

Sitzungsberichte
der
mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung
der
Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1941. Heft I
Sitzungen Januar-Juni

München 1941

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VI.

Konvexe Polygonzüge und Partitionen nebst deren Ordnungsbeziehungen.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 1. Februar 1941.

§ 1. Ordnungsbeziehungen zwischen den betrachteten Polygonzügen.

1. Das Folgende behandelt eine Deutung der Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen mit Hilfe gewisser konvexer Polygonzüge. Wir beginnen (Nr. 1–3) mit diesen Polygonzügen.

Sei m eine ganze positive Zahl. Wir nehmen ein Quadrat Q , das in m^2 Teilquadrate zerlegt sei, etwa in der xy -Ebene das in Einheitsquadrate zerlegte Quadrat $0 \leq x \leq m$, $0 \leq y \leq m$. Wir betrachten alle vom Eckpunkt $X = (m, 0)$ zum gegenüberliegenden Eckpunkt $Y = (0, m)$ gehenden konvexen¹ Polygonzüge von der Art, daß jeder Eckpunkt des Polygonzugs ein Gitterpunkt unserer Quadrateinteilung von Q ist und jede der Geraden $x = 0$, $x = 1, \dots, x = m - 1$ von unserem Polygonzug in einem solchen Gitterpunkt getroffen wird (vgl. Fig. 1, wo $m = 4$ gewählt ist^{1a}). Der Gitterpunkt, den der Polygonzug mit $x = \mu$ gemein hat ($0 \leq \mu \leq m$), werde mit (μ, y_μ) bezeichnet. Die Konvexität des Polygonzugs ist dann durch

$$(y_\mu - y_{\mu+1}) - (y_{\mu-1} - y_\mu) \geq 0 \quad \text{für } 0 < \mu < m \quad (1)$$

¹ „Konvex“ ist hier in dem Sinn zu verstehen, daß unser im I. Quadranten liegender Polygonzug zusammen mit denjenigen in den drei anderen Quadranten der Ebene, die durch wiederholte Spiegelung an den Achsen entstehen, ein geschlossenes konvexes Polygon bildet.

^{1a} Die verschiedene Kennzeichnung der einzelnen Polygonzüge, z. B. des Polygonzuges A durch eine fein-strichlierte, C durch eine strichpunktierte Linie, ist in Fig. 1 (und dasselbe gilt für Fig. 2) nur soweit beibehalten, bis der Polygonzug die Gerade $y = m$ trifft. Von diesem Treffpunkt an bis zum Punkt Y verläuft der Polygonzug auf der Geraden $y = m$.

ausgedrückt², wozu als charakteristisch für die betrachteten Polygonzüge noch

$$m = y_0 \geq y_1, \quad y_m = 0$$

kommt. Jeder solche Polygonzug $\mathfrak{P}$ kann als das Bild einer in $0 \leq x \leq m$ erklärten, stückweise linearen, monoton nicht-zunehmenden Funktion $y = f(x)$ mit $f(0) = m, f(m) = 0$ angesehen werden. Von zwei verschiedenen solchen Polygonzügen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*$ soll $\mathfrak{P}$ als der höhere, $\mathfrak{P}^*$ als der tiefere bezeichnet und

$$\mathfrak{P} > \mathfrak{P}^* \quad (2)$$

(oder $\mathfrak{P}^* < \mathfrak{P}$) geschrieben werden, wenn für die zugehörigen Funktionen durchwegs $f(x) \geq f^*(x)$, aber nicht durchwegs $f(x) = f^*(x)$ gilt; anders gesagt, wenn für $0 \leq \mu \leq m$ durchwegs

$$y_\mu \geq y_\mu^*, \quad (3)$$

aber nicht durchwegs $y_\mu = y_\mu^*$ gilt, unter (μ, y_μ^*) den zu $x = \mu$ gehörigen Punkt von $\mathfrak{P}^*$ verstanden³.

2. Durch die eingeführte Ordnungsbeziehung (2), die natürlich transitiv ist⁴, wird die Gesamtheit der zu einer bestimmten Zahl m gehörenden Polygonzüge $\mathfrak{P}$ zu einer (vollständig oder teilweise) geordneten Menge. Beispielsweise sind in Fig. 1 die 5 Polygonzüge A, B, C, D, E dargestellt^{4a}, die sich für

² Gilt hier das Gleichheitszeichen, dann liegen die drei Punkte $(\mu - 1, y_{\mu-1}), (\mu, y_\mu), (\mu + 1, y_{\mu+1})$ in einer Geraden; gilt das Ungleichheitszeichen, so ist (μ, y_μ) ein Eckpunkt des Polygonzugs; außerdem sollen auch X und Y zu den Eckpunkten des Polygonzugs gezählt werden.

³ Mannigfache Verallgemeinerungen der hier betrachteten Ordnungsbeziehungen, auf die aber nicht weiter eingegangen werden soll, liegen auf der Hand. Beispielsweise könnte man – bei konvexen, die Punkte X, Y des Quadrates Q verbindenden Polygonzügen verbleibend – die Forderung fallen lassen, daß jede Gerade $x = 1, x = 2, \dots$ vom Polygonzug in einem Gitterpunkt getroffen wird, oder auch darüber hinaus davon absehen, daß jeder Eckpunkt des Polygonzugs ein Gitterpunkt ist. Im letzteren Fall, wo die Menge der betrachteten Polygonzüge in Q unendlich wird, gibt es natürlich, wie man sofort sieht, keine „elementaren“ Ordnungsbeziehungen im Sinn von § 3.

⁴ d. h. mit $\mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_2 > \mathfrak{P}_3$ ist stets auch $\mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_3$.

^{4a} wobei Anm. 1 a zu beachten ist.

