logischer Geistestätigkeit, die Verkörperung höchster Verstandesästhetik.

In dem wahren Mathematiker steckt allemal ein gutes Stück vom Künstler: vom Architekten, ja vom Poeten. Ausserhalb der realen Welt, doch in erkennbarem Zusammenhange mit ihr, haben die Mathematiker in schöpferischer Gedankenarbeit sich eine ideale erbaut, die sie zur vollkommensten aller Welten auszugestalten suchen und nach allen Richtungen durchforschen. Von dem Reichtum dieser Welt hat natürlich nur der eine Ahnung, der sie kennt: nur überhebliche Unwissenheit kann behaupten, dass der Mathematiker in einem engen Kreise sich bewege. Die Wahrheit, die er erstrebt, ist freilich, bei Lichte betrachtet, nicht mehr und nicht weniger, als Widerspruchslosigkeit. Aber zeigt sich nicht vielleicht gerade in der Beschränkung auch hier der Meister? Letzte Fragen zu lösen, überlässt der Mathematiker neidlos anderen.

Vieles, was die überreiche mathematische Produktion hervor gebracht hat und hervorbringt, ist vergänglich. Aber aus der Menge des Geschaffenen scheidet sich ein kristallklarer Kern abstrakten

Wissens ab, welcher allen Zeiten als ein glänzendes Denkmal menschlicher Geisteskraft erscheinen wird. Sollten diejenigen, die da, jeder nach seinen Kräften, bemüht sind, an der Aufrichtung dieses Denkmals mitzuarbeiten, wirklich, wie die landläufige Meinung es will, nur einseitige und trockene Verstandesmenschen sein? Ich denke, hier hat doch wohl der schon zu Anfang zitierte Novalis das Richtigere getroffen, wenn er sagt:⁵⁵⁾

„Der echte Mathematiker ist Enthusiast *per se*. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik.“

Literatur-Nachweise und Anmerkungen.

1) Via regia ad mathematicas per arithmetica, algebram speciosam et planimetriam. A Petro Mengolo. Bononiae 1655.

2) Hermann Hankel, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Antrittsrede. Tübingen 1869 (2. Auflage, 1884).

3) Novalis Schriften, herausg. von E. Heilborn (Berlin 1901). Teil II, erste Hälfte, p. 223.

4) Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, § 39 = Werke, herausg. von J. Frauenstädt, I, p. 135—139. — Die Welt als Wille und Vorstellung, I, § 14 = Werke, II, p. 82—87.

5) Welt als Wille etc., II, Kap. 13 = Werke, III, p. 142. — Die Mathematiker haben in Wahrheit sehr schwerwiegende Gründe gegen die von Schopenhauer als Evangelium angesehene Kantische Transzendentalität der Raumanschauung. Vgl. Gauss, Werke (1876), II, p. 177. — Riemann, Werke (1876), p. 254. — Helmholtz, Wissensch. Abhandlungen, II (1883), p. 610; 618. — Fr. Engel und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig 1895. — D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage. Leipzig 1903.

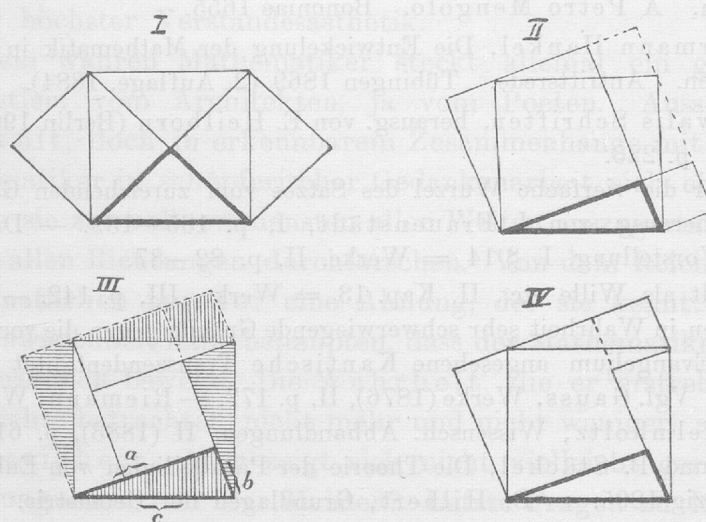
6) Es ist der Spezialfall des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, der die Richtigkeit des Satzes für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck kaum vermuten lässt, geschweige denn, wie Schopenhauer behauptet, „ohne alles Gerede, von der Wahrheit des Pythagoreischen Lehrsatzes zwanzigmal mehr

