BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Spinorfeldtheorie im explizite relativistisch invarianten Schrödingerbild

Von Fritz Bopp

Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität in München

Abstract

Quantum field equations are developed within the Schrödinger picture. They are manifestly Lorentz invariant. Free fermions and antifermions have positive energies and opposite charges. Therefore the physical vacuum equals the formal one. Hence, it is possible to assume interactions which are compatible with constant number of particles. Such interactions are clearly not yet realistic; however, it may be useful to investigate them first as rigorous solutions are available. We obtain stationary solutions for the 2-body-problem, however, only for certain values of the coupling constant: Masses and coupling constants are someway eigenvalues of different states.

We obtain these results by a reformulation of the canonical formalism. Starting with Lagrangeans which are homogeneous of first degree in the space-time velocities, we deduce canonical functions. They define canonical equations which include those for time and negative energy as an additional pair of canonical variables. The canonical functions coorespond to Hamiltonians (not to energy). Their value equals zero. Canonical quantization provides us with wave equations which are well known in simple cases.

The method can be extended to quantum field theory. In the classical part of the theory Poisson brackets occur with the 4-dimensional δ-functinon, $\delta(x - x')$, instead of the usual 3-dimensional one. That remains valid for the correspondning commutation relations after canonical quantization. We obtain Schrödinger equations for quantum fields which we apply to the problems mentinoned above.

1. Einleitung

„Da die Zeit in der Quantenmechanik eine c-Zahl ist, gibt es keine eigentliche Energie-Zeit-Unschärferelation.“[1] Diese These beschreibt die Situation bei herkömmlicher kanonischer Quantisierung. Sie wird durch das Wort ‚eigentlich‘ mit Recht entschärft. Weder Konsequenzen der Theorie, noch Erfahrungen erlauben Zweifel an der Gültigkeit der Energie-Zeit-Unschärferelation.

[1] Zitat aus einem Brief, das eine verbreitete Meinung wiedergeben dürfte.

Tatsächlich ist die Sonderstellung der Zeit nur methodisch bedingt. Sowohl das engere Hamiltonsche Prinzip, von dem aus man zu den kanonischen Gleichungen gelangt, als auch das weitere, das unmittelbar die kanonischen Gleichungen liefert, lassen sich sogar nichtrelativistisch Raum-Zeit-symmetrisch, RZ-symmetrisch, formulieren. Das macht es von vorneherein wahrscheinlich, daß man auf RZ-symmetrische Weise vom Hamiltonprinzip zu den kanonischen Gleichungen gelangen kann. In Ziff. 2 werden wir zeigen, vor welcher Schwierigkeit man zunächst steht und wie man sie überwinden kann.

Zunächst bestätigen wie die Behauptung, daß man sowohl das engere Hamiltonsche Prinzip, als auch die kanonischen Gleichungen RZ-symmetrisch schreiben kann. Das Hamiltonsche Prinzip für einen Massenpunkt lautet in herkömmlicher Form:

$$\delta \int L_0\left(t, \boldsymbol{r}; \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) dt = 0,$$

Sei

$$x = (t, \boldsymbol{r}) = (x^0; x^1, x^2, x^3), \tag{1.1}$$

so nimmt das obige Hamiltonsche Prinzip bei Verwendung der Parameterdarstellung $x = x(\tau)$ folgende Form an:

$$\delta \int L(x, \dot{x}) d\tau = 0, \quad L = L_0(t, \boldsymbol{r}; \dot{\boldsymbol{r}} \,/\, \dot{t})\, \dot{t}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\,. \tag{1.2}$$

Daraus folgen die Lagrangeschen Gleichungen

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}, \quad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \tag{1.3}$$

von denen drei mit den gewöhnlichen übereinstimmen, während die vierte den Energiesatz liefert. Das ist bekannt.[2]

Nach (1.2) ist die RZ-symmetrische Lagrangefunktion $L(x, \dot{x})$ in $\dot{x}$ offensichtlich homogen vom Grade 1. Das gilt allgemein. Denn der Parameter τ hat keine physikalische Bedeutung. Tatsächlich ist er genau im Falle der Homogenität vom Grade 1 entbehrlich:

$$\delta \int L(x, \dot{x}) d\tau = \delta \int L(x, dx) = 0. \tag{1.4}$$

[2] Es ist möglich, nach t zu variieren, auch ohne den Parameter τ einzuführen. Doch muß man dann explizite berücksichtigen, daß $\delta dx/dt \neq d\delta x/dt$ ist.

Sei $H(p, x, t)$ die aus obigem $L_0(t; \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$ auf gewöhnliche Weise folgende Hamiltonfunktion, so lautet das erweiterte Hamiltonsche Prinzip:

$$\delta \int p_\mu dx^\mu = 0, \tag{1.5}$$

wenn man die vierdimensionalen Orte und Impulse

$$\begin{aligned} x &= (x^0; x^1, x^2, x^3) \equiv (t; \boldsymbol{r}), \\ p &= (p_0; p_1, p_2, p_3) \equiv (-W; \boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

unter Einhaltung der Nebenbedingung

$$K \equiv p_0 + H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1.7}$$

frei variiert. Die RZ-Symmetrie tritt deutlich hervor.[3]

Zum Beweis führen wir den Parameter τ ein und hängen die Nebenbedingung mit einem Lagrangeschen Parameter λ an. Danach lautet das Variationsprinzip:

$$\delta \int (p_\mu \dot{x}^\mu - \lambda K) d\tau = 0,$$

und es ergeben sich die kanonischen Gleichungen:

$$\dot{x}^\mu = \lambda \frac{\partial K}{\partial p_\mu}, \quad \dot{p}_\mu = -\lambda \frac{\partial K}{\partial x^\mu}, \quad K = 0, \tag{1.8}$$

d. i. nach Rückkehr zu H:

(1.9)

$$\frac{dt}{d\tau} = \lambda, \frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\lambda}\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Man erhält also die gewöhnlichen kanonischen Gleichungen, den Energiesatz und eine Gleichung für den Parameter. Hier ergibt sich speziell

$$t = \int \lambda \, d\tau.$$

Nach RZ-symmetrischer kanonischer Formulierung der Mechanik in Ziff. 2 überträgt sich Schrödingers Methode der formalen kanonischen Quantisierung unmittelbar auf die RZ-symmetrische Theorie, so daß die eingangs formulierte These hinfällig

---

[3] D. TerHaar: Elements of Hamiltonian Mechanics; North Holland Publ. Cy., Amsterdam 1961; Hier: Chap. 5, sect. 4, insbes. eq (5.415/416).

wird. In Ziff. 3 werden wir an ebenso einfachen wie geläufigen Beispielen zeigen, wie die Quantisierung durchzuführen ist. Die Ergebnisse sind keineswegs überraschend. Denn es bestätigt sich nur, was man in den betrachteten Fällen schon immer getan hat. Wir haben mit Erfolg auch Beispiele untersucht, bei denen man nicht von vorneherein weiß, was herauskommen muß. Doch wollen wir hier darauf nicht eingehen, um nicht von dem Ziel der Arbeit abzulenken, Feldgleichungen RZ-symmetrisch zu quantisieren.

Die Methode der RZ-symmetrischen kanonischen Quantisierung kann man auch auf klassische Feldgleichungen anwenden. In Ziff. 4 gehen wir von der Diracgleichung aus, die zunächst als klassische Feldgleichung angesehen wird. Wie zuvor ist es möglich, die Zeit als vierte Koordinate zu betrachten. Doch ist es bei der Quantisierung von Feldgleichungen nicht von vorneherein klar, was an die Stelle des Parameters τ tritt, bezw. wie man einen solchen einführen kann. Tatsächlich gelingt das mittels eines Kunstgriffs. Dieser ist unbedenklich, nicht nur weil er am Ende wieder herausfällt, sondern vor allem weil auch dieRZ-symmetrischen Schrödingergleichungen in Ziff. 3 τ-unabhängig sind.

Es ergeben sich einige völlig neue Aspekte, die in Ziff. 5/7 untersucht werden. Sie rühren davon her, daß die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf RZ-Punkte bezogen sind und darum sozusagen das Aufblitzen von Teilchen und die Löschung von Blitzen beschreiben. Schon hier in Kürze auf diese Ergebnisse einzugehen, verbietet sich, weil man sie im voraus kaum verständlich machen kann. Hier nur dies: (1) Teilchen und Antiteilchen haben positive Energie und entgegengesetzte Ladung. – (2) Physikalisches und formales Vakuum stimmen überein. – (3) Bindungszustände gibt es nur für spezielle Werte der Kopplungskonstante. – (4) Massen und Kopplungskonstanten sind Eigenwerte der Zustände des Systems.

2. Ableitung RZ-symmetrischer kanonischer Gleichungen

Wir betrachten ein System, das einschließlich der Zeit f Freiheitsgrade hat:

$$x = (x^1, x^2 \dots x^f). \tag{2.1}$$

Die Bewegungsgleichungen sollen aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int L(x, \dot{x})\, d\tau = 0 \tag{2.2}$$

hervorgehen. Die Lagrangefunktion $L(x, \dot{x})$ sei in $\dot{x}$ homogen vom Grade 1, so daß die Eulersche Gleichung in folgender Form gelte:

$$\dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \equiv \dot{x}^{\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = L. \tag{2,3}$$

Daraus erhält man durch Ableitung nach $\dot{x}^{\mu}$

$$\dot{x}^{\mu} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^{\mu} \partial \dot{x}^{\nu}} = 0, \tag{2.4}$$

so daß die Funktionaldeterminante der zweiten Ableitungen nach $\dot{x}$ verschwindet:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^{\mu} \partial \dot{x}^{\nu}} \right) = 0. \tag{2.5}$$

Das hat zur Folge, daß die Impulsgleichungen

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \tag{2.6}$$

nicht nach den Geschwindigkeiten auflösbar sind. Aus diesem Grunde versagt das übliche Verfahren der Herleitung von kanonischen Gleichungen.

Tatsächlich braucht die Determinante nicht von 0 verschieden zu sein. Es existiert auch dann ein System von kanonischen Gleichungen, wenn der Rang der Matrix aus (2.5) gleich $f - 1$ ist:

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^{\mu} \partial \dot{x}^{\nu}} \right) = f - 1. \tag{2.7}$$

In diesem Fall gibt es eine bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte Relation

$$K = K(p, x) = 0, \tag{2.8}$$

und es gelten die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = + \frac{\partial K}{\partial p^{\mu}}, \quad \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = - \frac{\partial K}{\partial x^{\mu}}. \tag{2.9}$$

Danach ist $K(p, x)$ die RZ-symmetrische Hamiltonfunktion. Sie ist natürlich nicht mit der Energie identisch. Um Verwechslungen vorzubeugen, heiße sie 'kanonische Funktion'.

Bevor wir diese Behauptungen beweisen, wollen wir zeigen, daß der willkürliche Faktor vor K harmlos ist und mit der Parameterinvarianz zusammenhängt. Sei

$$K' = K'(p, x) = \Lambda(p, x) K(p, x), \quad \Lambda(p, x) \neq 0,$$

so ergeben sich analog zu (2.9) die kanonischen Gleichungen:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau'} = + \frac{\partial K'}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tau'} = - \frac{\partial K'}{\partial x^\mu}.$$

Durch Substitution von (2.8/9) erhält man

$$\frac{dx^\mu}{d\tau'} = \Lambda \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tau'} = \Lambda \frac{dp_\mu}{d\tau},$$

so daß sich die transformierten kanonischen Gleichungen von den ursprünglichen nur im Parameter unterscheiden:

$$d\tau = \Lambda \, d\tau'.$$

Wegen der Parameterinvarianz muß F frei wählbar und $K = 0$ sein.