$m = 4$ ergeben, und man erhält hier die Ordnungsbeziehungen $A > B > C > D > E$, somit eine „geordnete“ (vollständig geordnete) Menge⁵. Es kann aber auch vorkommen, daß unsere Polygonmenge nur teilweise geordnet ist; anders gesagt, es kann vorkommen, daß es in der Gesamtheit der zur Zahl m gehörenden Polygonzüge ein Paar „neutraler“ $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*$ gibt (wir meinen: mindestens ein Paar neutraler), für das keine der Beziehungen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*, \mathfrak{P} > \mathfrak{P}^*$,

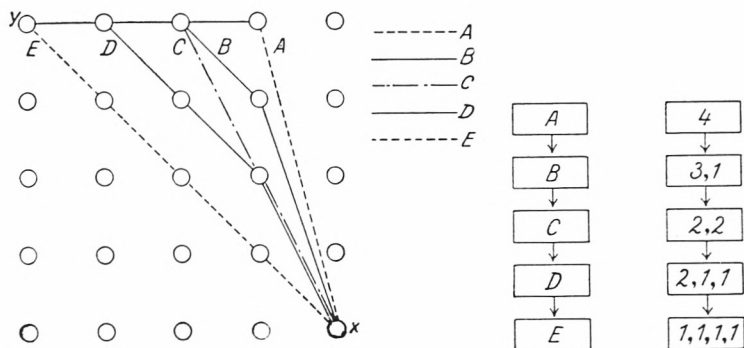


Fig. 1

$\mathfrak{P} < \mathfrak{P}^*$ gilt. So sieht man für $m = 6$ in Fig. 2, daß von den beiden einander durchsetzenden Polygonzügen C und D keiner höher ist als der andere. Wohl aber ist der Polygonzug B höher als jeder der genannten Polygonzüge C, D ; und jeder von diesen beiden ist wieder höher als der mit E bezeichnete Polygonzug⁶. Die Fig. 2 enthält übrigens nicht alle Polygonzüge der zu $m = 6$ gehörenden Gesamtheit — es gibt deren 11 —, die, alle in dieselbe Figur eingezeichnet, bei dem gewählten Maßstab ein nicht sehr übersichtliches Bild ergäben; vielmehr sind außer den genannten

⁵ In etwas anderer Form sind diese Ordnungsbeziehungen in Fig. 1 neben dem Bild der Polygonzüge durch die in Rechtecke eingeschlossenen Buchstaben A bis E und die verbindenden Pfeile dargestellt (der einzelne Pfeil stellt eine „elementare“ Ordnungsbeziehung im Sinn von Anm. 13 vor). Auf die daneben dargestellten Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen kommen wir in Nr 4 zu sprechen.

⁶ Diese Ordnungsbeziehungen $B > C, B > D, C > E, D > E$ sind in Fig. 2 unter dem Bild der Polygonzüge in derselben Form dargestellt, die in Fig. 1 angewendet wurde; vgl. Anm. 5.

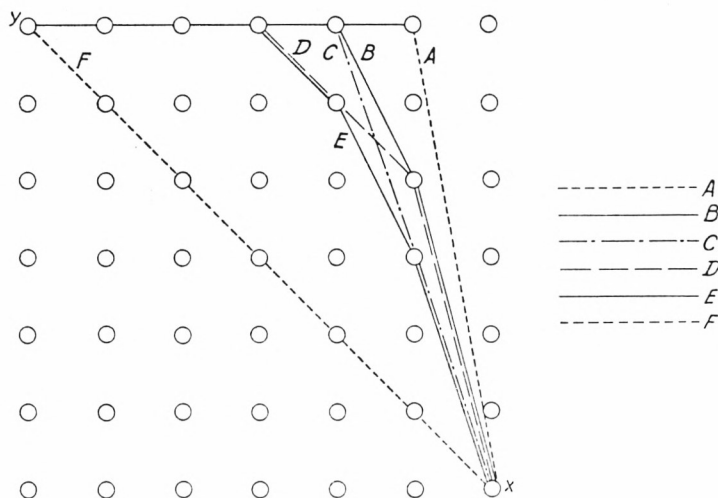


Fig. 2.

vier Polygonzügen in die Fig. 2 nur noch die extremen Polygonzüge A und F aufgenommen, der eine höher, der andere tiefer als alle anderen Polygonzüge der Gesamtheit.

3. Natürlich gibt es, wie in den betrachteten Beispielen $m = 4$ und $m = 6$, ebenso für jedes m einen Polygonzug $\hat{\mathfrak{P}}$, der höher, einen anderen, $\mathfrak{P}$, der tiefer ist als alle übrigen der Gesamtheit: $\hat{\mathfrak{P}}$ ist derjenige Polygonzug, der von X über den Punkt $(m - 1, m)$ nach Y führt, $\mathfrak{P}$ aber derjenige, der X über alle Punkte $(\mu, m - \mu)$ geradlinig mit Y verbindet⁷. Wenn nun eine Menge

⁷ Nur für $m = 1$, wo es überhaupt in unserer Gesamtheit nur einen einzigen Polygonzug gibt, fallen diese beiden Polygonzüge $\hat{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{P}$ zusammen.

durch Einführung einer transitiven Ordnungsbeziehung zu einer teilweise geordneten wird, so kann es im allgemeinen natürlich vorkommen, daß die Menge in Teilmengen zerfällt, sodaß jedes Element aus einer der Teilmengen zu jedem aus einer anderen Teilmenge neutral ist, die Gesamtmenge also im Hinblick auf die Ordnungsbeziehungen nicht zusammenhängend ist⁸; und selbst wenn eine Menge mit Ordnungsbeziehung in diesem Sinne zusammenhängend und außerdem endlich ist, kann es im allgemeinen vorkommen, daß es mehr als ein „Spitzen-Element“ gibt, das höher ist als jedes andere, zu dem es nicht neutral ist, — analog mehr als ein Wurzel-Element (Fuß-Element), das tiefer ist als jedes, mit dem es in Ordnungsbeziehung steht⁹. Für unsere Polygon-Gesamtheit aber folgt aus dem Gesagten (nämlich daraus, daß jeder Polygonzug $\leq \hat{\mathfrak{P}}$ und $\geq \mathfrak{P}$ ist), daß sie nicht nur bezüglich ihrer Ordnungsbeziehungen zusammenhängend ist, sondern daß bei einer Gesamtdarstellung dieser Beziehungen nur ein einziges Element an der Spitze und nur ein einziges am Wurzelende (Fußende) steht.

§ 2. Zusammenhang mit den Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen.