in in
nialisch
weisen.
ne
n Er-
ne
Aus-
st, be-
ne
paßt
in be-
nur
ne
und
dürfte
aus-
men-

utrage
ie der
n 16.
seiten.
n des

halten
der
ssen-
chen
n im
und
von
sen-
Er-

Überzeugung gibt, als der Euklidische Mausefallenbeweis“. Der fragliche Beweis selbst findet sich im wesentlichen schon bei Plato: s. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I (1880), p. 186 (vgl. auch ebendasselbst, p. 623; desgl. Bd. II [1892], p. 277). Versucht man, jenen Beweis (s. Fig. I) auf den Fall eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks zu übertragen (wie es zuerst wohl ein Anonymus getan hat: Lond. Philos. Transactions, Vol. 13 [1683], p. 673), so nimmt derselbe einen wesentlich weniger befriedigenden Charakter an: es gelingt auf diese Weise nicht, zu beweisen, dass die betreffenden Figuren „zerlegungsgleich“, sondern nur, dass sie „ergänzungsgleich“ sind (s. Fig. II). Im übrigen kannten schon im frühen Mittelalter die Inder und Araber (vgl. Cantor a. a. O. I, p. 557; 639) einen direkten „Zerlegungs“-Beweis, der auf der Doppelgleichung: $c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ beruht. Ordnet man die zur geometrischen Veranschaulichung dieser Doppelgleichung erforderliche Zerschneidung und Umlegung in der Weise an, wie es durch Fig. III angedeutet wird, so gelangt man, nach Weglassung der sich als überflüssig erweisenden Schnitte (s. Fig IV), zu dem überaus einfachen und eleganten Zerschneidungsbeweis des An-Nairizi (= Anaritus, um 900 n. Chr.: vgl. Tropicke, Geschichte der Elementar-Mathematik, II [Leipzig 1903], p. 73).



7) Trotz allen Herumredens (Vierf. Wurzel des Satzes etc. § 36—39) gelingt es Schopenhauer überhaupt gar nicht, eine scharfe und brauchbare Definition des nach seiner Ansicht existierenden, spezifisch mathematischen Seinsgrundes aufzustellen.

8) Mit Hilfe der schliesslich auf den Axiomen beruhenden Kongruenz gewisser Dreiecke wird bewiesen, dass die betreffenden Figuren der Definition der Gleichheit („Zerlegungsgleichheit“) genügen. — Vgl. auch: Wilhelm Wundt, Logik, 2. Auflage (Stuttgart 1893), I, p. 569—571.

9) Parerga II, § 35 = Werke, VI, p. 52.

10) Vgl. „On the mechanical performance of logical inference“: Lond. Philos. Transactions, Vol. 160 (1870), p. 497—518.

11) Es ist mir natürlich nicht unbekannt, dass der Rechenunterricht an den Mittelschulen ein etwas höheres Ziel verfolgt, als auf den Volksschulen: er soll zugleich als Vorbereitung für den Unterricht in der wirklichen („allgemeinen“) Arithmetik dienen. Aber abgesehen davon, dass diese Tendenz zumal in den ersten zwei, ja sogar drei Klassen auf die Gestaltung des Rechenunterrichts einen kaum merklichen Einfluss übt, so ist doch schliesslich eine „arithmetische Propädeutik“ noch keine „Arithmetik“. Überhaupt sollte man sich entschliessen, die von den wissenschaftlichen Mathematikern jetzt allgemein akzeptierte Terminologie auch auf den Mittelschulen einzuführen und danach die „Buchstabenrechnung“, d. h. die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen, nicht mehr „Algebra“, sondern „Arithmetik“ zu nennen, dagegen die Bezeichnung „Algebra“ für die Lehre von den Gleichungen zu reservieren.

12) Der fragliche Ausspruch Lichtenbergs findet sich innerhalb einer Reihe von aphoristischen Bemerkungen, deren jede von der vorangehenden durch einen breiten Zwischenraum und drei Sternchen typographisch getrennt ist. Damit erscheint also jede Möglichkeit ausgeschlossen, dass etwa Schopenhauer jenen einen Satz übersehen haben könnte: es handelt sich daher ganz unzweifelhaft, wie im Texte bemerkt, um eine vollkommen bewusste Fälschung.

13) Welt als Wille etc., I, § 12 = Werke, II, p. 64, 65.