Nach (2.7) gibt es mindestens zu einem der Elemente der Matrix eine von 0 verschiedene Unterdeterminante. Gehört diese zum Matrixelement

$$\frac{\partial^2 L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\mu \, \partial \dot{x}^\nu}$$

so kann man aus (2.6) alle $\dot{x}_\lambda$ mit $\lambda \neq \mu$ ausrechnen:

$$\dot{x}_\lambda = f_\lambda(p_0 \cdot \cdot p_{\nu-1}, p_{\nu+1} \cdot \cdot p_f, x^0 \, . \, . \, x^f, \dot{x}^\mu).$$

Im Argument fehlt p_ν, dafür ist $\dot{x}^\mu$ nicht eliminiert. Setzt man diese Funktionen in die Gleichung für p_ν ein, so folgt:

$$p_\nu = g(p_1 \cdot \cdot p_{\nu+1}, p_{\nu+1} \cdot \cdot p_f, x^1 \, . \, . \, x^f).$$

Darin darf $\dot{x}^\mu$ nicht mehr vorkommen. Sonst könnte man auch die letzte Geschwindigkeitskomponente als Funktion von p und x darstellen, was der Annahme (2.7) widerspräche. Die letzte Gleichung ist eine von dem erwarteten Typus (2.8), so daß unsere erste Behauptung bewiesen ist.

Die zweite ergibt sich, wenn wir (2.8) nach $\dot{x}^\nu$ und x^ν ableiten:

$$(2.10) \qquad \frac{\partial K}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial K}{\partial x^\nu} = 0.$$

Die linke Gleichung ergibt in Verbindung mit (2.4):

$$\left(\frac{\partial K}{\partial p_\mu} - \lambda \dot{x}^\mu\right) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = 0.$$

Darin ist λ zunächst willkürlich wählbar. Wählen wir λ so, daß einer der Klammerausdrücke verschwindet, so sind die übrigen wegen des Ranges (2.7) gleich 0:

$$\frac{\partial K}{\partial p_\mu} - \lambda \dot{x}^\mu = 0.$$

Somit ergibt sich nach der Parametertransformation

$$d\tau \to \lambda\, d\tau$$

das erste System der kanonischen Gleichungen in (2.9). Das zweite erhält man, wenn man das erste in die rechten Gl. (2.10) einsetzt. Denn

$$-\frac{\partial K}{\partial x^\nu} = \dot{x}^\mu \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{dp^\nu}{d\tau}.$$

Darin ist von den Lagrangeschen Gleichungen, sowie von der Homogenität von L und $\partial L / \partial x^\nu$ Gebrauch gemacht. Nunmehr sind alle Behauptungen bewiesen.

Besonderes Interesse verdient der Umstand, daß sich p_μ und x^μ kontragredient verhalten, was sich bereits in dem Wirkungsintegral (1.5) angekündigt hat. Entsprechend lauten die Poissonklammern für beliebige Funktionen $F(p, x)$ und $G(p, x)$:

$$(2.11) \qquad [F(p, x), G(p, x)] = \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} \frac{\partial G}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial F}{\partial x^\lambda} \frac{\partial G}{\partial p_\lambda} \right\}$$

und spezielle für p und x:

$$(2.12) \qquad [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [x^\mu, x^\nu] = 0, \quad [p_\mu, x^\nu] = \delta^\nu_\mu.$$

Man beachte, daß man für die Energie

$$(2.13) \qquad W = p^0 = -p_0$$

schreiben kann, obwohl auch nicht relativistische Probleme eingeschlossen sind.

Nicht minder bemerkenswert ist der Fall, daß der Rang der Matrix in (2.7) gleich $f - r$ ist mit $r > 1$. Nämliche Betrachtungen wie oben ergeben, daß man r Relationen

$$K_i(p, x) = 0, \quad i \in (1, 2 \ldots r),$$

erhält. Jede von ihnen führt zu einem Satz von kanonischen Gleichungen:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = + \frac{\partial K_i}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = - \frac{\partial K_i}{\partial x^\mu}.$$

Darin kann man alle τ als gleich annehmen, weil man in die Definition der K_i noch passende Faktoren aufnehmen darf. Solange obige Gleichungen noch simultane Lösungen besitzen, können $r - 1$ dieser Gleichungssysteme als Nebenbedingungen aufgefaßt werden. Das ist durchaus möglich. Es gibt Beispiele für verträgliche und unverträgliche kanonische Systeme. Im letzten Fall gibt es keine simultanen Lösungen. Nur dieser Fall ist physikalisch auszuschließen. Alle andern können vorkommen, sobald überzählige Koordinaten im Spiel sind.

3. RZ-symmetrische kanonische Quantisierung

Was man zur kanonischen Quantisierung nach Schrödinger zu tun hat, versteht sich fast von selbst. Nur ein Punkt verdient nähere Betrachtung, weil er uns nachher bei der Feldquantisierung in nicht ganz trivaler Weise wiederbegegnen wird.

Die RZ-symmetrische Lagrangefunktion eines Massenpunkts mit der potentiellen Energie $V(r)$ lautet:

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{\dot{t}} \right) - V(\boldsymbol{r})\dot{t}.$$

Daraus folgt für die kanonischen Impulse:

$$p_0 = - \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{t}} \right)^2 - V(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{p} = m \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{t}}.$$

Daraus erhält man als kanonische Funktion:

$$K = p_0 + \frac{1}{2m} \boldsymbol{p}^2 + V\boldsymbol{r}).$$

Bei formaler Quantisierung ergibt sich nach Schrödinger:

$$\left\{\frac{\hbar}{i}\,\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + V(\boldsymbol{r})\right\}\psi(\boldsymbol{r},t,\tau) = i\hbar\partial_\tau\psi(\boldsymbol{r},t,\tau)$$

Speziell für die τ-unabhängigen Lösungen geht das in die bekannte Schrödingergleichung für unser Problem über:

$$i\hbar\dot{\psi}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r},t).$$

Das Ergebnis verallgemeinernd können wir sagen:

$$(3.1)\qquad :K\left(\frac{\hbar}{i}\,\nabla, x\right):\psi(x) = 0, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)$$

Darin bedeuten die Doppelpunkte, daß man u. U. noch Aussagen über die Reihenfolge von Operatorfaktoren machen muß.

Von der herkömmlichen formalen kanonischen Quantisierung weicht nur die Annahme ab, daß die Wellenfunktionen τ-unabhängig sein sollen. Man kann diese Annahme plausibel machen. Da K von τ nicht abhängt, ist der Ansatz

$$\psi(x,\tau) = \psi(x)e^{-i\varkappa\tau}$$

möglich. Er führt zu der Hauptsachengleichung

$$:K\left(\frac{\hbar}{i}\,\nabla, x\right):\psi(x) = \varkappa\psi(x).$$

Darin ist der Eigenwert der Meßwert von K. Dieser ist klassisch physikalisch gleich 0. Wir haben gesehen, wie wesentlich das ist. Dem entspricht in der Quantenmechanik, daß Gl. (3.1) gilt

Aus der Lagrangefunktion für kräftefrei sich bewegende relativistische Massenpunkte

$$L = -mc\sqrt{-\dot{x}^2}, \quad x = (ct, \boldsymbol{r})$$

mit

$$\dot{x}^2 = \dot{x}^\mu\dot{x}_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu\delta_{\mu\nu}, \quad (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-+++),$$

erhält man für die kanonischen Impulse

$$p_\mu = \frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}$$

und daraus als kanonische Funktion:

$$K = p^2 + m^2c^2 = 0.$$

Mittels (3.1) ergibt sich schließlich die Klein-Gordonsche Gleichung:

$$-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \psi(x) = m^2 c^2 \psi(x)$$

Von der obigen kanonischen Funktion kann man den positiven Faktor $mc + \sqrt{-p^2}$ abspalten. Wir können daher klassisch physikalisch die beiden kanonischen Funktionen

$$K = m^2 c^2 + p^2 = 0, \quad K' = mc - \sqrt{-p^2} = 0$$

vergleichen. Die zugehörigen kanonischen Gleichungen unterscheiden sich nur im Parameter. Diesen erhält man aus

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_\mu} = 2p^\mu \quad \text{bezw.} \quad \frac{dx^\mu}{d\tau'} = \frac{p_\mu}{\sqrt{-p^2}}.$$

Daraus folgt

$$d\tau = \frac{1}{2mc}\sqrt{-dx^2} \quad \text{bezw.} \quad d\tau' = \sqrt{-dx^2}.$$

Im zweiten Fall ist der Parameter gleich der Eigenzeit, im ersten proportional dazu.

Geht man von der kanonischen Funktion K' aus, so empfiehlt es sich, vor der Quantisierung zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung überzugehen:

$$\sqrt{(-\nabla S)^2} = mc, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Denn dann wird deutlich, daß die Einführung des Spins bereits klassisch physikalisch erfolgen kann. Mittels der Diracmatrizen kann man dafür schreiben:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu S(x) - mc) f(x) = 0.$$

Klarerweise ist die Gleichung nur für solche S lösbar, die die vorherige Differentialgleichung befriedigen. Lösbarkeit vorausgesetzt liefert sie darüber hinaus – rein algebraisch – spezielle Spinoren, die beschreiben, wie sich der Spin längs RZ-Bahnen ändert, die

die Flächen $S(x) = \text{const}$ senkrecht schneiden.[4] Danach erfolgt die Quantisierung genau so wie im Schrödingerfall; es ergibt sich die Diracgleichung:

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right) \varphi(x) = 0,$$

von der man durch ‚geometrisch optische Näherung' zur vorhergehenden Gleichung zurückkehren kann. Man erhält sie mittels des Ansatzes

$$\psi(x) = f(x)\, e^{i S(x)/\hbar},$$

wenn man annimmt, daß die Amplituden $f(x)$ verglichen mit der Exponentialfunktion langsam veränderlich sind. Denn dann ist

$$\partial_\mu \psi(x) \cong \frac{i}{\hbar} \partial_\mu S(x)\, \psi(x).$$

Die Situation ist mit der in der Optik vergleichbar. Polarisationseigenschaften des Lichtes zeigen sich auch, wenn Welleneffekte noch keine Rolle spielen.

Die Beispiele in dieser Ziffer machen deutlich, daß die Art, wie man sich schon immer über die Grenzen der herkömmlichen kanonischen Quantisierung hinweggesetzt hat, mit den obigen allgemeinen Sätzen im Einklang ist. Um die Brauchbarkeit der Methode zu prüfen, haben wir weniger einfache Beispiele untersucht, die aber thematisch nicht hierher gehören.[4]

4. Kanonische Formulierung der Diracgleichung

Wir betrachten das Diracfeld zunächst als klassisch physikalisches. Die Diracgleichung lautet (in Einheiten $\hbar$, c):[5]

$$L(\psi) \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad \partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu. \tag{4.1}$$

---

[4] Obiges Verfahren ist unabdingbar, wenn bei der Linearisierung Ausdrücke entstehen, die nach der Quantisierung nicht mehr vertauschbar sind, z. B. wenn man von der Lagrangefunktion

$$L = -m\sqrt{-\dot{x}^2} - \frac{\alpha}{2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}\cdot y}, \quad y^2 = -1,$$

aus F. Bopp, W. Lutzenberger, Z. Naturforschung 29a, 408 (1973), ausgehend zur RZ-symmetrischen kanonischen Funktion übergeht.

[5] Das Vorzeichen in $-m$ ist ungewöhnlich. Es führt zu dem für Elektronen wünschenswerten Ergebnis in (5.17), nach dem Teilchen negativ und Antiteilchen positiv geladen sind.