4. Bei alledem handelt es sich um in anderer Form bekannte Dinge. Setzt man

$$y_{\mu} - y_{\mu+1} = a_{m-\mu}, \quad (\text{für } 0 \leq \mu < m) \quad (4)$$

so wird aus der Konvexitätsbedingung (1) — nach Vertauschung von μ mit $m - \mu$ — einfach

$$a_{\mu} - a_{\mu+1} \geq 0 \quad \text{für } 0 < \mu < m,$$

⁸ Stellt man also in einem solchen Fall alle Ordnungsbeziehungen dar so wie in Fig. 1 (und wie auch in Fig. 2 ein Teil der Ordnungsbeziehungen für $m = 6$ wiedergegeben ist), dann zerfällt die so entstehende stammbaumartige Figur in mehrere getrennte Teile und man kann (vgl. „Über Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren V. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen“, diese Sitz.ber., Jahrgang 1941, S. 1–37, Nr. 27, Anm. 50) von einer Aufteilung der Menge auf mehrere Familien sprechen.

⁹ Der Stammbaum (vgl. Anm. 8 und Monatshefte, I. c. ¹¹ Nr. 35, S. 21) hat dann mehrere Spitzen, bzw. mehrere Wurzelenden.

wozu wegen $y_0 \geq y_1$ und wegen $\sum_1^m a_\mu = y_0 - y_m$ noch

$$a_m \geq 0$$

und

$$\sum_1^m a_\mu = m$$

tritt. Das Zahlensystem $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_m)$ stellt also eine fallend geordnete Partition der Zahl m dar, wobei umgekehrt jeder solchen Partition genau einer unserer Polygonzüge entspricht, nämlich der durch

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{m-\mu} a_\nu \quad (0 \leq \mu \leq m) \quad (5)$$

gekennzeichnete¹⁰. Sind nun $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \dots)$ und $\mathfrak{A}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots)$ die den Polygonzügen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ entsprechenden Partitionen und ist $\mathfrak{P} > \mathfrak{P}^*$, so heißt das, wie man aus (3) in Nr. 1 und aus (5) leicht entnimmt, daß die Ungleichungen

$$A_\lambda \leq A_\lambda^* \quad (1 \leq \lambda \leq m) \quad (6)$$

— jedoch nicht durchwegs mit dem Gleichheitszeichen — bestehen, wenn $A_\lambda = \sum_{\nu=\lambda}^m a_\nu$, $A_\lambda^* = \sum_{\nu=\lambda}^m a_\nu^*$ gesetzt ist. Das ist aber genau die an anderer Stelle¹¹ gegebene Kennzeichnung für die Beziehung

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^* \quad (7)$$

zwischen den Partitionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$, sodaß die Ordnungsbeziehungen zwischen den betrachteten konvexen Polygonzügen aufgefaßt werden können als geometrische Deutung der Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen¹². Demgemäß sind in Fig. 1 und 2 neben der Darstellung der Ordnungsbeziehungen zwischen den Polygonzügen (durch Pfeile zwischen den in Rechtecke ein-

¹⁰ Für $m - \mu = 0$ ist die Summe natürlich durch 0 zu ersetzen.

¹¹ Monatshefte f. Math. u. Physik 49 (1940), Nr. 24.

¹² Diese Deutung habe ich auch in einem kürzlich in Göttingen auf Einladung des Mathematischen Instituts gehaltenen Vortrag über „Gitterpunktmengen und symmetrische Funktionen“ erwähnt.

geschlossenen Buchstaben, mit denen die Polygonzüge bezeichnet sind^{12a}) noch (rechts anschließend) die Ordnungsbeziehungen zwischen den diesen Polygonzügen entsprechenden Partitionen angegeben.

§ 3. Die elementaren Ordnungsbeziehungen.

5. Unter den Ordnungsbeziehungen (7) zwischen zwei Partitionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^*$ sind von besonderer Bedeutung die „elementaren“, d. h. diejenigen, für die es keine dritte Partition $\mathfrak{U}^{(1)}$ mit $\mathfrak{U} > \mathfrak{U}^{(1)}$ und $\mathfrak{U}^{(1)} > \mathfrak{U}^*$ gibt¹³. Der Übergang von $\mathfrak{U}^*$ zu $\mathfrak{U}$ bzw. von $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{U}^*$ wurde dann¹⁴ als elementarer Aufbau bzw. elementarer Abbau bezeichnet¹⁵. Es ist nicht schwer, diese elementaren Übergänge an den entsprechenden Polygonzügen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^*$ zu kennzeichnen. Man könnte hiezu von der l. c.¹⁴ gegebenen Kennzeichnung der drei Typen eines elementaren Abbaues einer Partition ausgehen. Anschaulicher wird es sein, unmittelbar an unsere Definition der Beziehungen (2) zwischen Polygonzügen anzuknüpfen und direkt die elementaren unter diesen Beziehungen zu bestimmen.

6. Sei also $\mathfrak{P}^0$ irgend ein von dem (in Nr. 3 erklärten) Polygonzug $\mathfrak{P}$ verschiedener, die Gitterpunkte (μ, γ_μ^0) (für $0 \leq \mu \leq m$) verbindender Polygonzug, wobei natürlich (vgl. Anm. 7) $m > 1$ vorauszusetzen ist. Wegen $\mathfrak{P}^0 \neq \mathfrak{P}$ muß $\mathfrak{P}^0$ mindestens einen

^{12a} Vgl. Anm. 5 und 6.

¹³ Natürlich kann man ganz allgemein transitive Ordnungsbeziehungen (vgl. Anm. 4) in einer endlichen Menge dadurch festlegen, daß man die im obigen Sinn elementaren unter diesen Ordnungsbeziehungen angibt. Veranschaulicht man dann jede dieser elementaren Ordnungsbeziehungen durch einen vom höheren zum tieferen Element führenden Pfeil, so erhält man jene stammbaumartige Figur, wie sie verschiedentlich zur Darstellung der Ordnungsbeziehungen, sei es zwischen Partitionen (s. Monatshefte l. c.⁹, § 7), sei es zwischen komprimierten Gitterpunktmengen (s. Note II, l. c.¹⁷, §§ 5 und 8, sowie Note V, l. c.⁸, Nr. 29, 30) oder (in Fig. 1 und 2 der vorliegenden Note) zwischen konvexen Polygonzügen verwendet wurde.

¹⁴ Vgl. l. c.¹¹, Nr. 26, 27 und Satz (f) in Nr. 29.

