

Theorie
der
D ä m m e r u n g s f a r b e n .

Von
E. von Lommel.

Theorie

der

Dämmungsfarbe.

Von

E. von Lommel.

Verlag von Julius Springer.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Theorie der Dämmerungsfarben wurde in ihren Grundzügen bereits vor mehr als dreissig Jahren veröffentlicht.¹⁾ Sie soll hier weiter ausgeführt und ergänzt werden, und zwar zunächst im ersten Abschnitt wie in der früheren Veröffentlichung in allgemein verständlicher Darstellung, sodann in den folgenden Abschnitten in analytischer Begründung. Insbesondere ist in letzteren Abschnitten auch die Theorie der durch Lichtflächen hervorgebrachten Beugungserscheinungen enthalten.

I.

1. Gehen Lichtstrahlen von einem sehr weit entfernten leuchtenden Punkt durch eine kleine (z. B. kreisförmige) in einem undurchsichtigen Schirm angebrachte Oeffnung, so entsteht auf einem in grosser Entfernung hinter der Oeffnung befindlichen Auffangschirm, oder in der Brennfläche einer hinter der Oeffnung aufgestellten (aplanatischen) Linse, oder auf der Netzhaut des für weite Entfernung akkommodierten Auges durch Interferenz der von der Oeffnung ausgehenden Elementarstrahlen das bekannte Beugungsbild (Fraunhofer'sche Beugungserscheinung). Auf einer durch den Bildpunkt O (Fig. 1), in welchem sich die direkt vom Lichtpunkt kommenden Strahlen vereinigen, in der Bildebene gezogenen geraden Linie wird der Verlauf der Lichtstärke für einfarbiges (z. B. rotes) Licht durch die Kurve r (Fig. 1) dargestellt, die man mit Schwerd als Durchschnitt eines mit seinem höchsten Mittelgipfel über O sich erhebenden „Lichtgebirges“ bezeichnen kann. Von dem Bilde O des Lichtpunktes aus sinkt die Lichtstärke nach beiden Seiten hin steil ab bis

¹⁾ Lommel, Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichts, Grunerts Archiv, Bd. 36, 1861. Theorie der Abendröte und verwandter Erscheinungen, Poggendorffs Annalen, Bd. 131, 1867.

zum ersten Minimum, wo sie Null ist, steigt sodann wieder bis zu einem zweiten im Vergleich mit dem Hauptmaximum in O viel schwächeren Maximum (die Lichtstärke beträgt hier noch nicht 2% von derjenigen in O), dann folgt beiderseits ein zweites Minimum ($= 0$), u. s. f., und das ganze Gebirge verliert sich in nach aussen immer niedriger werdenden Erhebungen allmählich in der Bildebene.

Bekanntlich sind die Entfernungen der gleichvielten Maxima und Minima von der Bildmitte (O) der Wellenlänge der angewandten homogenen Lichtsorte direkt, dem Durchmesser der Oeffnung umgekehrt proportional. Daraus folgt, dass die Lichtstärke einer jeden Farbe von dem Maximum in der Bildmitte ihrem ersten Minimum um so rascher zueilt, d. h. dass ihre Curve um so steiler abfällt, je kleiner die Wellenlänge ist (Fig. 1, Curve g , für Blaugrün).

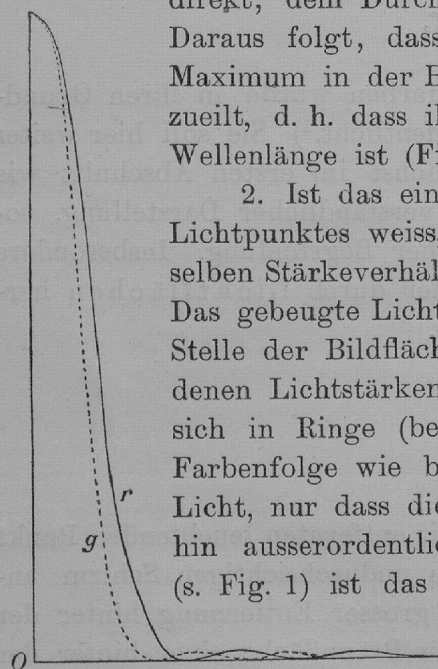


Fig. 1.

2. Ist das einfallende Licht weiss, so ist auch das Bild des Lichtpunktes weiss, weil hier sämtliche homogene Farben in demselben Stärkeverhältnis wie in der Lichtquelle selbst vertreten sind. Das gebeugte Licht dagegen erscheint gefärbt, und zeigt an jeder Stelle der Bildfläche die Mischfarbe aus allen dort mit verschiedenen Lichtstärken hintreffenden Farben. Die Mischfarben ordnen sich in Ringe (bei kreisförmiger Oeffnung) mit einer ähnlichen Farbenfolge wie bei den Newtonschen Ringen im durchgehenden Licht, nur dass die Lichtstärke der Farbenordnungen nach aussen hin ausserordentlich rasch abnimmt. Weitaus am intensivsten (s. Fig. 1) ist das gebeugte Licht rings um das Bild des Lichtpunktes, wo sich seine Lichtstärke stetig an die des letzteren anschliesst. Da von hier aus die Lichtstärke der kürzeren Wellen stärker abfällt als die der längeren, so müssen letztere in dem Farbengemisch dieser bei weitem hellsten Gegend des Beugungsbildes vorherrschen. Unmittelbar um den Lichtpunkt ist die Mischfarbe Orangegegelb¹⁾ von sehr geringer Sättigung und grosser Lichtstärke, dann aber geht sie durch Orange bei noch immer erheblicher Intensität in gesättigtes Rot, endlich durch Purpur in lichtschwaches Violett über, etwa dort wo die hellsten gelben Strahlen ihr erstes Intensitätsminimum erreichen, worauf bis zum Ende der ersten Farbenordnung mit geringer Lichtstärke noch Blau und Grün folgen. Die folgenden Farbenordnungen sind

¹⁾ Lommel, Berechnung von Mischfarben, Abhandl. der k. bayer. Akad. d. W., Bd. XVII, 1891. Wied. Ann., Bd. 43, 1891.

ungleich lichtschwächer als jener Teil der ersten Ordnung, in welchem das Rot vorherrscht. Es ergibt sich also, dass ein weisser Lichtpunkt, durch eine enge Oeffnung betrachtet, von einer lichtstarken Aureole gebeugten Lichts umgeben erscheint, das orangefarbene bis rote Farbentöne zeigt, auf welche dann nach aussen hin mit rasch abnehmender Intensität die weit lichtschwächeren übrigen Farbenringe folgen.

3. Ist ein dunkler Schirm von sehr vielen unter sich gleichen und ähnlich liegenden, aber ganz unregelmässig über den Schirm verteilten Oeffnungen durchbohrt, so sind die von allen Oeffnungen in derselben Richtung ausgehenden gebeugten Strahlenbündel an Intensität und Farbenmischung einander gleich. Sie werden zwar vermöge der Phasenunterschiede, die sie infolge ihrer Lagen gegen einander besitzen, unter sich interferieren; da aber wegen der Unregelmässigkeit der Anordnung und der grossen Anzahl der Oeffnungen in jeder Beugungsrichtung zwischen den Bündeln alle möglichen Phasenunterschiede und daher alle möglichen Grade der Uebereinstimmung und des Gegensatzes vorkommen, so ist das Ergebnis dieser Interferenz dasselbe, als ob die Bündel unter sich interferenzunfähig (unzusammenhängend, inkohärent) wären, und die Lichtstärke in dem entsprechenden Punkte des Beugungsbildes ist die Summe der Intensitäten, welche von den einzelnen Oeffnungen für sich in diesem Punkte hervorgebracht würden. Es ergibt sich demnach: das durch eine grosse Anzahl (N) Oeffnungen von gleicher Gestalt, Grösse und Lage erzeugte Beugungsbild unterscheidet sich von dem einer einzigen Oeffnung nur durch eine N mal so grosse Lichtstärke.¹⁾ Wir nennen diesen Satz nach seinem Urheber das Verdetsche Prinzip.

4. Vergleichen wir mit dem Beugungsbild einer kleinen Oeffnung oder einer Gruppe solcher dasjenige eines gleichgestalteten dunklen Schirmchens oder einer entsprechenden Schirmchengruppe, so gelangen wir zu dem Babinetschen Prinzip²⁾: die Beugungserscheinung, welche von einem dunklen Schirmchen oder einer Gruppe dunkler Schirmchen hervorgebracht wird, ist identisch mit derjenigen einer gleichgestalteten Oeffnung oder Gruppe von Oeffnungen, mit Ausnahme des Bildes der Lichtquelle selbst, in welchem die direkten Strahlen sich vereinigen. Hier sammelt sich nämlich alles Licht, welches von den Schirmchen nicht aufgehalten wird.

Die Wirkung eines durchbohrten Schirmes unterscheidet sich also von der-

¹⁾ Vergl. u. II. Abschn. 22.

²⁾ Vergl. u. II. Abschn. 19. Ein elementarer Beweis des Babinetschen Prinzips s. in den oben citierten Abhandlungen, Grunerts Archiv, Bd. 36, 1861, und Pogg. Ann., Bd. 131, 1867.

jenigen einer Schirmchengruppe, welche gleichsam das Negativ von jenem ist, dadurch, dass im ersten Fall sowohl das direkte als das gebeugte Licht von den lichtdurchlassenden Stellen des Schirmes abhängt, im zweiten Falle dagegen das direkte Licht von den hellen, das gebeugte Licht von den dunklen Stellen. In jenem Falle schliesst sich die Intensität des gebeugten Lichtes stetig an die des direkten an (Fig. 1), in diesem Falle aber findet ein solcher Anschluss nicht statt, sondern das Lichtgebirge zeigt einen schroffen sprungweisen Uebergang zu seinem Mittelgipfel.

Vermehrt man die Oeffnungen eines dunklen Schirmes, so gewinnt sowohl das direkte als das gebeugte Licht an Stärke proportional der Anzahl der Oeffnungen; vermehrt man aber die Schirmchen einer Schirmchengruppe, so wird das gebeugte Licht verstärkt, das direkte aber geschwächt.

5. Ist die Lichtquelle eine leuchtende Fläche, so erscheint in der Bildebene das direkte Bild eines jeden ihrer Punkte an seinem Orte von dem Beugungsbilde umgeben, das von der Beschaffenheit des beugenden Schirmes bedingt ist. Da die Schwingungen der verschiedenen Punkte einer leuchtenden Oberfläche von einander unabhängig erfolgen (oder „inkohärent“ sind), so können sie nicht mit einander interferieren, sondern an jeder Stelle des resultierenden Beugungsbildes summieren sich die dahin treffenden Intensitäten der Einzelbilder der unzählig vielen Punkte der Lichtquelle.

Ist die Lichtfläche weiss, so fügt sich zu dem ungebeugten weissen Lichte des Bildes eines jeden ihrer Punkte das farbige gebeugte Licht der übrigen Punkte hinzu. Dabei sind die Nachbarpunkte, deren lichtstarke Aureolen über den betrachteten Bildpunkt übergreifen, bei weitem die wirksamsten. Da in dem Farbgemisch dieser Aureolen die längeren Wellen vorherrschen, so erscheint dieser Punkt nicht mehr weiss, sondern zeigt eine, wenn vielleicht auch nur unmerkliche, rötliche Nüance.

Eine weisse Lichtfläche, durch einen beugenden Schirm betrachtet, erscheint daher nicht mehr weiss, sondern in ihrer ganzen Ausdehnung herrschen die Farben grösserer Wellenlänge vor.¹⁾ Selbst die Mitte der Lichtscheibe ist nicht mehr weiss, sondern schwach gerötet; nach dem Rande der Lichtfläche hin nimmt die Rötung zu, und noch über den Rand hinaus erstreckt sich die rötliche Färbung, mindestens so weit, als die rötlichen Aureolen der Randpunkte reichen. Dann erst folgen die weit lichtschwächeren übrigen Farbenordnungen.

¹⁾ Den analytischen Beweis dieses Satzes s. u. Abschn. III. 33, und Abschn. IV. 47.

Dieser Satz gilt sowohl für eine einzelne Oeffnung, als auch für eine beliebige Anzahl willkürlich verteilter Oeffnungen oder Schirmchen, und namentlich auch dann, wenn die Oeffnungen oder Schirmchen nicht vollkommen unter sich gleich sind, wenn sie nur Aureolen von nicht zu verschiedenen Durchmesser hervorbbringen.

Die rötliche Färbung ist freilich sehr schwach, d. h. von sehr geringer Sättigung, weil mit sehr viel Weiss gemischt. Sie ist gleichwohl wahrnehmbar. Eine weisse von der Sonne bestrahlte Wolke z. B. durch einen engen Spalt oder durch irgend eine kleine Oeffnung betrachtet, erscheint leise rötlich gefärbt.

6. Auf einen beugenden Schirm (Schirmchengruppe) folge in irgend einer Entfernung ein ihm paralleler zweiter Schirm. Dann erleidet die am ersten Schirm gebeugte Welle am zweiten nochmalige Beugung. Die von jedem einzelnen Lichtpunkt kommenden am ersten und am zweiten Schirm gebeugten Strahlen müssen mit einander interferieren. Aus dieser „Interferenz des gebeugten Lichts“¹⁾ gehen jene interessanten Lichterscheinungen hervor, welche schon von Newton entdeckt und als „Farben dicker Platten“ bezeichnet wurden (Newtonsche Staubringe, Whewellsche und Queteletsche Streifen). Derart regelmässige Erscheinungen kommen jedoch nur zu Stande, wenn die beiden beugenden Schirme einander völlig gleich sind (Stokesches Prinzip). Dies wird am vollkommensten erreicht, wenn der eine Schirm das Spiegelbild des anderen ist, oder wenn man nach K. Exner²⁾ zwei identische Photographien einer und derselben Schirmchengruppe benutzt. Es erweisen sich nämlich erfahrungsgemäss nur solche Strahlenpaare interferenzfähig (kohärent) und besitzen für die nämliche Beugungsrichtung denselben Gangunterschied, welche an entsprechenden Stellen der beiden identischen Schirme gebeugt wurden. Ist diese Bedingung der Identität der Schirme nicht erfüllt, wie im vorliegenden Falle angenommen wird, so kommen zwischen den am ersten und am zweiten Schirm gebeugten von demselben Lichtpunkt kommenden Strahlenbündeln alle möglichen Gangunterschiede vor, und der Erfolg ihrer Interferenz ist derselbe, als ob diese Bündel unter sich nicht interferenzfähig (inkohärent) wären, d. h. sie addieren einfach ihre Intensitäten. Man kann auch sagen, das durch den ersten Schirm erzeugte Beugungsbild spiele dem zweiten Schirm gegenüber die Rolle einer Lichtfläche.

7. Die am ersten Schirm gebeugten Strahlen werden hienach selbstverständlich am zweiten Schirm nochmals gebeugt. Zu den als Farben dicker

¹⁾ Lommel, Ueber die Interferenz des gebeugten Lichts, Pogg. Ann., Ergänzungsbd. VIII, 1875.

²⁾ Wiener Sitzungsber., Bd. 72, 1875.

Platten bezeichneten Interferenzerscheinungen (wo unter „dicker Platte“ der zwischen den beiden parallelen Schirmen enthaltene Zwischenraum zu verstehen ist) tragen aber erfahrungsgemäss nur diejenigen gebeugten Strahlen in merklichem Grade bei, welche durch je einmalige Beugung am ersten und am zweiten Schirm unmittelbar aus direkt von der Lichtquelle her einfallenden Strahlen entstanden sind. Denn es lässt sich von jenen Erscheinungen erschöpfende Rechenschaft geben, wenn man nur die an jedem Schirm einmal gebeugten Strahlen in Betracht zieht. Hieraus darf man schliessen, dass die Lichtstärke der wiederholt gebeugten Strahlen im Vergleich mit derjenigen der nur einmal gebeugten Strahlen so gering ist, dass sie daneben ausser Acht gelassen werden kann.

Dasselbe muss auch gelten, wenn, wie wir hier annehmen, die beiden Schirme ungleich (sozusagen unter sich inkohärent) sind; auch hier kommen für die Beugung am zweiten Schirm nur die Strahlen in Betracht, welche als direkte Strahlen durch den ersten Schirm hindurchgegangen sind, oder als Lichtquelle für den zweiten Schirm braucht nicht das ganze durch den ersten Schirm entworfene Beugungsbild, sondern nur das durch die Beugung am ersten Schirm modifizierte Bild der Lichtquelle selbst berücksichtigt zu werden. Das hievon durch den zweiten Schirm gelieferte Bild gilt ebenso als Lichtquelle für einen etwaigen dritten Schirm, u. s. f.

8. Eine Aufeinanderfolge zahlreicher beugender Schirme ist nun in unserer Atmosphäre gegeben. In ihren unteren Schichten schwebt eine Menge kleiner Körperchen, mineralische und organische Stäubchen, die Kohlentheilchen des Rauches, feine Wassertröpfchen, welche an den Staubkernen aus dem Wasserdampf sich niederschlagen, u. s. w. Die Körperchen brauchen, um beugend zu wirken, keineswegs vollkommen undurchsichtig zu sein; es genügt, dass sie weniger Licht durchlassen, als an ihnen vorbeigeht. Wir dürfen ferner annehmen, dass bei klarem Himmel in derselben Höhenschicht die in der Raumeinheit enthaltenen Teilchen merklich von gleicher Grösse und in gleicher Anzahl vorhanden sind, und dass sie zwar regellos, aber doch derart gleichmässig verteilt sind, dass ihre gegenseitigen kleinsten Abstände von einem Mittelwert nur wenig abweichen. Die regellose Verteilung wird schon dadurch bedingt, dass die Körperchen im Allgemeinen stets in Bewegung sind (durch Herabsinken infolge der Schwere, durch Luftströmungen) und daher ihre Gruppierung von Augenblick zu Augenblick ändern. Nehmen wir ferner an, dass keine Dimension eines Teilchens vor seinen andern Dimensionen merklich vorherrsche, so können wir die Körperchen als kleine Kugeln betrachten. Ein solches Kügelchen wirkt aber auf eine Lichtwelle in derselben Weise beugend,

wie seine in der Richtung der einfallenden Strahlen in die Schirmebene geworfene Projektion, also wie ein kreisförmiges Schirmchen von demselben Durchmesser (Lykopodiumringe).

Durch das so beschaffene Mittel denken wir uns senkrecht zur Richtung der einfallenden Strahlen (z. B. der Sonnenstrahlen) Ebenen gelegt, welche gleichweit und zwar um die mittlere Distanz zweier Körperteilchen von einander abstehen. Solche Teilchen, welche etwa zwischen zwei benachbarte Ebenen zu liegen kämen, denken wir uns in der Richtung der einfallenden Lichtstrahlen mit ihren Mittelpunkten in die nächstliegende Ebene verschoben oder daselbst durch ihre Projektionen ersetzt. Hiedurch wird an der Gesamtwirkung nichts geändert, da ja wegen der regellosen Verteilung der Körperchen jede so gebildete Schirmchengruppe von der andern verschieden (inkohärent) ist und daher die Interferenz der an ihnen gebeugten Strahlen ausgeschlossen bleibt.