Die adjungierte Gleichung

$$M(\overline{\psi}) \equiv -\partial_\mu \overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu - m\,\overline{\psi}(x) = 0 \tag{4.2}$$

ist dadurch definiert, daß $\overline{\psi}L(\psi) - \psi M(\overline{\psi})$ eine RZ-Divergenz ist. Hier ergibt sich speziell die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu \overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) = 0. \tag{4.3}$$

Man beachte, daß ψ und $\overline{\psi}$ irgendwelche Lösungen von (4.1) bezw. (4.2) sind. Wir sprechen zunächst nur von adjungierten Gleichungen und nicht von adjungierten Lösungspaaren. Letztere spielen vor der Quantisierung keine Rolle.

Die Feldgleichungen (4.1/2) lassen sich aus einem gemeinsamen Wirkungsintegral ableiten:

$$K := \int \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x)\,d^4x. \tag{4.4}$$

In der Tat folgen die Feldgleichungen aus

$$\frac{\delta K}{\delta \overline{\psi}(x)} = 0, \quad \frac{\delta K}{\delta \psi(x)} = 0. \tag{4.5}$$

Das sind zwar RZ-symmetrische und sogar relativistisch invariante Gleichungen, aber keine kanonischen, was offensichtlich damit zusammenhängt, daß es kein Gegenstück zum Parameter τ der RZ-symmetrischen Mechanik gibt. Man kann jedoch die Gl. (4.5) derart zu kanonischen ergänzen, daß die Integrale von (4.5) auch Lösungen der kanonischen Gleichungen sind. Dazu ist es nötig, ψ und $\overline{\psi}$ außer von x auch von τ abhängen zu lassen und die Gleichungen (4.5) zu kanonischen zu ergänzen. Die neuen Gleichungen lauten:

(4.6)

$$+\,i\,\partial_\tau \psi(x,\tau) = +\,\frac{\delta K}{\delta \overline{\psi}(x,t)} = \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x,\tau) - m\,\psi(x,\tau) = 0,$$

$$-\,i\,\partial_\tau \overline{\psi}(x,\tau) = +\,\frac{\delta K}{\delta \psi(x,\tau)} = -\,\partial_\mu \overline{\psi}(x,\tau)\gamma^\mu - m\,\overline{\psi}(x,\tau) = 0.$$

Relativ zu den erweiterten Feldgleichungen (4.6) ist (4.4) nicht mehr Wirkungsintegral, sondern kanonisches Funktional. Setzen wir darin die Feldgleichungen ein, so folgt:

$$K = i \int \overline{\psi}(x,\tau)\,\partial_\tau \psi(x,\tau)\,d^4x.$$

Durch Substitution der τ-unabhängigen Integrale von (4.6) erhält man

$$K = 0. \tag{4.7}$$

Auch die Umkehrung ist richtig. Wenn K verschwindet, sind die Integrale τ-unabhängig. Denn mit Integralen von der Form

$$\psi = \psi(x)\, e^{-i\varkappa\tau}$$

erhält man

$$K = \varkappa e^{-i\varkappa\tau} \int \overline{\psi}(x,\tau)\psi(x)\, d^4x,$$

und das verschwindet für beliebige Integrale $\overline{\psi}\ (x, \tau)$ nur, wenn $\varkappa = 0$ ist, also nur für τ-unabhängige Integrale, die mit den Integralen aus (4.5) übereinstimmen.

Mit (4.7) hat K die Eigenschaften der kanonischen Funktionen aus § 2, und (4.6) ist äquivalent mit (4.1/2). Nach Hinzufügung von (4.7) liegt keine Verallgemeinerung mehr vor, sondern nur die kanonische Darstellung des ursprünglichen Gleichungssystems.

Nach (4.6) sind ψ und $i\,\overline{\psi}$ kanonisch konjugiert. Seien F und G zwei beliebige Funktionale von ψ und $i\,\overline{\psi}$, so lautet die zugehörige Poissonklammer

(4.8)
$$[F, G] = -i \sum_{\lambda} \int d^4x \left\{ \frac{\delta F}{\delta\overline{\psi}_\lambda(x,\tau)} \frac{\delta G}{\delta\psi_\gamma(x,\tau)} - \frac{\delta F}{\delta\psi_\gamma(x,\tau)} \frac{\delta G}{\delta\overline{\psi}_\lambda(x,\tau)} \right\}.$$

Speziell für $F = \overline{\psi}_\alpha(x', \tau)$ und $G = \psi_\beta(x', \tau)$ erhält man analog zu (2.5):

$$[\overline{\psi}_\alpha(x', \tau), \psi_\beta\ (x'', \tau)] = -\mathrm{i}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(x' - x''). \tag{4.9}$$

Die vierdimensionale δ-Funktion ist in einer RZ-symmetrischen kanonischen Theorie nicht überraschend. Sie macht jedoch deutlich, wie sehr sich RZ-symmetrische Darstellungen von herkömmlichen unterscheiden werden.

Klarerweise sind das kanonische Funktional und die Poissonklammern Lorentzinvariant. Die infinitesimalen Lorentztransformationen

(4.10) $$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu,\ \delta\partial_\mu = \omega_\mu{}^\nu \partial_\nu,\ \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$$

liefern in Verbindung mit den Spinortransformationen

(4.11)
$$\delta\psi = +i\eta\psi,\ \delta\overline{\psi} = -i\,\overline{\psi}\,\eta,\quad \eta = \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu},\ \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

aus (4.9) unmittelbar

$$\delta[\overline{\psi}_\alpha(x',\tau),\,\psi_\beta(x'',\tau)] = 0$$

und wegen

(4.12)
$$[\gamma^{\varrho\sigma},\gamma^\mu] = -2i(\gamma^\varrho g^{\sigma\mu} - \gamma^\sigma\ g^{\varrho\mu}),\quad g_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu\ \delta_{\mu\nu},\ \varepsilon = (-+++)$$

aus (4.4)

$$\delta K = \int \overline{\psi}(i[\eta,\gamma^\mu]\,\partial_\mu + \gamma^\nu\omega_\nu{}^\mu\ \partial_\mu)\,\psi\, d^4x = 0.$$

Die Spinoren $\overline{\psi}$ und ψ transformieren sich kontragredient, aber nicht unitär, letzteres weil die Matrix η nicht hermitesch ist.[6]

Die kanonischen Gleichungen (4.6) sind durch die Diracgleichung (4.1) keineswegs eindeutig bestimmt. Konventionell läge es nahe, $\overline{\psi} = \psi^\dagger\cdot\gamma_0$ zu setzen und (p,q) entsprechend $(i\psi^\dagger(x,\tau),\,\psi(x,\tau))$ als kanonisch konjugiert zu betrachten.[7] Es gibt gute Gründe, den hier eingeschlagenen Weg für bedenklich zu halten. Wir haben ihn gewählt, weil er sich zwanglos anbietet, und gefunden, daß die Quantisierung zu bemerkenswerten Resultaten führt, ohne daß sich die Schwierigkeiten einstellen, welche man bei gleichartigem Vorgehen in der konventiellen Quantenfeldtheorie erhalten würde.[8] Ob das so bleibt, wenn man Wechselwirkungen einführt, wird sich erst zeigen müssen.

5. RZ-symmetrische Quantisierung im Schrödingerbild

Nach der RZ-symmetrischen kanonischen Formulierung der Diracgleichung können wir diese auf Schrödingersche Weise

---

[6] Das gilt auch für $\psi^+\gamma_0$ in der herkömmlichen Theorie.

[7] Vgl. z. B. J. M. Jauch, F. Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons; Addison-Wesley Publ. Cy., 1955; hier (3.29).

[8] Unsere Annahme würde in der konventionellen Theorie zu indefiniten Wahrscheinlichkeiten führen; nach Ziff. 5 geschieht das hier nicht.

quantisieren. Dabei sind die parameterabhängigen Feldfunktionen durch parameterunabhängige Feldoperatoren $\overline{\psi}(x)$ und $\psi(x)$ zu ersetzen. Es kann kaum zu Verwechslungen Anlaß geben, wenn wir dafür die nämlichen Buchstaben benutzen.

Die Vertauschungsrelationen der Operatoren sind durch die Poissonklammern bestimmt. Da wir es mit Fermionen zu tun haben, sind Plusklammern zu verwenden:

$$\{A, B\} = A B + B A. \tag{5.1}$$

Danach treten an die Stelle der Poissonklammern (4.9) die Vertauschungsrelationen:

$$\{\psi_\alpha(x'), \overline{\psi}_\beta(x'')\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(x' - x''), \tag{5.2}$$

zu denen noch die homogenen Relationen

$$\{\psi_\alpha(x'), \psi_\beta(x'')\} = 0, \quad \{\overline{\psi}_\alpha(x'), \overline{\psi}_\beta(x'')\} = 0 \tag{5.3}$$

hinzutreten. Der kanonische Operator stimmt formal mit (4.4) überein:

$$K \equiv \int \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi(x)\, d^4x. \tag{5.4}$$

Die Schrödingergleichung lautet mit Rücksicht auf (4.7) gemäß (3.1):

$$K \mid \Phi > = 0. \tag{5.5}$$

Darin verwenden wir für die Zustandsvektoren das Diracsche KET-Symbol $\mid \Phi >$. Das BRA-Symbol spielt zunächst noch keine Rolle.

Die Vertauschungsrelationen unterscheiden sich in doppelter Weise von den herkömmlichen. Erstens steht auf der rechten Seite die vierdimensionale δ-Funktion. Zweitens tritt der adjungierte Operator $\overline{\psi}$ an die Stelle des hermitesch konjugierten ψ^+. Beide Änderungen haben erhebliche Konsequenzen. Bevor wir diese näher untersuchen, wollen wir spezielle Lösungen der Schrödingergleichung (5.5) betrachten.

Sei $\mid 0 >$ der Zustandsvektor für das RZ-Vakuum, nach dem es nirgends und niemals ein Teilchen gibt, und kennzeichnen wir das Vakuum durch die Bedingungen

$$\psi_\alpha(x) \mid 0 > = 0, \tag{5.6}$$

weil kein Teilchen vernichtet werden kann, wo keines ist, so folgt unmittelbar, daß das Vakuum eine spezielle Lösung der Schrödingergleichung (5.5) ist. Ferner stellt

$$N = \int \overline{\psi}(x)\, \psi(x)\, d^4x \tag{5.7}$$

den Operator für die Teilchenzahl in der Raum-Zeit dar. Sei nämlich $(\overline{\psi})^n$ eine homogene Form n-ten Grades in $\overline{\psi}$, so beschreibt

$$| n > \, = (\overline{\psi})^n \, | 0 > \tag{5.8}$$

einen Zustand mit n Teilchen in der Raum-Zeit, und es gilt:

$$N \, | n > \, = n \, | n > . \tag{5.9}$$

Da bei Anwendung von K die Teilchenzahl erhalten bleibt, bleiben die Lösungen mit bestimmter Teilchenzahl n unter sich. Wir können uns darum auf Lösungen mit bestimmtem n beschränken und betrachten nächst dem Vakuum die 1-Teilchen-Zustände

$$| \Phi > \, = \int d^4x \, \overline{\psi}(x) \, \varphi(x) \, | 0 > . \tag{5.10}$$

Für die Koeffizienten erhält man die c-Zahl-Diracgleichung:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m) \, \varphi(x) = 0, \tag{5.11}$$

die formal mit (4.1) übereinstimmt. Wegen der Lorentzinvarianz genügt es ruhende Teilchen zu betrachten. Mit dem Ansatz

$$\varphi(x) = u e^{ik \cdot x}, \; k^0 = \omega, \; \boldsymbol{k} = 0 \tag{5.12}$$

erhält man

$$-(\omega \varrho_3 + m) \, u = 0 \succ \omega = \pm \, m, \; u = \frac{1}{2} (1 \mp \varrho_3) v . \tag{5.13}$$

Darin muß der konstante Spinor v nur die Bedingung erfüllen, daß das resultierende u von 0 verschieden ist. Im Einklang mit (5.9) folgt aus (5.10) unmittelbar:

$$N \, | \Phi > \, = \, | \Phi > . \tag{5.14}$$

Das gilt unabhängig vom Vorzeichen in $\pm \, m$, also bei üblicher Deutung für Teilchen und Antiteilchen.

