BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1993

MÜNCHEN 1994

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Beweistheorie von KPM

von **Kurt Schütte**

Vorgetragen in der Sitzung vom 08. Januar 1993

Einleitung

Ein Teilsystem KPM der Mengenlehre, das die Existenz eines rekursiven Mahlo-Universums postuliert, wurde zuerst von M. Rathjen [5] mittels einer sehr komplizierten Erweiterung eines von W. Buchholz [1] eingeführten Majorisierungsverfahrens beweistheoretisch analysiert mit dem Ergebnis, daß die Widerspruchsfreiheit von KPM durch transfinite Induktion bis zur Ordinalzahl $\psi\Omega_1(\psi(Z\varepsilon_{M+1})0)$ eines von M. Rathjen eingeführten Ordinalzahlensystems $\mathfrak{T}$ (M) beweisbar ist. Hierbei bezeichnet M die kleinste schwache Mahlozahl und Z eine nichtmonotone injektive Abbildung von der Menge aller Ordinalzahlen $< \Gamma_{M+1}$ in die Menge der unerreichbaren Ordinalzahlen $< M$, während die $\psi\sigma$ für überabzählbare reguläre Ordinalzahlen $\sigma < M$ schwach monotone Kollabierungsfunktionen sind. Die Ordinalzahlenanalyse von M. Rathjen beruht im wesentlichen auf einer ersten imprädikativen Schnitt-Elimination, zu der die Funktion Z gebraucht wird, und einer zweiten imprädikativen Schnitt-Elimination, zu der die Funktionen $\psi\sigma$ gebraucht werden.

Schließlich entwickelte W. Buchholz [2] ein neuartiges Verfahren von H-kontrollierten Herleitungen, mit dem er in [3] die beweistheoretische Analyse von KPM bedeutend einfacher durchführen konnte. Er benutzte hierbei ein von $\mathfrak{T}$ (M) verschiedenes Ordinalzahlensystem, in dem die beiden verschiedenartigen imprädikativen Schnitt-Eliminationen in komplexer Weise zusammengefaßt werden.

In der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, daß sich das Buchholzsche Verfahren der H-kontrollierten Herleitungen in einer sehr einfach modifizierten Weise vom Buchholzschen Ordinalzahlensystem unmittelbar auf das formal einfachere und natürlichere Rathjensche Ordinalzahlensystem übertragen läßt. Wir beschreiben zunächst im 1. Abschnitt das formale System KPM und im 2. Abschnitt ein dem Rathjenschen Ordinalzahlensystem $\mathfrak{T}$ (M) entsprechendes Ordinalzahlensystem OT(M). Im 3. Abschnitt wird dann unter Bezugnahme auf [2], [3] und [5] die beweistheoretische Analyse vom KPM im Ordinalzahlensystem OT(M) skizziert.

1. Das mengentheoretische formale System KPM

Grundzeichen des Systems KPM:

1. Je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Variablen.
2. $\perp$, $\in$, Ad, $\rightarrow$, $\exists$ und runde Klammern.

Unter einer n-stelligen *Nennform* ($n \geq 1$) verstehen wir eine nichtleere endliche Zeichenreihe, die außer Grundzeichen des formalen Systems höchstens die *Nennzeichen* $*_1, \ldots, *_n$ enthält. Ist $\mathscr{F}$ eine n-stellige Nennform und sind $e_1, \ldots, e_n$ nichtleere endliche Zeichenreihen, so bezeichnet $\mathscr{F}[e_1, \ldots, e_n]$ denjenigen Ausdruck, der aus der Nennform $\mathscr{F}$ dadurch entsteht, daß jedes Nennzeichen $*_i$ überall, wo es in $\mathscr{F}$ auftritt, durch e_i ersetzt wird. Eckige Klammern werden im folgenden nur in dieser Bedeutung im Zusammenhang mit Nennformen verwendet.

Induktive Definition der *Formeln* des Systems KPM.

1. $\perp$ (falsum) ist eine Formel.
2. Sind a und b freie Variablen, so sind $(a \in b)$ und Ad(a) Formeln.
3. Sind A und B Formeln, so ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Formel.
4. Ist a eine freie Variable, $\mathscr{A}$ eine 1-stellige Nennform derart, daß $\mathscr{A}[a]$ eine Formel ist, und x eine gebundene Variable, die in $\mathscr{A}$ nicht auftritt, so ist $\exists x.\mathscr{A}[x]$ eine Formel mit einem *unbeschränkten Quantor* $\exists x$ und $(\exists x \in a)\,\mathscr{A}[x]$ eine Formel mit einem *beschränkten Quantor* $(\exists x \in a)$.

Formeln, die keinen unbeschränkten Quantor enthalten, heißen Δ_0-*Formeln*.

Induktive Definition der P-*Formen* und N-*Formen*.

1. $*_1$ ist eine P-Form.
2. Ist $\mathscr{P}$ eine P-Form und A eine Formel, so ist $\mathscr{P}[(A \rightarrow *_1)]$ eine P-Form und $\mathscr{P}[(*_1 \rightarrow A)]$ eine N-Form.
3. Ist $\mathscr{N}$ eine N-Form, so ist $\mathscr{N}[(*_1 \rightarrow \perp)]$ eine P-Form.

Nach dieser Definition sind die P-Formen und N-Formen 1-stellige Nennformen, die das Nennzeichen $*_1$ an genau einer Stelle enthalten und bei Ersetzung dieses Nennzeichens durch eine Formel in Formeln übergehen.

Eine Formel C heißt ein *Positivteil* (*Negativteil*) einer Formel F, wenn es eine P-Form $\mathscr{P}$(N-Form $\mathscr{N}$) gibt derart, daß $\mathscr{P}[C]$ ($\mathscr{N}[C]$) die Formel F ist.