9. Steht die Sonne hoch über dem Horizont, so haben ihre Strahlen einen verhältnismässig kurzen Weg vorzugsweise in den höheren nahezu staubfreien Schichten der Atmosphäre zu durchlaufen, und die Schirmchengruppen, welche man senkrecht zu den Strahlen bilden kann, sind nicht zahlreich genug und mit beugenden Schirmchen zu wenig dicht besetzt, um eine merkliche Wirkung hervorzubringen. Die Sonnenscheibe erscheint daher weiss. Steht aber die Sonne dem Horizont nahe, so durchlaufen ihre Strahlen in den unteren Schichten der Atmosphäre, welche mit beugenden Körperchen in nach unten wachsender Menge erfüllt sind, einen um so längeren Weg, je tiefer die Sonne sinkt; um so grösser wird also die Anzahl der aufeinanderfolgenden Schirme und die Menge der in jedem enthaltenen beugenden Teilchen. Jeder Schirm aber wirkt auf das durch ihn gehende Licht in derselben Weise modifizierend wie der vorhergehende, d. h. jeder schwächt nochmals in demselben Verhältnis die Farben kürzerer Wellen gegenüber den Farben längerer Wellen. Diese Schwächung erfolgt also, wie man leicht erkennt, nach dem bekannten Absorptionsgesetz. Wie unmerklich bei einem einzigen Schirm die rötliche Färbung der Lichtscheibe auch sein mag, so kann sie, wie man sieht, infolge Hinzutretens weiterer Schirme, d. h. beim Durchgang der Strahlen durch den mit unzähligen Stäubchen erfüllten Luftraum, vom blassen Orange bis zum tiefen Rot sich steigern.

Diese Rötung findet jedoch nur bei Lichtflächen statt; das Bild eines einzelnen weissen Lichtpunktes bleibt immer weiss. Während die Scheiben der Sonne und des Mondes am Horizont orangerot leuchten, erscheint ein weisser Fixstern auch bei tiefstem Stande weiss. Entfernte weisse oder hellfarbige Flächen, wie die Felswände, Gletscher und Firnfelder der Alpen, dem

Horizont nahe Wolken, zeigen, von der am gegenüberliegenden Horizont auf- oder untergehenden Sonne beleuchtet, oft eine tiefrote Färbung, während eine in der Nähe befindliche weisse Mauer nur orangerot gefärbt erscheint. Das von jenen entfernten Gegenständen diffus reflektierte bereits gerötete Licht muss nämlich bis zu unserem Auge nochmals die beträchtliche dazwischen liegende Luftschicht durchsetzen, und erfährt nochmals die beugende Wirkung der darin schwebenden Körperchen (Alpenglühn).

10. Das Bild der Lichtscheibe erscheint am Rande scharf begrenzt. Die Lichtstärke geht hier nicht stetig, sondern in jähem Absturz zu der weit schwächeren der umkränzenden Farbenringe über. Am hellsten ist hier noch der rötliche Schein, der das Bild der Lichtscheibe unmittelbar umschliesst. Dann folgt eine lichtschwache blasse Zone, in welcher die kurzwelligen Strahlen wieder mehr zur Geltung kommen; sie ist umgeben von einem wieder helleren und lebhafter gefärbten roten Ring, dem ersten Maximum der roten Strahlen entsprechend, auf welchen, von ihm getrennt durch eine fahle Zone, ein zweiter lichtschwächerer roter Ring, das zweite Maximum des Rot, folgt u. s. f. Die Erscheinung ist, abgesehen von den Dimensionen, mit den Fraunhoferschen Ringen (z. B. Lycopodiumringen) vergleichbar, wenn man in dem einfallenden Licht die Strahlen kürzerer Wellen (etwa durch gelbes Glas) mehr und mehr abfiltriert denkt.

Das atmosphärische Beugungsphänomen lässt sich jedoch nicht in so unabänderliche Regeln fassen, wie die eben genannte Beugungserscheinung. Es ändert sich von Tag zu Tag nach der jeweiligen Beschaffenheit der Atmosphäre, es ändert sich auch bei jedem Auf- oder Untergang von Minute zu Minute. Solange die Sonne noch höher steht, ist das gebeugte Licht mit Ausnahme des die Sonne zunächst umgebenden hellen gelblich weissen Scheines neben dem blendenden Glanze des Gestirnes unter gewöhnlichen Umständen (s. u. 12) kaum wahrzunehmen, und auch jener Schein deutlich nur dann, wenn man das Auge vor den direkten Strahlen der Sonne schützt. Wenn die Sonne tiefer sinkt, wird das Gelb der Aureole immer gesättigter und geht in Orange über. Darüber erscheint eine dunklere gelbliche bis grünliche Zone. Erst nach Untergang der Sonne erscheint das erste rote Maximum, das durch von Bezold¹⁾ entdeckte und von ihm benannte erste Purpurlicht.

Diese Phasen der Erscheinung treten hienach nicht gleichzeitig auf, sondern sie entwickeln sich nach einander bei allmählich sinkender Sonne. Indem nämlich die Sonne tiefer sinkt, müssen ihre Strahlen einen immer

¹⁾ von Bezold, Beobachtungen über die Dämmerung, Pogg. Ann., Bd. 123, 1864.

längeren Weg in den unteren Schichten der Atmosphäre zurücklegen, die zugleich nach unten hin immer dichter mit beugenden Körperchen erfüllt ist. Hierbei wird das direkte Licht, also der Glanz der Sonnenscheibe selbst, geschwächt, das gebeugte Licht aber verstärkt (s. oben 4), und die Zonen des gebeugten Lichts werden nach Untergang der Sonne der Reihe nach wahrnehmbar, nicht blos weil die direkten Strahlen durch den Erdball abgeblendet sind, sondern auch weil ihre Lichtstärke absolut zunimmt. Die an und für sich schwächeren entfernteren Ringe treten erst später sichtbar hervor, weil sie einer grösseren Verstärkung bedürfen, um die Grenze der Wahrnehmbarkeit zu überschreiten. Da hierbei auch die Rötung fortwährend zunimmt, müssen die roten Maxima sich am stärksten entwickeln, und zwar tritt nicht nur das erste rote Maximum als erstes Purpurlicht in die Erscheinung, sondern später unter günstigen Umständen auch das zweite rote Maximum, das zweite Purpurlicht (von Bezold).

Nicht nur die Dichte der beugenden Körperchen, d. i. ihre Anzahl pro Kubikeinheit, nimmt nach unten hin zu, sondern auch ihre durchschnittliche Grösse, da ja die grösseren Körperchen bei ihrem Herabsinken infolge der Schwere einen verhältnismässig kleineren Luftwiderstand erleiden und sich daher in den niedrigeren Schichten in relativ grösserer Zahl anhäufen. Auch durch diesen Umstand wird eine allmähliche Aenderung der Erscheinung herbeigeführt. Je grösser der Durchmesser der beugenden Körperchen, desto kleiner wird der Durchmesser der Beugungsringe. Je tiefer demnach die Sonne sinkt, desto kleiner wird der Radius des Bogens, der das Purpurlicht nach oben hin begrenzt; infolge dessen scheint das Purpurlicht rascher hinabzusinken als die Sonne selbst.

Die gebeugten Strahlen sind in dem mit beugenden Körperteilchen erfüllten Luftraum objektiv vorhanden, ebensogut wie die direkten Strahlen; sie beleuchten die Körperchen mit ihrem farbigen Licht, das von ihnen diffus zurückgeworfen wird, ebenso wie das weisse Licht der hochstehenden Sonne die Atmosphäre beleuchtet. Die im Purpurlicht öfter wahrgenommenen bläulichen Dämmerungsstrahlen sind augenscheinlich nichts anderes als die Schlagschatten von tiefstehenden oder unter dem Horizont befindlichen Wolken, welche den gebeugten Strahlen in den Weg treten und die rosige Beleuchtung der dahinter liegenden Teilchen hindert. Jeder der zahllosen beugenden Schirme, welche wir senkrecht zu den direkten Strahlen angenommen haben, ist zugleich ein transparenter Auffangschirm, auf welchem sich das durch die vorhergehenden Schirme erzeugte Beugungsbild gleichsam abmalt, und so nicht nur für die folgenden Schirme, sondern auch für die Wolken und die irdischen

Gegenstände zur Lichtquelle wird, welche dieselben mit diffusem Lichte beleuchtet. Man kann diese räumliche Entwicklung eines Beugungsbildes nachahmen, wenn man das durch eine mit Bärlappsamen bestreute Glasplatte gebeugte Licht durch eine Kufe mit Spiegelglaswänden gehen lässt, die getrübt (etwa durch einige Tropfen alkoholischer Mastixlösung) Wasser enthält. Auch die „Dämmerungsstrahlen“ lassen sich darstellen, wenn man dunkle Körper auf den Weg der gebeugten Strahlen bringt.

11. Während diese Vorgänge am Westhimmel sich abspielen, beobachtet man auf den Felswänden und schneebedeckten Gipfeln einer gegenüberliegenden Gebirgskette in derselben Reihenfolge ihren Widerschein. Nachdem die gerötete Sonnenscheibe nebst ihrer rötlichen Aureole, welche zu dem primären Alpenglühen Anlass gaben, unter den Horizont hinabgetaucht ist, entwickelt sich am Westhimmel die dunklere Zone, innerhalb welcher die brechbareren Farben die Oberhand gewinnen; von diesem Licht beleuchtet erscheinen die Berge grau und fahl, mit einem Stich in Grünlichgelb — die Leichenfarbe (*teinte cadavéreuse*). Hierauf entwickelt sich das erste Purpurlicht und übergiesst die Gipfel von neuem mit rötlichem Schein — das bekannte Nachglühen (*resurrection, recoloration*). „Das Nachglühen tritt immer gleichzeitig mit dem ersten Purpurlicht auf und ist nur durch dasselbe hervorgebracht“ (von Bezold a. a. O.). Indem auch das erste Purpurlicht hinabsinkt, verklingt allmählich die rötliche Färbung und die Berge umhüllen sich mit einem aschgrauen Ton, entsprechend der folgenden dunklen Zone. Hiemit ist das Farbenspiel in der Regel beendet, denn die folgenden Phasen der Erscheinung am Westhimmel sind gewöhnlich zu lichtschwach, um noch einen merklichen Widerschein hervorzurufen. Doch hat von Bezold manchmal ein zweites freilich sehr schwaches Nachglühen beobachtet, welches dem zweiten Purpurlicht entspricht. — Bei Sonnenaufgang treten selbstverständlich dieselben Erscheinungen auf, nur in umgekehrter Reihenfolge.

12. Unter aussergewöhnlichen Umständen wird das erste rote Maximum, welchem das erste Purpurlicht entspricht, auch bei hochstehender Sonne als Bishopscher Ring gesehen, nämlich wenn auch die höheren Schichten der Atmosphäre mit beugenden Körperchen erfüllt sind. Solche Umstände traten z. B. ein in den Jahren 1883 bis 1886, wo die Atmosphäre bis in grosse Höhen hinauf nebelig getrübt erschien, und zwar, wie man Grund hat anzunehmen, infolge eines heftigen Ausbruchs des Vulkans der Insel Krakatau in der Sundastrasse, welcher feinen vulkanischen Staub bis in die höchsten Regionen der Atmosphäre schleuderte, der sich dann, durch Luftströmungen fortgeführt, nach Westen und Nordwesten hin fast rings um die Erde ver-

breitete. Während dieser Periode „atmosphärisch-optischer Störung“ gewannen nicht nur die Erscheinungen der Morgen- und Abenddämmerung eine ungewöhnliche Pracht und Stärke, so dass sogar das zweite Purpurlicht mit hellem Glanze strahlte, sondern selbst um Mittag erschien die Sonne von dem oben genannten (Bishopschen) Beugungsring umgeben.

13. Die abnormen Färbungen der Sonnenscheibe (blaue und grüne Sonne), welche zuweilen unter aussergewöhnlichen Umständen (z. B. während der oben erwähnten Periode atmosphärisch-optischer Störung) beobachtet werden, lassen sich vielleicht durch folgende Ueberlegung erklären. Betrachtet man durch eine behauchte Glasplatte, auf der sich aus dem Hauche zahlreiche kleine Wassertröpfchen niedergeschlagen haben, einen weissen Lichtpunkt, so erscheint derselbe zunächst von einem völlig dunklen Raum umgeben, der von einem glänzenden Farbenring umschlossen wird, dessen Farben, violett innen, rot aussen, in der Reihenfolge des Spektrums angeordnet sind. Wenn sich die Behauchung durch Verdunsten allmählich verliert, so verblassen die Farben, ändern aber dabei ihren Abstand vom Mittelpunkt nicht, sondern jede Farbe verschwindet an ihrer Stelle. Daraus geht hervor, dass diese Farbenringe nicht wie die Fraunhoferschen Ringe von der Grösse der beugenden Körperchen, sondern von deren gegenseitiger Gruppierung abhängig sind; beim Verdunsten nämlich bleibt jedes Tröpfchen, indem es nach und nach kleiner wird, an seinem Ort, wie man unter dem Mikroskop leicht beobachten kann. Donle¹⁾ hat diese vergängliche Erscheinung dadurch dauernd nachgeahmt, dass er Glasplatten durch Salmiakdämpfe beschlagen liess, wodurch sich auf den Platten ein äusserst zarter weisslichgrauer Niederschlag bildete. Solche Platten zeigen, wenn man eine punktförmige Lichtquelle durch sie betrachtet, schöne und regelmässige farbige Höfe, welche in jeder Beziehung mit der Ringerscheinung behauchter Platten übereinstimmen. Eine derartige Platte zeigt, unter dem Mikroskop betrachtet, eine grosse Anzahl wie Federbärte aussehender Krystallanhäufungen in unregelmässiger Verteilung. Diese Federchen nun bilden Gitter mit gleichgrossen Zwischenräumen, deren jedes senkrecht zu den Gitterstäben zu beiden Seiten des Lichtpunktes Beugungsspektren erzeugen muss. Da nun auf kleinem Raume sehr viele solche kleine Gitter in allen möglichen Orientierungen verteilt sind, so müssen Beugungsspektren nach allen Richtungen hin entstehen, von welchen die ersten und lichtstärksten Spektren sich zu einem glänzenden Ring, zu einem kreisförmigen Gitterspektrum, zusammen-

¹⁾ W. Donle, Ueber Fraunhofersche Ringe und die Farbenercheinungen behauchter Platten. Wied. Ann., Bd. 34, 1888.

schliessen, das durch einen dunklen Zwischenraum von dem weissen Bilde des Lichtpunkts getrennt ist, und an seinem inneren Rande violett, am äusseren Rande rot gefärbt erscheint. Auch bei einer gleichmässig behauchten Platte entspricht die Anordnung der beugenden Teilchen einer Anhäufung von nach allen Richtungen orientierten Gittern, weil die Abstände der Wassertröpfchen von einander überall nahezu gleich sind und während der Verdunstung auch gleich bleiben.

Betrachtet man durch eine solche Platte eine Lichtfläche, so erzeugt jeder Lichtpunkt der Fläche seine eigenen Farbenringe. Ist das Verhältnis der Durchmesser der Ringe zu demjenigen der Lichtfläche derart, dass die farbigen Aureolen noch zum Teil auf die Lichtfläche übergreifen, so werden sich in jedem ihrer Punkte, wo dies geschieht, unzählig viele Aureolen übereinander lagern, ihr farbiges Licht dem direkten weissen Lichte der Lichtquelle hinzufügen und den Punkt gefärbt erscheinen lassen. Ein solches Uebergreifen findet noch statt, solange der Halbmesser des dunklen Raumes um jeden Lichtpunkt kleiner ist als der Durchmesser der Lichtscheibe.

Betrachten wir beispielsweise die Sonne als Lichtquelle, und nehmen wir an, die Gitterkonstante, d. i. die Entfernung zweier benachbarter Gitterstäbchen, betrage etwas mehr als 0,1 mm, so würde der vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe erzeugte Farbenring mit seinem grünen Teil gerade auf den Sonnenrand, mit Blau und Violett innerhalb, mit Rot und Gelb aber ausserhalb fallen. Dann kann aber nach dem Mittelpunkt der Scheibe nur grünes, blaues und violettes gebeugtes Licht gelangen, nicht aber gelbes und rotes; der Mittelpunkt erscheint daher bläulichgrün gefärbt. Nach einem Punkte des Randes der Scheibe gelangen zwar alle Farben des Gitterspektrums, jedoch die von kürzerer Wellenlänge in vorwiegender Menge, und noch mehr gilt dies von Punkten der Scheibe, die zwischen Mitte und Rand liegen, und zwar um so mehr, je näher der Mitte. Die Sonnenscheibe müsste also unter den vorausgesetzten Umständen in ihrer ganzen Ausdehnung farbig erscheinen in Farbtönen, in welchen die kürzeren Wellen um so mehr vorherrschen, je mehr man sich der Mitte nähert.

Es fragt sich nun, ob Bedingungen ähnlich den soeben angenommenen in unserer Atmosphäre eintreten können. Die feingefiederten Eispadeln, aus welchen die hochschwebenden Federwolken bestehen und die man als Strahlen der Schneesternchen leicht beobachten kann, gleichen den oben erwähnten Salmiakkryställchen und müssen wie diese gitterähnlich wirken. Salmiak gehört zu den vulkanischen Produkten; es können daher sehr wohl solche federartige Kryställchen in dem vulkanischen Staub, dem man jene atmosphärisch-optische

Störung zuschreibt, vorhanden gewesen sein. Auch die feinen Wassertröpfchen eines sehr gleichmässigen homogenen Nebels, dessen Teilchen gleiche Abstände unter sich bewahren, obwohl die einzelnen Tröpfchen an Grösse ungleich sind und teils durch Verdunstung ab- teils durch Kondensation zunehmen, können ähnlich wie die Tröpfchen einer behauchten Glasplatte wirken. Man begreift also, dass unter gewissen selten eintretenden Umständen auch eine blaue oder grüne Sonne gesehen werden kann, besonders, wenn man bedenkt, dass die Strahlen nicht nur eine einzige Schirmchengruppe, welche für sich vielleicht nur eine unmerkliche Färbung hervorbringen würde, zu durchlaufen haben, sondern eine grosse Anzahl von Schirmchengruppen hinter einander, wobei, wie oben gezeigt wurde, das direkte Licht geschwächt, das gebeugte farbige Licht aber verstärkt und die Sättigung der Farbe erhöht wird.