14) Dieser tiefsinnige Unsinn klingt so wunderschön, dass selbst Hegel nichts Vollkommeneres dieser Art hätte zustande bringen können. Bekanntlich liegt gerade die prinzipielle Hauptschwierigkeit der Analysis in der Schöpfung des eindimensionalen Zahlenkontinuums, nicht aber in dessen Verwertung zum Studium der Beziehungen im dreidimensionalen Raume, da ja hierzu keineswegs, wie Schopenhauer offenbar annimmt, eine stetige Abbildung des dreidimensionalen Kontinuums auf das eindimensionale, sondern lediglich die Hinzunahme des Koordinatenbegriffes erforderlich ist.

15) Welt als Wille etc., I, § 15 = Werke, II, p. 82.

16) Über die vierfache Wurzel etc., § 21 = Werke, I, p. 77. Eine Variante der im Texte zitierten Stelle: Parerga II, § 35, Fussnote = Werke, VI, p. 52, 53.

in in
hyalisch
weisen.
feine
in Er-
e sein
Aus-
st, be-
feine
paßt
in be-
o nur
feine
und
dürfte
aus-
men-

utrage
ie der
n 16.
seiten.
a des

halten
der
ssen-
chen
n im
und
von
sen-
Er-

17) Nachlass, herausg. von Frauenstädt, p. 329.

18) Hierzu wäre noch generell zu bemerken, dass manches, das unsere Sinne als ein „Was“ empfinden, in Wahrheit lediglich auf einem „Wieviel“ beruht; mit anderen Worten, dass Unterschiede, die uns subjektiv als qualitative erscheinen, objektiv nur quantitative sind, z. B. Tonhöhe = Schwingungszahl der Luftwellen; Klangfarbe = Anzahl und Intensität der dem Grundtone beigemischten Obertöne; Farbe = Schwingungszahl der Lichtwellen bezw. Mischungsverhältnis von Lichtstrahlen verschiedener Schwingungszahl.

19) William Hamilton (1788—1856), seit 1836 Professor der Logik und Metaphysik an der Universität Edinburgh (nicht zu verwechseln mit dem berühmten Mathematiker gleichen Namens, dem Erfinder des nach ihm benannten mechanischen Prinzips und des Quaternionen-Kalküls). Die fragliche Abhandlung, in Form einer Rezension der Whewells'schen Schrift: „*Thoughts on the study of Mathematics as a part of a liberal education*“ (1835), erschien zunächst anonym in der Edinburgh Review, Vol. 62 (1836), p. 409—455, später in einer Sammlung verschiedener Abhandlungen des genannten Verfassers. Eine (gleichfalls anonyme) deutsche Übersetzung erschien unter dem Titel: „*Über den Wert und Unwert der Mathematik*“ (Cassel 1836).

20) Welt als Wille etc., II, § 13 = Werke, III, p. 144.

21) Wörtliche Übersetzung des von Schopenhauer in der Ursprache zitierten französischen Originals.

22) Voller Korrektheit zuliebe teile ich die ganze fragliche Stelle aus Baillets Vie de Descartes (nach der von Schopenhauer benützten, abgekürzten Ausgabe von 1693) hier mit. Die beiden gesperrt gedruckten Sätze sind die einzigen, welche Schopenhauer zitiert. A. a. O. p. 54 heisst es:

„Il y avait déjà longtemps que sa propre expérience l'avait convaincu du peu d'utilité des Mathématiques, surtout lorsqu'on ne les cultive que pour elles-mêmes, sans les appliquer à d'autres choses. Depuis l'an 1620, il avait entièrement négligé les règles de l'Arithmétique. Les attaches qu'il eut pour la Géométrie subsistèrent un peu plus longtemps dans son coeur, parceque les mathématiciens de Hollande et d'Allemagne qu'il avait vus pendant ses voyages avaient contribué à les retenir par les questions et les problèmes qu'ils lui avaient proposés à résoudre. Mais on peut dire qu'elles étaient tombées dès l'an 1623, s'il est vrai qu'en 1638 il y avait plus de quinze ans qu'il faisait profession de négliger la Géométrie, et de ne plus s'arrêter jamais à la solution d'aucun problème qu'à la prière de quelque ami.“

Il ne voyait rien de moins solide que de s'occuper de nombres tout simples et de figures imaginaires, sans porter ses vues au delà. *) Il y trouvait même quelque chose de plus qu'inutile: et il croyait qu'il était dangereux de s'appliquer trop sérieusement à ces démonstrations superficielles, que l'industrie et l'expérience fournissent moins souvent que le hasard; et qui sont plutôt du ressort des yeux et de l'imagination que de celui de l'entendement. Sa maxime était que cette application nous désaccoutume insensiblement de l'usage de notre raison, et nous expose à perdre la route que la lumière nous trace. **)