Schon die Poissonklammern (4.9) bezw. die Vertauschungsrelationen (5.3) haben zur Folge, daß sich die Dimensionen von ψ und $\overline{\psi}$ ändern. Man erhält

$$\mathrm{Dim}\,(\psi, \overline{\psi}) = [m^{-2}] \tag{5.15}$$

statt $m^{-3/2}$. Dementsprechend ist N in (5.7) dimensionslos. Dasselbe muß für die Ladungszahl gelten. Aus der klassischen Kontinuitätsgleichung (4.3) erhält man zunächst das übliche konstante Ladungsintegral

$$q = \int \overline{\psi}(x) \varrho_3 \psi(x) d^3x.$$

Es bezieht sich auf einen Zeitschnitt $t =$ const. Bei endlich vielen Teilchen in der ganzen Raum-Zeit wird es auf einem Zeitschnitt im allgemeinen überhaupt keine Teilchen geben. Denn das Maß des Zeitschnitts in der Raum-Zeit ist gleich 0. Darum muß man die Ladungszahl wie die Teilchenzahl durch ein vierdimensionales Integral darstellen. Der der Ladung zugeordnete Operator lautet daher:

$$Q = \int \overline{\psi}(x) \varrho_3 \psi(x) d^4x. \tag{5.16}$$

Er ist klarerweise wie N dimensionslos. Durch Anwendung auf (5.10) erhält man

$$Q \,|\, \varphi > = \int d^4x\, \overline{\psi}\,(x)\, \varrho_3 \varphi(x) \,|\, 0 >$$

d. i. nach (5.13) gleich

$$\mp \int d^4x\, \overline{\psi}(x)\, (1 \pm \varrho_3)\, v e^{ik\cdot x} \,|\, 0 >.$$

Somit sind die Ladungen für Teilchen und Antiteilchen gemäß

$$Q \,|\, \varphi > = \mp \,|\, \varphi > \text{ für } \omega = \pm\, m. \tag{5.17}$$

entgegengesetzt gleich.

Auf ähnliche Weise erhält man, daß die Ruhenergie der Teilchen und Antiteilchen positiv und gleich m ist. Klassisch physikalisch lautet der kanonische Energie-Impuls-Tensor

$$\Theta_\mu^{\ \nu} = -\overline{\psi}\gamma^\nu \partial_\mu \psi + \overline{\psi}(\gamma^\varrho \partial_\varrho - m)\, \psi \delta_\mu^\nu.$$

Daraus folgen die Kontinuitätsgleichungen für Energie und Impuls:

$$\partial_\nu \Theta_\mu^{\ \nu} = 0.$$

Die konstanten Energie- und Impulsintegrale lauten:

$$W = \int \Theta^{oo}\, d^3x = \int \overline{\psi}\,(m - \gamma \cdot \nabla)\,\psi d^4x,\ P^k = \int \Theta^{ko} d^3x = \\ = -\int \overline{\psi}\,\gamma^o \partial^k \psi d^3x.$$

Die zugehörigen RZ-Operatoren erhält man analog zu dem der Ladung:

(5.18)

$$W = \int \overline{\psi}(x)(m - \gamma \cdot \nabla)\,\psi(x)\,d^4x,\ \boldsymbol{P} = -\int \overline{\psi}(x)\,\gamma^0\,\nabla\,\psi(x)\,d^4x.$$

Sie ergeben bei Anwendung auf (5.10/13) die Eigenwerte

(5.19) $W \mid \Phi > = m \mid \Phi >,\ \boldsymbol{P} \mid \varphi > = 0$ für $\omega = \pm m$,

Diese Ergebnisse sind auf den ersten Blick erfreulich. Doch wird man ihnen mit Skepsis begegnen. Denn jeder, der sich einmal mit dem Problem der negativen Energien herumgeschlagen hat, wird Varianten der Vertauschungsrelationen erprobt haben und im Rahmen der herkömmlichen Quantenfeldtheorie je nach dem Vorgehen auf die eine oder andere Weise gescheitert sein. Hier könnten z. B. daraus Schwierigkeiten erwachsen, daß Q und K gemäß

(5.20) $$[Q, K] = \int \overline{\psi}(x)\,[\varrho_3, \gamma^\mu]\,\partial_\mu \psi(x)\,d^4x$$

nicht vertauschbar sind. Dennoch existieren simultane Eigenlösungen. Beides ist nicht unverträglich, weil unter den Eigenlösungen von K nur diejenigen als physikalische zugelassen sind, die zum Eigenwert 0 führen.[9]

Ferner könnte man vermuten, daß indefinite Wahrscheinlichkeiten ins Spiel kommen, weil $\overline{\varphi}$ und ψ nicht hermitesch konjugiert sind. Das braucht nicht der Fall zu sein. Wenn man den zu (5.10) gehörigen BRA-Vektor durch

(5.21) $$< \Phi \mid = < 0 \mid \int \overline{\varphi}(x)\,\psi(x)\,d^4x,\ \ \overline{\psi}(x) = \varphi^\dagger(x)\,\varrho_3,$$

definiert, ändert sich an der bisherigen Definition der Wahrscheinlichkeiten nichts. Letztlich ergibt sich das daraus, daß die

[9] Auf die interessante Frage nach allgemeinen Sätzen, die im Unterraum $K \mid \Phi > = 0$ die Existenz simultaner Eigenlösungen garantieren, haben wir hier noch keine Antwort.

Wahrscheinlichkeiten allein durch die Amplituden bestimmt sind und die c-Zahl-Gleichung (5.11) unverändert gilt.

6. Ein 2-Teilchen-System mit Wechselwirkung

Die Energie freier Fermionen ist stets positiv. Die Ladungen von Teilchen und Antiteilchen sind entgegengesetzt. Das bewirkt, daß man mit dem einmal angenommenen Vakuum auch Wechselwirkungen erfassen kann. Dazu muß man fordern, daß der Vakuumvektor $|0>$ stets Lösung der Schrödingergleichung ist. Wenn man bedenkt, daß der Schrödingeroperator bei Messungen abgeändert wird und daß in dem neuen Operator der der zu messenden Größe enthalten ist, lautet unsere Forderung: Jeder Operator, der eine physikalische Größe beschreibt, annulliert den Vakuumvektor. Denken wir speziell an Fermionen, so setzt er sich aus homogenen Formen folgender Art zusammen:

$$G = (\bar{\psi}, \psi) + (\bar{\psi}, \bar{\psi}, \psi, \psi) + (\bar{\psi}, \bar{\psi}, \bar{\psi}, \psi) \\ + (\bar{\psi}, \psi, \psi, \psi) + \ldots \quad .$$

Jeder Summand muß links einen Erzeuger stehen haben und rechts einen Vernichter, so daß Terme von der Form $(\bar{\psi}, \bar{\psi}, \bar{\psi}, \bar{\psi})$ oder (ψ, ψ, ψ, ψ) auszuschließen sind. Natürlich sind auch Formen höheren Grades zulässig, die links und rechts mindestens je einen Faktor $\bar{\psi}$ bezw. ψ haben.

Haben wir einen kanonischen Operator vom obigen Typ, in dem nur die explizite angeschriebenen Glieder vorkommen, so bewirken der dritte und der vierte Term, daß Teilchen Polarisationswolken erzeugen können. Doch gibt es keine vom Vakuum ausgelöste Polarisation. Das ist physikalisch von vorneherein plausibel und möglich, weil die Energie der freien Teilchen positiv definit ist.[10]

Nach aller Erfahrung sind die Polarisationsterme in realistischen Theorien unentbehrlich. Doch sind nunmehr auch solche Theorien mathematisch möglich, die zu konstanter Teilchenzahl führen. Da man in diesem Fall erwarten kann, daß sich das 2-Teilchen-Problem in Strenge lösen läßt, ist es sinnvoll, von

[10] Wir meinen, daß die Möglichkeit, das formale Vakuum als reales betrachten zu dürfen, ein wesentlicher Fortschritt ist.

einem Beispiel auszugehen, das noch keine Polarisationen liefert. Auf dem Wege zur vollständigen Theorie ist es eine willkommene Zwischenstufe, welche etwaigen Störungsrechnungen neue Möglichkeiten erschließt.

Wir betrachten eine Spinorfeldtheorie mit Vierfermionenwechselwirkung und machen daher den Ansatz:

$$K = \int d^4x\,\overline{\psi}(x)\,(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) + \int d^4x'\,d^4x''\,\overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x')\,G(x'-x'')\,\overline{\psi}(x'')\gamma_\mu\psi(x''). \tag{6.1}$$

Die Matrizen γ^μ, γ_μ weisen auf eine Strom-Strom-Wechselwirkung hin, wie sie sich einstellt, wenn man in einer klassischen Elektrodynamik mit Diracströmen das elektromagnetische Feld eliminiert. Dieser Analogie wollen wir folgen und gehen darum von der Greenfunktion

$$G(x) = \frac{\alpha}{2}\,\delta(x^2)$$

aus. Das Selbstenergieproblem entfällt, wenn wir die Maxwell-Diracsche Greenfunktion durch

$$G(x) = \frac{\alpha}{2m}\,\delta(x^2 + l^2), \quad 0 < l \to 0$$

ersetzen. Nach dem Fortfall der Selbstenergie kann man $l = 0$ setzen. Aus Dimensionsgründen ist im Nenner der Faktor m hinzugefügt. Die Konstante α ist dimensionslos. Ihr Wert bleibt offen.

Zunächst folgt, daß die Selbstwechselwirkung keine Rolle spielt. Wendet man nämlich den Wechselwirkungsoperator in (6.1) auf den 1-Teilchen-Vektor (5.10) an, so erhält man u. a. den identisch verschwindenden Faktor

$$\delta(x' - x'')\,\delta((x' - x'')^2 + l^2) = 0. \tag{6.2}$$

Entsprechendes erhält man auch beim n-Teilchen-Problem in den Selbstwechselwirkungsgliedern. Nach dem Fortfall der Selbstwechselwirkungsglieder können wir $l = 0$ setzen und damit in Strenge Maxwellsch rechnen. – Wegen des Wegfalls der Selbstwechselwirkung sind die 1-Teilchen-Lösungen in Ziff. 5 zugleich Lösungen der mit (6.1/2) gebildeten Schrödingergleichung.

Im weiteren betrachten wir den 2-Teilchen-Vektor:

$$(6.3)\quad |\Phi> = \int d^4x_1 d^4x_2\, \overline{\psi}(x_1)\, \Phi(x_1, x_2)\varrho_3 \overline{\psi}^{\mathsf{T}}(x_2) \mid 0>.$$

Darin ist $\Phi(x_1,x_2)$ eine 4×4-Matrix, die wegen der Schiefvertauschbarkeit der $\overline{\psi}$ folgende Eigenschaft hat:

$$\Phi^{\mathsf{T}}(x_1,x_2) = \varrho_3\, \Phi(x_2,x_1)\varrho_3.$$

Bei der Ableitung ist von der Gleichung $\varrho_3^{\mathsf{T}} = -\varrho_3$ Gebrauch gemacht. Sie hängt mit folgender Darstellung der Diracmatrizen zusammen, die im wesentlichen auf Majorana zurückgeht. Seien σ^P die 2×2-Paulimatrizen, so definieren wir die 4×4-Paulimatrizen durch

$$(6.4)\quad \begin{aligned} \varrho &= \left((\sigma_1^P \times \sigma_2^P), (\sigma_2^P \times 1), (\sigma_3^P \times \sigma_2^P)\right) = -\varrho^{\mathsf{T}}, \\ \tau &= \left((\sigma_2^P \times \sigma_1^P), (1 \times \sigma_2^P), (\sigma_2^P \times \sigma_3^P)\right) = -\sigma^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

Sie sind vollständig schiefsymmetrisch. Unserer Metrik entsprechend ist

$$(6.5)\quad (\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\gamma^5) = (-i\varrho_3, \varrho_2\sigma, \varrho_1) = (-\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5).$$

Schließlich definieren wir:

$$(6.6)\quad \gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2i}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta], \quad \alpha,\beta \in (0,1,2,3,5).$$

Danach ist

$$(6.7)\quad (\gamma^{23}\ldots,\gamma^{01}\ldots) = (\sigma, i\varrho_1\sigma),\ (\gamma^{05},\gamma^{15}\ldots) = (-i\varrho_2, -\varrho_3\sigma$$

Hiernach empfiehlt sich die Abspaltung des Faktors ϱ_3 neben Φ in (6.3), weil $\varrho_3\overline{\psi}(x)^{\mathsf{T}}$ sich bei Lorentztransformationen wie $\psi(x)$ verhält.