14. Angeregt durch die glänzenden Farbenerscheinungen während der bereits mehrfach erwähnten Periode atmosphärisch-optischer Störung hat J. Kiessling¹⁾ 1884 Versuche angestellt über Beugung des Lichts in Staub und Nebel, welchen er in seinem „Nebelglühapparat“ künstlich erzeugte. Diese interessanten Versuche sind in seinem trefflichen Werke „Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen“²⁾ eingehend beschrieben. Einige seiner Hauptergebnisse hat Kiessling in folgenden Worten zusammengefasst:

„Eine azurblaue Färbung der Sonne kann sowohl durch feinverteilte feste Stoffe von rauchartiger Beschaffenheit als auch durch Wasserdampf hervorgerufen werden.“³⁾

„Beim Durchgang von zerstreutem Licht durch geschichteten Rauch entstehen Farben, welche nicht allein auf Absorption zurückgeführt werden können, sondern wahrscheinlich zum grössten Teil auf Lichtbeugung beruhen.“

„Beugungserscheinungen mit glänzenden Farben, namentlich farbige Ringe von erheblicher Breite, lassen sich nur durch homogene Wassernebel herstellen. Die Reinheit und Stärke der Beugungsfarben ist ausschliesslich von der Uebereinstimmung in der Grösse der lichtbeugenden Stoffteilchen abhängig.“

„Eine mit dem Bishopschen Ring übereinstimmende Beugungserscheinung lässt sich sowohl durch feste Sublimationsniederschläge als durch künstlich erzeugten feuchten Nebel darstellen.“

¹⁾ J. Kiessling. Die Dämmerungserscheinungen im Jahre 1883 und ihre physikalische Erklärung. Hamb. u. Leipz. 1885.

²⁾ J. Kiessling, Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen zur Erklärung der nach dem Krakatau-Ausbruch beobachteten atmosphärisch-optischen Störung. Hamb. u. Leipz. 1888.

³⁾ Die blaue Färbung der Sonne wurde insbesondere auch erhalten beim Durchgang des Sonnenlichts durch einen grossen Glaskolben, in welchem durch Zusammentreffen von Salzsäuredämpfen mit Ammoniak Salmiaknebel entstanden war.

Später hat Battelli¹⁾ sowohl die Beobachtungen von Bezolds über die Dämmerung als auch die Versuche Kiesslings in grösserem Massstabe wiederholt und bestätigt; er gelangt auf Grund seiner Ergebnisse wie Kiessling zu der Ansicht, dass die Dämmerungsfarben im wesentlichen auf Beugung beruhen.

15. Andere Theorien suchen in erster Linie das Blau des Himmels zu erklären, und betrachten sodann das Abendrot als die hiezu komplementäre Farbe. Clausius²⁾ nimmt an, dass die auch bei klarem Himmel in der Luft schwebenden Nebelkörperchen Wasserbläschen seien, deren Häutchen durch Interferenz Farben dünner Blättchen hervorbringen, und zwar im reflektierten Licht das Blau erster Ordnung als Himmelblau, im durchgelassenen Licht das komplementäre Orange als Abendrot. Die Existenz von Nebelbläschen ist jedoch keineswegs erwiesen und sogar unwahrscheinlich, da alle Versuche dafür sprechen, dass bei der Kondensation des Wasserdampfes stets massive Tröpfchen entstehen.

Die Theorie von Brücke³⁾ gründet sich auf die Fresnelschen Gesetze der Zurückwerfung und Brechung des Lichts, wonach in den zurückgeworfenen Strahlen die brechbareren Farben, in den durchgelassenen die weniger brechbaren vorherrschen müssen. Es würden demnach die in der Luft schwebenden Dunstkörperchen dem an ihnen wiederholt reflektierten Licht eine blaue, dem durchgelassenen eine gelbe bis rote Färbung verleihen. Diese Theorie gibt jedoch von den Polarisationsverhältnissen des blauen Himmelslichtes keine vollständig befriedigende Rechenschaft.

Dagegen gibt die Theorie von Lord Rayleigh⁴⁾ sowohl von dem Himmelsblau als von der atmosphärischen Polarisation eine zufriedenstellende Erklärung. Sie gründet sich auf die Beugung des Lichts an feinen Körperteilchen, deren Dimensionen kleiner sind als die kleinsten Lichtwellen. Für so kleine Körperchen gelten die gewöhnlichen Gesetze der Beugung, welche wir oben für beträchtlich grössere Körperchen anzuwenden hatten, nicht mehr, sondern aus der Anwendung des Huygensschen Prinzips auf diesen Fall ergibt sich, dass das einfallende Licht an den Teilchen zurückgestrahlt wird mit einer Intensität, welche der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional ist. Da hienach in diesem diffundierten Licht die Strahlen kürzerer Wellenlänge überwiegen, so erklärt sich das Blau des Himmels, und zwar stimmt die

¹⁾ Battelli, Sul crepuscolo. Nuovo Cimento, Serie III, Bd. 29, 1891.

²⁾ Clausius, in Grunert, Beiträge zur meteorologischen Optik. I. Teil, 4. Heft, 1850.

³⁾ Brücke, Ueber die Farben, welche trübe Medien zeigen, Pogg. Ann., Bd. 88, 1852.

⁴⁾ J. W. Strutt (Lord Rayleigh), On the light from the sky, its polarization and colour. Philos. Mag. [IV], Bd. 41, 1871.

spektrophotometrische Messung seiner Zusammensetzung mit der aus der Theorie berechneten gut überein. Das durch einen mit solchen Körperchen erfüllten Raum durchstrahlende Licht erleidet sonach auf seinem Wege eine stärkere Einbusse an brechbareren Strahlen als an weniger brechbaren, und erscheint deshalb an letzteren verhältnismässig reicher, d. h. es zeigt eine gelblichröthliche Färbung, deren Sättigung beim Durchgang durch immer dickere Schichten des getrübten Mittels nach dem Absorptionsgesetz erhöht wird. Die Rayleighsche Theorie vermag jedoch von der Mannigfaltigkeit der Dämmerungsfarben, von ihrem periodischen Verhalten (Purpurlicht u. s. w.), von dem Bishopschen Ring etc. keine Rechenschaft zu geben, wie die oben skizzierte Theorie es thut. Beide Theorien stehen sich aber keineswegs entgegen, sondern ergänzen sich gegenseitig. Während jene nur die Wirkung von (hypothetischen) Körperteilchen berücksichtigt, deren Dimensionen hinter der kleinsten Wellenlänge zurückbleiben, nimmt diese vorzugsweise auf die unzweifelhaft vorhandenen grösseren Staubeilchen Rücksicht, welche noch regelmässige Beugungserscheinungen hervorbringen. Auf jene äusserst kleine Teilchen dürfte das Himmelblau und vielleicht die schwache rötliche Färbung zurückzuführen sein, die man auch unter Tags in der Nähe des Horizonts bemerkt, und welche abgesehen von viel beigemischemt weissen Licht zum Himmelsblau komplementär sein mag; auf diese grösseren Stäubchen aber die prachtvollen vorwiegend roten Farbtöne des Morgen- und Abendhimmels, die schon wegen ihrer Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit zu dem einförmigen Blau des Himmels unmöglich komplementär sein können.

II.

16. Eine von einem unendlich fernen Lichtpunkt kommende Schaar paralleler ebener Lichtwellen treffe auf einen von beliebigen Oeffnungen durchbrochenen, sonst undurchsichtigen, beugenden Schirm; die Ebene des Schirms werde zur xy -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, dessen positive z -Axe gegen den Beobachter gerichtet ist. Herrscht in der durch den Koordinatenanfang gelegt gedachten einfallenden Wellenebene zur Zeit t die Phase $\frac{2\pi}{\lambda} Vt$ (wo λ die Wellenlänge, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet), und sind l, m, n die Cosinus der Winkel, welche die Wellennormale mit den Axen der x, y, z bildet, so besitzt der Punkt (x, y) der Schirmebene, welcher von der einfallenden Wellenebene um $lx + my$ absteht, die Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda} (Vt - lx - my).$$

Dem Huygensschen Prinzip zufolge sendet jeder Punkt (x, y) nach allen Richtungen hinter dem Schirm Elementarstrahlen aus. Die von den verschiedenen Punkten des Schirmes in gleicher Richtung ausgehenden Elementarstrahlen fassen wir zu einem parallelen gebeugten Strahlenbündel zusammen, zu welchem jede zu dieser Richtung senkrechte Ebene als gebeugte Wellenebene gehört. Ist f der Abstand einer solchen Ebene vom Anfangspunkt der Koordinaten, und sind a, b, c die Richtungscosinus ihrer Normalen, so hat der vom Punkte (x, y) des Schirmes in der Richtung (a, b, c) ausgehende Strahl bis zu dieser Ebene den Weg $(f - (ax + by))$ zurückzulegen, und langt daher mit der Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda} (Vt - f + (a - l)x + (b - m)y)$$

daselbst an. Alle um dieselbe Entfernung f vom Anfangspunkt abstehenden Wellenebenen umhüllen eine Halbkugel vom Radius f , welche als Bildfläche der Beugungserscheinung angesehen werden kann. Denn eine (aplanatische) Sammellinse von der Brennweite f würde alle zur Richtung (a, b, c) parallelen Elementarstrahlen in dem Berührungspunkt der zugehörigen Wellenebene mit dieser Halbkugel zusammenfassen, ohne an den Gangunterschieden etwas zu ändern. Die Verschiebung, welche der von (x, y) ausgehende Elementarstrahl (a, b, c) in diesem Punkte hervorbringt, wird erhalten, wenn man den Sinus jener Phase multipliziert mit der Amplitude des Strahls. Bezeichnen wir mit A die Amplitude pro Flächeneinheit der einfallenden Welle, so ist $n A dx dy$ die Amplitude des unendlich dünnen Strahlenbündels, welches unter dem Einfallswinkel, dessen Cosinus $= n$ ist, auf das Flächenelement $dx dy$ des Schirmes fällt. Die Verschiebung im Bildpunkte (a, b, c) ergibt sich alsdann als Summe aller daselbst zusammenwirkenden elementaren Verschiebungen, wenn man das Doppelintegral

$$1) \quad n A \iint \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - f + (a - l)x + (b - m)y) dy dx$$

über alle jene Punkte des Schirmes ausdehnt, welche dem Lichte den Durchgang verstatten. Da dieser Ausdruck, welcher den Bewegungszustand im Punkte (a, b, c) der Bildfläche darstellt, die Grösse c nicht enthält, sondern bloß von den Koordinaten a und b der Projektion des Bildpunktes auf die Schirmebene abhängt, so braucht sich die weitere Untersuchung nur auf diese Projektion zu erstrecken, von welcher man jederzeit auf die halbkugelige Bildfläche wieder zurückgehen kann.

17. Kennt man die Erscheinung für irgend eine Richtung (l, m, n) der direkt einfallenden Strahlen, so kennt man sie auch für jede andere Strahlen-

richtung. Stehen z. B. die einfallenden Strahlen senkrecht zum Schirm ($l = 0$, $m = 0$, $n = 1$), so geht das vorstehende Integral über in

$$A \iint \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - f + ax + by) dy dx;$$

denkt man sich jetzt in dem obigen allgemeineren Integral die Grössen a, b resp. durch a', b' ersetzt, und nimmt

$$a' - l = a, \quad b' - m = b,$$

so unterscheidet es sich von dem vorstehenden Integral nur durch den konstanten Faktor n (Cosinus des Einfallswinkels). Um also aus der bei senkrecht einfallendem Licht stattfindenden Beugungserscheinung diejenige bei schiefer Incidenz abzuleiten, braucht man nur die für erstere entworfene Projektion parallel mit sich selbst zu verschieben, bis der frühere Anfangspunkt, in welchem sich in jenem Fall die direkten Strahlen sammelten, mit der Projektion (l, m) des jetzt vom direkten Licht getroffenen Bildpunktes zusammenfällt; abgesehen von dem Faktor n erfährt dabei die Projektion des Bildes nicht die mindeste Aenderung, während das halbkugelige Bild selbst eine um so grössere Verzerrung erleidet, je weiter die Verschiebung geht.

18. Wir führen jetzt zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\frac{2\pi}{\lambda} (Vt - f) = p, \quad \frac{2\pi}{\lambda} (a - l) = q, \quad \frac{2\pi}{\lambda} (b - m) = r$$

ein, so dass der Ausdruck für die Exkursion, wenn der Faktor nA einstweilen weggelassen wird, die Gestalt

$$\text{II) } \iint \sin(p + qx + ry) dy dx$$

annimmt. Wird hier der Teil p der Phase, welcher die Zeit t in sich schliesst, von dem übrigen Teil, welcher die Koordinaten enthält, getrennt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin p \iint \cos(qx + ry) dy dx + \cos p \iint \sin(qx + ry) dy dx \\ = C \sin p + S \cos p, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\iint \cos(qx + ry) dy dx = C \quad \text{und} \quad \iint \sin(qx + ry) dy dx = S$$

gesetzt wurde. Macht man nun

$$C = M \cos \varphi, \quad S = M \sin \varphi,$$

so wird

$$C \sin p + S \cos p = M \sin(p + \varphi)$$

wo die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S}{C}, \quad M^2 = C^2 + S^2$$

zur Bestimmung des Phasenunterschiedes φ und der Amplitude M des resultierenden Strahles dienen. Der Ausdruck M^2 gibt, abgesehen von dem noch beizufügenden Faktor $n^2 A^2$, die Lichtstärke im Punkte a, b des projizierten Beugungsbildes an.

19. Wir denken uns jetzt das Integral (II) für eine beliebige in einem undurchsichtigen Schirm angebrachte Oeffnung geltend, und vergleichen damit den Ausdruck, der sich für ein undurchsichtiges mit jener Oeffnung kongruentes Schirmchen ergibt, welches der einfallenden ausgedehnten Welle in den Weg tritt. Man muss in diesem Falle von der Exkursion, welche im Bildpunkt durch die Gesamtwelle hervorgebracht würde, die Wirkung desjenigen Theiles abziehen, welcher von dem dunklen Schirmchen verdeckt wird. Man erhält so:

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-\beta}^{+\beta} \sin(p + qx + ry) dy dx - \int \int \sin(p + qx + ry) dy dx,$$

falls man die einfallende Lichtwelle durch einen im Verhältnis zu den Dimensionen des kleinen Schirmchens sehr grossen rechteckigen Ausschnitt von der Breite 2α und der Höhe 2β begrenzt annimmt. Die Grenzen des zweiten Doppelintegrals sind die nämlichen wie oben bei der kleinen Oeffnung. Bringt man das erste Doppelintegral auf die Form $C \sin p + S \cos p$, so zieht es sich, da in diesem Falle $S = 0$ ist, auf $C \sin p$ zurück. Dabei ist

$$C = \int_{-a}^{+a} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos(qx + ry) dy dx = 4\alpha\beta \cdot \frac{\sin \alpha q}{\alpha q} \cdot \frac{\sin \beta r}{\beta r},$$

wo $4\alpha\beta$ den Flächeninhalt der ganzen einfallenden Lichtwelle darstellt.

Sind nun α und β , wie vorausgesetzt, äusserst gross im Verhältnis zur Wellenlänge λ , so werden die Faktoren

$$\frac{\sin \alpha q}{\alpha q} \quad \text{und} \quad \frac{\sin \beta r}{\beta r}$$

verschwindend klein, ausser wenn gleichzeitig $q = 0$ und $r = 0$, d. h. $a = l$ und $b = m$ ist, in welchem Falle beide Faktoren den Wert 1 annehmen. Wenn q und r nicht gleichzeitig Null sind, verschwindet das erste Doppelintegral, und man behält für die Exkursion im Bildpunkte (a, b) nur noch den Ausdruck

$$-\int \int \sin(p + qx + ry) dy dx.$$

Die Lichtbewegung also, welche ein dunkles Schirmchen in einem Punkte des Beugungsbildes hervorruft, unterscheidet sich von der durch eine kongruente Oeffnung daselbst erzeugten nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen, d. i. durch einen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge. Da die Lichtstärke durch das Quadrat der Amplitude dargestellt wird, so verschwindet bei ihrer Berechnung der Zeichenunterschied. Die Lichterscheinung also, welche durch ein undurchsichtiges Schirmchen hervorgebracht wird, ist gleich derjenigen, welche von einer kongruenten Oeffnung herrührt, mit alleiniger Ausnahme des Punktes, in welchem die direkten Strahlen sich sammeln (Babinets Prinzip, vgl. oben 4.). Dieser Punkt nämlich, für welchen $q = r = 0$ ($a = l$, $b = m$) ist, besitzt zur Zeit t die Exkursion

$$(4\alpha\beta - \iint dy dx) \sin p;$$

seine Amplitude, welche durch den eingeklammerten Faktor vorgestellt wird, ist hienach gleich der Amplitude der ganzen Welle vermindert um die Amplitude desjenigen Teils, welcher von dem dunklen Schirmchen aufgehalten wird. In beiden Fällen also, für das undurchsichtige Schirmchen und für die Oeffnung, ist die Amplitude des direkt beleuchteten Punktes gleich der Summe der Amplituden aller durchgelassenen Strahlen, nur dass im letzteren Fall Exkursion und Lichtstärke der Nachbarpunkte sich stetig an die im direkten Bildpunkt anschliessen, im ersteren Fall aber nicht.

Alle diese Schlussfolgerungen sind ganz unabhängig von der Natur der Grenzen des Doppelintegrals; sie gelten daher nicht nur für eine Oeffnung und ein Schirmchen, sondern auch für beliebige Gruppen von Oeffnungen oder Schirmchen.

20. Ein undurchsichtiger Schirm samt seiner Oeffnung werde in seiner Ebene parallel verschoben, so dass der früher im Anfangspunkt gelegene Punkt die Koordinaten x_0, y_0 erhält, so sind jetzt $x' = x_0 + x$, $y' = y_0 + y$ die Koordinaten desjenigen Punktes der Oeffnung, welchem vorher die Koordinaten x, y entsprachen, und die Integrale

$$\iint \cos(qx' + ry') dy dx = C', \quad \iint \sin(qx' + ry') dy dx = S'$$

sind jetzt die Komponenten der Amplitude im Bildpunkte (a, b) . Nun ist aber

$$\begin{aligned} C' &= \iint \cos(qx_0 + ry_0 + qx + ry) dy dx \\ &= \cos(qx_0 + ry_0) \iint \cos(qx + ry) dy dx - \sin(qx_0 + ry_0) \iint \sin(qx + ry) dy dx \\ &= c_0 C - s_0 S, \end{aligned}$$

und ebenso

$$S' = c_0 S + s_0 C,$$

wo zur Abkürzung

$$\cos(qx_0 + ry_0) = c_0, \sin(qx_0 + ry_0) = s_0$$

gesetzt wurde. Hieraus ergibt sich

$$C'^2 + S'^2 = C^2 + S^2,$$

d. h. eine und dieselbe Oeffnung bringt stets dieselbe Lichterscheinung hervor, an welcher Stelle des Schirmes sie auch angebracht sein mag, wenn sie nur in allen Lagen ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt.