Ein Positivteil einer Formel heißt *minimal*, wenn er nicht die Gestalt $(A \rightarrow B)$ hat. Ein Negativteil einer Formel heißt *minimal*, wenn er nicht die Gestalt $(A \rightarrow \perp)$ hat.

Für Formeln F und G bedeute $F \overset{s}{\vdash} G$ (aus F folgt strukturell G), daß jeder minimale Positivteil von F, der nicht die Formel $\perp$ ist, auch als Positivteil von G auftritt und jeder minimale Negativteil von F auch als Negeativteil von G auftritt.

Als *Mitteilungszeichen* verwenden wir
a, b, c für freie Variablen,
v, w, x, y, z für gebundene Variablen,
A, B, C, F, G für Formeln,
$\mathscr{A}$ für 1-stellige Nennformen, so daß $\mathscr{A}[a]$ eine Formel ist,
$\mathscr{B}$ für 2-stellige Nennformen, so daß $\mathscr{B}[a, b]$ eine Formel ist,
$\mathscr{C}$ für 3-stellige Nennformen, so daß $\mathscr{C}[a, b, c]$ eine Formel ist,
$\mathscr{P}$ für P-Formen und
$\mathscr{N}$ für N-Formen.
Diese Mitteilungszeichen werden auch mit Indizes verwendet.

Definitionen.

$\neg A := (A \rightarrow \perp)$

$(A \vee B) := (\neg A \rightarrow B)$

$(A \wedge B) := \neg (A \rightarrow \neg B)$

$\forall x \mathscr{A}[x] := \neg \exists x \neg \mathscr{A}[x]$

$(\forall x \in a) \mathscr{A}[x] := \neg (\exists x \in a) \neg \mathscr{A}[x]$

$(a = b) := ((\forall x \in a)(x \in b) \wedge (\forall x \in b)(x \in a))$

$\mathrm{Tran}[a] := (\forall x \in a)(\forall y \in x)(y \in a)$

Zur Abkürzung lassen wir teilweise runde Klammern in Formeln fort, wenn es nicht mißverständlich ist.

Axiome des Systems KPM:

(Taut) $F \rightarrow F$

(Ext) $(a = b) \to (\mathscr{A}[a] \to \mathscr{A}[b])$

(Fund) $\forall x\, ((\forall y \in x)\ \mathscr{A}[y] \to \mathscr{A}[x]) \to \forall x\, \mathscr{A}[x]$

(Ad 1) $(\mathrm{Ad}(a) \wedge \mathrm{Ad}(b)) \to ((a \in b) \vee (a = b) \vee (b \in a))$

(Ad 2) $\mathrm{Ad}(a) \to \mathrm{Tran}[a]$

(Ad 3) $\mathrm{Ad}(a) \to (\forall x \in a)\ (\forall y \in a)\ (\exists z \in a)\ ((x \in z) \wedge (y \in z) \wedge \mathrm{Tran}[z])$

(Ad 4) $\mathrm{Ad}(a) \to (\exists x \in a)\ ((\exists y \in x)\ (\perp \to \perp) \wedge (\forall y \in x)\ (\exists z \in x)\ (y \in z))$ (auf Ad beschränktes Unendlichkeitsaxiom)

(Ad 5) $\mathrm{Ad}(a) \to (\forall v \in a)\ (\forall w \in a)\ (\forall x \in a)\ (\exists y \in a)\ ((\forall z \in y)\ (\mathscr{C}[v, w, z] \wedge (z \in x)) \wedge (\forall z \in x)\ (\mathscr{C}[v, w, z] \to (z \in y)))$, wenn $\mathscr{C}[a, b, c]$ eine Δ_0-Formel ist und $\mathscr{C}$ keine freie Variable enthält.
(auf Ad beschränkte Δ_0-Separation)

(Ad 6) $\mathrm{Ad}(a) \to (\forall v \in a)\ (\forall x \in a)\ ((\forall y \in x)\ (\exists z \in a)\ \mathscr{C}[v, y, z] \to (\exists w \in a)\ (\forall y \in x)\ (\exists z \in w)\ \mathscr{C}[v, y, z])$,
wenn $\mathscr{C}[a, b, c]$ eine Δ_0-Formel ist und $\mathscr{C}$ keine freie Variable enthält.
(auf Ad beschränkte Δ_0-Kollektion)

Schlußregeln des Systems KPM:

(Str) $F \vdash G$, wenn $F \overset{s}{\vdash} G$ gilt.

(S1) $\mathscr{N}[\neg A], \mathscr{N}[B] \vdash \mathscr{N}[A \to B)]$,
wenn B nicht die Formel $\perp$ ist.

(S2a) $\mathscr{P}[\mathscr{A}[a]] \vdash \mathscr{P}[\exists x\, \mathscr{A}[x]]$

(S2b) $\mathscr{P}[((a \in b) \wedge \mathscr{A}[a])] \vdash \mathscr{P}[(\exists x \in b)\, \mathscr{A}[x]]$

(S3a) $\mathscr{N}[\mathscr{A}[a]] \vdash \mathscr{N}[\exists x\, \mathscr{A}[x]]$,
wenn a in der Konklusion nicht auftritt.

(S3b) $\mathscr{N}[((a \in b) \wedge \mathscr{A}[a])] \vdash \mathscr{N}[(\exists x \in b)\, \mathscr{A}[x]]$,
wenn a in der Konklusion nicht auftritt.

(S4) $\mathscr{P}[\forall x\, \exists y\, \mathscr{B}[x, y]] \vdash \mathscr{P}[\exists z(\mathrm{Ad}(z) \wedge (\forall x \in z)\ (\exists y \in z)\ \mathscr{B}[x, y])]$,
wenn $\mathscr{B}[a, b]$ eine Δ_0-Formel ist.