Der Operator $\overline{\psi}(x'')\gamma_\mu\psi(x'')$ macht aus dem Integranden von (6.3):

$$\begin{aligned} &\delta(x_1 - x'')\,\overline{\psi}(x'')\gamma_\mu \Phi(x_1,x_2)\varrho_3\overline{\psi}^{\mathsf{T}}(x_2) \mid 0> \\ &\delta(x_2 - x'')\,\overline{\psi}(x_1)\,\Phi(x_1,x_2)\,\varrho_3\gamma_\mu^{\mathsf{T}}\,\overline{\psi}(x'') \mid 0>. \end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Multiplikation mit $\overline{\psi}(x')\gamma^\mu\,\psi(x')$ bei Weglassung der Selbstwechselwirkung nach (6.2)

$$\delta(x_1 - x'')\,\delta(x_2 - x')\,\overline{\psi}(x'')\gamma_\mu \Phi(x_1, x_2)\varrho_3\gamma^{\mu\mathsf{T}}\overline{\psi}^{\mathsf{T}}(x')\mid 0>$$
$$\delta(x_2 - x'')\,\delta(x_1 - x')\,\overline{\psi}(x')\gamma^\mu \Phi(x_1, x_2)\varrho_3\gamma_\mu^{\mathsf{T}}\overline{\psi}(x'').\mid 0>.$$

Das ist mit der Greenfunktion zu multiplizieren und über alle x' und x'' zu integrieren:

$$\frac{\alpha}{m}\int \delta((x_1 - x_2)^2 + l^2)\,\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu \Phi(x_1,x_2)\varrho_3\,\gamma_\mu^{\mathsf{T}}\overline{\psi}^{\mathsf{T}}(x_2)\; d^4x_1 d^4x_2\mid 0>.$$

Nach Wegfall der Selbstwechselwirkung können wir $l = 0$ setzen. Entsprechend erhält man den kinetischen Beitrag:

$$\int d^4x_1 d^4x_2\,\overline{\psi}(x_1)\,\{\gamma^\mu\,\partial_\mu^{(1)}\Phi(x_1,x_2)\varrho_3 + \partial_\mu^{(2)}\Phi(x_1,x_2)\varrho_3\gamma^{\mu\mathsf{T}} - 2m\,\Phi(x_1,x_2)\varrho_3\}\,\overline{\psi}^{\mathsf{T}}(x_2)\mid 0>.$$

Da die $\overline{\psi}_\alpha(x_1)\,\overline{\psi}_\beta(x_2)\mid 0>$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten einzeln verschwinden. Das führt zu folgender 2-Teilchen-Wellengleichung:

$$(6.8)\quad \gamma^\mu\,\partial_\mu^{(1)}\,\Phi(x_1,x_2)\varrho_3 + \partial_\mu^{(2)}\,\Phi(x_1,x_2)\varrho_3\gamma^{\mu\mathsf{T}} - 2M\,\Phi(x_1,x_2)\,\varrho_3 = = \frac{\alpha}{m}\,\delta((x_1 - x_2)^2)\,\gamma^\mu\,\Phi(x_1,x_2)\varrho_3\gamma_\mu^{\mathsf{T}}.$$

Wegen der Translationsinvarianz läßt sich die Mittelpunktsbewegung wie folgt abspalten:

$$(6.9)\quad \Phi(x_1,x_2) = \varphi(x)e^{iP\cdot X},\quad X = \frac{x_1 + x_2}{2},\; x = x_1 - x_2.$$

Rechtsmultiplikation mit ϱ_3 ergibt wegen $\gamma^{\mu\mathsf{T}} = -\varrho_3\gamma^\mu\varrho_3$:

$$(6.10)\quad \partial_\mu\;\{\gamma^\mu,\varphi(x)\} + \frac{i}{2}\,P_\mu[\gamma^\mu,\varphi(x)] - 2\,M\varphi(x) = = \frac{\alpha}{m}\,\delta((x_1 - x_2)^2)\,\gamma^\mu\varphi(x)\gamma_\mu.$$

Darin ist $\varphi(x)$ eine beliebige 4×4-Matrix. Sie kann gemäß

$$(6.11)\quad \varphi(x) = A_\mu(x)\gamma^\mu + \frac{1}{2}\,B_{\mu\nu}(x)\gamma^{\mu\nu} + C_\mu(x)\gamma^{\mu 5} + D(x)\gamma^5 + E(x)$$

nach den Diracmatrizen entwickelt werden. Mit Rücksicht auf

(6.12)
$$\gamma^\varrho \gamma^\mu \gamma_\varrho = -2\gamma^\mu, \quad \gamma^\varrho \gamma^{\mu\nu} \gamma_\varrho = 0,$$
$$\gamma^\varrho \gamma^{\mu 5} \gamma_\varrho = +2\gamma^{\mu 5}, \quad \gamma^\varrho \gamma^5 \gamma_\varrho = -4, \quad \gamma^\varrho \gamma_\varrho = +4$$

ist

(6.13)
$$\gamma^\mu \varphi(x) \gamma_\mu = -2A_\mu(x)\gamma^\mu + 2C_\mu(x)\gamma^{\mu 5} - 4D:x)\gamma_5 + 4E(x).$$

Die einzelnen Feldanteile tragen verschieden stark zur Wechselwirkung bei. Insbesondere ist $B_{\mu\nu}$ ohne Einfluß auf die Wechselwirkung.

Zur Berechnung der linken Seite braucht man die folgenden Vertauschungsrelationen:

(6.14)
$$\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\} = 2g^{\lambda\mu}, \quad \{\gamma^\lambda, \gamma^5\} = 0, \quad \{\gamma^\lambda, 1\} = 2\gamma^\lambda,$$
$$\{\gamma^\lambda, \gamma^{\mu\nu}\} = 2i\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}\gamma_{\varrho 5}, \quad \{\gamma^\lambda, \gamma^{\mu 5}\} = i\varepsilon^{\lambda\mu\varrho\sigma}\gamma_{\varrho\sigma}$$

und

(6.15)
$$[\gamma^\lambda, \gamma^\mu] = 2i\gamma^{\lambda\mu}, \quad [\gamma^\lambda, \gamma^5] = 2i\gamma^{\lambda 5} \quad [\gamma^\lambda, 1] = 0,$$
$$[\gamma^\lambda, \gamma^{\mu\nu}] = 2i(\gamma^\mu g^{\nu\lambda} - \gamma^\nu g^{\mu\lambda}), \quad [\gamma^\lambda, \gamma^{\mu 5}] = -2i\gamma^5 g^{\lambda\mu}.$$

durch Substitution in (6.10) erhält man schließlich:

$$2\partial_\mu E - B_{\mu\nu}P^\nu - 2mA_\mu = -\frac{2\alpha}{m}\,\delta(x^2)A_\mu,$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}(\partial_\varrho C_\sigma - \partial_\sigma C_\varrho) - \frac{1}{2}(P^\mu A^\nu - P^\nu A^\mu) - mB^{\mu\nu} = 0,$$
(6.16)
$$i\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}\partial_\lambda B_{\mu\nu} - P^\varrho D - 2mC^\varrho = +\frac{2\alpha}{m}\,\delta(x^2)C^\varrho,$$
$$P^\lambda C_\lambda - 2mD = -\frac{4\alpha}{m}\,\delta(x^2)D,$$
$$2\partial^\lambda A^\lambda - 2mE = +\frac{4\alpha}{m}\,\delta(x^2)E.$$

Wechselwirkungen gibt es nur auf dem Lichtkegel $x^2 = 0$. Außerhalb ist die Kopplungskonstante α ohne Einfluß. Es ist darum sinnvoll, die Gleichungen zunächst außerhalb des Lichtkegels zu integrieren, wo die rechten Seiten gleich 0 sind. Danach gibt es drei Integrationsgebiete, den Zukunftsbereich

$$Z: \quad x^2 < 0, \quad x^0 > 0,$$

den Gegenwartsbereich

$$G: \quad x^2 > 0$$

den Vergangenheitsbereich

$$V: \quad x^2 < 0, \quad x^0 < 0.$$

In diesen Bereichen folgt aus der ersten Gleichung:

$$\begin{gathered} 2 \square E - \nabla \cdot B \cdot P - 2m \nabla \cdot A = 0, \\ 2 P \cdot \nabla E - 2 m P \cdot A = 0, \ \nabla \equiv (\partial_\mu), \end{gathered}$$

die zweite liefert:

$$-\frac{1}{2}(P \cdot \nabla) A + \frac{1}{2} P(\nabla \cdot A) - m \nabla \cdot B = 0,$$

$$-\frac{1}{2}(P \cdot \nabla)(P \cdot A) + \frac{1}{2} P^2(\nabla \cdot A) - m \nabla \cdot B \cdot P = 0$$

und die letzte lautet:

$$\nabla \cdot A - m E = 0.$$

Die dritte und vierte spielen zunächst keine Rolle. Durch Kombination erhält man die Wellengleichung:

(6.17) $$\square E + \frac{1}{4m^2}(P \cdot \nabla)^2 E - \frac{1}{4} P^2 E - m^2 E = 0.$$

Sei M die Masse des Verbundsystems, so ist im Ruhsystem

(6.18) $$P^0 = M, \quad \boldsymbol{P} = 0.$$

Die Wellengleichung nimmt in diesem Fall folgende Form an:

(6.19) $$\Delta E - \gamma^2 \ddot{E} - \gamma^2 m^2 E = 0, \quad \gamma^2 = \frac{4m^2 - M^2}{4m^2}.$$

Im Bindungsfall gilt:

(6.20) $$0 < M = 2m\sqrt{1 - \gamma^2} < 2m.$$

Speziell für S-Zustände lautet die Wellengleichung für $u = rE$:

(6.21) $$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m^2 u = 0.$$

Der Charakteristikenkegel $t = \pm \gamma r$ liegt nach (6.20) im Bereich G. Er fällt nicht mit dem Lichtkegel zusammen. Mit den Hyperbelkoordinaten

(6.22) $$t = \varrho \cosh \Phi, \quad \gamma^\gamma = \varrho \sinh \Phi$$

erfassen wir das Innere des oberen Halbkegels. Es schließt den Lichtkegel ein. In diesem Bereich lautet die Wellengleichung (6.21):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} + m^2 u = 0. \tag{6.23}$$

Die Integrale haben folgende Gestalt:

$$u(\varrho, \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{\pm i m \varrho \cosh(\xi + \Phi)} d\xi. \tag{6.24}$$

Darin ist $h(\xi)$, sofern nur das Integral existiert, frei wählbar. Die Ableitungen nach ϱ und Φ reproduzieren den Integranden mit folgenden zusätzlichen Faktoren:

$$\begin{array}{llll} \partial u/\partial\varrho & : \; + i m \,\mathrm{ch}; & \partial u/\partial\Phi & : \; + i m \varrho \,\mathrm{sh}; \\ \partial^2 u/\partial\varrho^2 & : \; - m^2 \,\mathrm{ch}^2; & \partial^2 u/\partial\Phi^2 & : \; - m^2\varrho^2 \,\mathrm{sh}^2 + i m \varrho \,\mathrm{ch}. \end{array}$$

Ihre Kombination gemäß (6.23) bestätigt (6.24) als Lösung. Durch den Lichtkegel wird das Integrationsgebiet in zwei zunächst unabhängige Teile zerlegt, in denen die Funktionen $h(\xi)$ verschieden sein werden. Wir schreiben dafür in

$$Z\colon h = h'(\xi), \quad G\colon h = h''(\xi). \tag{6.25}$$

Beide Funktionen müssen aus den Sprungbedingungen auf dem Lichtkegel abgeleitet werden. Diese sind durch die δ-Funktionen in (6.16) bestimmt.