Mais on peut dire qu'il n'abandonna l'étude particulière de l'Arithmétique et de la Géométrie, que pour se donner tout entier à la recherche de cette Science générale, mais vraie et infaillible, que les Grecs ont nommée judicieusement *Mathesis*, et dont toutes les Mathématiques ne sont que des parties. Il prétendait que ces connaissances particulières pour mériter le nom de Mathématiques devaient avoir des rapports, des proportions et des mesures pour objet. Delà il jugeait qu'il y avait une Science générale destinée à expliquer toutes les questions que l'on pourrait faire touchant les rapports, les proportions et les mesures, en les considérant comme détachées de toute matière: et que cette Science générale pouvait à très-juste titre porter le nom de *Mathesis* ou *Mathématique universelle*, puisqu'elle renferme tout ce qui peut faire mériter le nom de Science et de Mathématique particulière aux autres connaissances.

Voilà le dénouement de la difficulté qu'il y aurait à croire que M. Descartes eût absolument renoncé aux Mathématiques, en un temps où il ne lui était plus libre de les ignorer. *

23) Descartes, Lettres (Paris 1667), T. III, No. 73 (p. 291).

24) Dieser Vorwurf erscheint übrigens nicht ganz berechtigt gegenüber der von Descartes a. a. O. auch erwähnten Fermat'schen Abhandlung: „De

*) In der grossen Ausgabe der Vie de Descartes von 1691, I, p. 112 lautet dieser Nachsatz noch ausführlicher und prägnanter: „Comme si l'on devait s'en tenir à ces bagatelles sans porter sa vue au delà.“

**) Hier folgt in der grossen Ausgabe noch eine längere Ausführung, die mit den charakteristischen Sätzen beginnt: „Voilà une partie des motifs qui le portèrent à renoncer aux Mathématiques vulgaires. Mais il paraît que le respect qu'il témoignait pour les Anciens l'empêcha de pousser le mépris qu'il faisait de ces Sciences au delà des temps et des lieux où il trouvait de l'abus dans la manière de les cultiver ou de les enseigner.“ Weiterhin heisst es: „Descartes ne fut pas le premier qui s'aperçut du mauvais état où était cette Science des Anciens, et des abus qu'y avaient commis ceux qui l'avaient reçue d'eux d'une manière toute unie et toute simple.“

Maximis et Minimis“ (abgedruckt in P. de Fermat, *Varia opera mathematica*, Tolosae 1679, p. 63—73; jedoch schon aus dem Jahre 1629 stammend, wie ein Brief an Roberval vom 22. September 1636 beweist, der gleichfalls in den *Op. math.* p. 136 sich abgedruckt findet). — Fermats Grundlagen der analytischen Geometrie sind enthalten in der Abhandlung: „*Ad locos planos et solidos isagoge*“ (*Op. math.* p. 1—11); die Zeit der Abfassung ist nicht genau bekannt.

25) Ähnlich äussert sich zwar auch Schopenhauer über die Arithmetik (Vierf. Wurzel des Satzes etc., § 46 = Werke, I, p. 151), wie er auch in der „*Mathematik in jeder Hinsicht Wissenschaft*“ erblickt (Welt als Wille etc., I, § 14 = Werke, II, p. 75). Nur verhindert ihn leider seine völlige Unkenntnis jener Wissenschaft, sie auch richtig zu schätzen.

26) Grosse Ausgabe der *Vie de Descartes* (1691), II, p. 481.

27) A. a. O. p. 424 = Übers. p. 28.

28) Sehr ausführliche und interessante Biographien von Monge, Carnot und Fourier aus der Feder Aragos findet man in dessen *Oeuvres complètes* (Paris 1854—1862), T. I, II (auch deutsch von W. G. Hankel, Leipzig 1854—1862, Bd. I, II).

29) Vgl. die Vorrede zum ersten Bande des „*Traité des propriétés projectives des figures*“ (1822, auch abgedruckt in der zweiten Auflage von 1865); ferner die Vorreden zu den zwei Bänden: „*Applications d'analyse et de géométrie etc.*“ (Paris 1862—1864).

30) Charles de Freycinet, *De l'analyse infinitésimale. Étude sur la métaphysique du haut calcul*. Paris 1860 (2^e éd. 1881). — *Essais sur la Philosophie des Sciences: Analyse, Mécanique*. Paris 1896 (2^e éd. 1900).

31) A. a. O. p. 427 = Übers. p. 33.

32) „Dass die Anlage zur Mathematik seltener sei als zu anderen Studien, ist blosser Schein, der von verspäteten und vernachlässigten Anfängern herrührt“ — sagt schon Herbart: Werke, herausg. von Hartenstein, Bd. 10, p. 103.