(Schnitt) $C \vee F,\ C \to F \vdash F$

2. Das Ordinalzahlensystem OT(M)

Wir gehen aus von einer Mengentheorie mit Auswahlaxiom nach Zermelo-Fraenkel, in der zusätzlich die Existenz einer schwachen Mahlozahl vorausgesetzt wird, und bezeichnen mit α, β, γ, δ, η, μ zunächst beliebige Ordinalzahlen, mit i, k, m, n Ordinalzahlen $< \omega$ und mit M die kleinste schwache Mahlozahl.

Für eine Ordinalzahlenklasse X sei $X/\alpha := \{\eta \in X: \eta < \alpha\}$.

$X < \alpha$ ($X \leq \alpha$) bedeute, daß $\eta < \alpha$ ($\eta \leq \alpha$) für alle $\eta \in X$ gilt.

Induktive Definition der α-*kritischen* Ordinalzahlen und der Funktionen φ_α.

1. Die 0-kritischen Ordinalzahlen seien die additiven Hauptzahlen.
2. φ_α sei die Ordnungsfunktion der α-kritischen Ordinalzahlen.
3. Für $\alpha > 0$ seien die α-kritischen Ordinalzahlen die gemeinsamen Fixpunkte aller Funktionen φ_η mit $\eta < \alpha$.

Wir schreiben $\varphi\alpha\beta$ anstatt $\varphi_\alpha(\beta)$.

Lemma 2.1.

a) $\varphi 0\beta = \omega^\beta$ und $\varphi 1\beta = \varepsilon_\beta$.
b) $\varphi\alpha\beta$ ist streng monoton und stetig in β.
c) Für $\gamma < \alpha$ ist $\varphi\gamma(\varphi\alpha\beta) = \varphi\alpha\beta$.
d) $\varphi\alpha\beta$ ist eine additive Hauptzahl, und zu jeder additiven Hauptzahl γ gibt es eindeutig α, β mit $\beta < \gamma = \varphi\alpha\beta$.
e) $a \leq \varphi\alpha 0$.

Definitionen.

1. Eine Ordinalzahl α heißt *stark kritisch*, wenn $\varphi\alpha 0 = \alpha$ ist.
2. SC sei die Klasse der stark kritischen Ordinalzahlen.
3. $M^\Gamma := \min\{\eta \in SC: M < \eta\} = \Gamma_{M+1}$.
4. $\delta =_{NF} \varphi\alpha\beta+\gamma$ (δ hat die Normalform $\varphi\alpha\beta+\gamma$) bedeute, daß $\delta = \varphi\alpha\beta+\gamma$ ist mit $\alpha < \delta$, $\beta < \varphi\alpha\beta$ und $\gamma < \delta$.

Lemma 2.2.

a) Gilt $\delta =_{NF} \varphi\alpha\beta+\gamma$, so sind α, β, γ eindeutig durch δ bestimmt.
b) Zu δ gibt es α, β, γ mit $\delta =_{NF} \varphi\alpha\beta+\gamma$ genau dann, wenn $0 < \delta \notin SC$ ist.

Induktive Definition von $\delta^\star$ für $\delta < M^\Gamma$.
1. $0^\star = M^\star := 0$.
2. Für $\delta = {}_{NF}\varphi\alpha\beta+\gamma < M^\Gamma$ sei $\delta^\star := \max\{\alpha^\star, \beta^\star, \gamma^\star\}$.
3. Für $\delta \in SC/M$ sei $\delta^\star := \delta$.

Nach dieser Definition ist $\delta^\star \in \{0\} \cup SC/M$ für alle $\delta < M^\Gamma$.

Definitionen.
1. $\Omega_0 := 0$ und $\Omega_\alpha := \aleph_\alpha$ für $\alpha > 0$.
2. K sei die Klasse aller Ordinalzahlen Ω_α.
3. R sei die Klasse der überabzählbaren regulären Ordinalzahlen.
Offenbar ist R eine echte Teilklasse von K und M unerreichbar, d.h. $\Omega_M = M \in R$.

Induktive Definition der Ordinalzahlenmengen $B_n(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$ und Ordinalzahlen $Z\alpha$ für $\alpha < M^\Gamma$.
(B1) $0, M \in B_n(\alpha, \beta)$ und $\eta \in B_n(\alpha, \beta)$ für alle $\eta < \beta$.
(B2) Gilt $\delta = {}_{NF}\varphi\delta_1\delta_2+\delta_3$ und $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in B_n(\alpha, \beta)$, so sei $\delta \in B_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(B3) Ist $\mu < \Omega_\mu < M$ und $\mu \in B_n(\alpha, \beta)$, so sei $\Omega_\mu \in B_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(B4) Ist $\gamma < \delta \in R/M$ und $\delta \in B_n(\alpha, \beta)$, so sei $\gamma \in B_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(B5) Ist $\gamma < \alpha$ und $\gamma \in B_n(\alpha, \beta)$, so sei $Z\gamma \in B_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(B6) $B(\alpha, \beta) := \cup\{B_n(\alpha, \beta) : n < \omega\}$.
(B7) $Z\alpha := \min\{\eta \in R : \alpha \in B(\alpha, \eta)$ und $B(\alpha, \eta)/M < \eta\}$.

Lemma 2.3. Für $\alpha, \beta < M^\Gamma$ gilt:
a) $\alpha \in B(\alpha, Z\alpha)$ und $B(\alpha, Z\alpha)/M < Z\alpha$.
b) $\Omega_{Z\alpha} = Z\alpha \in R/M$.
c) Aus $\alpha < \beta$ und $\alpha \in B(\beta, Z\beta)$ folgt $Z\alpha < Z\beta$.
d) Aus $Z\alpha = Z\beta$ folgt $\alpha = \beta$.
e) $Z\alpha \neq \alpha$.
f) $\alpha \in B(\beta, Z\beta)$ gilt genau dann, wenn $\alpha^\star < Z\beta$ ist.
Beweis nach der Definition von $Z\alpha$ und nach [4] Lemma 3.6.