Zur Formulierung der Sprungbedingungen müssen wir neben E auch die andern Feldgrößen kennen. Es ist ein merkwürdiger Umstand, daß wir bei der Berechnung der Wellengleichung von E die dritte und vierte Gl. (6.16) nicht gebraucht haben. Das macht es möglich, im folgenden von der Annahme

$$C^\mu = 0, \quad D = 0 \tag{6.26}$$

auszugehen. In diesem Fall erhält man aus der zweiten Gl. (6.16):

$$B^{\mu\nu} = -\frac{1}{2m}(P^\mu A^\nu - P^\nu A^\mu).$$

Die dritte liefert:

$$\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} = P_\lambda(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + P_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\varkappa) + \\ + P_\nu(\partial_\gamma A_\mu - \partial_\mu A_v) = 0.$$

Mit (6.18) folgt daraus:

$$(6.27)\quad \boldsymbol{B}^0 = (B^{01}, B^{02}, B^{03}) = -\frac{M}{2m}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} = (B^{23}, B^{31}, B^{12}) = 0, \quad \text{rot}\,\boldsymbol{A} = 0.$$

Damit ergibt sich aus der ersten Gl. (6.16):

$$(6.28)\qquad A_0 = \frac{1}{m}\dot{E}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{m\gamma^2}\nabla E.$$

Danach sind alle Feldgrößen durch E bestimmt. A ist von selbst wirbelfrei. Klarerweise führt die letzte Gl. (6.16) zur Wellengleichung (6.19).

Auf Lösungen, in denen C^μ und D vorkommen, gehen wir hier nicht ein, obwohl sie keineswegs uninteressant sind. Wir wollen uns hier darauf beschränken, an einem einzigen Beispiel zu zeigen, wie Bindung nach RZ-symmetrischer relativistischer Quantisierung zustandekommen kann.

Doch sei angedeutet, was man von C^μ und D zu erwarten hat. Setzen wir $A_\mu = 0$, $B_{\mu\nu} = 0$ und $E = 0$, und lassen wir abermals die Wechselwirkung beiseite, so gilt:

$$P^\varrho D = -2mC^\varrho, \quad P^\varrho C_\varrho = +2mD$$

Das führt, wenn wir zu den Schwerpunktskoordinaten X^μ zurückkehren, zu einer Wellengleichung für pseudoskalare Teilchen:

$$\frac{\partial D}{\partial X^\mu} = -2imC_\varrho, \quad \frac{\partial C^\varrho}{\partial X^\varrho} = 2imD.$$

Auch im Falle $C^\mu = 0$, $D = 0$ gilt etwas entsprechendes, wenn wir außerdem $E = 0$ setzen. Lassen wir auch die Gleichungen beiseite, die Ableitungen nach den inneren Koordinaten enthalten, so gilt:

$$B^{\mu\nu}P_\nu = -2mA^\mu, \quad P_\mu A_\nu - P_\nu A_\mu = -2mB_{\mu\nu}.$$

Das führt zu den Procagleichungen für Vektormesonen:

$$\frac{\partial B^{\mu\nu}}{\partial X^\nu} = -2imA^\mu, \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} = -2imB_{\mu\nu}.$$

7. Zur Massenbestimmung

Zur Berechnung der Massen brauchen wir u. a. die Sprungbedingungen auf dem Lichtkegel. Sie leiten sich aus den Gl. (6.16) ab, welche für S-Zustände mit $E = E(r, t)$ und $A = A(r, t)r/r$ wie folgt lauten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial t} - m A_0 = -\frac{\alpha}{m}\,\delta(x^2) A_0, \\
(7.1)\qquad &\frac{\partial E}{\partial r} - \gamma^2 m A = -\frac{\alpha}{m}\,\delta(x^2) A, \\
&-\frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2}{r} A - m E = \frac{2\alpha}{m}\,\delta(x^2) E.
\end{aligned}
$$

Sprünge gibt es nur senkrecht zum Lichtkegel. Tangentiell bleiben wir stets auf der nämlichen Seite des Kegels, wo Stetigkeit herrscht. Zur Berechnung der Ableitung in Normalenrichtung führen wir Polarkoorsinaten ein:

$$r = R\cos\chi, \quad t = R\sin\chi.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sin\chi\,\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos\chi}{R}\,\frac{\partial}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \cos\chi\,\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin\chi}{R}\,\frac{\partial}{\partial\chi}.$$

Durch Integration von (7.1) über χ im Intervall $\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon, \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$, $0 < \varepsilon \to 0$ erhält man mit Rücksicht auf

$$\delta(x^2) + \delta(+\; R^2 \cos 2\chi) = \frac{1}{2R^2}\,\delta(\chi - \pi/4)$$

die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&[E] = -\frac{\alpha}{4mr}\,\bar{A}_0 = +\frac{\alpha}{4mr}\,\bar{A}, \\
(7.2)\qquad &[A_0] + [A] = -\frac{\alpha}{2mr}\,\bar{E}.
\end{aligned}
$$

Darin sind die Zeichen durch

$$[f] = \frac{1}{2}(f' - f''), \quad \bar{f} = \frac{1}{2}(f' + f'')$$

definiert; f' und f'' sind die Werte unmittelbar oberhalb bezw. unterhalb des Lichtkegels.

Zur Berechnung von $[f]$ und $\bar{f}$, $f \in (E, A_0, A)$, schreiben wir (6.24) wie folgt (mit neuem Φ):

$$(7.3)\quad u(r, t) = \int d\xi\, h(\xi) e^{i\Phi}, \quad \Phi = m(t\,\mathrm{ch}\,\xi + \gamma r\,\mathrm{sh}\,\xi).$$

(Um knapper und übersichtlicher Formeln willen wählen wir die Zeichen sh, ch, th, cth statt sinh usw.). Man erfaßt mit der letzten Gleichung alle Integrale, wenn man in der komplexen ξ-Ebene beliebige Integrationswege zuläßt. Danach ist außerhalb des Lichtkegels

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i m \int d\xi\, h(\xi)\, ch\, \xi\, e^{i\Phi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = i \gamma m \int d\xi\, h(\xi)\, sh\, \xi\, e^{i\Phi}.$$

Wegen $E = u/r$ folgt daraus:

$$(7.4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{i m}{r} \int d\xi\, h(\xi)\, ch\, \xi e^{i\Phi}, \\ \frac{\partial E}{\partial r} &= \frac{i\gamma m}{r} \int d\xi\, h(\xi)\, sh\, \xi e^{i\Phi} - \frac{1}{r^2} \int d\xi\, h(\xi) e^{i\Phi}, \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf (6.28) erhält man:

$$(7.5)\qquad \begin{aligned} A_0 &= \frac{i}{r} \int d\xi\, h(\xi)\, ch\, \xi e^{i\Phi}, \\ A &= \frac{i}{\gamma r} \int d\xi\, h(\xi)\, sh\, \xi e^{i\Phi} - \frac{1}{\gamma^2 m r^2} \int d\xi\, h(\xi) e^{i\Phi}. \end{aligned}$$

Seien $h'(\xi)$ und $h''(\xi)$ die erzeugenden Funktionen in (7.3) für $t > r$ bezw. $\gamma t < r < t$ und definieren wir analog zu (7.2)

$$(7.6)\qquad [h(\xi)] = \tfrac{1}{2}\,(h'(\xi) - h''(\xi), \quad \bar{h}(\xi) = \tfrac{1}{2}\,(h'(\xi) + h''(\xi),$$

so nehmen die Gl. (7.2) folgende Gestalt an:

$$(7.7)\qquad \frac{1}{r} \int d\xi\, [h(\xi)]\, e^{i\Phi_0} = - \frac{i\alpha}{4 m r^2} \int d\xi\, \bar{h}(\xi)\, ch\, \xi e^{i\Phi_0} =$$

$$= \frac{i\alpha}{4\gamma m r^2} \int d\xi\, \bar{h}(\xi)\, sh\, \xi e^{i\Phi_0} - \frac{\alpha}{4\gamma^2 m^2 r^3} \int d\xi\, \bar{h}(\xi) e^{i\Phi_0}$$

und

$$(7.8)\qquad \frac{i}{r} \int d\xi\, [h(\xi)]\, ch\, \xi e^{i\Phi_0} + \frac{i}{\gamma r} \int d\xi\, [h(\xi)]\, sh\, \xi e^{i\Phi_0} -$$

$$- \frac{1}{\gamma^2 m r^2} \int d\xi\, [h(\xi)]\, e^{i\Phi_0} = - \frac{\alpha}{2 m r^2} \int d\xi\, \bar{h}(\xi) e^{i\Phi_0}$$

mit $t = r$, d. h. mit $\Phi =$

(7.9 $$\Phi_0 = mr(ch\,\xi + \gamma\, sh\,\xi) = m\bar{\varrho}\, ch(\xi + \lambda),$$

sowie

(7.10) $$\gamma = th\,\lambda, \quad \bar{\varrho} = r/ch\,\lambda.$$

Ersetzen wir $\xi \to \xi - \lambda$, so folgt aus (7.9), daß

(7.11) $$\Phi_0 = m\bar{\varrho}\, ch\,\xi$$

eine gerade Funktion von ξ ist. Daher verschwinden alle Integrale mit ungeradem Integranden. Es empfiehlt sich also, die neu entstehenden Integranden $[h(\xi - \lambda)]$ und $\bar{h}(\xi - \lambda)$ in ihre geraden und ungeraden Anteile zu zerlegen:

(7.12) $$\begin{aligned} [h(\xi - \lambda)] &= F(\xi) + G(\xi), \\ \bar{h}(\xi - \lambda) &= f(\xi) + g(\xi) \end{aligned}$$

mit

(7.13) $$\begin{aligned} F(-\xi) &= -F(\xi),\ G(-\xi) = G(\xi); \\ f(-\xi) &= -f(\xi),\ g(-\xi) = g(\xi). \end{aligned}$$

Verwenden wir diese Bezeichnungen, so lautet die zweite Gl. (7.2) mit Rücksicht auf

$$\gamma\,\mathrm{ch}\,\xi + \mathrm{sh}\,\xi = \frac{sh\,(\xi + \lambda)}{ch\lambda} \to \frac{sh\xi}{ch\lambda},$$

wenn man die Terme mit ungeraden Integranden von vorneherein unterdrückt:

$$\int d\xi f(\xi)\,\mathrm{sh}\,\xi e^{i\Phi_0} = \frac{1}{i\gamma m\bar{\varrho}} \int d\xi g(\xi) e^{i\Phi_0}.$$