33) *Das Realgymnasium und die humanistische Bildung* (Berlin 1889), p. 24.

34) *Über den Bildungswert der Mathematik*. Akad. Festrede (Giessen 1894), p. 7.

35) Gerade weil das humanistische Gymnasium keine Fachschule sein soll, so müsste es doch auch diejenigen, die später Mathematik oder Physik studieren wollen, so weit fördern, dass sie im ersten Studiensemester mit genügendem

Verständnis einer Universitätsvorlesung über Differentialrechnung folgen können. Das ist, nach den von mir gemachten Erfahrungen, bei dem jetzigen Zustande im allgemeinen nicht der Fall.

36) Als wünschenswerte Ergänzungen würde ich etwa bezeichnen: Elemente der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Satz, auch für negative und gebrochene Exponenten, mit Übergang zu den Elementen der Reihenlehre. Exponentialfunktion und Logarithmus als Grenzwerte und unendliche Reihen. — Einige Hauptsätze aus der höheren Algebra: Begriff der Derivierten einer ganzen Funktion. Maxima und Minima ganzer Funktionen. Rolle'scher und Sturm'scher Satz. Unterschied zwischen algebraischer und numerischer Auflösung algebraischer Gleichungen. Einiges über numerische Auflösung.

37) *Nova medicinae methodus nunc primum et condita et aedita ex mathematica ratione morbos curandi.* Joanne Hasfurto Virdungo, medico et astrologo doctissimo autore. Ettelingae 1532. — Natürlich läuft diese ganze mathematische Kuriermethode auf eine Anwendung der Astrologie hinaus.

38) Als Anhang erschienen zu: Johann Jakob Schmidt, *Biblischer Mathematikus*. 2. Auflage, Züllichau 1749.

39) *Cours de philosophie positive* (Paris 1830—1842), I, p. 114: „C'est la science mathématique qui doit constituer le véritable point de départ de toute éducation scientifique rationnelle, soit générale, soit spéciale.“

40) A. a. O. III, p. 414—416.

41) Vgl. das ausführliche Lehrbuch über: *Theoretische Chemie* von W. Nernst (4. Auflage, Stuttgart 1903).

42) Hierhin gehören namentlich die Arbeiten über: *Physiologische Mechanik* (Mechanik der Gliederbewegung, des Blutumlaufes, der Atmung, etc.), *Physiologische Optik* und *Akustik*.

43) Eine kritische Übersicht der einschlägigen Literatur gibt V. Pareto in der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, p. 1094—1120.

44) Vgl. den Artikel von L. von Bortkiewicz in der *Enzykl. d. math. Wissensch.*, Bd. I, p. 821—851.

45) Ebendasselbst p. 852—917: G. Bohlmann, *Lebensversicherungs-Mathematik*. — Eine populäre Darstellung des Gebietes gibt: M. Cantor, *Politische Arithmetik*. Leipzig 1903.

46) A. a. O. T. II, p. 8.

47) Grundlegende Publikation: G. Kirchhoff, *Über die Frauenhofer'schen Linien*. Berl. Monatsber. 1859, p. 662 = Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen* (Leipzig 1882), p. 564.

48) Kirchhoff, Ges. Abh., p. 566—598. Vgl. auch: p. 633/634, 641; ferner: Rosenberger, Geschichte der Physik, III (Braunschweig 1887—1890), p. 691 ff.

49) Herbart, Psychologie als Wissenschaft neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik. Ges. Werke, herausg. von Hartenstein, Bd. V, VI.

50) M. W. Drobisch, Erste Grundlinien der mathematischen Psychologie (Leipzig 1850), Vorrede. Vgl. auch Wilhelm Wundt, Grundzüge der physiologischen Psychologie, I (5. Auflage, Leipzig 1902), p. 7.

51) Wundt a. a. O., Kap. IX, p. 466 ff.

52) Ausführliches Literaturverzeichnis in Ernst Schröders Algebra der Logik, I (Leipzig 1890), p. 700—715.

53) M. Herzfeld, Leonardo da Vinci (Leipzig 1904), p. 8, XXIII.

54) Allgemeine Betrachtungen über die Wechselwirkung zwischen der reinen Mathematik und ihren Anwendungen geben: William Spottiswoode, Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Deutsch von H. Gretschel. Leipzig 1879. — H. Poincaré, Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique. Acta mathematica, 21 (1897). — Walther Dyck, Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und angewandten Mathematik. Akad. Festrede. München 1897.

55) A. a. O. (s. Note 3).