21. In ähnlicher Weise ergibt sich die Erscheinung, welche durch eine beliebige Anzahl unter sich kongruenter Oeffnungen, deren homologe Linien parallel sind, hervorgebracht wird. Jede der beiden Komponenten C' und S' zerfällt nämlich jetzt in so viele einzelne Integrale, als Oeffnungen vorhanden sind, und welchen gemäss der vorstehenden Entwicklung folgende Form zukommt:

$$C' = \begin{cases} c_0 C - s_0 S \\ c_1 C - s_1 S \\ c_2 C - s_2 S \\ \dots\dots\dots \\ c_i C - s_i S \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad S' = \begin{cases} c_0 S + s_0 C \\ c_1 S + s_1 C \\ c_2 S + s_2 C \\ \dots\dots\dots \\ c_i S + s_i C \\ \dots\dots\dots \end{cases},$$

wo unter c_i und s_i resp. $\cos(qx_i + ry_i)$ und $\sin(qx_i + ry_i)$ zu verstehen sind. Man erhält daher

$$C' = C \sum c_i - S \sum s_i, \quad S' = S \sum c_i + C \sum s_i.$$

Die Lichtstärke im Bildpunkte (a, b) ist alsdann:

$$C'^2 + S'^2 = ((\sum c_i)^2 + (\sum s_i)^2) (C^2 + S^2);$$

sie wird demnach erhalten, wenn man die von einer Oeffnung im nämlichen Punkt erzeugte Lichtstärke mit einem Faktor $(\sum c_i)^2 + (\sum s_i)^2$ multipliziert, welcher von der Anzahl und der Gruppierung der Oeffnungen in gegebener Weise abhängt.

22. Sind die Oeffnungen in sehr grosser Anzahl (N) vorhanden und ganz willkürlich im Gesichtsfeld verteilt, so ist, wenn man $qx_i + ry_i$ mit φ_i bezeichnet,

$$(\sum c_i)^2 + (\sum s_i)^2 = N + 2 \sum \cos(\varphi_i - \varphi_r).$$

Die Cosinus der Phasendifferenzen $\varphi_i - \varphi_j$ zwischen zwei verschiedenen Oeffnungen werden alsdann alle möglichen Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen, und der Wert der Summe wird gegenüber der Zahl N verschwinden, um so gewisser, je grösser die Zahl N ist. Bei einer sehr grossen Anzahl unregelmässig verteilter gleicher und gleichliegender Oeffnungen ist also

$$C'^2 + S'^2 = N(C^2 + S^2),$$

d. h. die Intensität in einem Punkte des Beugungsbildes der Oeffnungsgruppe ist die N fache von derjenigen, die jede einzelne Oeffnung erzeugt, oder der Erfolg ist derselbe, als ob die von den einzelnen Oeffnungen kommenden Strahlenbündel unter sich nicht interferenzfähig (inkohärent) wären, indem sich ihre Intensitäten bloß zu einander addieren (Verdets Prinzip, vergl. oben 3.).

23. Wird statt der Oeffnungen eine ganz gleiche Gruppe kongruenter dunkler Schirmchen gesetzt, so bleibt die Intensität des gebeugten Lichtes unverändert, d. h. sie ist N mal so gross als die einem einzigen Schirmchen entsprechende. Im Vereinigungspunkt der direkten Strahlen ($q = 0$, $r = 0$) dagegen hat man

$$C' = 4\alpha\beta - N \iint dy dx \text{ und } S' = 0,$$

wo das Doppelintegral $\iint dy dx = f$ den Flächeninhalt eines einzigen Schirmchens ausdrückt. Setzen wir den Flächeninhalt $4\alpha\beta$ der ganzen Welle, die übrigens nicht rechteckig zu sein braucht, sondern jede beliebige Gestalt haben kann (vorausgesetzt, dass ihre Dimensionen nach allen Richtungen sehr gross sind im Vergleich zur Wellenlänge), $= 1$ (cm^2), so dass N die Anzahl der Schirmchen pro Flächeneinheit bedeutet, so ist

$$(1 - Nf)^2$$

die Lichtstärke in dem Sammelpunkt der direkten Strahlen. Selbstverständlich muss Nf stets kleiner als 1 sein. Während also die Intensität des gebeugten Lichtes proportional der Anzahl der Schirmchen wächst, nimmt diejenige der direkten Strahlen bei Vermehrung der Schirmchen ab.

Den Ausdrücken C und S wäre, wenn A die Amplitude pro Flächeneinheit der einfallenden Welle bezeichnet, noch der Faktor nA beizufügen, oder einfach der Faktor A , wenn der Winkel, den die Wellennormale mit der z -Axe bildet, so klein angenommen wird, dass sein Cosinus $n = 1$ gesetzt werden kann.

24. Alles bisherige gilt für einen einzigen Lichtpunkt, der in der durch die Cosinus l, m, n angegebenen Richtung liegt. Sind beliebig viele von einander

unabhängig schwingende (inkohärente) Lichtpunkte vorhanden, so erhält man die in einem Punkte (a, b) der Bildfläche stattfindende Lichtstärke, wenn man die daselbst von diesen Lichtpunkten einzeln hervorgebrachten Lichtstärken addiert. Man findet so die Lichtstärke in (a, b) :

$$N(A_1^2(C^2 + S^2)_1 + A_2^2(C^2 + S^2)_2 + A_3^2(C^2 + S^2)_3 + \dots),$$

wo die Indices 1, 2, 3... andeuten, dass in dem Ausdruck $A^2(C^2 + S^2)$ nach der Reihe die den einzelnen Lichtpunkten entsprechenden Werte $l_1, m_1; l_2, m_2; l_3, m_3; \dots$ statt l, m zu setzen sind.

25. Die Lichtquelle sei ferner eine leuchtende Fläche, welche wir auf die um den Anfangspunkt beschriebene Kugel vom Halbmesser 1 radial projiziert denken. Ist A^2 die Lichtstärke, mit welcher die gesamte von der unendlich fernen Lichtfläche oder von ihrer Projektion auf die Kugel senkrecht ausgestrahlte Lichtmenge die im Anfangspunkt befindliche Flächeneinheit beleuchtet, und ist diese Lichtmenge über die leuchtende Fläche gleichmässig ausgebreitet, so beträgt die von der Flächeneinheit der sphärischen Projektion herrührende Lichtstärke A^2/Ω , wenn Ω den sphärischen Flächeninhalt der Scheibe bedeutet. Ein sphärisches Flächenelement $d\omega$ bringt alsdann die Lichtstärke $A^2 d\omega/\Omega$ hervor. Die Intensität, welche in dem Punkte a, b der Bildfläche herrscht, wird sonach ausgedrückt durch das Integral

$$N \frac{A^2}{\Omega} \int (C^2 + S^2) d\omega,$$

welches über die ganze sphärische Fläche Ω auszudehnen ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Winkel der von Ω her einfallenden Strahlen mit der z -Axe sämtlich so klein seien, dass ihre Cosinus (n) gleich 1 gesetzt werden dürfen. Dann darf auch die Projektion der Lichtscheibe auf die Kugel vom Radius 1 als eine zur xy -Ebene parallele ebene Figur angesehen werden, deren Element $d\omega$ die Koordinaten l, m hat.

Das vorstehende Integral (sowie die Summe in Nr. 24) ist nichts anderes als der analytische Ausdruck für das graphische Verfahren, das Schwerd¹⁾ zur Ermittlung der Lichtverteilung im Beugungsbilde einer Lichtfläche angewandte. Man denke sich in jedem Punkte des Bildes der Lichtfläche das ihm zugehörige Lichtgebirge errichtet, so erhält man die Intensität in jedem Punkte der Bildebene, wenn man die unendlich vielen auf ihn treffenden Ordinaten der unzählig vielen Lichtgebirge summiert. Ist die Leuchtkraft über die

¹⁾ Schwerd, Die Beugungserscheinungen, 1885, § 206.

Lichtfläche gleichförmig verteilt, wie oben angenommen wurde, so sind alle Lichtgebirge unter sich kongruent; man bedarf dann nur eines einzigen, versetzt dasselbe mit seinem dem Vereinigungspunkt der direkten Strahlen entsprechenden höchsten Mittelgipfel nach dem Punkte der Bildprojektion, dessen Intensität bestimmt werden soll, und summiert nun alle über der Projektion der Lichtfläche befindlichen Ordinaten.¹⁾ Die Summe ist offenbar nichts anderes als die über dieser Projektion sich erhebende Masse des Lichtgebirges. Dieser zweiten einfacheren Regel entspricht das obige Integral; wäre die Leuchtkraft über die Lichtfläche nicht gleichmässig verteilt, so müsste A^2 als Funktion von l und m unter das Integralzeichen treten.

Da für einen einzelnen Lichtpunkt die Intensität im Vereinigungspunkt der direkten Strahlen unabhängig von der Wellenlänge ist, so erscheint bei Anwendung von weissem Licht das Bild des Lichtpunktes immer weiss, d. h. die verschiedenen Farben behalten unter sich dasselbe Mischungsverhältnis, wie in der Mischung, die wir weiss nennen. In dem Beugungsbild einer Lichtfläche dagegen kann die Intensität nirgends von der Wellenlänge unabhängig sein, auch nicht in den Punkten des Bildes der Lichtfläche selbst. Denn zu der von der Wellenlänge unabhängigen Intensität eines solchen Lichtpunktes, welche dem Mittelgipfel seines eigenen Lichtgebirges entspricht, kommen noch die dahin treffenden Intensitäten der benachbarten Lichtgebirge, welche Funktionen der Wellenlänge sind. Bei Anwendung von weissem Licht ist daher das Beugungsbild einer Lichtfläche nirgends weiss, sondern stets gefärbt, wenn auch nach Umständen nur schwach (vgl. u. III. u. IV).

Im Falle eines dunklen Schirmes mit Oeffnungen schliesst sich die Intensität am Rande des Bildes der Lichtfläche stetig an diejenige ausserhalb an, bei einer Gruppe dunkler Schirmchen dagegen ist der Uebergang unstetig (s. oben 4) und das Bild der Fläche erscheint am Rande scharf begrenzt.

Man hat nämlich (wenn $S^2 = 0$ angenommen wird) die Intensität im Innern des Bildes der Lichtfläche bis zum Rande

$$A^2 \left((1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int C^2 d\omega \right)$$

und diejenige ausserhalb des Bildes der Lichtfläche

$$A^2 \frac{N}{\Omega} \int C^2 d\omega$$

wo beide Integrale über die ganze Fläche Ω zu nehmen sind, der erstere Ausdruck aber nur für solche Werte von a und b gilt, die einem inneren,

¹⁾ Ibid., § 209.

der zweite nur für solche, die einem äusseren Punkte des Beugungsbildes entsprechen.

26. Wir nehmen jetzt an, dass das an einem ersten Schirm gebeugte Licht auf einen zweiten Schirm treffe, der in Bezug auf Anzahl, Grösse und Gestalt der beugenden Körperchen mit dem ersten übereinstimme, hinsichtlich der auch hier ganz willkürlichen Anordnung der Teilchen aber von ihm abweiche. Da die Schirme ungleich (inkohärent) sind, so kann, wie oben (6) bereits auseinandergesetzt wurde (Stokesches Prinzip), die Interferenz der am ersten mit den am zweiten Schirm gebeugten Strahlen ausser Acht gelassen, und die resultierende Intensität durch einfache Summierung gefunden werden; oder, mit anderen Worten, das durch den ersten Schirm hervorgebrachte Beugungsbild spielt dem zweiten Schirm gegenüber die Rolle einer Lichtfläche; das hievon durch den zweiten Schirm gelieferte Beugungsbild gilt ebenso als Lichtfläche für einen dritten Schirm, u. s. f.

Die Intensität im Beugungsbilde des zweiten Schirms wird sonach durch denselben Ausdruck wie in (25) dargestellt; nur muss jetzt der Ausdruck

$$A^2 \left((1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int C^2 d\omega \right)$$

statt A^2 gesetzt werden, d. i. statt der Intensität, welche die durch Beugung noch nicht modifizierte einfallende Welle bei Abwesenheit von beugenden Schirmchen in jedem Punkte des Bildes der Lichtquelle erzeugen würde; oder es hat

$$A^2 \left((1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int C^2 d\omega \right) = A^2 B^2$$

an die Stelle von A^2 zu treten. Da aber

$$B^2 = (1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int C^2 d\omega$$

eine Funktion von l und m ist, indem nach Auswertung des Integrals in demselben l statt a und m statt b gesetzt werden muss, so ist der Faktor B^2 unter das Integralzeichen zu nehmen, und der Intensitätsausdruck nach Beugung durch den zweiten Schirm lautet:

$$\frac{NA^2}{\Omega} \int B^2 C^2 d\omega,$$

worin B^2 eine Funktion von l und m , C^2 eine Funktion von l, m, a und b ist.

Setzen wir hier den obigen Ausdruck für B^2 ein, indem wir das darin vorkommende Integral, um anzudeuten, dass, nach Herstellung desselben als

Funktion von a und b , l statt a und m statt b einzusetzen ist, mit $\int_{l,m}$ bezeichnen, so wird der Intensitätsausdruck

$$\frac{A^2}{\Omega} \int \left((1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int_{l,m} C^2 d\omega \right) C^2 d\omega.$$

Wir zerfallen nun dieses Integral in zwei, deren erstes $\int_i$ nur über die Punkte innerhalb des Bildes der Lichtfläche bis zu deren Rand, das andere $\int_e$ aber vom Rande an über alle jene Bildpunkte sich erstrecken soll, zu welchen direkte Strahlen nicht gelangen. Wir erhalten so, da für letztere Punkte das Glied $(1 - Nf)^2$ wegfällt:

$$\frac{A^2}{\Omega} \cdot \int_i C^2 d\omega \left((1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int_{l,m} C^2 d\omega \right) + \frac{A^2 N}{\Omega^2} \int_e C^2 d\omega \int_{l,m} C^2 d\omega.$$

Hier stellt das zweite Glied die Intensität des Lichtes dar, welches nach Beugung am ersten Schirm am zweiten abermals gebeugt wurde. Wie oben (7) bereits dargelegt wurde, kann aber das wiederholt gebeugte Licht gegen das einmal gebeugte Licht in erster Annäherung ausser Acht gelassen werden.

Die Lichtstärke der durch einen zweiten Schirm hervorgebrachten Beugungserscheinung kann also durch den Ausdruck

$$\frac{A^2}{\Omega} \cdot \int C^2 d\omega \left((1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int_{l,m} C^2 d\omega \right)$$

angenähert dargestellt werden, wo die Integration sich nur über das Bild der Lichtfläche erstreckt, und das Integral $\int_{l,m}$ die Intensität des in jedem Punkte des Bildes mitwirkenden einmal gebeugten Lichtes vorstellt. Das Integral ist eine Funktion der Wellenlänge, welche mit abnehmender Wellenlänge abnimmt (5; s. u. III. 33.).

27. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt werden wird, ist bei einer Lichtscheibe von der Grösse der Sonne die Intensität und Sättigung am Rande nur wenig verschieden von derjenigen in der Mitte. Wir begehen daher nur einen geringen Fehler, wenn wir statt der von Punkt zu Punkt veränderlichen Intensität diejenige der Mitte der Lichtfläche ($l = 0$, $m = 0$) setzen. Dann wird der Faktor

$$B^2 = (1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int_{0,0} C^2 d\omega$$

nach l und m konstant, tritt sonach vor das Integralzeichen heraus, und die Intensität des Beugungsbildes wird annähernd dargestellt durch

$$\frac{A^2}{\Omega} B^2 \int C^2 d\omega.$$

Dieser Ausdruck besagt, dass wir die ursprünglich dem ersten Schirm dargebotene weisse Lichtfläche für den zweiten Schirm durch eine andere von gleicher Grösse und Gestalt ersetzt denken, welche vermöge des von der Wellenlänge abhängigen Faktors B^2 in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig schwach gerötet ist. Wie später (III.) gezeigt werden soll, ist für eine Breite der Lichtfläche, welche dem scheinbaren Sonnendurchmesser gleichkommt, ja selbst noch für die vierfache Sonnenbreite, die Rötung am Rande der Lichtfläche stärker als in der Mitte. Durch die vorstehende vereinfachte Formel wird also (wenigstens in den Fällen, die bei der vorliegenden Frage in Betracht kommen) die Rötung der Lichtfläche etwas geringer angegeben, als sie in Wirklichkeit durchschnittlich ist, und die Schlüsse, die wir aus ihr hinsichtlich der Rotfärbung der Lichtquelle ziehen, gelten für das thatsächliche Verhalten noch in verstärktem Masse.

28. Gemäss der Formel

$$\frac{A^2}{\Omega} B^2 \int C^2 d\omega$$

wird der Ausdruck für die Intensität, welche ein Schirm von der angenommenen Beschaffenheit liefert, einfach dadurch erhalten, dass man den Ausdruck für den vorhergehenden Schirm mit dem Faktor B^2 multipliziert. Für 1, 2, 3, ..., $n + 1$ Schirme erhält man also der Reihe nach die Intensitäten

$$\frac{A^2}{\Omega} \int C^2 d\omega, \frac{A^2}{\Omega} B^2 \int C^2 d\omega, \frac{A^2}{\Omega} B^4 \int C^2 d\omega, \dots \frac{A^2}{\Omega} B^{2n} \int C^2 d\omega.$$

Wie unmerklich bei einem einzigen Schirm die Rotfärbung der Lichtfläche auch sein mag, so kann, wie man sieht, durch diese Potenzierung infolge Hinzutretens weiterer Schirme die Färbung vom blassen Orange bis zum tiefen Rot sich steigern.

29. Es wurde angenommen, dass die Flächeneinheit der einfallenden Welle N kleine Schirmchen oder beugende Körperchen umfasse. Kommen auf die Längeneinheit durchschnittlich δ Schirmchen, oder ist δ ihre „lineare Dichte“, so ist δ^2 ihre Anzahl pro Flächeneinheit, und man hat

$$N = \delta^2.$$

Sind die beugenden Teilchen im Raume gleichmässig, d. h. in durchschnittlich gleichen gegenseitigen Abständen verteilt, so ist δ^3 ihre räumliche Dichte, und von den aufeinanderfolgenden Schirmen, welche wir senkrecht zur Gesichtslinie gelegt denken, geht die Anzahl δ auf die Längeneinheit. Ist also D ,

längs der Gesichtslinie gemessen, die Dicke der Schicht von beugenden Teilchen, welche zwischen die Lichtfläche und das Auge tritt, so ist

$$n = \delta D$$

die Anzahl der Schirme, und

$$\frac{A^2}{\Omega} B^{\delta D} \int C^2 d\omega$$

die Intensität der hervorgebrachten Beugungserscheinung, wobei

$$B^2 = (1 - Nf)^2 + \frac{N}{\Omega} \int_{0,0} C^2 d\omega$$

oder

$$B^2 = (1 - \delta^2 f)^2 + \frac{\delta^2}{\Omega} \int_{0,0} C^2 d\omega$$

ist. Dieser Intensitätsausdruck, welcher auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{A^2}{\Omega} e^{-\kappa \delta D} \int C^2 d\omega,$$

wo

$$K = -\log B^2,$$

stellt die Erscheinung angenähert dar als diejenige einer Lichtfläche, welche nach Massgabe der Exponentialgrösse mit wachsender Dichte der beugenden Körperteilchen und Dicke ihrer Schicht eine immer tiefer gerötete Mischfarbe annimmt, und um sich die in dem Integral enthaltenen Beugungsstreifen aus diesem bereits geröteten Lichte erzeugt.