Substitution von

$$\mathrm{sh}\,\xi\, e^{i\Phi_0} = \frac{1}{im\bar{\varrho}} \frac{de^{i\Phi_0}}{d\zeta}$$

und partielle Integration ergeben:

$$\int d\xi \left(f'(\xi) + \frac{1}{\gamma} g(\xi)\right) e^{\Phi_0} = 0,$$

also ist

(7.14) $$g(\xi) = -\gamma f'(\xi).$$

Aus (7.8) erhält man entsprechend:

$$\frac{i}{\bar{\varrho}} \int d\xi F(\xi) \operatorname{sh} \xi e^{i\Phi_0} - \frac{1}{\gamma^2 m \bar{\varrho}^2} \int d\xi G(\xi) e^{i\Phi_0} = \\ = - \frac{\alpha}{2 m \bar{\varrho}^2} \int d\xi g(\xi) e^{i\Phi_0}.$$

Die nämliche Umrechnung wie oben ergibt:

$$F'(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} G(\xi) = \frac{\alpha}{2} g(\xi).$$

Nach Substitution von (7.14) kommt heraus, daß man $G(\xi)$ wie $g(\xi)$ durch die Ableitungen der ungeraden Funktionen darstellen kann:

$$G(\xi) = -\gamma^2 \left(F'(\xi) + \frac{\alpha\gamma}{2} f'(\xi) \right). \tag{7.15}$$

Die erste Sprungbedingung in (7.7) liefert eine weitere Relation zwischen F, G, f und g. Dabei ist die Substitution

$$\operatorname{ch} \xi \to \operatorname{ch} (\xi - \lambda) = \operatorname{ch} \lambda (\operatorname{ch} \xi - \gamma \operatorname{sh} \xi)$$

zu berücksichtigen. Man erhält:

$$\int d\xi G(\xi) e^{i\Phi_0} = \frac{\alpha}{4 i m \varrho} \int d\xi (g(\xi) \operatorname{ch} \xi - \gamma f(\xi) \operatorname{sh} \xi) e^{i\Phi_0} = \\ = \frac{-\alpha\gamma}{4 i m \varrho} \int d\xi (f(\xi) \operatorname{ch} \xi)' e^{i\Phi_0} = \frac{\alpha\gamma}{4} \int d\xi f(\xi) \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \, e^{i\Phi_0}.$$

Somit ist

$$G(\xi) = \frac{\alpha\gamma}{4} \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi f(\xi). \tag{7.16}$$

Danach ist $f(\xi)$ diejenige Funktion, aus der man alle andern berechnen kann:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \gamma f'(\xi), \\ G(\xi) &= \frac{\alpha\gamma}{8} \operatorname{sh} 2\xi f(\xi), \\ F'(\xi) &= -\frac{\alpha\gamma}{2} f'(\xi) - \frac{\alpha}{8\gamma} \operatorname{sh} 2\xi f(\xi). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Die zunächst noch unbekannte Funktion $f(\xi)$ läßt sich nicht aus den Sprungbedingungen ableiten. Sie ergibt sich, wenn wir die

Wellenfunktion auf der t-Achse betrachten, also für $r = 0$ und $t > 0$.

Insbesondere die beiden letzten Gleichungen legen es nahe, $f(\xi)$ durch eine Laurentreihe in e^{ξ} darzustellen:

$$f(\xi) = \sum_n a_n e^{n\xi}, \quad a_{-n} = -a_n. \tag{7.18}$$

Die Koeffizientenbedingung garantiert, daß $f(\xi)$ ungerade ist. Nach (7.17) erhält man daraus:

(7.19)

$$g(\xi) = -\gamma \sum_n n a_n e^{n\xi},$$

$$G(\xi) = \frac{\alpha\gamma}{16} \sum_n (a_{n-2} - a_{n+2}) e^{n\xi},$$

$$F(\xi) = -\frac{\alpha\gamma}{2} \sum_n a_n e^{-n\xi} - \frac{\alpha\gamma}{16} \sum_n \frac{1}{n} (a_{n-2} - a_{n+2}) e^{n\xi}.$$

Die Amplitude $u(r, t)$ verschwindet nach (7.3) in $r = 0$, wenn

$$u(r, t) = \int d\xi\, h'(\xi) e^{imt\,\mathrm{ch}\,\xi} = 0$$

ist, also für ungerade Funktionen $h'(\xi)$. Nach (7.6, 12) ist

$$h'(\xi) = f(\xi + \lambda) + g(\xi + \lambda) + F(\xi + \lambda) + G(\xi + \lambda).$$

Durch Substitution von (7.18/19) erhält man:

$$h'(\xi) = \sum_n \left\{ a_n \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2} - \gamma n\right) + \frac{\alpha}{16\gamma} \left(a_{n-2} - a_{n+2}\right)\left(\gamma^2 - \frac{1}{n}\right)\right\} e^{n(\xi+\lambda)}.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf $a_{-n} = -a_n$:

$$-h'(-\xi) =$$

$$= \sum_n \left\{ a_n \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2} + \gamma n\right) - \frac{\alpha}{16\gamma} (a_{n-2} - a_{n+2})\left(\gamma^2 + \frac{1}{n}\right)\right\} e^{n(\xi-\lambda)}.$$

Koeffizientenvergleichung liefert:

$$\begin{aligned} &\left(\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\right) \mathrm{sh}\, n\lambda - \gamma n\, \mathrm{ch}\, n\lambda\right) a_n \\ &+ \frac{\alpha}{16\gamma} \left(\gamma^2\, \mathrm{ch}\, n\lambda - \frac{1}{n}\, \mathrm{sh}\, n\lambda\right) (a_{n-2} - a_{n+2}) = 0. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Diese Gleichung ist gegen die Transformation $n \rightarrow -n$ invariant. Darum genügt es, positive Werte von n zu betrachten. Da nach (7.18) $a_0 = 0$ ist, liefert (7.20) für $n = 0$:

$$-\frac{\alpha}{8\gamma}(\gamma^2 - \lambda)a_2 = 0.$$

Wegen

$$\gamma^2 - \lambda = \operatorname{th}^2 \lambda - \lambda < 0$$

muß $a_2 = 0$ sein, so daß nach (7.20) alle a_n mit geradem Index verschwinden. Somit brauchen wir nur $n = 2k + 1$ mit $k \in (0, 1, 2, 3 \ldots)$ zu betrachten.

Aus a_1 und a_3 erhält man mit (7.20) sukzessive alle übrigen a_{2k+1}. Für $n = 1$ ergibt sich speziell, wenn wir (7.20) durch $\operatorname{ch} \lambda$ dividieren und $\operatorname{th} \lambda = \gamma$ berücksichtigen:

$$-\frac{\alpha\gamma^2}{2} a_1 - \frac{\alpha}{16\gamma}(\gamma^2 - \gamma)(a_1 + a_3) = 0.$$

Danach ist a_3 durch a_1 bestimmt. Bis auf einen gemeinsamen Faktor a_1 gibt es also nur eine Lösung, was klarerweise eine Folge der Koeffizientenbedingung ist.

Für $|n| \gg 1$ erhält man aus (7.20) die asymptotische Gleichung

$$\pm n a_n = -\frac{\alpha}{16}(a_{n+2} - a_{n-2}) \text{ für } \pm n \rightarrow \pm \infty.$$

Nach (7.18) kann man dafür schreiben:

$$df(\xi) / d\xi = \pm \frac{\alpha}{8} \operatorname{sh} 2\xi f(\xi).$$

Das sich hieraus ergebende Integral

$$f(\xi) = \pm e^{\pm \frac{\alpha}{16} \operatorname{ch} 2\xi} \text{ für } \xi = \rightarrow \pm \infty \tag{7.21}$$

zerstört, wie wir noch sehen werden, die Konvergenz der Feldgrößen. Darum darf man nur abbrechende Reihen zulassen, was eine überraschende Konsequenz hat.

Zunächst zeigen wir, daß es keine Lösungen mit $a_3 = a_5 \ldots = 0$ gibt. Denn unter dieser Annahme erhält man aus (7.20) für $n = 1$ und $n = 3$ zwei sich widersprechende Gleichungen, nämlich

$$\frac{1}{8}(1 - \gamma) = \gamma^2, \quad \gamma^2 - \frac{1}{3} \operatorname{th} 3\lambda = 0.$$

Die erste Gleichung ist im wesentlichen bereits oben abgeleitet, die zweite folgt ohne weiteres aus (7.20). Beide sind unverträglich. Denn die zweite Gleichung liefert $\gamma = 0{,}565$, was zu $(1-\gamma)/8\gamma^2 = 0{,}170$ führt statt zu 1.

Auch in den andern Fällen erhält man im allgemeinen keine abbrechenden Reihen, weil das System überbestimmt ist. Doch gibt es für spezielle Kopplungskonstanten Lösungen. Wir untersuchen speziell das Beispiel

$$a_1 \neq 0, \quad a_3 \neq 0, \quad a_5 = a_7 = \ldots = 0.$$

Für $n = 1$ ergibt sich wiederum die schon oben abgeleitete Gleichung:

$$a_1 \left(\frac{8\gamma^2}{1-\gamma} - 1\right) = a_3.$$

Für $n = 3$ erhält man aus (7.20):

$$\left(\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\right) \operatorname{th} 3\lambda - 3\gamma\right) a_3 + \frac{\alpha}{16} \left(\gamma^2 - \frac{1}{3} \operatorname{th} 3\lambda\right)(a_1 = 0.$$

und für $n = 5$:

$$\gamma^2 - \frac{1}{5} \operatorname{th} 5\lambda = 0.$$

Mittels der ersten Gleichung kann man a_3 eliminieren, so daß die zweite folgende Gestalt annimmt:

$$\left(\frac{8\gamma^2}{1-\gamma} - 1\right)\left(\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{2}\right) \operatorname{th} 3\lambda - 3\gamma\right) + \frac{\alpha}{16} \left(\gamma^2 - \frac{1}{3} \operatorname{th} 3\lambda\right) = 0.$$

Setzt man darin die Werte von γ und λ eine, die sich aus der dritten Gleichung ergeben, so kann man die Kopplungskonstante berechnen. Eigenlösungen existieren also nur für spezielle Kopplungskonstanten.

Wegen $\operatorname{th} \lambda = \gamma$ und mit $e^{2\xi} = t$ lautet die vorletzte Gleichung:

$$5\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2 = \frac{t^5-1}{t^5+1}.$$

Daraus folgt:

$$t = 2{,}593356, \quad \gamma = 0{,}443417,$$

und für die Masse M und die Bindungsenergie $B = 2m - M$ erhält man:

$$M/2m = 0{,}896315, \quad B/2m = 0{,}103684.$$

Die Gleichung für α schreiben wir wie folgt:

$$\left(\frac{8\gamma^2}{1-\gamma} - 1\right)\left(\operatorname{th} 3\lambda - 3\gamma\right) = \alpha\left(\frac{\gamma}{2}\left(\frac{8\gamma^2}{1-\gamma} - 1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{16\gamma}\left(\gamma^2 - \frac{1}{3}\operatorname{th} 3\lambda\right)\right).$$

Mit den oben genannten Zahlen erhält man daraus:

$$\alpha = -2.135567.$$

Man wird wie schon gesagt den Zahlenwerten keine Bedeutung beimessen dürfen. Dazu ist obiger Ansatz des Wechselwirkungsoperators zu wenig realistisch. Doch ist durch exakte Rechnung gezeigt, daß es in relativistischen Theorien Bindungszustände geben kann. Der Umstand, daß dies nur für spezielle Kopplungskonstanten möglich ist, mag eine tiefere Bedeutung haben. Er führt allerdings zu einer schwierigen Frage. Wenn es kein reiner Zufall sein soll, daß die Kopplungskonstante einen passenden Wert hat, muß man annehmen, daß sie durch ‚Einstellung' zustandekommt. In diesem Fall ist zu erwarten, daß jeder Quantenzustand seine eigene Kopplungskonstante hat. Man wird sich fragen müssen, wie der Einstellungsvorgang vor sich geht. Die bisherigen Betrachtungen lassen das noch nicht erkennen. Ohne ad-hoc-Hypothesen zu machen, wird man nach den bisherigen Rechnungen sagen dürfen, daß die Kopplungskonstante wie die Masse ein Eigenwert ist. Beide kennzeichnen den jeweiligen Zustand des Systems. Es bedarf weiterer Arbeit, um die Natur des neuen Eigenwerts zu erkennen.