Induktive Definition der Ordinalzahlen $C_n(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ und Ordinalzahlen $\psi\Omega_{\mu+1}\alpha$, $\psi(Z\gamma)\alpha$ für $\mu < M$ und $\gamma < M^\Gamma$.
(C1) $0, M \in C_n(\alpha, \beta)$ und $\eta \in C_n(\alpha, \beta)$ für alle $\eta < \beta$.
(C2) Gilt $\delta = {}_{NF}\varphi\delta_1\delta_2+\delta_3$ und $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in C_n(\alpha, \beta)$, so sei $\delta \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(C3) Ist $\eta < \Omega_\eta < M$ und $\eta \in C_n(\alpha, \beta)$, so sei $\Omega_\eta \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(C4) Ist $\eta < M^\Gamma$ und $\eta \in C_n(\alpha, \beta)$, so sei $Z\eta \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$.

(C5) Ist $\eta < M$ und sind $\Omega_{\eta+1}$, $\delta \in C_n(\alpha, \beta)$ mit $\delta < \alpha$ und $\delta \in C(\delta, \psi\Omega_{\eta+1}\delta)$, so sei $\psi\Omega_{\eta+1}\delta \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(C6) Ist $\eta < M^\Gamma$ und sind $Z\eta$, $\delta \in C_n(\alpha, \beta)$ mit $\delta < \alpha$ und $\delta \in C(\delta, \psi(Z\eta)\delta)$, so sei $\psi(Z\eta)\delta \in C_{n+1}(\alpha, \beta)$.
(C7) $C(\alpha, \beta) := \cup \{C_n(\alpha, \beta): n < \omega\}$.
(C8) $\psi\Omega_{\mu+1}\alpha := \min \{\eta: \eta \notin C(\alpha, \Omega_\mu+1)\}$.
(C9) $\psi(Z\gamma)\alpha := \min \{\eta: Z\gamma \in C(\alpha, \eta) \text{ und } C(\alpha, \eta)/Z\gamma < \eta\}$.

Lemma 2.4. Für $\mu < M$ und $g < M^\Gamma$ gilt:
a) $\Omega_\mu < \psi\Omega_{\mu+1}\alpha < \Omega_{\mu+1}$ mit $\psi\Omega_{\mu+1}\alpha \in SC$.
b) $\gamma^\star < \psi(Z\gamma)\alpha < Z\gamma$ mit $\Omega_{\psi(Z\gamma)\alpha} = \psi(Z\gamma)\alpha \notin R$.
Beweis nach der Definition von $\psi\Omega_{\mu+1}\alpha$ und [3] Theorem 1.3.

Bezeichnungen. Mit π, σ bezeichnen wir die erreichbaren regulären Ordinalzahlen $\Omega_{\mu+1} < M$ sowie die unerreichbaren Ordinalzahlen $Z\gamma$ mit $\gamma < M^\Gamma$.

Für $\sigma = \Omega_{\mu+1}$ sei $\sigma^- := \Omega_\mu$, und für $\sigma = Z\gamma$ sei $\sigma^- := \gamma^\star$.

In bekannter Weise folgt für alle π und σ:

Lemma 2.5.
a) $\sigma^- < \psi\sigma\alpha < \sigma < M$.
b) $C(\alpha, \psi\sigma\alpha)/\sigma < \psi\sigma\alpha$.
c) Aus $\pi^- < \psi\sigma\alpha$ folgt $\pi \in C(\alpha, \psi\sigma\alpha)$.
d) $\sigma \in C(\alpha, \psi\sigma\alpha)$.
e) Aus $\psi\sigma\alpha \leq \pi < \sigma$ folgt $\psi\sigma\alpha \leq \pi^-$.
f) Aus $\psi\sigma\alpha = \psi\pi\beta$ folgt $\pi = \sigma$.
g) Aus $\alpha \in C(\alpha, \psi\sigma\alpha)$ und $\alpha < \beta$ folgt $\psi\sigma\alpha < \psi\sigma\beta$.
h) Aus $\varphi\sigma\alpha = \psi\sigma\beta$ mit $\alpha \in C(\alpha, \psi\sigma\alpha)$ und $\beta \in C(\beta, \psi\sigma\beta)$ folgt $\alpha = \beta \neq \psi\sigma\alpha$.

Induktive Definition der Ordinalzahlenmenge OT(M).
(T1) $0, M \in OT(M)$.
(T2) Gilt $\delta =_{NF} \varphi\alpha\beta+\gamma < \varepsilon_{M+1}$ und $\alpha, \beta, \gamma \in OT(M)$, so sei $\delta \in OT(M)$.
(T3) Ist $\mu < \Omega_\mu < M$ und $\mu \in OT(M)$, so sei $\Omega_\mu \in OT(M)$.
(T4) Ist $\gamma < \varepsilon_{M+1}$ und $\gamma \in OT(M)$, so sei $Z\gamma \in OT(M)$.
(T5) Sind $\sigma, \alpha \in OT(M)$ mit $\alpha < M$ und $\alpha \in C(\alpha, \psi\sigma\alpha)$, so sei $\psi\sigma\alpha \in OT(M)$.

Aus den Lemmata 2.2 bis 2.5 geht hervor, daß jede Ordinalzahl aus OT(M) auf genau eine Weise durch die Definitionsregeln (T1) bis (T5) bestimmt ist. Daher liefern diese Definitionsregeln ein eindeutiges Bezeichnungssystem für die Ordinalzahlen der Menge OT(M).

Lemma 2.6. Die Ordinalzahlenmenge OT(M) $/\Omega_1$ besteht aus dem Abschnitt aller Ordinalzahlen $< \psi\Omega_1 (\psi (Z\varepsilon_{M+1}) 0)$.

Beweis nach [4] Theorem 6.3.