¹⁵ Diese Begriffe decken sich im Wesentlichen mit dem des elementaren Umbaus einer komprimierten 2-dimensionalen Gitterpunktmenge; vgl. Note II, l. c.¹³, § 5.

von X und Y verschiedenen Eckpunkt (vgl. Anm. 2) aufweisen. Beim Übergang von $\mathfrak{P}^0$ zu einem Polygonzug $\mathfrak{P}^* < \mathfrak{P}^0$ muß mindestens ein Gitterpunkt (μ, y_μ^0) mit $0 < \mu < m$ durch einen tiefer liegenden (μ, y_μ^*) , also mit $y_\mu^* < y_\mu^0$, ersetzt werden; und unter diesen zu ersetzenden Gitterpunkten muß offenbar (da andernfalls $\mathfrak{P}^*$ nicht konvex ausfiele) mindestens einer ein Eckpunkt von $\mathfrak{P}^0$ sein.

Wir wollen nun einen Polygonzug $\mathfrak{P}'$ bestimmen, für den $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}' \geq \mathfrak{P}^*$ gilt, und von der Art, daß kein der Ungleichung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}'$ genügender Polygonzug $\mathfrak{P}_1$ existiert. Denken wir dies mit jedem in der Beziehung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}^*$ stehenden Paar von Polygonzügen ausgeführt, so müssen sich dabei alle elementaren Ordnungsbeziehungen $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}'$ ergeben. Es wird sich zeigen, daß für diese elementaren Ordnungsbeziehungen drei Typen unterschieden werden können. Sie entsprechen, wie wir zum Schluß (Nr. 9) sehen werden, den Typen I, II, III, die bei den elementaren Abbauten einer Partition¹⁶, bzw. bei den elementaren Umbauten einer komprimierten 2-dimensionalen Gitterpunktmenge¹⁷ eingeführt wurden.

7. Zunächst betrachten wir zwei Sonderfälle bezüglich der gegenseitigen Lage der Ausgangspolygone $\mathfrak{P}^0$ und $\mathfrak{P}^*$, wobei wir wegen der Gestalt des zwischen $\mathfrak{P}^0$ und $\mathfrak{P}^*$ liegenden Flächenstückes vom „Trapez-Fall“ bzw. „Doppeldreiecks-Fall“ sprechen werden.

Der Trapez-Fall liegt vor, wenn es zwei ganze Zahlen α, β mit $\alpha \geq 0, \beta \leq m - 1$ und

$$\alpha + 1 < \beta \quad (8)$$

gibt (übrigens werden wir nachträglich auch $\alpha + 1 = \beta$ einbeziehen), sodaß

$$\begin{aligned} y_\mu^0 &= y_\mu^* + 1 && \text{für } \alpha + 1 \leq \mu \leq \beta, \\ y_\mu^0 &= y_\mu^* && \text{für } 0 \leq \mu \leq \alpha \text{ und } \beta + 1 \leq \mu \leq m, \end{aligned}$$

¹⁶ Monatshefte l. c. ⁹, Nr. 25–27.

¹⁷ „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmengen“, diese Sitz.ber., Jahrgang 1940, S. 69–131, Nr. 25.

$$\begin{aligned}
 a_{m-\mu}^* - a_{m-\mu+1}^* &= \\
 &= (y_{\mu}^* - y_{\mu+1}^*) - (y_{\mu-1}^* - y_{\mu}^*) = 0 \text{ für } \alpha + 1 \leq \mu \leq \beta \quad (9)
 \end{aligned}$$

ist¹⁸. Dieser Fall wird schematisch¹⁹ durch Fig. 3 veranschaulicht, in der $\beta - \alpha = 3$ gewählt ist. Das Flächenstück zwischen

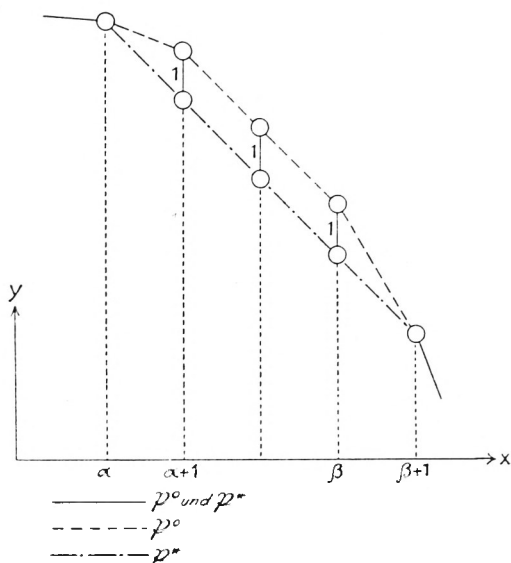


Fig. 3

$\mathfrak{P}^0$ und $\mathfrak{P}^*$ ist ein Trapez, dessen parallele Gegenseiten in der y -Richtung den Abstand 1 haben. Sucht man in diesem Falle einen der Bedingung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}' \geq \mathfrak{P}^*$ genügenden Polygonzug, so muß beim Übergang von $\mathfrak{P}^0$ zu $\mathfrak{P}'$ wenigstens einer der Punkte

¹⁸ Aus der Konvexität von $\mathfrak{P}^0$ folgt natürlich noch, falls $\beta + 1 < m$ ist,

$$a_{m-\beta-1}^0 \geq a_{m-\beta}^0$$

und, falls $\alpha \geq 1$ ist,

$$a_{m-\alpha+1}^0 \leq a_{m-\alpha}^0.$$

¹⁹ Die Figur ist nur schematisch, weil in ihr nicht berücksichtigt ist, daß bei jedem unserer Polygonzüge der Unterschied der y -Koordinaten aufeinanderfolgender Gitterpunkte des Polygonzugs stets eine ganze Zahl ist. Außerdem sind die Längeneinheiten in beiden Achsenrichtungen verschieden gewählt.

(μ, y_μ^0) mit $\alpha + 1 \leq \mu \leq \beta$ in eine tiefere Lage gerückt werden (u. zw. wegen $\mathfrak{P}' \geq \mathfrak{P}^*$ notwendig in die Lage $(\mu, y_\mu^0 - 1) = (\mu, y_\mu^*)$); die Konvexität von $\mathfrak{P}'$ zwingt aber dann, gleichzeitig alle diese Punkte herabzurücken; es ist also $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^*$ der einzige Polygonzug $\mathfrak{P}'$, der der Bedingung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}' \geq \mathfrak{P}^*$ genügt.