III.

30. Das Integral

$$N \frac{A^2}{\Omega} \int (C^2 + S^2) d\omega$$

ist, wie bereits erwähnt, der analytische Ausdruck für die bereits von Sch werd nach seiner oben (25) skizzierten graphischen Methode behandelte Aufgabe, die Lichtverteilung im Beugungsbilde einer Lichtfläche zu bestimmen. Für die vorliegende Frage steht im Vordergrund des Interesses der Fall einer kreisförmigen Lichtscheibe, der Sonne, deren Licht durch einen aus unter sich gleichen kreis- oder kugelförmigen Schirmchen bestehenden Schirm Beugung erfährt.

Sind die beugenden Schirmchen alle kreis- oder kugelförmig mit dem Radius R , so ist in dem Ausdruck

$$N \frac{A^2}{\Omega} \int (C^2 + S^2) d\omega$$

$S = 0$ und das Doppelintegral (18.)

$$C = \iint \cos(qx + ry) dy dx$$

ist über die Oberfläche eines Kreises vom Radius R auszudehnen, d. h. die Koordinaten x und y sind an die Bedingung

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

gebunden.

Die Grössen q und r können als auf dieselben Axen wie x und y bezogene Koordinaten eines beliebigen Punktes der Bildprojektion angesehen werden. Wegen der Kreisgestalt der Oeffnung oder des Schirmchens leuchtet ein, dass für alle Bildpunkte, welche von dem Mittelpunkt des Kreises gleichweit abstehen, der Ausdruck C den gleichen Wert haben muss. Man kennt daher den Wert von C für alle Punkte der Bildebene, wenn man ihn längs der von dem Mittelpunkt des Kreises durch den Punkt q, r gezogenen geraden Linie kennt. Wir wählen diese Linie, deren Winkel φ mit der bisherigen Abscissenaxe durch die Gleichungen

$$\cos \varphi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + r^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}}$$

bestimmt ist, zur Abscissenaxe eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems $x' y'$, zu dem wir das obige Integral transformieren. Aus den Transformationsgleichungen

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi,$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

ergibt sich mit Rücksicht auf vorstehende Werte von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$:

$$qx + ry = \sqrt{q^2 + r^2} \cdot x'.$$

Da $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$, so ist hienach der Ausdruck $\cos(x' \sqrt{q^2 + r^2})$ nach x' und y' über die Kreisfläche vom Radius R zu integrieren, und wir erhalten statt der obigen Form das Doppelintegral

$$C = \iint \cos(x' \sqrt{q^2 + r^2}) dy' dx'$$

mit der Bedingung

$$x'^2 + y'^2 \leq R^2,$$

oder, wenn $x' = Ru$, $y' = Rv$ gesetzt wird:

$$C = R^2 \int \int \cos(Ru \sqrt{q^2 + r^2}) dv du$$

mit der Bedingung

$$u^2 + v^2 \leq 1.$$

Integriert man hier zuerst nach v zwischen den Grenzen $v_1 = -\sqrt{1-u^2}$ und $v_2 = +\sqrt{1-u^2}$, worauf dann nach u noch zwischen -1 und $+1$ zu integrieren ist, so ergibt sich

$$C = 2R^2 \int_{-1}^{+1} \cos(Ru \sqrt{q^2 + r^2}) \cdot \sqrt{1-u^2} \cdot du \quad ^1).$$

Da nach der Definition der Besselschen Funktionen allgemein

$$\int_{-1}^{+1} \cos zu (1-u^2)^{\nu-1/2} du = \sqrt{\pi} \cdot 2^\nu \Gamma(\nu + 1/2) \frac{J_\nu(z)}{z^\nu}$$

oder hier speziell

$$\int \cos zu \sqrt{1-u^2} du = \pi \frac{J_1(z)}{z}$$

ist, so hat man schliesslich

$$C = 2\pi R^2 \frac{J_1(R \sqrt{q^2 + r^2})}{R \sqrt{q^2 + r^2}}$$

als Ausdruck der Amplitude, welche eine kreisförmige Oeffnung vom Radius R , auf deren Flächeneinheit die Amplitude 1 des einfallenden Strahlenbündels trifft, im Bildpunkte q, r hervorbringt.

31. Dieser Ausdruck ist nun in

$$M^2 = N \frac{A^2}{\Omega} \int C^2 d\omega$$

einzusetzen, um die in einem Punkte q, r der Bildprojektion stattfindende Lichtstärke M^2 zu erhalten, wenn eine Lichtfläche Ω durch einen aus zahlreichen

¹⁾ Man erkennt leicht, dass allgemein, wenn f eine beliebige eindeutige stetige Funktion bezeichnet, die folgende Gleichung gilt:

$$\iint_{(u^2 + v^2 \leq 1)} f(qu + rv) dv du = 2 \int_{-1}^{+1} f(u \sqrt{q^2 + r^2}) \sqrt{1-u^2} du.$$

willkürlich verteilten gleichen kreisförmigen Oeffnungen oder Schirmchen bestehenden Beugungsschirm gesehen wird. Diese Lichtstärke ist demnach:

$$M^2 = NA^2 \frac{4\pi^2 R^4}{\Omega} \int \left(\frac{J_1(R\sqrt{q^2 + r^2})}{R\sqrt{q^2 + r^2}} \right)^2 d\omega.$$

Darin ist (18.)

$$\sqrt{q^2 + r^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(a-l)^2 + (b-m)^2},$$

wo a, b die Koordinaten des betrachteten Bildpunktes, l, m diejenigen eines Punktes oder des Elementes $d\omega$ der Lichtfläche darstellen. Die Wurzel zur rechten, nämlich

$$\zeta = \sqrt{(a-l)^2 + (b-m)^2}$$

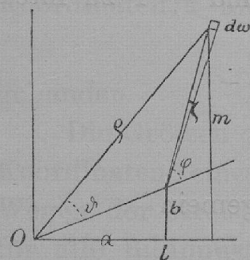


Fig. 2.

gibt sonach die Entfernung des Punktes l, m oder des Elementes $d\omega$, nach welchem integriert wird, von dem Bildpunkt a, b an. Bezeichnet man den Winkel, welchen ζ mit der von der Bildmitte O (Fig. 2) nach dem Punkt a, b gezogenen Geraden bildet, mit φ , so lässt sich das Element $d\omega$ wie folgt ausdrücken:

$$d\omega = \zeta d\zeta d\varphi,$$

und wir erhalten, wenn der Faktor NA^2 einstweilen weggelassen wird, und die jeweils erforderlichen Integrationsgrenzen hinzugedacht werden:

$$M^2 = \frac{4\pi^2 R^4}{\Omega} \iint \left(\frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \zeta\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda} \zeta} \right)^2 \zeta d\zeta d\varphi.$$

Indem man

$$\frac{2\pi R}{\lambda} \zeta = z$$

setzt, wird dieser Ausdruck umgeformt in

$$M^2 = \frac{R^2}{\Omega} \lambda^2 \iint \left(\frac{J_1(z)}{z} \right)^2 z dz d\varphi.$$

Hier kann die Integration nach z jederzeit ausgeführt werden; denn es ist¹⁾

$$\int_0^z \frac{J_1^2(z)}{z} dz = \frac{1}{2} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)).$$

¹⁾ Lommel, Math. Ann., Bd. XIV, p. 528 u. 533, 1878.

Ist die Lichtfläche eine Kreisscheibe (z. B. die Sonnenscheibe) vom Radius ϱ (in Bogenmass), deren Mittelpunkt mit der Bildmitte zusammenfällt, so ist $\Omega = \pi \varrho^2$; liegt der Bildpunkt a, b innerhalb des Bildes der Lichtfläche ($a^2 + b^2 < \varrho^2$), so hat man hienach

$$M^2 = \frac{R^2 \lambda^2}{2\pi \varrho^2} \int_0^{2\pi} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) d\varphi,$$

wo $z = \frac{2\pi R}{\lambda} \zeta$ ist, und ζ den vom Punkt a, b nach dem zum Winkel φ gehörigen Punkte des Umfangs des Bildes der Kreisscheibe gezogenen Radius vector bedeutet (Fig. 2).

Für den Mittelpunkt des Bildes ($a = 0, b = 0$) ist $\zeta = \varrho$, z also von φ unabhängig, und die Integration nach φ kann ohne weiteres ausgeführt werden. Die Intensität in der Mitte des Bildes ist demnach:

$$M_0^2 = \frac{4\pi^2 R^4}{\lambda^2} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)),$$

wo $z = \frac{2\pi R}{\lambda} \varrho$ ist.

Da das oben (29.) in dem Ausdruck B^2 vorkommende Integral

$$\frac{1}{\Omega} \int_{0,0} C^2 d\omega$$

dem vorstehenden M_0^2 entspricht, so hat man für eine kreisförmige Lichtscheibe vom Radius ϱ und beugende Körperchen vom Radius R , da das dortige $f = \pi R^2$ ist:

$$B^2 = (1 - \pi R^2 \delta^2)^2 + \frac{4\pi^2 R^4 \delta^2}{\lambda^2} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)),$$

oder, wegen des obigen Wertes von z :

$$B^2 = (1 - \pi R^2 \delta^2)^2 + \frac{R^2 \delta^2}{\varrho^2} \lambda^2 \left(1 - J_0^2\left(\frac{2\pi R \varrho}{\lambda}\right) - J_1^2\left(\frac{2\pi R \varrho}{\lambda}\right) \right),$$

so dass B^2 eine Funktion der Wellenlänge λ ist, welche, wie weiter unten gezeigt wird, mit abnehmender Wellenlänge abnimmt.

32. Da wegen der Kreisform sowohl der Schirmchen als der Lichtquelle alle von der Bildmitte gleichweit entfernte Bildpunkte die gleiche Lichtstärke besitzen müssen, so genügt es, bloß die Punkte längs einer durch die Bildmitte gezogenen Geraden, z. B. längs der Abscissenaxe, zu betrachten; d. h., man kann $b = 0$ setzen.

Alsdann ist, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, den der vom Mittelpunkt nach dem zu φ gehörigen Punkt des Umfangs der Scheibe gezogene Radius ϱ mit der Abscissenaxe bildet, im obigen allgemeinen Ausdruck für M^2

$$z = \frac{2\pi R}{\lambda} \zeta = \frac{2\pi R}{\lambda} \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta}$$

zu setzen (Fig. 3); vermöge der Gleichungen

$$\varrho \sin(\varphi - \vartheta) = a \sin \varphi, \quad \zeta \cos(\varphi - \vartheta) = \varrho - a \cos \vartheta, \quad \zeta = \varrho \cos(\varphi - \vartheta) - a \cos \varphi,$$

welche aus Fig. 3 unmittelbar zu entnehmen sind, lässt sich $d\varphi$ leicht in ϑ ausdrücken. Es ergibt sich nämlich aus der ersten derselben durch Differentiation

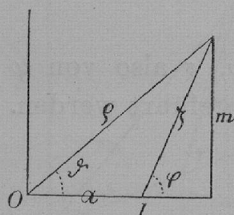


Fig. 3.

also

$$\varrho \cos(\varphi - \vartheta) (d\varphi - d\vartheta) = a \cos \varphi d\varphi,$$

$$d\varphi = \frac{\varrho \cos(\varphi - \vartheta) d\vartheta}{\varrho \cos(\varphi - \vartheta) - a \cos \varphi},$$

folglich mit Rücksicht auf die zweite und dritte

$$d\varphi = \varrho \cdot \frac{\varrho - a \cos \vartheta}{\zeta^2} d\vartheta$$

oder

$$d\varphi = \varrho \cdot \frac{\varrho - a \cos \vartheta}{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Man hat demnach

$$M^2 = \frac{R^2 \lambda^2}{2\pi \varrho} \int_0^{2\pi} \left(1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)\right) \frac{\varrho - a \cos \vartheta}{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \vartheta} d\vartheta,$$

wo die Integration nach ϑ , gleichviel ob der Punkt a innerhalb oder ausserhalb des Bildes der Lichtscheibe liegt, immer zwischen den Grenzen 0 und 2π auszuführen ist. Setzen wir noch

$$\frac{2\pi R a}{\lambda} = r, \quad \frac{2\pi R \varrho}{\lambda} = r_1,$$

also

$$z = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \vartheta}$$

so haben wir

$$M^2 = \frac{2\pi R^4}{r_1} \int_0^{2\pi} \left(1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)\right) \frac{r_1 - r \cos \vartheta}{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \vartheta} d\vartheta,$$

oder wenn das von λ unabhängige Verhältnis

$$\frac{r}{r_1} = \nu$$

gesetzt wird:

$$M^2 = \frac{2\pi R^4}{r_1^2} \int_0^{2\pi} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta$$

mit

$$z = r_1 \sqrt{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}.$$

33. Wir bilden nun den Differentialquotienten von M^2 nach r_1 , und erhalten, wenn der Kürze wegen

$$\frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \text{ mit } Q$$

bezeichnet wird:

$$\frac{dM^2}{dr_1} = 2\pi R^4 \left(-\frac{2}{r_1^2} \int_0^{2\pi} \left(J_0 \frac{dJ_0}{dr_1} + J_1 \frac{dJ_1}{dr_1} \right) Q d\vartheta - \frac{2}{r_1^3} \int_0^{2\pi} (1 - J_0^2 - J_1^2) Q d\vartheta \right).$$

Wegen

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z), \quad \frac{dJ_1(z)}{dz} = -\frac{1}{z} J_1(z) + J_0(z)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0(z)}{dr_1} &= \frac{dJ_0(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dr_1} = -J_1(z) \cdot \sqrt{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}, \\ \frac{dJ_1(z)}{dr_1} &= \frac{dJ_1(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dr_1} = \left(-\frac{1}{z} J_1(z) + J_0(z) \right) \sqrt{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} J_0 \frac{dJ_0}{dr_1} + J_1 \frac{dJ_1}{dr_1} &= \left(-J_0 J_1 - \frac{1}{z} J_1^2 + J_0 J_1 \right) \sqrt{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \\ &= -\frac{1}{r_1} J_1^2(z). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{dr_1} &= -\frac{4\pi R^4}{r_1^3} \int_0^{2\pi} (-J_1^2 + 1 - J_0^2 - J_1^2) Q d\vartheta \\ &= -\frac{4\pi R^4}{r_1^3} \int_0^{2\pi} (1 - J_0^2 - 2J_1^2) Q d\vartheta. \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich

$$J_0^2 + 2J_1^2 + 2J_2^2 + 2J_3^2 + \dots = 1,$$

sonach

$$1 - J_0^2 - 2J_1^2 = 2J_2^2 + 2J_3^2 + \dots$$

stets positiv. Solange nun auch Q positiv ist, was jedenfalls zutrifft für $\nu \leq 1$, d. i. für Punkte innerhalb des Bildes der Lichtfläche, bleibt der Differentialquotient von M^2 negativ. Die Lichtstärke wird also geringer mit wachsendem r_1 oder mit abnehmender Wellenlänge, und das Bild der ursprünglich weissen Lichtscheibe zeigt in seiner ganzen Ausdehnung einen rötlichen Farbenton.

34. Es dürfte kaum gelingen, das Integral

$$\int_0^{2\pi} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta$$

in endlicher Form auf bekannte Funktionen zurückzuführen, ausser in dem oben (31.) bereits erledigten Falle $\nu = 0$.

Es soll daher, zum Behufe numerischer Berechnung, das Integral in unendliche Reihen entwickelt werden.

Als konvergente unendliche Reihe dargestellt ist bekanntlich

$$J_0(z) = \sum (-1)^a \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2a}}{(a!)^2};^1)$$

folglich:

$$\begin{aligned} J_0^2(z) &= \sum (-1)^a \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2a}}{(a!)^2} \cdot \sum (-1)^b \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2b}}{(b!)^2} = \sum \sum (-1)^{a+b} \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2a+2b}}{(a!b!)^2} \\ &= \sum_{(a+b=c)} (-1)^c \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2c}}{(a!b!)^2}, \end{aligned}$$

oder, wenn das erste Glied der Reihe ($c = 0$) abgesondert wird, indem man zuerst $c = 0$, dann $c + 1$ statt c setzt:

$$J_0^2(z) = 1 - \sum_{(a+b=c+1)} (-1)^c \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2c+2}}{(a!b!)^2},$$

¹⁾ Hier wie in der Folge soll jeder Buchstabe des kleinen deutschen Alphabets alle positiv ganzzahligen Werte 0, 1, 2, 3, ... vorstellen, und zwar bis ins Unendliche, wenn nicht beschränkende Bedingungen festgesetzt, beziehungsweise den Summenzeichen beige geschrieben sind.

woraus weiter

$$1 - J_0^2(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \sum_{(a+b=c+1)} (-1)^c \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2c}}{(a! b!)^2}$$

hervorgeht.

