BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkung zum Lagrangeschen Befreiungsprinzip und zum Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges

Von G. Aumann in München

Vorgelegt am 23. April 1971

1. Einleitung

Die Unsicherheit in der Behandlung nicht-holonomer mechanischer Systeme rührt m. E. daher, daß man üblicherweise bei der Beschreibung eines freien mechanischen Systems, etwa mittels der Lagrangeschen Gleichungen, von klaren mechanischen Vorstellungen ausgeht, sich aber andererseits bei Hinzunahme von Bewegungsbeschränkungen nicht scheut, die nicht-holonomen Nebenbedingungen in allgemeinster Form bis zur mechanischen Undeutbarkeit hin vorzuschreiben. Die folgenden Bemerkungen wollen zeigen, daß das Lagrangesche Befreiungsprinzip, das im Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges präzisiert ist, eine sehr plausible Formulierung annimmt, wenn man die Angelegenheit als ein rein mathematisches Problem auffaßt, wobei dann die Invarianz der aufgestellten Gleichungen bzw. ihre Übereinstimmung mit den üblichen Gleichungen der Mechanik im Falle nicht-holonomer, in den Geschwindigkeiten linearer Nebenbedingungen den mathematischen bzw. mechanischen Sinn und Zweck der vorgeschlagenen Beschreibung rechtfertigen.

2. Das freie mechanische System

Unter einem freien M-System $(\mathfrak{f}, T)$ mit n Freiheitsgraden verstehe ich ein System von n Differentialgleichungen 2-ter Ordnung für n Funktionen $x_1, \ldots, x_n$ — zu einem Vektor $\mathfrak{x}$ zusammengefaßt — der Veränderlichen t:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, t), \tag{1}$$

zusammen mit einer positiv definiten quadratischen Form

$$T(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}},t) := \frac{1}{2} a^{ik}(\mathfrak{x},t)\dot{x}_i\dot{x}_k, \tag{2}$$

der „kinetischen Energie“ des Systems.

Zwei Systeme $(\mathfrak{f}, T)$ und $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{T})$ heißen äquivalent, wenn es eine (von t unabhängige) zweimal stetig differenzierbare Transformation

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{X}(\tilde{\mathfrak{x}}) \tag{3}$$

mit einer nicht-singulären Funktionalmatrix gibt, welche mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\mathfrak{f}$ und T gemäß (1) und (2) die Überführung von $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{T})$ in $(\mathfrak{f}, T)$ bewirkt.

3. Das gebundene mechanische System

$(\mathfrak{f}, T, b_\mu^*)$ entsteht aus dem freien System $(\mathfrak{f}, T)$ durch Hinzunahme von kinematischen Bedingungen der Form

$$b_\mu^*\ (\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}},t) = 0,\ \mu = 1,\ldots, m,\ m < n. \tag{4*}$$

Um klare Verhältnisse zu haben, setzen wir weiter voraus, daß es

1. ein Wertesystem

$$\mathfrak{x}_0,\ \dot{\mathfrak{x}}_0,\ t_0 \tag{4**}$$

gibt, das (4*) erfüllt.

2. Wenn eine Gleichung $b_\mu^* = 0$ die Variable $\dot{\mathfrak{x}}$ nicht enthält, d. h. von der Form $g(\mathfrak{x}, t) = 0$ ist, so ersetzen wir diese Gleichung durch ihre Differentialform $\frac{\partial g}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$, und erhalten nach solchen Ersetzungen anstelle von (4*) die Bedingungen

$$b_\mu(\mathfrak{x},\dot{\mathfrak{x}},t) = 0,\ \mu = 1,\ldots, m. \tag{4}$$

Wir setzen ferner voraus, daß (4**) auch die Gleichungen (4) befriedigt, und schließlich verlangen wir, daß die Funktionalmatrix der $b_1, \ldots, b_m$ nach den $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ für das Wertsystem (4**) den Höchstrang m besitzt. Diese Rangbeziehung gilt dann auch für eine Umgebung von (4**), soferne die b_μ stetig differenzierbar sind.

3.1. Beispiel. Es sei $n = 3$, $m = 2$ und die kinematischen Bindungen seien durch $x_1 + x_2 = 0$ und $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_3 = 0$ beschrieben. Hieraus folgt $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$, so daß an sich die Rangbedingung verletzt ist. Es folgt aber weiter, daß $x_3 = 0$ ist, so daß hier ein holonomes System vorliegt und die Gleichungen $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$ und $\dot{x}_3 = 0$ das unseren obigen Voraussetzungen entsprechende System (4) darstellen.

Die Äquivalenz gebundener Systeme wird in analoger Weise wie die von freien Systemen erklärt, wobei auch die Bindungen (4*) gemäß (3) mitzutransformieren sind.