Im folgenden bezeichnen α, β, γ, δ, η, μ, ν, ξ, π, ϱ, σ stets Ordinalzahlen aus OT(M), wobei $\pi, \sigma \in R/M$ sind.

3. Das geschichtete halbformale System RS(M)

Grundzeichen des Systems RS(M):

1. Abzählbar unendlich viele gebundene Variablen.
2. Bezeichnungen der Ordinalzahlen aus OT(M).
3. $\perp$, $\in$, Ad, $\rightarrow$, $\exists$, L, Doppelpunkt, runde und geschweifte Klammern.

Nennformen werden in RS(M) entsprechend wie in KPM verwendet. Dabei setzen wir von jeder Nennform voraus, daß kein Nennzeichen zwischen geschweiften Klammern auftritt.

Induktive Definition der *Terme* des Systems RS(M), der *Schicht* St und *Komponentenmenge* k(t) eines Terms t, der *Formeln* des Systems RS(M) und der *Komponentenmenge* k(F) einer Formel F.

1. Für $\alpha \leq M$ ist $L\alpha$ ein Term der Schicht α mit der Komponentenmenge $\{\alpha\}$.
2. Ist $0 < \alpha < M$, $\alpha \notin R$, $\mathscr{A}$ eine 1-stellige Nennform derart, daß $\mathscr{A}[L0]$ eine Formel mit $k(\mathscr{A}[0]) < \alpha$ ist, und x eine gebundene Variable, die in $\mathscr{A}$ nicht auftritt, so ist $\{x \in L\alpha : \mathscr{A}[x]\}$ ein Term der Schicht α mit der Komponentenmenge $k(\mathscr{A}[L0]) \cup \{\alpha\}$.
3. $\perp$ ist eine Formel mit leerer Komponentenmenge.
4. Sind s und t Terme von Schichten $< M$, so ist $(s \in t)$ eine Formel mit der Komponentenmenge $k(s) \cup k(t)$.
5. Ist t ein Term von einer Schicht $< M$, so ist Ad(t) eine Formel mit der Komponentenmenge k(t).
6. Sind A und B Formeln, so ist $(A \rightarrow B)$ eine Formel mit der Komponentenmenge $k(A) \cup k(B)$.
7. Ist t ein Term, $\mathscr{A}$ eine 1-stellige Nennform derart, daß $\mathscr{A}[L0]$ eine Formel ist, und x eine gebundene Variable, die weder in t

noch in $\mathscr{A}$ auftritt, so ist $(\exists x \in t)\,\mathscr{A}[x]$ eine Formel mit der Komponentenmenge $k(t) \cup k(\mathscr{A}[L0])$.

Eine Formel heiße *einfach*, wenn sie nicht die Gestalt $(A \rightarrow B)$ hat. Als *Mitteilungszeichen* für Terme verwenden wir s, t, u. Im übrigen verwenden wir in RS(M) die entsprechenden Mitteilungszeichen wie in KPM. P-Formen, N-Formen, $F \overset{S}{\vdash} G$, $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(\forall x \in t)\,\mathscr{A}[x]$, $(s = t)$ und $\mathrm{Tran}[t]$ werden in RS(M) entsprechend wie in KPM definiert.

Induktive Definition der *$\Sigma(\alpha)$-Formeln* und *$\Pi(\alpha)$-Formeln* für $\alpha \in R$.

1. Eine Formel F, die weder die Gestalt $(A \rightarrow B)$ noch $(\exists x \in t)\,\mathscr{A}[x]$ hat, ist genau dann eine $\Sigma(\alpha)$-Formel ($\Pi(\alpha)$-Formel), wenn $k(F) < \alpha$ ist.
2. Eine Formel $(A \rightarrow B)$ ist genau dann eine $\Sigma(\alpha)$-Formel ($\Pi(\alpha)$-Formel), wenn A eine $\Pi(\alpha)$-Formel ($\Sigma(\alpha)$-Formel) und B eine $\Sigma(\alpha)$-Formel ($\Pi(\alpha)$-Formel) ist.
3. Eine Formel $(\exists x \in t)\,\mathscr{A}[x]$ ist genau dann eine $\Sigma(\alpha)$-Formel ($\Pi(\alpha)$-Formel), wenn $St \leq \alpha$ ($St < \alpha$) und $\mathscr{A}[L0]$ eine $\Sigma(\alpha)$-Formel ($\Pi(\alpha)$-Formel) ist.

Eine Formel F heißt eine *$\Delta(\alpha)$-Formel* (für $\alpha \in R$), wenn $k(F) < \alpha$ ist.

Definition der Formel $t(u)$ für $Su < St$.

1. $t(u) := \neg (u \in L0)$, wenn t ein Term $L\alpha$ ist.
2. $t(u) := \neg (u \in L0) \wedge \mathscr{A}[u]$, wenn t ein Term $\{x \in L\alpha : \mathscr{A}[x]\}$ ist.

Induktive Definition des *Ranges* $rn(F)$ einer Formel F.

1. $rn(\perp) := 0$.
2. $rn(s \in t) := \max\{\omega \cdot Ss + 6, \omega \cdot St + 1\}$ für $Ss, St < M$.
3. $rn(Ad(t)) := \omega \cdot St + 5$ für $St < M$.
4. $rn(\neg A) := rn(A)$.
5. $rn(A \rightarrow B) := \max\{rn(A), rn(B)\} + 1$, wenn B nicht die Formel $\perp$ ist.
6. $rn((\exists x \in t)\,\mathscr{A}[x]) := \max\{\omega \cdot St, rn(\mathscr{A}[L0]) + 2\}$.

Lemma 3.1. Für $Su < St$ ist $rn(t(u)) < \omega \cdot St$.