Läßt man in (8) außer dem $<$ -Zeichen auch das Gleichheitszeichen zu, so bleibt alles Gesagte in Geltung, nur wird aus dem Trapez ein Dreieck.

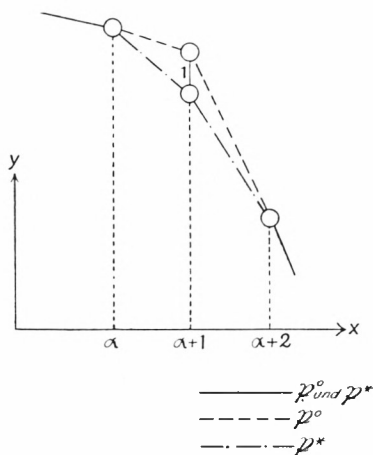


Fig. 4

Der Doppeldreiecks-Fall, schematisch (vgl. Anm. 19) durch Fig. 4 veranschaulicht, liegt vor, wenn für ein α mit $0 \leq \alpha \leq m-2$

$$y_{\alpha+1}^0 = y_{\alpha+1}^* + 1,$$

$$y_\mu^0 = y_\mu^* \text{ für } 0 \leq \mu \leq \alpha \text{ und } \alpha + 2 \leq \mu \leq m,$$

$$a_{m-\alpha-1}^* - a_{m-\alpha}^* = (y_{\alpha+1}^* - y_{\alpha+2}^*) - (y_\alpha^* - y_{\alpha+1}^*) > 0 \quad (10)$$

gilt²⁰. (Übrigens werden wir nachträglich auch den Fall $a_{m-\alpha-1}^* - a_{m-\alpha}^* = 0$ einbeziehen). Das zwischen $\mathfrak{P}^0$ und $\mathfrak{P}^*$ liegende Doppeldreieck weist (für $x = \alpha + 1$) die Maximalbreite 1

²⁰ Aus der Konvexität von $\mathfrak{P}^0$ folgt natürlich noch, falls $\alpha + 2 < m$ ist, $a_{m-\alpha-2}^0 \geq a_{m-\alpha-1}^0$ und, falls $\alpha \geq 1$ ist, $a_{m-\alpha+1}^0 \leq a_{m-\alpha}^0$.

in der y -Richtung auf. Ersichtlich ist wieder $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^*$ der einzige der Bedingung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}' \geq \mathfrak{P}^*$ genügende Polygonzug $\mathfrak{P}'$.

Läßt man in (10) außer dem $>$ -Zeichen auch das Gleichheitszeichen zu, so bleibt alles Gesagte in Geltung, nur fallen dann die beiden zu $\mathfrak{P}^*$ gehörenden Seiten des Doppeldreiecks in dieselbe Gerade. Aus dem Doppeldreieck wird ein einfaches Dreieck und man erhält den gleichen Fall, der sich beim Trapez-Fall für $\alpha + 1 = \beta$ einstellte.

In jedem der besprochenen Fälle haben wir es nach dem Gesagten mit einer elementaren Ordnungsbeziehung im Sinne von Nr. 5 zu tun. Wir wollen diese elementare Ordnungsbeziehung eine solche vom Typus I nennen, wenn der Trapez-Fall im engeren Sinne (bei Erfülltsein von (8)) vorliegt; vom Typus III, wenn der Doppeldreiecks-Fall im engeren Sinne (bei Erfülltsein von (10)) vorliegt. Als Typus II aber werde der an letzter Stelle besprochene Fall bezeichnet, der sich sowohl dem Trapez- wie dem Doppeldreiecks-Fall angliedern läßt.

Diese Typen elementarer Ordnungsbeziehungen zwischen Polygonzügen werden sich im Folgenden ganz von selbst einstellen; zugleich wird sich zeigen, daß mit diesen Typen die Gesamtheit aller elementaren Ordnungsbeziehungen erschöpft ist.

8. Wir kehren zum allgemeinen Fall zweier in der Beziehung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}^*$ stehender Polygonzüge zurück. Zwecks Bestimmung eines Polygonzugs $\mathfrak{P}'$ der besprochenen Art (vgl. Nr. 6) verfahren wir so. Sei γ die größte ganze Zahl μ , für die $y_\mu^* < y_\mu^0$ ist ($0 < \gamma < m$). Es mögen für die Punkte von $\mathfrak{P}^0$ bzw. $\mathfrak{P}^*$ die Bezeichnungen $P_\mu^0 = (\mu, y_\mu^0)$, $P_\mu^* = (\mu, y_\mu^*)$ verwendet und mit H_γ der Punkt $(\gamma, y_\gamma^0 - 1)$ bezeichnet werden. Wir betrachten die Halbgerade g , die durch Verlängerung der zu $\mathfrak{P}^0$ gehörenden Strecke $P_{\gamma+1}^0 P_\gamma^0$ über P_γ^0 hinaus entsteht, ferner die Halbgerade h , die durch Verlängerung der Strecke $P_{\gamma+1}^0 H_\gamma$ über H_γ hinaus entsteht²¹. Die auf g , bzw. h für $0 \leq \mu \leq \gamma + 1$ liegenden Gitterpunkte bezeichnen wir mit (μ, g_μ) bzw. (μ, h_μ) , wobei

$$h_\mu = y_{\gamma+1}^0 + (\gamma + 1 - \mu) (y_\gamma^0 - 1 - y_{\gamma+1}^0)$$

²¹ Das Gefälle der beiden Halbgeraden g und h unterscheidet sich demgemäß genau um eine Einheit.