3.2. Wird unter den genannten Voraussetzungen das System $(\mathfrak{f}, T)$ den Bindungen (4) unterworfen, so haben im allgemeinen (1) und (4) keine gemeinsamen Lösungen $\mathfrak{x}$. Das Lagrangesche Befreiungsprinzip – der Name stammt von G. Hamel – besagt, daß man, um die Bedingungen (4) einzuhalten, (1) abändern muß durch Hinzunahme einer Zwangsbeschleunigung $\mathfrak{r}$ in

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, t) + \mathfrak{r}, \tag{1'}$$

wobei $\mathfrak{r}$ so einzurichten ist, daß die Lösungen von (1') (mit (2)) als des „befreiten Systems" mit Anfangsbedingungen $\mathfrak{x}(t_0) = \mathfrak{x}_0$, $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) = \dot{\mathfrak{x}}_0$ (gemäß (4**)) die Bedingungen (4*) von selbst für alle Zeiten $t > t_0$ erfüllen; im übrigen soll natürlich diese Abänderung von (1) in (1') minimalen Charakter haben, um die Beziehung zum ursprünglich freien System $(\mathfrak{f}, T)$ möglichst eng zu halten. Zur Lösung dieser Aufgabe dient die begleitende Funktion T.

4. Ist nämlich $\mathfrak{x}(t)$ eine Lösung von (1') und (4), so folgt zunächst aus (4) durch Differentiation nach t (in Vektorschreibweise)

$$\mathfrak{b}_{\mu 1}\, \dot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{b}_{\mu 2}\, \ddot{\mathfrak{x}} + b_{\mu 3} = 0$$

und weiter nach (1')

$$(\mathfrak{b}_{\mu 1}\, \dot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{b}_{\mu 2}\, \mathfrak{f} + b_{\mu 3}) + \mathfrak{b}_{\mu 2}\, \mathfrak{r} = 0,$$

oder zusammengefaßt

$$c_\mu + \mathfrak{b}_{\mu 2}\, \mathfrak{r} = 0,\ \mu = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Rg}\,(\mathfrak{b}_{\mu 2}) = m$; (5) besagt also, daß $\mathfrak{r}$ einem linearen Teilraum L des $\mathbf{R}^n$ der Dimension $n - m$

($\geqslant 1$ und $< n$) angehört. Wählen wir umgekehrt eine Funktion $\mathfrak{r}(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, t)$, die (5) für alle $\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, t$ erfüllt, so gibt es (bei den üblichen Regularitätsvoraussetzungen) genau eine gemeinsame Lösung $\mathfrak{x}(t)$ von (1′) und (4) mit Anfangswerten $\mathfrak{x}(t_0) = \mathfrak{x}_0$, $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) = \dot{\mathfrak{x}}_0$.

Zur weiteren (eindeutigen) Festlegung von $\mathfrak{r}$ auf L dient eine Minimalforderung: In Übereinstimmung mit dem Gaußschen Prinzip nennen wir die Größe

$$Z(\mathfrak{r}) := T(\mathfrak{x}, \mathfrak{r}, t)$$

den Z w a n g, der durch die Zwangsbeschleunigung $\mathfrak{r}$ auf das freie System ($\mathfrak{f}$, T) ausgeübt wird, und verlangen, daß $Z(\mathfrak{r})$ auf L minimal ist. Die Forderung lautet also:

U n t e r E i n h a l t u n g d e r B e d i n g u n g e n (5) i s t $\mathfrak{r}$ s o z u w ä h l e n, d a ß

$$Z(\mathfrak{r}) \text{ minimal} \tag{6}$$

s t. Wegen der positiven Definitheit von T in Abhängigkeit von $\dot{\mathfrak{x}}$ gibt es genau ein $\mathfrak{r}$ mit (6). Als Folgerung von (6) ergeben sich nämlich nach den Regeln der Differentialrechnung $\mathfrak{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ die weiteren Gleichungen

$$a^{ik} r_k + \lambda_\mu b_{\mu 2}{}^i = 0, \; i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

welche mit (5) zusammen $m + n$ Gleichungen für $r_1, \ldots, r_n$ und die „Lagrangeschen Multiplikatoren" $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ darstellen mit einer Determinante

$$\det \left(b_{\mu 2}{}^j (a^{ji})^{-1} b_{\mu' 2}{}^i\right),$$

die wegen der Positivität von (a^{ji}) und $\operatorname{Rg}(\mathfrak{b}_{\mu 2}) = m$ als modifizierte Form einer Gramschen Determinante von Null verschieden ist.

5. Die Zweckmäßigkeit der Forderung (6) rechtfertigt sich aus ihrer I n v a r i a n z gegenüber Wechsel des Koordinatensystems im Sinne von (3) und aus der Übereinstimmung von (7) mit dem d'A l e m b e r t s c h e n A x i o m für nicht-holonome Systeme mit in $\dot{\mathfrak{x}}$ linearen Bindungen (4) (vgl. Morgenstern-Szabó, Vorlesungen über theoretische Mechanik, Berlin 1961, Seite 17). Auf eine Durchführung der diesbezüglichen Verifikationen kann hier verzichtet werden; es sei nur bemerkt, daß die Unabhängigkeit der Transformation (3) $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{X}(\bar{\mathfrak{x}})$ von t dabei wesentlich ist.