Es ist ferner

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum (-1)^a \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2a}}{a! (a+1)!},$$

folglich

$$J_1^2(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \sum \sum (-1)^{a+b} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2a+2b}}{a! (a+1)! b! (b+1)!} = \left(\frac{z}{2}\right)^2 \sum_{(a+b=c)} (-1)^c \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2c}}{a! (a+1)! b! (b+1)!}.$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} 1 - J_0^2(z) - J_1^2(z) &= \sum (-1)^c \left(\frac{z}{2}\right)^{2c+2} \left(\sum_{(a+b=c+1)} \frac{1}{(a! b!)^2} - \sum_{(a+b=c)} \frac{1}{a! (a+1)! b! (b+1)!} \right) \\ &= \sum (-1)^c A_c \left(\frac{z}{2}\right)^{2c+2}, \end{aligned}$$

wo

$$\sum_{(a+b=c+1)} \frac{1}{(a! b!)^2} - \sum_{(a+b=c)} \frac{1}{a! (a+1)! b! (b+1)!} = A_c$$

gesetzt wurde. Durch Zusammenfassung gewinnt der numerische Koeffizient A_c die einfachere Gestalt:

$$A_c = \sum \frac{2a - c}{(a! (c - a + 1)!)^2 (a+1)}$$

oder (weil

$$(c - a + 1)! = 1^{c+1-a+1} = \frac{1^{c+1+1}}{(2+c-a)^{a+1}} = \frac{(c+1)!}{(c+1)^{a+1}} \text{ ist):}$$

$$A_c = \frac{1}{((c+1)!)^2} \sum_{a=0}^{a=c+1} \frac{2a - c}{a+1} \left(\frac{(c+1)^{a+1}}{a!} \right)^2.$$

Sondert man von dieser Summe das letzte Glied ab, welches $= 1$ ist, so hat man

$$\sum_{a=0}^{a=c+1} \frac{2a - c}{a+1} \left(\frac{(c+1)^{a+1}}{a!} \right)^2 = 1 + \sum_{a=0}^{a=c} \frac{2a - c}{a+1} \left(\frac{(c+1)^{a+1}}{a!} \right)^2.$$

Betrachten wir jetzt die andere Summe

$$\sum_{a=0}^{a=c} \frac{2a-c}{a+1} \cdot \frac{(c+1)^{a|-1}}{a!} = \sum_{a=0}^{a=c} (2a-c) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!},$$

so sind deren gleichweit von den Endgliedern abstehende Glieder einander entgegengesetzt gleich, wie man sich leicht überzeugt; d. h. es ist

$$(2a-c) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!} = - (c-2a) \cdot \frac{(c+1)^{c-a|-1}}{(c-a+1)!} \cdot 1$$

Man erhält daher, wenn man in der obigen in dem Ausdruck für A_c vorkommenden Summe die gleichweit von ihren Enden abstehenden Glieder paarweise zusammenfasst:

$$\sum_{a=0}^{a=c} \frac{2a-c}{a+1} \left(\frac{(c+1)^{a|-1}}{a!} \right)^2 = \sum_{\substack{(2a \leq c)}} (c-2a) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!} \left(\frac{(c+1)^{c-a|-1}}{(c-a)!} - \frac{(c+1)^{a|-1}}{a!} \right),$$

wo in der letzteren Summe $2a$, wie angedeutet, den Wert c nicht übersteigen kann. Nun ist aber

$$\frac{(c+1)^{c-a|-1}}{(c-a)!} - \frac{(c+1)^{a|-1}}{a!} = (c-2a) \cdot \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!},$$

folglich

$$\sum_{a=0}^{a=c} \frac{2a-c}{a+1} \left(\frac{(c+1)^{a|-1}}{a!} \right)^2 = \sum_{\substack{(2a \leq c)}} \left((c-2a) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!} \right)^2,$$

und der, wie man sieht, stets positive Koeffizient A_c wird:

$$A_c = \left(\frac{1}{(c+1)!} \right)^2 \left[1 + \sum_{\substack{(2a \leq c)}} \left((c-2a) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!} \right)^2 \right].$$

Der Ausdruck

$$(c-2a) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!}$$

ist immer eine ganze Zahl, folglich auch die vorstehende Summe.

1) Es ist daher

$$\sum_{a=0}^{a=c} (2a-c) \cdot \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!} = 0, \text{ und } \sum_{a=0}^{a=c+1} (2a-c) \frac{(c+1)^{a|-1}}{(a+1)!} = 1.$$

Im einzelnen sind die Werte von A_c :

$$\begin{array}{ll} A_0 = 1 & A_7 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}{(8!)^2} \\ A_1 = \frac{1}{2} & A_8 = \frac{2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}{(9!)^2} \\ A_2 = \frac{5}{36} & A_9 = \frac{4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{(10!)^2} \\ A_3 = \frac{7}{288} & A_{10} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{(11!)^2} \\ A_4 = \frac{7}{2400} & A_{11} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{(12!)^2} \\ A_5 = \frac{11}{43200} & A_{12} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{(13!)^2} \\ A_6 = \frac{143}{2822400} & A_{13} = \frac{40 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{(14!)^2} \end{array}$$

u. s. f.

35. Der Intensitätsausdruck

$$M^2 = \pi R^4 \cdot \frac{2}{r_1^2} \int_0^{2\pi} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta$$

ergibt sich nun, da

$$1 - J_0^2(z) - J_1^2(z) = \sum (-1)^c A_c \left(\frac{z}{2}\right)^{2c+2}$$

und

$$z = r_1 (1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}},$$

folglich

$$\frac{2}{r_1^2} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) = \frac{1}{2} \sum (-1)^c A_c \cdot \frac{r_1^{2c}}{2^{2c}} (1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta)^{c+1}$$

ist, in folgender Gestalt:

$$M^2 = \pi R^4 \sum (-1)^c A_c \cdot \frac{r_1^{2c}}{2^{2c+1}} \int_0^{2\pi} (1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta)^c (1 - \nu \cos \vartheta) d\vartheta.$$

Setzen wir

$$\cos \vartheta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta,$$

so wird

$$1 - \nu \cos \vartheta = 1 - \nu + 2\nu \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta$$

und

$$1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta = (1 - \nu)^2 + 4\nu \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta;$$

alsdann ergibt sich, nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt

$$\left((1 - \nu)^2 + 4\nu \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta\right)^c = \sum \frac{c^{b|-1}}{b!} (1 - \nu)^{2(c-b)} (4\nu)^b \sin^{2b} \frac{1}{2} \vartheta$$

und hienach

$$\begin{aligned} & \left((1 - \nu)^2 + 4\nu \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta\right)^2 (1 - \nu \cos \vartheta) \\ &= \sum \frac{c^{b|-1}}{b!} (1 - \nu)^{2(c-b)} (4\nu)^b \left[(1 - \nu) \sin^{2b} \frac{1}{2} \vartheta + 2\nu \sin^{2b+2} \frac{1}{2} \vartheta\right]. \end{aligned}$$

Integriert man den in die eckige Klammer geschlossenen Ausdruck nach ϑ von 0 bis 2π , indem man berücksichtigt, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1^{m|2}}{2^{m|2}}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[(1 - \nu) \sin^{2b} \frac{1}{2} \vartheta + 2\nu \sin^{2b+2} \frac{1}{2} \vartheta\right] d\vartheta &= 2\pi \left((1 - \nu) \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} + 2\nu \cdot \frac{1^{b+1|2}}{2^{b+1|2}}\right) \\ &= 2\pi \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \left(1 - \nu + 2\nu \frac{2b+1}{2b+2}\right) = 2\pi \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{1+b+b\nu}{b+1}. \end{aligned}$$

Man hat daher

$$M^2 = \pi^2 R^4 \sum (-1)^c A_c \cdot \frac{r_1^{2c}}{2^{2c}} \sum \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{1+b+b\nu}{b+1} (1 - \nu)^{2(c-b)} (4\nu)^b,$$

oder, wenn man abkürzend

$$\frac{1}{2^{2c}} \sum \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{1+b+b\nu}{b+1} (1 - \nu)^{2(c-b)} (4\nu)^b = B_c$$

setzt:

$$M^2 = \pi^2 R^4 \sum (-1)^c A_c B_c r_1^{2c}.$$

Für $\nu = 1$ wird, da alsdann nur $b = c$ sein kann,

$$B_c = \frac{1^{c|2}}{2^{c|2}} \cdot \frac{2c+1}{c+1} = 2 \cdot \frac{1^{c+1|2}}{2^{c+1|2}} = \frac{3^{c|2}}{4^{c|2}};$$

($\nu = 1$)

folglich ist die Intensität am Rande der Lichtscheibe:

$$M_1^2 = \pi^2 R^4 \sum (-1)^c A_c \cdot \frac{3^{c|2}}{4^{c|2}} \cdot r_1^{2c}.$$

36. Setzen wir jetzt

$$\cos \vartheta = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta - 1,$$

so ergibt sich in derselben Weise wie oben

$$1 - \nu \cos \vartheta = 1 + \nu - 2\nu \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta, \quad 1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta = (1 + \nu)^2 - 4\nu \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta$$

und

$$\begin{aligned} & (1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta)^c (1 - \nu \cos \vartheta) \\ &= \sum (-1)^b \frac{c^{b|}-1}{b!} (1 + \nu)^{2(c-b)} (4\nu)^b [(1 + \nu) \cos^{2b} \frac{1}{2} \vartheta - 2\nu \cos^{2b+2} \frac{1}{2} \vartheta]. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi \, d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1^{m|2}}{2^{m|2}}$$

liefert die Integration der eckigen Klammer von 0 bis 2π :

$$\begin{aligned} \int [(1 + \nu) \cos^{2b} \frac{1}{2} \vartheta - 2\nu \cos^{2b+2} \frac{1}{2} \vartheta] \, d\vartheta &= 2\pi \left((1 + \nu) \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} - 2\nu \cdot \frac{1^{b+1|2}}{2^{b+1|2}} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \left(1 + \nu - 2\nu \frac{2b+1}{2b+2} \right) = 2\pi \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{1+b-b\nu}{b+1}, \end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$M^2 = \pi^2 R^4 \sum (-1)^c A_c B'_c r_1^{2c},$$

wenn

$$\frac{1}{2^{2c}} \sum (-1)^b \frac{c^{b|}-1}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{1+b-b\nu}{b+1} (1 + \nu)^{2(c-b)} (4\nu)^b = B'_c$$

gesetzt wird. Es muss demnach $B'_c = B_c$ sein, was auch daraus zu ersehen ist, dass der eine Ausdruck in den andern übergeht, wenn $-\nu$ statt ν gesetzt wird.

Für $\nu = 1$ ergibt sich hieraus die bemerkenswerte Summation:

$$\sum (-1)^b \cdot \frac{c^{b|}-1}{(b+1)!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} = \frac{3^{c|2}}{4^{c|2}}.$$

37. Der Ausdruck B_c ist offenbar eine ganze Funktion von ν ; um ihn als solche nach Potenzen von ν geordnet darzustellen, entwickeln wir die darin vorkommende Potenz von $1 - \nu$ nach dem binomischen Lehrsatz, und erhalten:

$$(1 - \nu)^{2(c-b)} = \sum (-1)^a \frac{(2c-2b)^{a|}-1}{a!} \cdot \nu^a,$$

folglich

$$B_c = \frac{1}{2^{2c}} \sum \sum \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{2^{2b} b}{b+1} (-1)^a \cdot \frac{(2c-2b)^{a|-1}}{a!} \cdot \nu^{a+b+1} \\ + \frac{1}{2^{2c}} \sum \sum \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot 2^{2b} \cdot (-1)^a \cdot \frac{(2c-2b)^{a|-1}}{a!} \cdot \nu^{a+b},$$

oder, wenn man $a+b=d$ oder $a=d-b$ setzt:

$$B_c = \frac{1}{2^{2c}} \sum \sum (-1)^b \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot \frac{2^{2b} b}{b+1} \cdot (-1)^b \cdot \frac{(2c-2b)^{b-b|-1}}{(b-b)!} \cdot \nu^{b+1} \\ + \frac{1}{2^{2c}} \sum \sum (-1)^b \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot 2^{2b} \cdot (-1)^b \cdot \frac{(2c-2b)^{b-b|-1}}{(b-b)!} \cdot \nu^b.$$

Schreibt man in ersterer Summe $b+1$ statt b , da das Glied $b=0$ offenbar Null ist, und sondert man von der zweiten das von ν unabhängige Glied ab, indem man $d=0$, also auch $b=0$, und sodann $d+1$ statt d setzt, so wird

$$B_c = \frac{1}{2^{2c}} \left[1 - \sum \sum (-1)^b \frac{c^{b+1|-1}}{(b+1)!} \cdot \frac{1^{b+1|2}}{2^{b+1|2}} \cdot \frac{2^{2b+2}(b+1)}{b+2} (-1)^b \cdot \frac{(2c-2b-2)^{b-b-1|-1}}{(b-b-1)!} \cdot \nu^{b+1} \right. \\ \left. - \sum \sum (-1)^b \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot 2^{2b} \cdot (-1)^b \cdot \frac{(2c-2b)^{b+1-b|-1}}{(b+1-b)!} \cdot \nu^{b+1} \right].$$

Da B_c seinen Wert nicht ändert, wenn $-\nu$ statt ν gesetzt wird (36.), so können in B_c keine ungeraden Potenzen von ν vorkommen, es muss daher der Koeffizient von ν^{b+1} , wenn d gerade $= 2a$ angenommen wird, verschwinden.¹⁾ Ist dagegen d ungerade $= 2a+1$, so ist der Koeffizient von ν^{2a+2}

$$\sum \sum (-1)^b \frac{c^{b+1|-1}}{(b+1)!} \cdot \frac{1^{b+1|2}}{2^{b+1|2}} \cdot \frac{2^{2b+2}(b+1)}{b+2} \cdot \frac{(2c-2b-2)^{2a-b|-1}}{(2a-b)!} \\ + \sum \sum (-1)^b \frac{c^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{1^{b|2}}{2^{b|2}} \cdot 2^{2b} \cdot \frac{(2c-2b)^{2a+2-b|-1}}{(2a+2-b)!}.$$

Man kann sich ohne Schwierigkeit überzeugen, dass diese Doppelsumme der einfachen Summe

$$\sum \frac{c^{a+1|-1} (c+1)^{a+1|-1}}{((a+1)!)^2}$$

gleich ist. Man hat daher, wenn man das vorhin abgesonderte absolute Glied wieder in die Summe aufnimmt, für B_c den folgenden einfachen Ausdruck:

$$B_c = \frac{1}{2^{2c}} \sum \frac{c^{a|-1} (c+1)^{a|-1}}{(a!)^2} \cdot \nu^{2a}.$$

¹⁾ Für ein gerades d verschwindet sogar jede der beiden Summen für sich.

Da die Binomialkoeffizienten stets positive ganze Zahlen sind, so ist der Koeffizient von ν^{2c} immer eine positive ganze Zahl dividiert durch 2^{2c} .

Im einzelnen sind die Werte von B_c :

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = \frac{1}{4} (1 + 2\nu^2)$$

$$B_2 = \frac{1}{16} (1 + 6\nu^2 + 3\nu^4)$$

$$B_3 = \frac{1}{64} (1 + 12\nu^2 + 18\nu^4 + 4\nu^6)$$

$$B_4 = \frac{1}{256} (1 + 20\nu^2 + 60\nu^4 + 40\nu^6 + 5\nu^8)$$

$$B_5 = \frac{1}{1024} (1 + 30\nu^2 + 150\nu^4 + 200\nu^6 + 75\nu^8 + 6\nu^{10})$$

$$B_6 = \frac{1}{2^{12}} (1 + 42\nu^2 + 315\nu^4 + 700\nu^6 + 525\nu^8 + 126\nu^{10} + 7\nu^{12})$$

$$B_7 = \frac{1}{2^{14}} (1 + 56\nu^2 + 588\nu^4 + 1960\nu^6 + 2450\nu^8 + 1176\nu^{10} + 196\nu^{12} + 8\nu^{14})$$

$$B_8 = \frac{1}{2^{16}} (1 + 72\nu^2 + 1008\nu^4 + 4704\nu^6 + 8820\nu^8 + 7056\nu^{10} + 2352\nu^{12} + 288\nu^{14} + 9\nu^{16})$$

$$B_9 = \frac{1}{2^{18}} (1 + 90\nu^2 + 1620\nu^4 + 10080\nu^6 + 26460\nu^8 + 31752\nu^{10} + 17640\nu^{12} + 4320\nu^{14} + 405\nu^{16} + 10\nu^{18})$$

$$B_{10} = \frac{1}{2^{20}} (1 + 110\nu^2 + 2475\nu^4 + 19800\nu^6 + 69300\nu^8 + 116424\nu^{10} + 97020\nu^{12} + 39600\nu^{14} + 7425\nu^{16} + 550\nu^{18} + 11\nu^{20})$$

u. s. f.

38. Die unendliche Reihe

$$\sum (-1)^c A_c B_c r_1^{2c}$$

ist für kleinere Werte von $r = \nu r_1$ zur numerischen Berechnung der Intensität M^2 sehr gut brauchbar; für grössere Werte jedoch wird sie begreiflicherweise unbequem. Eine andere Entwicklung des Intensitätsausdrucks

$$M^2 = \pi^2 R^4 \cdot \frac{4}{\pi r_1^2} \int_0^\pi \left((1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \cdot \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \cdot d\vartheta \right)^{1)}$$

welche sich besonders für grosse Werte von ν eignet, erhalten wir durch teilweise Integration, indem in vorstehendem Integral der Ausdruck

$$\frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}$$

als integrierter Faktor betrachtet wird. Man erhält zunächst, indem man der Kürze wegen

$$1 - J_0^2(z) - J_1^2(z) = \Phi_0, \quad \int \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta = \varphi_0$$

setzt:

$$\begin{aligned} \int (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta &= \Phi_0 \varphi_0 - \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} \varphi_0 d\vartheta \\ &= \Phi_0 \varphi_0 - \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \varphi_0 d\vartheta \\ &= \Phi_0 \varphi_0 - r_1^2 \nu \int \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \varphi_0 \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

da wegen $z^2 = r_1^2 (1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta)$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = r_1^2 \cdot \frac{\nu}{z} \sin \vartheta$$

ist. Wird nun in letzterem Integral bei Fortsetzung der teilweisen Integration $\varphi_0 \sin \vartheta$ als integrierter Faktor genommen, u. s. f. bei den folgenden Integrationen, so ergibt sich, wenn man

$$\int \varphi_0 \sin \vartheta d\vartheta = \varphi_1, \quad \int \varphi_1 \sin \vartheta d\vartheta = \varphi_2, \quad \int \varphi_2 \sin \vartheta d\vartheta = \varphi_3, \dots \quad \int \varphi_n \sin \vartheta d\vartheta = \varphi_{n+1}$$

setzt, das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} &\int (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \cdot d\vartheta \\ &= \Phi_0 \varphi_0 - r_1^2 \nu \cdot \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \varphi_1 + r_1^4 \nu^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right) \varphi_2 - + \dots, \end{aligned}$$

¹⁾ Diese Schreibweise ist gerechtfertigt, weil offenbar

$$\int_0^{2\pi} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta = 2 \int_0^\pi (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta$$

ist.

oder wenn man

$$\frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \Phi_1, \quad \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right) = \Phi_2 \text{ u. s. f.,}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Phi_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad \Phi_3 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad \dots \quad \Phi_{\alpha+1} = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial z}$$

schreibt:

$$\int (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta = \Phi_0 \varphi_0 - r_1^2 \nu \Phi_1 \varphi_1 + r_1^4 \nu^2 \Phi_2 \varphi_2 - + \dots$$

$$= \sum (-1)^{\alpha} r_1^{2\alpha} \nu^{\alpha} \Phi_{\alpha} \varphi_{\alpha}.$$

39. Obige Integrationen sind leicht auszuführen. Man findet (mit Weglassung der willkürlichen Konstanten)

$$\varphi_0 = \int \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2} \vartheta \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{(1 + \nu^2) \cos \vartheta - 2\nu}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn $\nu < 1$, das untere, wenn $\nu > 1$ ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(1 + \nu^2) \cos \vartheta - 2\nu}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} = \Theta$$

(woraus sich

$$\frac{\partial \arccos \Theta}{\partial \vartheta} = \frac{1 - \nu^2}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}$$

ergibt), so hat man für $\nu < 1$:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \vartheta + \frac{1}{2} \arccos \Theta.$$

Ferner findet man

$$\varphi_1 = \int \left(\frac{1}{2} \vartheta + \frac{1}{2} \arccos \Theta \right) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}{2\nu} \arccos \Theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \nu^2 + 2\nu \cos \vartheta}{2\nu} \vartheta$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \vartheta,$$

$$\varphi_2 = \int \varphi_1 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}{2\nu} \right)^2 \arccos \Theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \nu^2}{2\nu} \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{4} \vartheta \cos^2 \vartheta$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{\nu^4 + 2\nu^2 - 1}{4\nu^2} \vartheta - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \nu^2}{2\nu} \sin \vartheta - \frac{3}{8} \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = \int \varphi_2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{12} \left(\frac{1+\nu^2-2\nu \cos \vartheta}{2\nu} \right)^3 \arccos \Theta - \frac{1}{12} \cdot \frac{1-\nu^2}{2\nu} \left(\left(\frac{1+\nu^2}{2\nu} \right)^2 + \frac{7}{2} \right) \vartheta \\ - \frac{1}{12} \left(\frac{1-\nu^4}{4\nu^2} - \frac{13}{6} \right) \sin \vartheta + \frac{5}{24} \cdot \frac{1-\nu^2}{2\nu} \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\nu^2}{2\nu} \vartheta \sin^2 \vartheta \\ - \frac{1}{12} \vartheta \cos^3 \vartheta - \frac{1}{4} \cdot \frac{\nu^4+2\nu^2-1}{4\nu^2} \vartheta \cos \vartheta + \frac{1}{36} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta - \frac{1}{8} \sin^3 \vartheta, \end{aligned}$$

u. s. w.