und

$$g_{\mu} = h_{\mu} + \gamma + 1 - \mu,$$

also

$$g_{\mu} > h_{\mu} \text{ für } 0 \leq \mu \leq \gamma \quad (11)$$

ist. Wegen $y_{\gamma}^* \leq y_{\gamma}^0 - 1 = h_{\gamma}$ und da der Konvexheit von $\mathfrak{P}^*$ wegen nirgends h unter $\mathfrak{P}^*$ sinken kann, ist $h_{\mu} \geq y_{\mu}^*$ für $0 \leq \mu \leq \gamma + 1$, im besonderen also

$$h_0 \geq y_0^* = m = y_0^0. \quad (12)$$

Gemäß (11) ist also $g_0 > y_0^0$; und da, der Konvexheit von $\mathfrak{P}^0$ wegen, nirgends $\mathfrak{P}^0$ über g sich erheben kann, ist $g_{\mu} \geq y_{\mu}^0$ für $0 \leq \mu \leq \gamma + 1$. Sei nun $\beta - 1$ der größte Wert von μ , für den $g_{\mu} > y_{\mu}^0$ ist ($1 \leq \beta \leq \gamma$); anders gesagt ist dann P_{β}^0 der erste Eckpunkt von $\mathfrak{P}^0$, den man auf $\mathfrak{P}^0$ trifft, wenn man $\mathfrak{P}^0$ von $P_{\gamma+1}^0$ aus in Richtung abnehmender x durchwandert²². Mit q bezeichnen wir die von $P_{\beta+1}^0$ ausgehende zu h (gleichsinnig) parallele Halbgerade, wobei für die auf q liegenden Gitterpunkte (μ, q_{μ}) offenbar

$$q_{\mu} \geq h_{\mu} \quad (\text{für } 0 \leq \mu \leq \beta + 1), \quad (13)$$

somit $q_0 \geq y_0^0$ gilt. Andererseits ist²³

$$y_{\beta}^0 - q_{\beta} = 1 \quad (14)$$

²² Das Gefälle der Polygonseite $P_{\beta-1}^0 P_{\beta}^0$ ist also um mindestens eine Einheit schwächer als jenes von g ; diese Polygonseite ist also (vgl. Anm. 21) entweder parallel zu h oder sie hat ein schwächeres Gefälle als h und als die (nachher eingeführte) Halbgerade q .

²³ Aus

$$\begin{aligned} y_{\mu}^0 &= g_{\mu} \quad \text{für } \beta \leq \mu \leq \gamma + 1, \\ y_{\beta-1}^0 &\leq g_{\beta-1} - 1, \end{aligned}$$

somit

$$y_{\mu}^0 - y_{\mu+1}^0 = g_{\mu} - g_{\mu+1} = y_{\gamma}^0 - y_{\gamma+1}^0 \quad \text{für } \beta \leq \mu \leq \gamma,$$

sowie aus

$$\begin{aligned} q_{\mu} &= y_{\beta+1}^0 + (\beta + 1 - \mu) (y_{\gamma}^0 - 1 - y_{\gamma+1}^0) = \\ &= y_{\beta+1}^0 + (\beta + 1 - \mu) (y_{\beta}^0 - 1 - y_{\beta+1}^0) \quad (0 \leq \mu \leq \beta + 1) \end{aligned}$$

und somit wegen der Konvexheit von $\mathfrak{P}^0$

$$y_\mu^0 - q_\mu \leq 1 \quad \text{für } 0 \leq \mu \leq \beta, \quad (15)$$

wobei für $\mu = 0$ wegen (12) und (13) überdies

$$y_0^0 \leq q_0$$

gilt. Sei nun α der größte Wert von μ , für den $y_\mu^0 \leq q_\mu$ gilt ($0 \leq \alpha < \beta$), sodaß

$$y_\mu^0 = q_\mu + 1 \quad \text{für } \alpha + 1 \leq \mu \leq \beta$$

st. Wir unterscheiden nun die Fälle $y_\alpha^0 = q_\alpha$ und $y_\alpha^0 < q_\alpha$.

Falls $y_\alpha^0 = q_\alpha$ ist, definieren wir einen Polygonzug $\mathfrak{P}'$ dadurch, daß wir für seine Gitterpunkte (μ, y'_μ) festsetzen:

$$\begin{aligned} y'_\mu &= q_\mu = y_\mu^0 - 1 \quad \text{für } \alpha + 1 \leq \mu \leq \beta, \\ y'_\mu &= y_\mu^0 \quad \text{für } 0 \leq \mu \leq \alpha \text{ und } \beta + 1 \leq \mu \leq m. \end{aligned}$$

Offenbar ist dann ²⁴ $\mathfrak{P}^* \leq \mathfrak{P}' < \mathfrak{P}^0$ und außerdem ist (vgl. Nr. 7) die Beziehung $\mathfrak{P}' < \mathfrak{P}^0$ eine elementare, u. zw. vom Typus I oder II (Trapez-Fall oder Ausartung des Trapez-Falles), je nachdem $\alpha + 1 < \beta$ oder $\alpha + 1 = \beta$ ist.

Falls $y_\alpha^0 < q_\alpha$ ist, definieren wir $\mathfrak{P}'$ durch

$$\begin{aligned} y'_{\alpha+1} &= q_{\alpha+1} = y_{\alpha+1}^0 - 1, \\ y'_\mu &= y_\mu^0 \quad \text{für } 0 \leq \mu \leq \alpha \text{ und } \alpha + 2 \leq \mu \leq m. \end{aligned}$$

folgt ja $q_\beta = y_\beta^0 - 1$ also (14); wegen $y_{\beta-1}^0 - y_\beta^0 \leq (g_{\beta-1} - g_\beta) - 1 = (y_\beta^0 - y_{\beta+1}^0) - 1 = q_{\mu-1} - q_\mu$ ist aber gemäß (1)

$$y_{\mu-1}^0 - y_\mu^0 \leq y_{\beta-1}^0 - y_\beta^0 \leq q_{\mu-1} - q_\mu \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq \beta$$

oder

$$y_{\mu-1}^0 - q_{\mu-1} \leq y_\mu^0 - q_\mu \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq \beta,$$

woraus wegen (14) auch (15) folgt.

²⁴ Für $0 \leq \mu \leq \beta + 1$ gilt ja $y_\mu^* \leq h_\mu \leq q_\mu$; also ist $y_\mu^* \leq y'_\mu$ für $\alpha + 1 \leq \mu \leq \beta$, während dasselbe für die übrigen μ aus $y_\mu^* \leq y_\mu^0$ folgt.

Wieder gilt $\mathfrak{P}^* \leq \mathfrak{P}' < \mathfrak{P}^0$ und die Beziehung $\mathfrak{P}' < \mathfrak{P}^0$ ist eine elementare vom Typus III oder II (Doppeldreiecks-Fall oder Ausartung des Doppeldreiecks-Falles), u. zw. letzteres nur, wenn $y_a^0 = q_a - 1$ und außerdem $\alpha + 1 < \beta$ ist²⁵.