Lemma 3.2.
a) $\mathrm{rn}(t(u) \wedge (s = u) < \mathrm{rn}(s \in t)$ für $Ss < M$ und $Su < St < M$.
b) $\mathrm{rn}(L\sigma = t) < \mathrm{rn}(Ad(t))$ für $\sigma \leq St < M$.
c) $\mathrm{rn}(t(u) \wedge \mathscr{A}[u]) < \mathrm{rn}((\exists x \in t)\, \mathscr{A}[x])$ für $Su < St$.

Lemma 3.3. Jede einfache Formel vom Rang $\alpha \in R$ ist eine Formel $(\exists x \in L\alpha)\, \mathscr{A}[x]$ mit einer $\Delta(\alpha)$-Formel $\mathscr{A}[L0]$.

Axiome des Systems RS(M):

(Ax.$\perp$) $\mathscr{N}[\perp]$

(Ax.$\in$) $\mathscr{N}[(s \in L0)]$ für $Ss < M$.

(Ax.Ad) $\mathscr{N}[Ad(t)]$ für $St < \Omega_1$.

(Ax.$\exists$) $\mathscr{N}[(\exists x \in L0)\, A[x]]$

Hauptschlüsse des Systems RS(M):

($\rightarrow$) $\neg A \rightarrow \mathscr{N}[(A \rightarrow B)], B \rightarrow \mathscr{N}[(A \rightarrow B)] \vdash \mathscr{N}[(A \rightarrow B)]$, wenn B nicht die Formel $\perp$ ist.
Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{L0, L1\}$.

(P.$\in$) $(t(u) \wedge (s = u)) \vee \mathscr{P}[(s \in t)] \vdash \mathscr{P}[(s \in t)]$, wenn $Ss < M$ und $Su < St < M$ ist.
Dieser Hauptschluß hat die Indexmenge $\{u\}$.

(P.Ad) $(L\sigma = t) \vee \mathscr{P}[Ad(t)] \vdash \mathscr{P}[Ad(t)]$, wenn $\sigma \leq St < M$ ist.
Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{L\sigma\}$.

(P.$\exists$) $(t(u) \wedge \mathscr{A}[u]) \vee \mathscr{P}[(\exists x \in t)\, \mathscr{A}[x]] \vdash \mathscr{P}[\exists x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$, wenn $Su < St$ ist. Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{u\}$.

(Cl_σ) $(\forall x \in t)\, (\exists y \in L\sigma)\, \mathscr{B}[x, y] \vee F \vdash F$, wenn $St < \sigma$, $\mathscr{B}[L0, L0]$ eine $\Delta(\sigma)$-Formel und F eine Formel $\mathscr{P}[(\exists z \in L\sigma)\, (\forall x \in t)\, (\exists y \in z)\, \mathscr{B}[x, y]]$ ist. Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{L\sigma\}$.

(Cl_M) $(\forall x \in LM)\, (\exists y \in LM)\, \mathscr{B}[x, y] \vee F \vdash F$, wenn $\mathscr{B}[L0, L0]$ eine $\Delta(M)$-Formel und F eine Formel $\mathscr{P}[(\exists z \in LM)\, (Ad(z) \wedge (\forall x \in z)\, (\exists y \in z)\, \mathscr{B}[x, y])]$ ist.
Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{L0\}$.

(N.$\in$) $(t(u) \wedge (s = u)) \rightarrow \mathscr{N}[s \in t)]$ für alle u mit $Su < St \vdash \mathscr{N}[(s \in t)]$, wenn $Ss < M$ und $0 < St < M$ ist.
Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{u\colon Su < St\}$.

(N.Ad) $(L\sigma = t) \rightarrow \mathscr{N}[Ad(t)]$ für alle $\sigma \leq St \vdash \mathscr{N}[Ad(t)]$, wenn $\Omega_1 \leq St < M$ ist.
Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{L\sigma\colon \sigma \leq St\}$.

(N.∃) $(t(u) \wedge \mathscr{A}[u]) \rightarrow \mathscr{N}^{\cdot}[(\exists x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$ für alle u mit $Su < St$ $\vdash \mathscr{N}^{\cdot}[(\exists x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$, wenn $St > 0$ ist.

Dieser Hauptschluß hat die *Indexmenge* $\{u\colon Su < St\}$.

Der bezeichnete minimale Positiv- oder Negativteil der Konklusion eines Hauptschlusses heißt der *Hauptteil* des betreffenden Hauptschlusses. Die Prämissen eines Haupschlusses mit der Indexmenge J haben die *Indizes* $u \in J$.

Schnitte des Systems RS(M):

$C \vee F,\ C \rightarrow F \vdash F$

Die mit C bezeichnete Formel in den Prämissen eines Schnittes heißt die *Schnittformel* des betreffenden Schnittes. Der *Rang* eines Schnittes ist der Rang rn(C) seiner Schnittformel C.

Im folgenden bezeichnen X, Y endliche Teilmengen von OT(M).

Definition.

$$H^{\beta}_{\gamma}(X) := \begin{cases} \cap\{B(\xi,\eta)\colon X \subset B(\xi,\eta) \text{ und } \beta < \xi\} \cap \\ \cap\{C(\xi,\eta)\colon X \subset C(\xi,\eta) \text{ und } \gamma < \xi\} \cap \ OT(M) \end{cases}$$

Lemma 3.4.

a) Für $\beta \leq \mu$, $\gamma \leq \nu$ und $X \subseteq Y$ gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \subseteq H^{\mu}_{\nu}(Y)$.

b) $X \subset H^{\beta}_{\gamma}(X)$.

c) Aus $Y \subset H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup Y) = H^{\beta}_{\gamma}(X)$.

d) $0, M \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$.

e) $\mu =_{NF} \varphi\alpha\delta + \eta \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ gilt genau dann, wenn $\alpha, \delta, \eta \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ sind.

f) $\Omega_{\mu} \in H^{\beta}_{\gamma}(X)/M$ gilt genau dann, wenn $\mu \in H^{\beta}_{\gamma}(X)/M$ ist.

g) Aus $\alpha \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ und $\alpha \leq \beta$ folgt $Z\alpha \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$.

h) Aus $\sigma, \alpha \in H^{\beta}_{\gamma}(X)/M$, $\alpha \in C(\alpha, \psi\sigma\alpha)$ und $\alpha \leq \gamma$ folgt $\psi\sigma\alpha \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$.