Alle diese Ausdrücke verschwinden für $\vartheta = 0$, oder es ist:

$$[\varphi_a]_0 = 0.$$

Für $\vartheta = \pi$ aber ergibt sich

$$[\varphi_0]_\pi = \pi,$$

$$[\varphi_1]_\pi = \frac{\pi}{2} (\nu + 2)$$

$$[\varphi_2]_\pi = \frac{\pi}{2 \cdot 4} (\nu^2 + 4\nu + 6)$$

$$[\varphi_3]_\pi = \frac{\pi}{2 \cdot 4 \cdot 6} (\nu^3 + 6\nu^2 + 15\nu + 20)$$

u. s. f., allgemein

$$[\varphi_a]_\pi = \frac{\pi}{2^{a/2}} \cdot \sum_{b=0}^{b=a} \frac{(2a)^{b-1}}{b!} \nu^{a-b}.$$

40. Weiter findet man, von

$$\Phi_0 = 1 - J_0^2 - J_1^2$$

ausgehend, nach dem obigen (38.) Fortschritungsgesetz

$$\Phi_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = -\frac{2}{z} \left(J_0 \frac{\partial J_0}{\partial z} + J_1 \frac{\partial J_1}{\partial z} \right),$$

oder, wenn man

$$\frac{\partial J_0}{\partial z} = -J_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial J_1}{\partial z} = J_0 - \frac{1}{z} J_1$$

einsetzt:

$$\Phi_1 = \frac{2}{z^2} J_1^2.$$

Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich ferner

$$\Phi_2 = \frac{4}{z^3} J_0 J_1 - \frac{8}{z^4} J_1^2$$

$$\Phi_3 = 4z^{-4} J_0^2 - 32z^{-5} J_0 J_1 - (4z^{-4} - 48z^{-6}) J_1^2$$

$$\Phi_4 = -48z^{-6}J_0^2 + (288z^{-7} - 16z^{-5})J_0J_1 + (56z^{-6} - 384z^{-8})J_1^2$$

$$\Phi_5 = (-16z^{-6} + 576z^{-8})J_0^2 + (304z^{-7} - 3072z^{-9})J_0J_1 \\ + (16z^{-6} - 736z^{-8} + 3840z^{-10})J_1^2$$

$$\Phi_6 = (400z^{-8} - 7680z^{-10})J_0^2 + (64z^{-7} - 5056z^{-9} + 38400z^{-11})J_0J_1 \\ + (-432z^{-8} + 10432z^{-10} - 46080z^{-12})J_1^2$$

$$\Phi_7 = (64z^{-8} - 8256z^{-10} + 115200z^{-12})J_0^2 \\ + (-2176z^{-9} + 86784z^{-11} - 552960z^{-13})J_0J_1 \\ + (-64z^{-8} + 9376z^{-10} - 69696z^{-12} + 645120z^{-14})J_1^2$$

u. s. f.

Nach Einsetzung der Grenzen ergibt sich alsdann, da für $\vartheta = 0$ alle φ verschwinden, die Intensität

$$M^2 = \pi^2 R^4 \cdot \frac{4}{\pi r_1^2} [\sum (-1)^a r_1^{2a} \nu^a \Phi_a \varphi_a]_{\pi}$$

oder einfach

$$M^2 = \pi^2 R^4 \sum \Phi_a \psi_a$$

wenn wir

$$\psi_a = 4(-1)^a \frac{r_1^{2(a-1)}}{2^{a/2}} \sum_{b=0}^{b=a} \frac{(2a)^{b-1}}{b!} \nu^{2a-b}$$

setzen, wo das hier gedachte Φ_a aus den obigen Ausdrücken hervorgeht, wenn man darin statt z seinen Wert für $\vartheta = \pi$, nämlich $z = r_1(1 + \nu)$ einsetzt.

41. Ist $\nu > 1$, so hat man bei Ermittlung der Integrale φ von

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\arccos \Theta$$

auszugehen, und gelangt zu denselben Ausdrücken wie oben (39.), mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt überall $-\arccos \Theta$ statt $\arccos \Theta$ zu setzen ist. Auch hier ist durchaus

$$[\varphi_a]_0 = 0.$$

Ferner ergibt sich der Reihe nach

$$[\varphi_0]_{\pi} = 0^1)$$

$$[\varphi_1]_{\pi} = -\frac{\pi}{2} \nu^{-1}$$

¹⁾ Es ist demnach für jedes $\nu > 1$

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta = 0 \quad (= \pi \text{ für } \nu < 1, = \frac{1}{2}\pi \text{ für } \nu = 1).$$

$$[\varphi_2]_\pi = -\frac{\pi}{2 \cdot 4} (\nu^{-2} + 4\nu^{-1})$$

$$[\varphi_3]_\pi = -\frac{\pi}{2 \cdot 4 \cdot 6} (\nu^{-3} + 6\nu^{-2} + 15\nu^{-1})$$

u. s. f., und allgemein

$$[\varphi_{a+1}]_\pi = -\frac{\pi}{2^{a+1/2}} \sum \frac{(2a+1)^{b-1}}{b!} \nu^{-a-1+b}.$$

Der Intensitätsausdruck wird, wenn man, da das erste Glied der Summe wegen $[\varphi_0]_0 = 0$ und $[\varphi_0]_\pi = 0$ verschwindet, $a+1$ statt a schreibt:

$$M^2 = -\pi^2 R^4 \cdot \frac{4}{\pi} [\sum (-1)^a r_1^{2a} \nu^{a+1} \Phi_{a+1} \varphi_{a+1}]_\pi$$

oder vereinfacht

$$M^2 = \pi^2 R^4 \sum \Phi_{a+1} \psi_{a+1}$$

wenn man

$$4(-1)^a \cdot \frac{r_1^{2a}}{2^{a+1/2}} \sum \frac{(2a+1)^{b-1}}{b!} \nu^b = \psi_{a+1}$$

setzt. Im einzelnen hat man

$$\psi_1 = 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\psi_2 = -4 \cdot \frac{r_1^2}{2 \cdot 4} (1 + 4\nu)$$

$$\psi_3 = 4 \cdot \frac{r_1^4}{2 \cdot 4 \cdot 6} (1 + 6\nu + 15\nu^2)$$

$$\psi_4 = -4 \cdot \frac{r_1^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} (1 + 8\nu + 28\nu^2 + 56\nu^3)$$

$$\psi_5 = 4 \cdot \frac{r_1^8}{2^{5/2}} (1 + 10\nu + 45\nu^2 + 120\nu^3 + 210\nu^4)$$

$$\psi_6 = -4 \cdot \frac{r_1^{10}}{2^{6/2}} (1 + 12\nu + 66\nu^2 + 220\nu^3 + 495\nu^4 + 792\nu^5)$$

$$\psi_7 = 4 \cdot \frac{r_1^{12}}{2^{7/2}} (1 + 14\nu + 91\nu^2 + 364\nu^3 + 1001\nu^4 + 2002\nu^5 + 3003\nu^6)$$

u. s. f.

Die Ausdrücke für Φ sind die nämlichen wie oben (40.), und ist in ihnen ebenfalls $z = r_1(1 + \nu)$ zu setzen.

42. Mit Hilfe der beiden Reihen

$$M^2 = \sum (-1)^c A_c B_c r_1^{2c} \text{ und } M^2 = \sum \Phi_{a+1} \psi_{a+1}$$

kann man nun die Intensität

$$M^2 = \frac{2}{\pi r_1^2} \int_0^{2\pi} \left(1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)\right) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta$$

(wo der Faktor $\pi^2 R^4$, d. i. das Quadrat des Flächeninhalts eines einzelnen Schirmchens, weggelassen ist) für jeden Wert von $\nu = \nu r_1$ numerisch berechnet werden. Beide Reihen sind konvergent, und ergänzen sich derart, dass die erste um so rascher konvergiert, je kleiner, die zweite um so rascher, je grösser νr_1 ist.

In Tab. I. finden sich für ein besonderes Beispiel die Werte von M^2 als Funktion von ν auf vier Decimalen angegeben, und zwar für rotes Licht $\lambda = 0,000656$ mm (Fraunhofersche Linie C) und für das komplementäre Blaugrün $\lambda' = 0,000492$ mm $= \frac{3}{4} \lambda$. Der Radius ϱ der Sonne ist 16 Minuten $= 0,0046542$. Der von Fall zu Fall sich ändernde Radius R der Schirmchen wurde hier mit Rücksicht auf möglichste Bequemlichkeit der Rechnung so gewählt, dass für jenes rote Licht $r_1 = 2\pi R \varrho / \lambda = 0,05$ wurde, für das komplementäre Blaugrün also $r_1' = \frac{4}{3} \cdot 0,05$. Hiemit ergab sich $R = 0,0011216$ mm. Die Berechnung wurde vom Sonnenrand ($\nu = 1$) aus nach ganzen Sonnenbreiten fortschreitend ausgedehnt bis zu einem Winkelabstand von 109 halben Sonnenbreiten, d. i. 29° .

Man erkennt, dass schon in der Mitte der Sonnenscheibe ($\nu = 0$) das Rot an Intensität das Grün übertrifft, wenn auch nur in sehr geringem Masse; etwas mehr schon am Rande der Scheibe ($\nu = 1$). Innerhalb der Scheibe ist ausserdem bei einem aus kleinen Körperchen bestehenden Schirm noch zu der schwach gesättigten Mischfarbe das direkt durchgehende Licht hinzuzufügen. Ausserhalb des Randes herrscht das Rot noch vor bis $\nu = 67$, von $\nu = 69$ bis $\nu = 87$ bekommt das Grün das Uebergewicht, dann wieder das Rot, welches bei $\nu = 103$ zu einem ersten Maximum anwächst. Bei dem angenommenen Durchmesser $2R = 0,0022432$ mm (etwa dreimal so gross als die grösste Lichtwelle) würde also der Radius des Bishopschen Ringes etwa 103 halbe Sonnenbreiten oder 27,5 betragen.

IV.

43. Die Grundlage der vorgetragenen Theorie der Dämmerungserscheinungen bilden die durch Lichtflächen hervorgebrachten Beugungserscheinungen, und insbesondere der Satz, dass eine weisse Lichtfläche, durch eine kleine Oeffnung betrachtet, in ihrer ganzen Ausdehnung rötlich erscheint. Der

auf die Sonne als Lichtquelle anwendbare Hauptfall einer durch eine kreisrunde Oeffnung gesehenen Kreisscheibe ist im vorhergehenden Abschnitt erledigt. Zur Vervollständigung der Theorie von den Beugungserscheinungen der Lichtflächen betrachten wir jetzt noch den anderen einfacheren Hauptfall eines von parallelen geradlinigen Rändern begrenzten Lichtbandes oder Lichtstreifens.

Die leuchtende Fläche sei also ein zur y -Axe paralleler unbegrenzter Lichtstreifen von der Winkelbreite 2ϱ , dessen Mittellinie die y -Axe ist. Der beugende Schirm bestehe aus einem oder mehreren ebenfalls zur y -Axe parallelen unter sich gleichbreiten Spalten oder dunklen Streifen von der Breite $2R$, die in grosser Anzahl (N) im Gesichtsfeld regellos verteilt sind. Ist ihre Länge im Vergleich zur Wellenlänge sehr gross, so brauchen wir die Intensitätsverteilung nur längs einer zu den Spalträndern senkrechten Geraden, etwa längs der x -Axe selbst, zu ermitteln, da die Lichtstärke längs jeder zu den Spalträndern parallelen Geraden konstant ist. Man hat alsdann in dem Ausdruck (25.)

$$S = \int_{-R}^{+R} \sin qx \, dx = 0$$

und

$$C = \int_{-R}^{+R} \cos qx \, dx = 2R \cdot \frac{\sin qR}{qR},$$

folglich

$$C^2 = 4R^2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi R}{\lambda} (a-l)}{\frac{2\pi R}{\lambda} (a-l)} \right)^2.$$

Es ist ferner jetzt in obigem Integral (25.) 2ϱ statt Ω und dl statt dw zu setzen, und die gesuchte Intensität M^2 im Bildpunkt a ergibt sich:

$$M^2 = \frac{4R^2}{2\varrho} \int_{-\varrho}^{+\varrho} \left(\frac{\sin \frac{2\pi R}{\lambda} (a-l)}{\frac{2\pi R}{\lambda} (a-l)} \right)^2 dl.$$

Setzen wir

$$\frac{2\pi R}{\lambda} (a-l) = z, \text{ folglich } dl = -\frac{\lambda}{2\pi R} dz,$$

so erhalten wir

$$M^2 = -R^2 \frac{\lambda}{\pi R \varrho} \int_{\frac{2\pi R}{\lambda} (a-\varrho)}^{\frac{2\pi R}{\lambda} (a+\varrho)} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = R^2 \frac{\lambda}{\pi R \varrho} \int_{\frac{2\pi R}{\lambda} (a-\varrho)}^{\frac{2\pi R}{\lambda} (a+\varrho)} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz,$$

oder, wenn

$$\frac{2\pi R}{\lambda}(a - \varrho) = z_1, \quad \frac{2\pi R}{\lambda}(a - \varrho) = z_2$$

gesetzt wird, so dass

$$\frac{2\pi R \varrho}{\lambda} = z_2 - z_1$$

wird:

$$M^2 = \frac{R^2}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz.$$

Hiedurch ist die Lichtstärke für jeden Punkt a der Abscissenaxe und demnach auch in der ganzen Bildebene bestimmt.

44. Zur Diskussion dieses Ausdrucks ist, wie man sieht, die Kenntnis der stets positiven Funktion

$$y = \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$$

erforderlich. Da

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2$$

stets positiv ist, so steigt die Kurve, deren zur Abscisse z gehörige Ordinate y ist, vom Koordinatenanfang, wo $y = 0$ ist, fortwährend an, und zwar in gleichweit von einander abstehenden, mit wachsendem z immer niedriger werdenden, Treppenabsätzen, ohne Maxima und Minima. Denn der erste Differentialquotient verschwindet für $z = n\pi$, ebenso der zweite

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 2 \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{z \cos z - \sin z}{z^2},$$

nicht aber der dritte

$$\frac{d^3 y}{dz^3} = \frac{2}{z^4} (z^3 \cos 2z - 2z \sin 2z + 3 \sin^2 z),$$

so dass bei $z = n\pi$ Wendepunkte mit zur Abscissenaxe parallelen Tangenten auftreten. Da

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2} = 1,5707963$$

ist, so nähert sich die Curve in immer niedriger werdenden Treppenstufen asymptotisch der Geraden $y = \frac{1}{2} \pi$.

45. Die Funktion y kann leicht in eine für jedes z konvergente Reihe entwickelt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz &= z - \frac{(2z)^3}{3 \cdot 4!} + \frac{(2z)^5}{5 \cdot 6!} - \frac{(2z)^7}{7 \cdot 8!} + \dots \\ &= \sum (-1)^a \cdot \frac{(2z)^{2a+1}}{(2a+1)(2a+2)!} \end{aligned}$$

Andererseits habe ich früher gezeigt¹⁾, dass

$$\text{B)} \quad \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = Si(2z) - \frac{\sin^2 z}{z} = Si(2z) - \frac{\pi}{2} (J_{\frac{1}{2}}(z))^2$$

ist, wo $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$ die Besselsche Funktion mit dem Index $\frac{1}{2}$ und Si den Integralsinus

$$Si(2z) = \int_0^{2z} \frac{\sin z}{z} dz$$

bedeutet. Da nun²⁾

$$Si(2z) = \pi \left[(J_{\frac{1}{2}}(z))^2 + (J_{\frac{3}{2}}(z))^2 + (J_{\frac{5}{2}}(z))^2 + \dots \right]$$

ist, so hat man auch gemäss (B):

$$\text{C)} \quad \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2} \left((J_{\frac{1}{2}}(z))^2 + 2 (J_{\frac{3}{2}}(z))^2 + 2 (J_{\frac{5}{2}}(z))^2 + \dots \right).$$

Sind demnach die Werte der Besselschen Funktionen $J_{\frac{2a+1}{2}}(z)$ bekannt (sie sind von mir berechnet und am Schluss der eben citierten Abhandlung in Tabellen zusammengestellt), so lassen sich auch die Werte der Funktion y mittels der Gleichung (C) mit geringer Mühe angeben. Für kleine Werte von z genügt die unendliche Reihe (A).

In einer früheren Abhandlung³⁾ habe ich gezeigt, dass Integralsinus und Integralcosinus durch eine gewisse mit den Besselschen Funktionen verwandte Funktion $S_{\mu, \nu}$, deren Eigenschaften in einer vorausgegangenen Arbeit⁴⁾ ent-

¹⁾ Lommel, Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme; Abhandlungen der k. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. XV. p. 550. 1886.

²⁾ Ib.

³⁾ Lommel, Zur Theorie der Besselschen Funktionen. Math. Ann. Bd. XVI. p. 202. 1879.

⁴⁾ Lommel, Ueber eine mit den Besselschen Funktionen verwandte Funktion. Math. Ann. Bd. IX. p. 425. 1875.

wickelt sind, dargestellt werden können, derart, dass der Integralsinus die Form

$$Si(z) = \frac{\pi}{2} - \cos z \cdot z^{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \sin z \cdot z^{\frac{3}{2}} S_{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$$

annimmt, wo die Funktionen S sich durch die halbkonvergenten Reihen

$$z^{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \sum (-1)^a \cdot \frac{(2a)!}{z^{2a+1}},$$

$$z^{\frac{3}{2}} S_{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \sum (-1)^a \cdot \frac{(2a+1)!}{z^{2a+2}}$$

ausdrücken lassen, welche für grosse Werte von z zur numerischen Rechnung sehr bequem sind. Macht man hievon Gebrauch, so ergibt sich im Hinblick auf Gleichung B:

$$D) \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2z} + \cos 2z \sum (-1)^a \cdot \frac{(2a+2)!}{(2z)^{2a+3}} - \sin 2z \sum (-1)^a \frac{(2a+1)!}{(2z)^{2a+2}},$$

oder:

$$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2z} + \cos 2z \left(\frac{1 \cdot 2}{(2z)^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(2z)^5} + \dots \right) - \sin 2z \left(\frac{1}{(2z)^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2z)^4} + \dots \right).$$

Schon von $z=7$ an genügen die wenigen hier angeschriebenen Glieder, um den Wert des Integrals auf vier Decimalen genau zu berechnen.