Die Überlegungen in dieser Nr. 8 zeigen, daß es außer den in Nr. 7 angeführten Ordnungsbeziehungen von den Typen I, II und III keine weiteren elementaren Ordnungsbeziehungen $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}^*$ geben kann. Man kann das Ergebnis übrigens auch in der Form des folgenden Satzes aussprechen:

Zu zwei in der Beziehung $\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}^*$ stehenden Polygonzügen $\mathfrak{P}^0, \mathfrak{P}^*$ läßt sich, — sofern diese Beziehung nicht selbst einen der Typen I, II, III (Nr. 7) darstellt, — stets (auf wenigstens eine Art) eine endliche Anzahl von Polygonzügen $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \dots, \mathfrak{P}^{(k)}$ angeben ($k \geq 1$), sodaß

$$\mathfrak{P}^0 > \mathfrak{P}' > \mathfrak{P}'' > \dots > \mathfrak{P}^{(k)} > \mathfrak{P}^*$$

gilt und jede der Beziehungen $\mathfrak{P}^{(i)} > \mathfrak{P}^{(i+1)}$ für $0 \leq i \leq k$ ($\mathfrak{P}^{(k+1)} = \mathfrak{P}^*$) einen der Typen I, II, III darstellt.

9. Die in Nr. 6 bis 8 gewonnenen Aussagen über konvexe Polygonzüge lassen sich nun ohneweiteres umsetzen in Aussagen über Partitionen bzw. über zweidimensionale komprimierte Gitterpunktmengen.

Was zunächst die in Nr. 7 besprochenen Typen elementarer Ordnungsbeziehungen betrifft, so findet man für die gemäß (4) den Polygonen $\mathfrak{P}^0$ und $\mathfrak{P}^*$ zugeordneten Partitionen $\mathfrak{A}^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots)$, $\mathfrak{A}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots)$ im Trapez-Fall (Typus I)

$$\begin{aligned} a_\lambda^* &= a_\lambda^0 - 1, & a_\rho^* &= a_\rho^0 + 1, \\ a_i^* &= a_i^0 & \text{für } i \neq \lambda, \rho \quad (0 \leq i \leq m), \end{aligned} \quad (16)$$

²⁵ Wegen $y'_{a+1} = q_{a+1}$ und $(q_{a+1} - q_{a+2}) - (q_a - q_{a+1}) = 0$ ist ja

$$\begin{aligned} a'_{m-a-1} - a'_{m-a} &= (y'_{a+1} - y'_{a+2}) - (y'_a - y'_{a+1}) = \\ &= (q_{a+2} + 1 - y'_{a+2}) + (q_a - 1 - y'_a); \end{aligned}$$

wegen $\alpha + 2 \leq \beta + 1$ ist das ≥ 0 und $= 0$ nur, wenn $y'_{a+2} = q_{a+2} + 1$, also $\alpha + 2 < \beta + 1$ und wenn außerdem $y'_a = q_a - 1$ ist.

wobei $m - \alpha = \rho$, $m - \beta = \lambda$ gesetzt und gemäß (8)

$$\lambda < \rho - 1 \quad (17)$$

ist ($1 \leq \lambda$, $\rho \leq m$). Wegen (9) hat man dabei $a_i^* = a_\rho^*$ für $\lambda \leq i \leq \rho$ und somit²⁶

$$a_i^0 = a_\rho^0 + 1 \quad \text{für } \lambda < i < \rho, \quad (18)$$

sowie

$$a_\lambda^0 = a_\rho^0 + 2. \quad (19)$$

Ebenso findet man im Doppeldreiecks-Fall (Typus III)

$$\begin{aligned} a_{\rho-1}^* &= a_{\rho-1}^0 - 1, & a_\rho^* &= a_\rho^0 + 1, \\ a_i^* &= a_i^0 \quad \text{für } i \neq \rho - 1, \rho \quad (0 \leq i \leq m), \end{aligned} \quad (20)$$

wobei $m - \alpha = \rho$ gesetzt und gemäß (10)

$$a_{\rho-1}^* - a_\rho^* > 0 \quad (21)$$

oder $a_{\rho-1}^0 > a_\rho^0 + 2$ ist²⁷ ($2 \leq \rho \leq m$). Schließlich findet man in dem Fall (Typus II), der aus dem Trapez-Fall, bzw. Doppeldreiecks-Fall hervorgeht, wenn in (17) bzw. (21) das Gleichheitszeichen gesetzt wird²⁸:

$$\begin{aligned} a_{\rho-1}^* &= a_{\rho-1}^0 - 1, & a_\rho^* &= a_\rho^0 + 1, & a_{\rho-1}^* &= a_\rho^*, & (2 \leq \rho \leq m) \\ a_i^* &= a_i^0 \quad \text{für } i \neq \rho - 1, \rho \quad (0 \leq i \leq m). \end{aligned} \quad (22)$$

Man erkennt in den durch (16) bis (22) (nebst Anm. 26 bis 28) gekennzeichneten drei Typen genau die l. c.¹⁶ geschilderten drei

²⁶ Gemäß Anm. 18 ist außerdem (falls $\lambda > 1$ ist) $a_{\lambda-1}^0 \geq a_\lambda^0$, ferner (falls $\rho < m$ ist) $a_\rho^0 \geq a_{\rho+1}^0$, also $a_{\lambda-1}^* > a_\lambda^*$ bzw. $a_\rho^* > a_{\rho+1}^*$.

²⁷ Gemäß Anm. 20 ist außerdem (falls $\rho > 2$ ist) $a_{\rho-2}^0 \geq a_{\rho-1}^0$, ferner (falls $\rho < m$ ist) $a_\rho^0 \geq a_{\rho+1}^0$, also $a_{\rho-2}^* > a_{\rho-1}^*$ bzw. $a_\rho^* > a_{\rho+1}^*$.

²⁸ Wieder hat man (vgl. Anm. 26 und 27) $a_{\rho-2}^0 \geq a_{\rho-1}^0$ bzw. $a_\rho^0 \geq a_{\rho+1}^0$ und somit $a_{\rho-2}^* > a_{\rho-1}^* = a_\rho^* > a_{\rho+1}^*$.