Hier beschränken wir uns darauf, den Beweis des Satzes nachzutragen, der zu der Abbruchforderung geführt hat. Dazu müssen wir das asymptotische Verhalten des Integrals

$$u(r, t) = \int d\xi\, h'(\xi + \lambda)\, e^{i m \varrho \operatorname{ch} \xi}$$

untersuchen, das von der Wahl des Integrationswegs abhängt. Der Exponentialfaktor muß asymptotisch hinreichend rasch verschwinden, wenn er die in jedem Fall die ins Unendliche gehenden Werte von $h'(\xi)$ kompensieren soll. Setzen wir $\xi = \xi' + i\xi''$, so ist der Exponent gleich

$$i m \varrho \operatorname{ch} \xi = i m \varrho \operatorname{ch} \xi' \cos \xi'' - m \varrho \operatorname{sh} \xi' \sin \xi''.$$

Da $u(r, t)$ reell ist, muß neben $+ i m \varrho$ auch $- i m \varrho$ vorkommen, also neben ξ'' auch $\xi'' + \pi$. Wie schon bei Besselfunktionen haben wir einen doppelten Integrationsweg, einen im Intervall $-\frac{\pi}{2} < \xi'' < +\frac{\pi}{2}$ und einen im Intervall $+\frac{\pi}{2} < \xi'' < +\frac{3\pi}{2}$. Dabei ist $\xi'' = \xi''(\xi')$ den Wegen entsprechend eine Funktion von ξ'. Der zweite Term in obiger Gleichung ist exponentiell abfallend wenn für

$$\begin{array}{lrl} \xi' \to +\infty, & -\frac{\pi}{2} < \xi'' < +\frac{\pi}{2}: & \xi'' \to +\frac{\pi}{2}, \\ & +\frac{\pi}{2} < \xi'' < \frac{3\pi}{2}: & \xi'' \to +\frac{\pi}{2}, \\ \xi' \to -\infty & -\frac{\pi}{2} < \xi'' < +\frac{\pi}{2}: & \xi \to -\frac{\pi}{2}, \\ & +\frac{\pi}{2} < \xi'' < +\frac{3\pi}{2}: & \xi'' \to +\frac{3\pi}{2} \end{array} \tag{7.22}$$

geht. Wir erhalten so den nach $\pm\infty$ exponentiell abklingenden Faktor

$$e^{-m\varrho|\operatorname{sh}\xi'|}.$$

Er müßte bei unendlichen Reihen die oben berechnete Funktion

$$f(\xi) \to \pm e^{\pm\frac{\alpha}{16}\operatorname{ch} 2\xi}, \quad \xi \to \pm\infty,$$

überkompensieren, was offensichtlich nicht möglich ist. Danach ist wie behauptet Abbruch der Reihe nötig. Er erfolgt jedoch nur für spezielle Werte von γ und von α.

Die beiden in (7.22) eingeführten Teile des Integrationswegs lassen sich nach dem Cauchyschen Satz noch deformieren. Man kann sie wegen ihrer Enden so festlegen, daß der obere im ξ''-Intervall $(+\pi/2, +3\pi/2)$ aus dem unteren in $(-\pi/2, +\pi/2)$ durch Spiegelung an $\xi'' = +\pi/2$ hervorgeht. Außerdem können wir beide Teile als einen $\xi' = +\infty$ in zusammenhängenden Weg betrachten, derart daß auf dem unteren ξ' von $-\infty$ bis $+\infty$ und auf dem oberen von $+\infty$ bis $-\infty$ läuft. In diesem Fall erhält man auf dem Charakteristikenkegel $\varrho = 0$

$$u(r, \gamma) = \int d\xi \, \mathrm{h}'(\xi),$$

d. i. gleich

$$\int d\xi (f(\xi + \lambda) + g(\xi + \lambda) + F(\xi + \lambda) + G(\xi + \lambda))$$
$$= \int d\xi (f(\xi) + g(\xi) + F(\xi) + G(\xi)) = \int d\xi \, (g(\xi) + G(\xi)).$$

Nach (7.14/15) folgt daraus:

$$\left(-\gamma f(\xi) - \gamma^2 (F(\xi) + \frac{\alpha}{2} \gamma f(\xi)\right)_{-\infty + i\pi/2}^{-\infty + 3i\pi/2}.$$

Wegen der Periode $2\pi i$ ist das gleich 0. Auf dem Charakteristikenkegel gilt daher:

$$u(r, \gamma r) = 0.$$

Diese Wahl garantiert, daß $u(r, t)$ überall in $t \geq \gamma r$ endlich ist. Sie schließt sich außerdem stetig an die Lösung

$$u(r, t) = 0 \text{ für } t \leq \gamma r$$

an, welche sich einstellt, wenn man

$$\lim u(r, t) = 0 \text{ für } t < \gamma r, \; r \to \infty$$

fordert. Letzteres bestätigt man mittels des Riemannschen Integrationsverfahrens, welches hier ganz elementar ist.

Die Lösung unterhalb des Charakteristikenkegels im Gebiet $t \leq -\gamma r$ bleibt unbestimmt. Man erhält mit willkürlichem konstanten Faktor C:

$$u(r, -t) = C u(r, t).$$

Fordert man in t gerade bezw. ungerade Lösungen, so ist $C = \pm 1$. Auch die Annahme $C = 0$ ist diskutabel. Vielleicht sollte man sie in Hinblick auf das Kausalitätsprinzip bevorzugen. Doch ist es, wie immer man sich entscheidet, gegenwärtig noch nicht möglich, Konsequenzen zu erkennen, die eine Prüfung erlauben.

Im Rahmen eines besonders einfachen Ansatzes für relativistisch invariante Spinorfeldgleichungen mit nichtlokaler Wechselwirkung haben wir eine strenge Lösung des 2-Teilchen-Problems angegeben. Lösungen für angeregte Zustände mit $a_n = 0$ für $n \geq N \geq 7$ sind in Sichtweite. Auch solche für andere als S-Zustände dürften zugänglich sein. Da obiges Modell noch deutlich unrealistische Züge hat, gehen wir darauf nicht ein. Ehe man weitere Einzelheiten untersucht, sollte man Alternativansätze ins Auge fassen. Bei ihrer Formulierung sind noch Schwierigkeiten zu erwarten. Denn wegen der veränderten Dimension der Feldgrößen gelangt man mit rein formalen Erweiterungen nicht zum Ziel. Um wissen zu können, was mehr realistische Ansätze sind, muß man besser verstehen, was Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in der Raum-Zeit bedeuten.

Höchst bemerkenswert ist das Ergebnis, daß es nur für spezielle Werte der Kopplungskonstante stationäre Lösungen gibt. Das wird diejenigen nicht überraschen, die ernsthaft versucht haben, die Feinstrukturkonstante zu berechnen.

Wenn es ein Wahrheitskriterium ist, daß jeder Berg, dem man begegnet, einen Durchschlupf hat, so sollte man meinen, daß die hier vorgelegte Theorie über das hinausführt, was bisher erreicht werden konnte. Doch wird es noch weiterer Proben bedürfen, ehe man sie als verläßlich ansehen kann.

8. Nachtrag

Bei dem noch währenden Versuch die Quantenelektrodynamik RZ-symmetrisch kanonisch zu quantisieren, hat sich gezeigt, warum wir doppelte Eigenwerte haben. Betrachten wir (6.1) als klassisch physikalisches Wirkungsintegral, so tritt an die Stelle der Diracgleichung

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta K}{\delta \overline{\psi}(x)} &= (\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) + \\ &+ \gamma^\mu \psi(x) \int G(x - x'')\, \overline{\varphi}(x'')\gamma_\mu \psi(x'')\, d^4x'' + \\ &+ \int d^4x'\ \overline{\psi}(x')^\mu \psi(x')\, G(x' - x)\gamma_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $\overline{\psi}(x)$ und Integration über x erhält man

$$\begin{aligned} \int \overline{\psi}(x)\, \frac{\delta K}{\delta \overline{\psi}(x)}\, d^4x &= K + \int d^4x'\, d^4x''\ \overline{\psi}(x')\gamma^\mu \psi(x')\, G(x' - x'') \\ &\quad \overline{\psi}(x'')\, \gamma_\mu\, \psi(x'') = 0. \end{aligned}$$

Somit ist im allgemeinen

$$(8.1) \qquad K = -\int d^4x'\,d^4x''\,\overline{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x')\,G(x'-x'')\,\overline{\psi}(x'')\,\gamma_\mu\psi(x'') \neq 0.$$

Darum ist es nicht mehr selbstverständlich, nach der Quantisierung

$$K \mid \Phi > = 0$$

zu fordern. Vielmehr hat man die Eigenwertgleichung

$$K \mid \Phi > = \varkappa \mid \Phi >$$

zu untersuchen. Darin ist $\varkappa$ der eine Eigenwert. Wegen der Translationsinvarianz sind P^μ andere. Speziell im Ruhsystem ist $P^0 = M$ und $P = 0$. M ist also der andere Eigenwert. Beide sind Funktionen der Kopplungskonstante α. Erzwingt man $\varkappa = 0$, so hat das zur Folge, daß nur spezielle α zulässig sind.

Wir können sofort angeben, was unsere Ergebnisse bedeuten, wenn wir Eigenwerte $\varkappa \neq 0$ zulassen. Auf der linken Seite von (.16) ist

$$(8.2) \qquad 2m \to 2m + \varkappa$$

zu ersetzen, auf der rechten bleibt $\alpha/2m$ unverändert. Wenden wir in den Ergebnissen (8.2) auf alle Massen an, so ist α gemäß

$$(8.3) \qquad \alpha \to \alpha\,(1 + \varkappa/2m)$$

zu transformieren. Damit erhält man aus den früheren Daten:

$$M/2m = -0{,}429708\,\alpha, \quad 1 + \varkappa/2m = -0{,}468260\,\alpha.$$

Positive Massen setzen negative α voraus. Mit $\varkappa = 0$ stellen sich die alten Ergebnisse ein.

Man kann es als Mangel betrachten, daß $K = 0$ beim hier betrachteten Modell eine Zwangsbedingung ist. Jedenfalls ist der Umstand, daß K nicht für alle Lösungen der Feldgleichungen verschwindet, nicht mit dem eingangs gesetzten Ziel im Einklang, Analoga der Gleichung $K(p,x) = 0$ zu erhalten. Doch scheint es nicht möglich zu sein, den Mangel innerhalb reiner Spinorfeldtheorien mit plausiblen Ansätzen für die Wechselwirkung zu überwinden. Zwar erfüllen Wechselwirkungen folgender Typen die Forderung $K = 0$:

$$(\overline{\psi}, \psi, \psi, \psi), \quad \sqrt{(\overline{\psi}, \overline{\psi}, \psi, \psi)}.$$

Doch beschreibt der erste nach der Quantisierung Prozesse, bei denen es zwar Teilchenvernichtungen, aber keine Erzeugungen gibt. Beim zweiten ist schwer zu sagen, ob man ihm überhaupt einen Operator zuordnen kann.

Die hier untersuchte Wechselwirkung ist also noch mit Skepsis zu betrachten. Es zeigt sich, daß die Forderung $K = 0$ die Mannigfaltigkeit möglicher Wechselwirkungen mehr, als man bisher erwarten konnte, einschränkt. Die Folgen der Forderung $K = 0$ müssen noch weiter untersucht werden.

Herrn F. Wahl möchte ich für eine sehr freundliche, sorgfältige und kritische Prüfung der Arbeit danken.