Induktive Definition von $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$ (durch Induktion nach α). $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$ gelte genau dann, wenn $\{a\} \cup k(F) \subset H^{\beta}_{\gamma}(X)$ gilt und einer der folgenden sechs Fälle vorliegt.

1. F ist ein Axiom des System RS(M).
2. F ist die Konklusion eines Hauptschlusses $(\rightarrow)$, und es gibt $f(i) < a$ mit $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{f(i)}{\varrho}} F_i$ für die Prämissen F_i $(i = 0,1)$.
3. F ist die Konklusion eines Hauptschlusses $(P.\in)$, $(P.Ad)$, $(P.\exists)$ oder (Cl_{σ}) mit der Indexmenge $\{u\}$, und es gibt δ mit $Su \leq \delta < \alpha$ und $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\delta}{\varrho}} F_u$ für die Prämisse F_u.
4. F ist die Konklusion eines Hauptschlusses (Cl_M), und es gibt δ mit $\delta + M < \alpha$ und $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\delta}{\varrho}} F_0$ für die Prämisse F_0.
5. F ist die Konklusion eines Hauptschlusses $(N.\in)$, $(N.Ad)$ oder $N.\exists)$ mit der Indexmenge J, und es gibt $f(u) < \alpha$ mit $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup k(u)) \mathrel{\vert\!\frac{f(u)}{\varrho}} F_u$ für jede Prämisse F_u vom Index $u \in J$.
6. F ist die Konklusion eines Schnittes mit der Schnittformel C von einem Rang $< \varrho$, und es gibt δ mit $k(C) \leq \delta < \alpha$ und $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\delta}{\varrho}} F_i$ für die Prämissen F_i $(i = 0, 1)$.

Lemma 3.5.

a) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$, $\beta \leq \mu$, $\gamma \leq \nu$ und $X \subseteq Y$ folgt $H^{\mu}_{\gamma}(Y) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$.

b) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$, $\alpha < \delta$ und $\delta \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\delta}{\varrho}} F$.

c) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$ und $\varrho < \mu$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\mu}} F$.

Lemma 3.6. (Strukturschlußlemma)

Aus ,$H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} F \overset{s}{\vdash} G$ und $k(G) \subset H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mathrel{\vert\!\frac{\alpha}{\varrho}} G$.

Beweis durch Induktion nach α.

Lemma 3.7.

a) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{f(i)}{\varrho}\, \mathscr{P}[A_i]$ mit $f(i) < \alpha$ $(i = 0, 1)$ und $\alpha \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{P}[(A_0 \wedge A_1)]$.

b) Ist $Su < St$ und gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\delta}{\varrho}\, \mathscr{N}[(t(u) \rightarrow \mathscr{A}[u])]$ mit $Su \leq \delta < \alpha$ und α, $St \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$, so folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[\forall x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$.

c) Ist $St > 0$ und gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup k(u)) \mid\!\frac{f(u)}{\varrho}\, \mathscr{P}[(t(u) \rightarrow \mathscr{A}[u])]$ mit $f(u) < \alpha$ für alle u mit $Su < St$ sowie α, $St \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$, so folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{P}[(\forall x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$.

Beweis aufgrund der Definitionen von $\wedge$ und $\forall$ mit Lemma 3.6.

Lemma 3.8. (Inversionslemma)

a) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[(A \rightarrow B)]$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[\neg A]$ und $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[B]$.

b) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[(s \in t)]$ mit $Ss < M$ und $Su < St < M$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup k(u)) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[(t(u) \wedge (s = u))]$.

c) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[Ad(t)]$ mit $\sigma \leq St < M$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup \{\sigma\}) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}$ $\mathscr{N}[(L\sigma = t)]$.

d) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[(\exists x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$ mit $Su < St$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup k(u)) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{N}[(t(u) \wedge \mathscr{A}[u)]$.

e) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{P}[(\forall x \in t)\, \mathscr{A}[x]]$ mit $Su < St$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X \cup k(u)) \mid\!\frac{\alpha}{\varrho}\, \mathscr{P}[(t(u) \rightarrow A[u])]$.

Beweis durch Induktion nach α mit Lemma 3.6.

Lemma 3.9. (Beschränkungslemma)

a) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. \mathscr{P}[(\exists x \in L\delta)\, \mathscr{A}[x]]$ mit $\alpha \leq \mu < \delta \leq M$ und $\mu \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. \mathscr{P}[(\exists x \in L\mu)\, \mathscr{A}[x]]$.

b) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. \mathscr{P}[(\forall x \in t)\, (\exists y \in L\delta)\, \mathscr{B}[x, y]]$ mit $\alpha \leq \mu < \delta \leq M$ und $\mu \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. \mathscr{P}[(\forall x \in t)$ $(\exists y \in L\mu)\, \mathscr{B}[x, y]]$.

c) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. \mathscr{N}^{\cdot}[(\exists x \in Ld)\, \mathscr{A}[x]]$ mit $\mu < \delta \leq M$ und $\mu \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. \mathscr{N}^{\cdot}[(\exists x \in L\mu)\, \mathscr{A}[x]]$.

Beweis durch Induktion nach α.

Definition. Unter einer RS(M)-*Interpretation* einer Formel F des Systems KPM verstehen wir eine Formel des Systems RS(M), die aus F dadurch entsteht, daß für jede in F auftretende freie Variable ein Term einer Schicht < M eingesetzt wird und jeder in F auftretende unbeschränkte Quantor $\exists x$ durch $(\exists x \in LM)$ ersetzt wird.