Verfügt man über eine Tabelle des Integralsinus, so ergeben sich die Werte des Integrals y aus der Gleichung (B). Eine solche von Herrn Gymnasiallehrer Dr. Zistl berechnete Tabelle des Integralsinus stand mir zu Gebote; mit deren Hilfe sind die in der am Schlusse folgenden Tab. II aufgeführten Werte von $\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$ berechnet.

46. In der Mitte des Bildes, für $a=0$, hat man (s. 43.) die Lichtstärke

$$M_0^2 = \frac{R^2 \lambda}{\pi R_Q} \int_{-\frac{2\pi R_Q}{\lambda}}^{+\frac{2\pi R_Q}{\lambda}} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{2 R^2 \lambda}{\pi R_Q} \int_0^{\frac{2\pi R_Q}{\lambda}} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz,$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{2\pi R_Q}{\lambda} = \zeta$$

setzt:

$$M_0^2 = 4 R^2 \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz;$$

am Rande des Bildes des Lichtstreifens, für $a = \varrho$, ist die Lichtstärke:

$$M_1^2 = \frac{R^2 \lambda}{4 \pi R \varrho} \int_0^{\frac{4 \pi R \varrho}{\lambda}} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz = \frac{R^2}{2 \zeta} \int_0^{2 \zeta} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz.$$

Wie man sieht, hängen diese Ausdrücke von der Funktion

$$y_1 = \frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$$

ab. Der Differentialquotient derselben ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\partial y_1}{\partial z} = - \frac{1}{z^2} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz + \frac{1}{z} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 = - \frac{1}{z^2} \left(\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz - \frac{\pi}{2} \left(J_{\frac{1}{2}}(z) \right)^2 \right),$$

oder mit Rücksicht auf (C):

$$\frac{\partial y_1}{\partial z} = - \frac{\pi}{z^2} \left(\left(J_{\frac{3}{2}}(z) \right)^2 + \left(J_{\frac{5}{2}}(z) \right)^2 + \left(J_{\frac{7}{2}}(z) \right)^2 + \dots \right).$$

Der Differentialquotient von y_1 ist also stets negativ; die Funktion y_1 nimmt sonach mit wachsendem z fortwährend ab, von $z = 0$, wo $y_1 = 1$ ist (gemäss Gleichung A), bis $z = \infty$, wo sie verschwindet. Es ist daher, wenn $\gamma > 1$ ist, immer

$$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz > \frac{1}{\gamma z} \int_0^{\gamma z} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz,$$

oder

$$\gamma \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz > \int_0^{\gamma z} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz,$$

eine Eigenschaft der Funktion y , während andererseits, wie oben (44.) gezeigt wurde,

$$\int_0^{\gamma z} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz > \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$$

ist.

Die Werte von

$$y_1 = \frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 dz$$

sind in der dritten Columnne der Tabelle II zusammengestellt.

47. Vermöge der Beziehung

$$\zeta = \frac{2\pi R \varrho}{\lambda}$$

sind die Intensitäten M_0^2 und M_1^2 Funktionen der Wellenlänge λ , welche mit wachsendem ζ abnehmen, oder, was dasselbe heisst, die Lichtstärke sowohl in der Mitte als am Rande des Bildes der Lichtfläche wird geringer mit abnehmender Wellenlänge.

Es gilt dies übrigens für jeden Punkt innerhalb des Bildes der Lichtfläche. Denn nach (43.) ist die Lichtstärke in irgend einem Punkte a der Abscissenaxe

$$M^2 = \frac{R^2 \lambda}{\pi R \varrho} \int_{\frac{2\pi R}{\lambda}(a-\varrho)}^{\frac{2\pi R}{\lambda}(a+\varrho)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$$

oder, wenn wir $a = \nu \varrho$ setzen:

$$M^2 = \frac{2R^2}{\zeta} \int_{\zeta(\nu-1)}^{\zeta(\nu+1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = \frac{2R^2}{\zeta} \int_0^{\zeta(\nu+1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz - \frac{2R^2}{\zeta} \int_0^{\zeta(\nu-1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz.$$

Liegt der Punkt a innerhalb der Lichtfläche, d. h. ist $\nu \leq 1$, so besteht dieser Ausdruck

$$M^2 = \frac{2R^2}{\zeta} \int_0^{\zeta(1+\nu)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz + \frac{2R^2}{\zeta} \int_0^{\zeta(1-\nu)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$$

aus zwei positiven Gliedern. Nach dem Vorausgehenden ist aber für jeden dieser beiden Summanden der Differentialquotient nach ζ negativ. Sendet also die Lichtfläche ursprünglich weisses Licht aus, so sind in dem Lichte ihres Bildes die kürzeren Wellen verhältnismässig schwächer vertreten als die längeren, oder das Bild der Lichtfläche erscheint in seiner ganzen Ausdehnung in rötlichem Farbenton.

48. Mittels der Tabelle II lässt sich nun die Lichtstärke nach der Formel

$$M^2 = \frac{1}{2\zeta} \left(\int_0^{\zeta(\nu+1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz - \int_0^{\zeta(\nu-1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz \right)$$

(wo der Faktor $4R^2$ weggelassen wurde) für jeden Punkt $a = \nu \varrho$ der Abscissenaxe berechnen. Für zwei besondere Fälle, die mit der hier behandelten Auf-

gabe in Beziehung stehen, sind die gefundenen Werte in Tab. III zusammengestellt. Es wurde nämlich $\varrho = 16' = 0,0046542$ (gleich der halben Sonnenbreite), $\lambda = 0,000656$ mm (Rot), $\lambda' = \frac{4}{5}\lambda = 0,000525$ mm (Grün), ferner $R = 0,0011216$ mm genommen; damit wird $\zeta = 0,05$, $\zeta' = \frac{5}{4}\zeta = 0,0625$, so dass sich die Werte der beiden Integrale ohne Interpolation unmittelbar der Tabelle II entnehmen lassen.

Die Werte von ν , für welche Maxima oder Minima der Lichtstärke stattfinden, ergeben sich aus der Gleichung:

$$2 \frac{\partial M^2}{\partial \nu} = \left(\frac{\sin \zeta (\nu + 1)}{\zeta (\nu + 1)} \right)^2 - \left(\frac{\sin \zeta (\nu - 1)}{\zeta (\nu - 1)} \right)^2 = 0,$$

welche der analytische Ausdruck ist für die von Schwerd¹⁾ gegebene Konstruktionsregel. Danach findet man diese Stellen, wenn man die Intensitätskurve für einen einzigen Lichtpunkt in einem Abstand, welcher der scheinbaren Breite des Lichtstreifens gleichkommt, zweimal neben einander zeichnet. Den Durchschnittspunkten der beiden Kurven entsprechen die Stellen der Maxima und Minima.

Für die oben angenommenen Zahlenwerte findet man aus vorstehender Gleichung das erste Maximum des Rot ($\lambda = 0,000656$ mm) bei $\nu = 89,876$ halbe Sonnenbreiten, also um $89,876.16$ Minuten $= 23^\circ 58'$ von der Bildmitte entfernt, das erste Maximum des Grün ($\lambda' = 0,000525$ mm) bei $\nu = 71,900$, oder in einem Winkelabstand von $19^\circ 10'$. Das erste Minimum des Rot liegt bei $\nu = 62,848$ ($= 16^\circ 46'$), das erste Minimum des Grün bei $\nu = 50,285$ ($= 13^\circ 25'$).

¹⁾ Schwerd, l. c.

Tab. I.

$$M^2 = \frac{2}{\pi r_1^2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} d\vartheta$$

$$R = 0,0011216 \text{ mm} \quad \lambda = 0,000656 \text{ mm} \quad \lambda' = 0,000492 \text{ mm} \quad r_1 = 0,05$$

$$r_1' = \frac{4}{3} \cdot 0,05 \quad \varrho = 16' = 0,0046542$$

ν	Rot	Grün	ν	Rot	Grün	ν	Rot	Grün
0	0,9997	0,9994	37	0,3957	0,1679	75	0,0003	0,0172
1	0,9991	0,9983	39	0,3532	0,1313	77	0,0000	0,0175
3	0,9941	0,9895	41	0,3130	0,0997	79	0,0006	0,0172
5	0,9842	0,9720	43	0,2739	0,0731	81	0,0018	0,0163
7	0,9695	0,9463	45	0,2376	0,0512	83	0,0034	0,0151
9	0,9501	0,9128	47	0,2032	0,0339	85	0,0054	0,0137
11	0,9264	0,8724	49	0,1727	0,0207	87	0,0082	0,0115
13	0,8986	0,8259	51	0,1444	0,0112	89	0,0095	0,0095
15	0,8676	0,7742	53	0,1188	0,0050	91	0,0115	0,0075
17	0,8322	0,7185	55	0,0960	0,0014	93	0,0133	0,0057
19	0,7943	0,6598	57	0,0761	0,0001	95	0,0148	0,0040
21	0,7539	0,5992	59	0,0588	0,0005	97	0,0160	0,0026
23	0,7114	0,5384	61	0,0441	0,0020	99	0,0169	0,0014
25	0,6673	0,4770	63	0,0320	0,0044	101	0,0173	0,0007
27	0,6222	0,4175	65	0,0221	0,0071	103	0,0175	0,0002
29	0,5764	0,3601	67	0,0151	0,0099	105	0,0173	0,0000
31	0,5303	0,3063	69	0,0085	0,0124	107	0,0167	0,0001
33	0,4846	0,2562	71	0,0043	0,0146	109	0,0159	0,0004
35	0,4396	0,2104	73	0,0017	0,0162			

Tab. II.

z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$
0,00	0,0000	1,0000	0,30	0,2970	0,9901	0,60	0,5767	0,9611
0,05	0,0500	0,9996	0,35	0,3453	0,9865	0,65	0,6205	0,9546
0,10	0,0999	0,9989	0,40	0,3930	0,9825	0,70	0,6633	0,9476
0,15	0,1496	0,9975	0,45	0,4400	0,9779	0,75	0,7052	0,9402
0,20	0,1991	0,9956	0,50	0,4864	0,9728	0,80	0,7459	0,9324
0,25	0,2483	0,9931	0,55	0,5320	0,9672	0,85	0,7856	0,9242

z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$
0,90	0,8240	0,9156	2,55	1,4093	0,5527	5,4	1,4860	0,2752
0,95	0,8613	0,9066	2,60	1,4115	0,5429	5,5	1,4878	0,2705
1,00	0,8973	0,8973	2,65	1,4132	0,5333	5,6	1,4893	0,2659
1,05	0,9321	0,8877	2,70	1,4147	0,5239	5,7	1,4904	0,2615
1,10	0,9656	0,8778	2,75	1,4157	0,5148	5,8	1,4911	0,2571
1,15	0,9977	0,8676	2,80	1,4166	0,5059	5,9	1,4917	0,2528
1,20	1,0286	0,8572	2,85	1,4172	0,4973	6,0	1,4920	0,2487
1,25	1,0581	0,8465	2,90	1,4176	0,4888	6,1	1,4921	0,2446
1,30	1,0862	0,8355	2,95	1,4179	0,4806	6,2	1,4922	0,2407
1,35	1,1130	0,8244	3,0	1,4181	0,4727	6,3 ⁴⁾	1,4922	0,2369
1,40	1,1384	0,8132	3,1	1,4182	0,4575	6,4	1,4922	0,2332
1,45	1,1626	0,8018	3,2 ²⁾	1,4182	0,4432	6,5	1,4922	0,2296
1,50	1,1853	0,7902	3,3	1,4183	0,4298	6,6	1,4924	0,2261
1,55	1,2068	0,7786	3,4	1,4187	0,4173	6,7	1,4927	0,2228
1,60 ¹⁾	1,2269	0,7668	3,5	1,4195	0,4056	6,8	1,4931	0,2196
1,65	1,2458	0,7550	3,6	1,4207	0,3946	6,9	1,4938	0,2165
1,70	1,2634	0,7432	3,7	1,4225	0,3845	7,0	1,4946	0,2135
1,75	1,2799	0,7313	3,8	1,4248	0,3750	7,1	1,4955	0,2106
1,80	1,2951	0,7195	3,9	1,4277	0,3661	7,2	1,4967	0,2079
1,85	1,3091	0,7076	4,0	1,4310	0,3578	7,3	1,4980	0,2052
1,90	1,3221	0,6958	4,1	1,4348	0,3500	7,4	1,4994	0,2026
1,95	1,3340	0,6841	4,2	1,4390	0,3426	7,5	1,5009	0,2001
2,00	1,3448	0,6724	4,3	1,4434	0,3357	7,6	1,5025	0,1977
2,05	1,3546	0,6608	4,4	1,4480	0,3291	7,7	1,5041	0,1953
2,10	1,3636	0,6493	4,5	1,4527	0,3228	7,8	1,5058	0,1931
2,15	1,3716	0,6379	4,6	1,4574	0,3168	7,9 ⁵⁾	1,5074	0,1908
2,20	1,3787	0,6267	4,7	1,4620	0,3111	8,0	1,5090	0,1886
2,25	1,3851	0,6156	4,8 ³⁾	1,4664	0,3055	8,1	1,5104	0,1865
2,30	1,3907	0,6047	4,9	1,4706	0,3001	8,2	1,5118	0,1844
2,35	1,3956	0,5939	5,0	1,4744	0,2949	8,3	1,5131	0,1823
2,40	1,3999	0,5833	5,1	1,4779	0,2898	8,4	1,5142	0,1803
2,45	1,4035	0,5729	5,2	1,4810	0,2848	8,5	1,5151	0,1783
2,50	1,4067	0,5627	5,3	1,4837	0,2799	8,6	1,5159	0,1763

$$1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,21532.$$

$$2) \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,41816.$$

$$3) \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,46252.$$

$$4) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,49216.$$

$$5) \int_0^{\frac{5}{2}\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,50665.$$

z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	z	$\int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$	$\frac{1}{z} \int_0^z \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$
8,7	1,5166	0,1743	9,8	1,5182	0,1549	10,9 ²⁾	1,5243	0,1398
8,8	1,5171	0,1724	9,9	1,5184	0,1534	11,0	1,5252	0,1387
8,9	1,5175	0,1705	10,0	1,5186	0,1519	11,5	1,5288	0,1329
9,0	1,5177	0,1686	10,1	1,5190	0,1504	12,0	1,5308	0,1276
9,1	1,5179	0,1668	10,2	1,5194	0,1490	12,5 ³⁾	1,5311	0,1225
9,2	1,5180	0,1650	10,3	1,5199	0,1476	13,0	1,5313	0,1178
9,3	1,5180	0,1632	10,4	1,5205	0,1462	13,5	1,5324	0,1135
9,4	1,5180	0,1615	10,5	1,5212	0,1449	14,0	1,5347	0,1096
9,5 ¹⁾	1,5180	0,1598	10,6	1,5219	0,1436	14,5 ⁴⁾	1,5365	0,1060
9,6	1,5181	0,1581	10,7	1,5227	0,1423	15,0	1,5386	0,1026
9,7	1,5181	0,1565	10,8	1,5235	0,1411	15,5 ⁵⁾	1,5390	0,0993

Tab. III.

$$M^2 = \frac{1}{2\zeta} \int_0^{\zeta(\nu+1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz - \frac{1}{2\zeta} \int_0^{\zeta(\nu-1)} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz$$

Rot: $\lambda = 0,000656$ mm, $\zeta = 0,05$; Grün: $\lambda' = 0,000525$ mm, $\zeta' = 0,0625$;
 $\varrho = 16'$, $R = 0,0011216$ mm.

ν	Rot	Grün	ν	Rot	Grün	ν	Rot	Grün
0	0,9997	0,9996	15	0,8258	0,7391	31	0,4162	0,2325
1	0,9989	0,9983	17	0,7811	0,6758	33	0,3650	0,1830
3	0,9922	0,9879	19	0,7330	0,6099	35	0,3162	0,1393
5	0,9791	0,9675	21	0,6823	0,5426	37	0,2701	0,1019
7	0,9596	0,9374	23	0,6300	0,4754	39	0,2272	0,0708
9	0,9341	0,8986	25	0,5762	0,4097	41	0,1877	0,0458
11	0,9029	0,8517	27	0,5225	0,3466	43	0,1513	0,0269
13	0,8667	0,7982	29	0,4687	0,2871	45	0,1200	0,0134

$$1) \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,51803.$$

$$2) \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,52514.$$

$$3) \int_0^{4\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,53113.$$

$$4) \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,53524.$$

$$5) \int_0^{5\pi} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,53903.$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 dz = 1,570796 = \frac{1}{2}\pi.$$

ν	Rot	Grün	ν	Rot	Grün	ν	Rot	Grün
47	0,0918	0,0050	91	0,0471	0,0097	135	0,0043	0,0101
49	0,0679	0,0008	93	0,0460	0,0057	137	0,0063	0,0079
51	0,0480	0,0005	95	0,0437	0,0038	139	0,0079	0,0058
53	0,0319	0,0034	97	0,0428	0,0013	141	0,0096	0,0042
55	0,0194	0,0066	99	0,0386	0,0003	143	0,0115	0,0030
57	0,0103	0,0132	101	0,0349	0,0002	145	0,0129	0,0015
59	0,0033	0,0198	103	0,0311	0,0005	147	0,0140	0,0006
61	0,0010	0,0276	105	0,0266	0,0018	149	0,0154	0,0001
63	0,0004	0,0319	107	0,0228	0,0034	151	0,0159	0,0002
65	0,0011	0,0384	109	0,0183	0,0059	153	0,0164	0,0002
67	0,0038	0,0426	111	0,0146	0,0074	155	0,0164	0,0008
69	0,0077	0,0458	113	0,0110	0,0098	157	0,0162	0,0017
71	0,0125	0,0466	115	0,0078	0,0121	159	0,0157	0,0022
73	0,0179	0,0472	117	0,0052	0,0138	161	0,0149	0,0035
75	0,0232	0,0450	119	0,0030	0,0150	163	0,0137	0,0046
77	0,0285	0,0422	121	0,0015	0,0160	165	0,0125	0,0059
79	0,0336	0,0394	123	0,0005	0,0164	167	0,0111	0,0064
81	0,0379	0,0345	125	0,0001	0,0162	169	0,0096	0,0074
83	0,0415	0,0294	127	0,0001	0,0158	171	0,0081	0,0079
85	0,0443	0,0234	129	0,0006	0,0147	173	0,0065	0,0083
87	0,0462	0,0197	131	0,0016	0,0133	175	0,0050	0,0082
89	0,0470	0,0142	133	0,0030	0,0114			