Typen elementarer Abbauten einer Partition²⁹. Stellt man nun eine Partition $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \dots)$ dar durch die Figur der Gitter-

²⁹ Wie bereits gelegentlich bemerkt, sind Betrachtungen über symmetrische Funktionen der Ausgangspunkt für die in diesen Noten dargestellten Überlegungen und so auch für die Einführung der hier besprochenen Ordnungsbeziehungen gewesen (vgl. Note IV, Jahrgg. 1940, S. 160). Bei der Frage, welche Potenzproduktsummen $Y_{b_1 \dots b_n} = \sum x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ bei der Darstellung eines Produktes $X_{a_1 \dots a_l} = f_{a_1} f_{a_2} \dots f_{a_l}$ (vom Grad $m = a_1 + a_2 + \dots + a_l$ in den x) der symmetrischen Grundfunktionen $f_1 = \sum x_1, f_2 = \sum x_1 x_2, \dots$ durch die Y wirklich auftreten, schien es nämlich förderlich, diese Potenzproduktsummen $Y_{b_1 b_2 \dots}$ durch „Quadratfiguren“ zu veranschaulichen, wie sie dann — (später ersetzt durch zweidimensionale komprimierte Gitterpunktmengen $\mathfrak{K}_m^2$) — l. c.¹¹, § 4, zur Darstellung der Partitionen $(b_1, b_2, \dots)$ herangezogen wurden. Die durch

$$\sum_{r=\lambda}^m b_r \geq \sum_{r=\lambda}^m b_r^0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots) \quad (23)$$

(vgl. (6)) definierte Ordnungsbeziehung $Y_{b_1 b_2 \dots} \leq Y_{b_1^0 b_2^0 \dots}$ zwischen den Potenzproduktsummen, — notwendig für das Auftreten von $Y_{b_1 b_2 \dots}$ in der Darstellung von $X_{a_1 a_2 \dots}$, wenn $(b_1^0, b_2^0, \dots)$ durch $(x_1 \dots x_{a_1}) \cdot (x_1 \dots x_{a_2}) \dots = x_1^{b_1^0} x_2^{b_2^0} \dots$ erklärt wird (vgl. die in Monatshefte 48 (1939), S. 489, Anm. 5, erwähnte Literatur, sowie ebenda Formel (19), S. 494, Satz (c) und (d), S. 496) — führte zur Frage, ob es möglich sei, durch ein- oder mehrmalige Verlagerung (jede im gleichen absteigenden Sinn) nur je eines Quadrates der Quadratfigur (nur eines Gitterpunktes der $\mathfrak{K}_m^2$) von $Y_{b_1^0 b_2^0 \dots}$ zu $Y_{b_1 b_2 \dots}$ zu gelangen, und — mit ihrer bejahenden Erledigung — zur Aufstellung der drei Typen elementarer Ordnungsbeziehungen und des Stammbaumes der Potenzproduktsummen $Y_{b_1 b_2 \dots}$ vom Grad m . Diese elementaren Ordnungsbeziehungen zwischen den $Y_{b_1 b_2 \dots}$ (bzw., bei Loslösung der Betrachtungen von den Variablen x , zwischen den Partitionen $(b_1, b_2, \dots)$) waren dann ein wesentliches Hilfsmittel für den Nachweis, daß die Ordnungsbeziehung (23) nicht nur notwendig sondern auch hinreichend für das Auftreten von $Y_{b_1 b_2 \dots}$ im Ausdruck für $X_{a_1 a_2 \dots}$ (bzw. für die Ungleichung $N(a_1, a_2 \dots | b_1, b_2 \dots) > 0$) ist; vgl. l. c.¹¹ Satz (o), S. 27 (außerdem ebenda Satz (p) sowie die dort in Satz VIII, S. 26 und IX, S. 32 gegebene Verschärfung nebst deren Verallgemeinerung in Note III, diese Sitz.ber. 1940, S. 134, Satz 1).

punkte (x, y) mit $0 < y \leq a_x$ für $1 \leq x \leq m$, und bezeichnet man mit $\mathfrak{R}^0$ bzw. $\mathfrak{R}^*$ jene komprimierte Gitterpunktmenge, die auf diese Weise der Partition $\mathfrak{U}^0$ bzw. $\mathfrak{U}^*$ (und damit dem Polygonzug $\mathfrak{P}^0$ bzw. $\mathfrak{P}^*$) entspricht, dann geht $\mathfrak{R}^*$ aus $\mathfrak{R}^0$ dadurch hervor, daß der Punkt

$$(\xi_1, \eta_1) = (\lambda, a_\lambda^0) \quad (24)$$

ersetzt wird durch den Punkt

$$(\xi_2, \eta_2) = (\rho, a_\rho^0 + 1), \quad (25)$$

wobei im Falle I die Ungleichung $\lambda < \rho - 1$ gilt, im Falle II und III aber $\lambda = \rho - 1$ zu setzen ist; dabei gilt im Falle III die Ungleichung $a_\lambda^0 = a_{\rho-1}^0 > a_\rho^0 + 2$, im Falle I und II aber ist $a_\lambda^0 = a_\rho^0 + 2$. Für den Übergang von (24) zu (25) haben wir also

$$\xi_2 - \xi_1 \geq 1, \quad \eta_1 - \eta_2 \geq 1 \quad (26)$$

und dabei gilt in der zweiten dieser Beziehungen (26), bzw. in der ersten, bzw. in beiden das Gleichheitszeichen, je nachdem der Typus I, bzw. III, bzw. II vorliegt. Damit haben wir aber genau die l. c.¹⁷ angegebene Kennzeichnung der drei Typen elementarer yx -Umbauten einer zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge³⁰.

Schließlich besagt der Satz am Schluß von Nr. 8, daß zwischen zwei in der Beziehung $\mathfrak{U}^0 > \mathfrak{U}^*$ stehenden Partitionen, sofern $\mathfrak{U}^*$ nicht selbst durch elementaren Abbau (vom Typus I, II oder III) aus $\mathfrak{U}^0$ hervorgeht, sich stets Partitionen einschalten lassen, sodaß jede aus der vorhergehenden durch einen elementaren Abbau von einem der genannten Typen hervorgeht, — ein Satz, der — wenn auch nicht ganz in der gleichen Art — bereits an anderer Stelle bewiesen wurde³¹.

³⁰ Vgl. auch Note V, Nr. 12, diese Sitz.ber., Jahrgang 1941, S. 14.

³¹ Vgl. l. c.¹¹, S. 13, Satz (g).