Satz 3.10. (Einbettungssatz)

Zu jeder in KPM herleitbaren Formel F gibt es $k, m < \omega$ derart, daß $H^{0}_{0}(k(F^{M})) \left|\frac{M\cdot k}{M+m}\right. F^{M}$ für jede RS(M)-Interpretation F^{M} von F gilt. Beweis entsprechend wie in [3] oder [5].

Lemma 3.11. (Prädikative Schnitt-Elimination)

a) Ist C eine einfache Formel vom Rang $\varrho \notin R$ und gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho}\right. C \rightarrow F$ und $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\delta}{\varrho}\right. C \vee G$ mit $k(C) \leq \alpha$, so folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha+\delta}{\varrho}\right. F \vee G$.

b) Aus $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\alpha}{\varrho+1}\right. F$ mit $\varrho \notin R$ folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \left|\frac{\varphi 0 \alpha}{\varrho}\right. F$.

c) Gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \vdash^{\delta}_{\mu+\varphi 0\alpha} F$ mit α, $\delta < M$ und $\alpha \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$, wobei es kein $\zeta \in R$ mit $\mu \leq \zeta < \mu+\varphi 0\alpha$ gibt, so folgt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \vdash^{\varphi\alpha\delta}_{\mu} F$.

Beweis von a) durch Induktion nach δ.

b) ergibt sich mit a) durch Induktion nach α.

c) ergibt sich mit b) durch Hauptinduktion nach α und Nebeninduktion nach δ.

Definitionen.

a) NF (α, ß) bedeute, daß entweder $\alpha = 0$ ist oder $\eta + \beta < \alpha + \beta$ für alle $\eta < \alpha$ gilt.

b) Für $\mu \in K/M$ sei $\mu' := \mu + 1$, wenn $\mu \in R$ ist, sonst $\mu' := \mu$.

Lemma 3.12. (Imprädikative Schnitt-Elimination mit Kollabierung)

a) Gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \vdash^{\alpha}_{M+1} F$ für eine $\Sigma(M)$-Formel F mit $\beta \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$, $X \subset B(\beta + 1, Z(\beta + 1))$ und NF (β, $\varphi 0\alpha$), so folgt

$H^{\beta+\varphi 0\alpha}_{\gamma}(X) \vdash^{Z(\beta+\varphi 0\alpha)}_{Z(\beta+\varphi 0\alpha)} F$.

b) Gilt $H^{\beta}_{\gamma}(X) \vdash^{\alpha}_{\mu'} F$ für eine $\Sigma(\sigma)$-Formel F mit $\mu \in K/M$, $\alpha < M$, $\gamma, \mu, \sigma \in H^{\beta}_{\gamma}(X)$ und $X \subset C(\gamma + 1, \psi\pi(\gamma + 1))$ für alle $\pi \geq \sigma$, so folgt $H^{\beta}_{\gamma+\varphi 0(\mu+\alpha)}(X) \vdash^{\psi\sigma(\gamma+\varphi 0(\mu+\alpha))}_{\psi\sigma(\gamma+\varphi 0(\mu+\alpha))} F$.

Beweis entsprechend wie in [3] mit dem Unterschied, daß Hauptschlüsse (Cl_M) nur im Beweis von a) und Hauptschlüsse (Cl_σ) nur im Beweis von b) auf Hauptschlüsse (P.∃) zurückzuführen sind.

Lemma 3.13. Ist eine RS(M)-Interpretation F^M einer in KPM herleitbaren Δ_0-Formel F eine $\Sigma(\Omega_1)$-Formel mit $k(F^M) \in H^{0}_{0}(\emptyset)$, so gibt es $\alpha < \Omega_1$, ß und $\gamma < M$ mit $H^{\beta}_{\gamma}(\emptyset) \vdash^{\alpha}_{0} F^M$.

Beweis. Nach Satz 3.10 hat man k, m < ω mit $H^{0}_{0}(\emptyset) \vdash^{M\cdot k}_{M+m} F^M$.

Mit Lemma 3.11 b) folgt, daß es δ mit $H^{0}_{0}\,(\emptyset) \vdash^{\delta}_{M+1} F^{M}$ gibt.

Für $\beta: = \varphi 0 \delta$ folgt nach Lemma 3.12 a) $H^{\beta}_{0}\,(\emptyset) \vdash^{Z\beta}_{Z\beta} F^{M}$.

Für $\gamma: = \varphi 0\, (Z\beta + Z\beta) < M$ folgt nach Lemma 3.12 b) $H^{\beta}_{\gamma}\,(\emptyset) \vdash^{\psi\Omega_1\gamma}_{\psi\Omega_1\gamma} F^{M}$.

Für $\alpha: = \varphi\, (\psi\Omega_1\gamma)\, (\psi\Omega_1\gamma)$ folgt nach Lemma 3.11 c) $H^{\beta}_{\gamma}\,(\emptyset) \vdash^{\alpha}_{0} F^{M}$ mit $\alpha < \Omega_1$.

Satz 3.14. (M. Rathjen) Die beweistheoretische Ordinalzahl des formalen Systems KPM ist $\leq \psi\Omega_1\, (\psi(Z\varepsilon_{M+1})0)$.

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 3.13 und 2.6.

Literatur

[1] Buchholz, W.: Ein Mengensystem ohne Kollabierungsfunktionen. Seminar München 1984.

[2] Buchholz, W.; A simplified version of local predicativity. Erscheint in Proceedings Proof Theory Meeting Leeds 1990.

[3] Buchholz, W.: A note on the ordinal analysis of KPM. Erscheint in Proceedings Logic Colloquium Helsinki 1990.

[4] Rathjen, M.: Ordinal notations based on a weakly Mahlo cardinal. Arch. Math. Logic 29 (1990) 249–263.

[5] Rathjen, M.: Proof-theoretic analysis of KPM. Arch. Math. Logic 30 (1991) 377–403.