

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1940. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1940

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren IV.

Formeln und Tabellen.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Juli 1940.

1. Aus den an früherer Stelle¹ angegebenen Rekursionsformeln lassen sich einige einfache Folgerungen ziehen, die bisweilen bei Berechnung der l. c. erklärten² Zahlen $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)})$ dienlich sind; dies soll in § 1 besprochen und in § 2 auf zugehörige geometrische Deutungen durch Gitterpunktfiguren hingewiesen werden. Auch kommen wir auf einige bei früherer Gelegenheit herangezogene Formeln zurück (Nr. 9). Außerdem ergab sich im Rahmen der Überlegungen zu den in diesen Noten behandelten Partitionsaufgaben ganz von selbst ein gewisses Zahlenmaterial, von dem ein Teil in § 3 zusammengestellt ist.

§ 1. Formeln für die Lösungsanzahlen $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)})$.

2. Die beiden im Folgenden fortgesetzt zu verwendenden Rekursionsformeln seien nochmals vermerkt:

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}) &= \\ = \sum_{\mathfrak{Z}^{(v)}} N(\mathfrak{A}_1 | \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) \sum_{\mathfrak{A}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)}} N(\mathfrak{A}_2 | \mathfrak{A}' - \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{Z}^{(n)}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$N(m | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}) = N(\mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}), \quad (2)$$

wobei wegen näherer Erläuterungen auf die frühere Note I, l. c.¹, verwiesen sei.

¹ Diese Sitzungsberichte, 1940, S. 23, „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln“, Formel (8), Nr. 12, und (11), Nr. 13; vgl. auch l. c.⁸, S. 42, Anm. 84a, Formel (γ_3).

² Diese Sitz.ber., l. c.¹, Nr. 2, S. 25.

3. Wir beweisen nun zunächst

Satz 1. Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Partitionen von m sind, wobei $\mathfrak{B}$ genau l positive Zahlen enthalte, dann ist

$$N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B}) = 0,$$

falls sich unter den Zahlen der Partition $\mathfrak{A}$ wenigstens eine findet, die $> l$ ist. Anders gesagt: Aus $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B}) \geq 1$ folgt $a_\mu \leq l$ für alle Zahlen a_μ von $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Da es auf die Reihenfolge der Zahlen a_μ nicht ankommt (vgl. l. c.¹ und zwar Nr. 8 und Satz 1 in Nr. 10), möge beim Beweis speziell $a_1 > l$ angenommen und zwecks Anwendung der Rekursionsformel (1) gesetzt werden:

$$\mathfrak{A}_1 = (a_1), \quad \mathfrak{A}_2 = (a_2, \dots, a_m),$$

also $m_1 = a_1$, $m_2 = m - a_1$. Für $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} = (t_1, t_2, \dots)$ kommen dann (vgl. l. c.¹, Nr. 13) nur solche Partitionen von m_1 in Betracht, für die bei wenigstens einer Anordnung der Zahlen t_μ das System $\mathfrak{B} - \mathfrak{Z} = (b_1 - t_1, b_2 - t_2, \dots)$ lauter nicht-negative Zahlen $b_\mu - t_\mu$ aufweist, woraus folgt, daß in $\mathfrak{Z}$ höchstens l positive Zahlen t_μ auftreten. Unter diesen muß dann wegen $t_1 + t_2 + \dots = a_1 > l$ wenigstens eine Zahl $t_\mu > 1$ vorkommen. Dann aber ist $N(\mathfrak{A}_1 | \mathfrak{Z}) = N(a_1 | \mathfrak{Z}) = 0$, da die einzige Partition $\mathfrak{Z}$ von a_1 , für welche $N(a_1 | \mathfrak{Z}) > 0$ ausfällt, diejenige ist,³ die aus lauter Einsen besteht: $\mathfrak{Z} = (1^{a_1})$. Die Rekursionsformel $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B}) = \sum N(a_1 | \mathfrak{Z}) \sum N(\mathfrak{A}_2 | \mathfrak{B} - \mathfrak{Z})$ liefert also $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B}) = 0$, wie behauptet.

4. Der eben bewiesene Satz 1 ist nur der Spezialfall $n = 1$ des folgenden Satzes:

Satz 2. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ Partitionen von m , wobei die Partition $\mathfrak{A}^{(v)}$ genau l_v positive Zahlen enthalte ($v = 1, 2, \dots, n$); dann ist stets

$$N(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}) = 0,$$

falls sich unter den Zahlen der Partition $\mathfrak{A}$ wenigstens eine findet, die $> l_1 l_2 \dots l_n$ ist. Anders gesagt: Aus

³ Vgl. l. c.¹ die Formeln (10) in Nr. 12.

$N(\mathfrak{U} | \mathfrak{U}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) \geq 1$ folgt $a_\mu \leq l_1 \dots l_n$ für alle Zahlen a_μ von $\mathfrak{U} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Da Satz 2 für $n = 1$ bereits bewiesen ist, so werde $n > 2$ vorausgesetzt und die Gültigkeit des Satzes für $n - 1$ statt n angenommen. Sei nun $a_1 > l_1 l_2 \dots l_n$. Wie beim Beweis von Satz 1 werde zwecks Anwendung der Rekursionsformel (1) $\mathfrak{U}_1 = (a_1)$, $\mathfrak{U}_2 = (a_2, \dots, a_m)$, $m_1 = a_1$, $m_2 = m - a_1$ gesetzt. Für $\mathfrak{Z}^{(v)}$ ($1 \leq v \leq n$) kommen dann, damit alle Zahlen $a_\mu^{(v)} - t_\mu^{(v)}$ von $\mathfrak{U}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)}$ nicht-negativ ausfallen, nur Partitionen mit höchstens l_v positiven Zahlen in Betracht. Die Zahl $N(\mathfrak{U}_1 | \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) = N(a_1 | \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)})$ ist aber dann, wie wir sogleich sehen werden, notwendig gleich null. Denn gemäß (2) ist $N(a_1 | \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) = N(\mathfrak{Z}' | \mathfrak{Z}'' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)})$ und nach Satz 2, angewendet auf $n - 1$ statt n , ist diese Zahl N sicher null, wenn sich unter den Zahlen t'_μ von $\mathfrak{Z}'$ wenigstens eine findet, die $> l_2 \dots l_n$ ist. Ein solches t'_μ muß aber tatsächlich sich finden, da $\mathfrak{Z}'$ nur l_1 positive Zahlen t'_μ umfaßt und $t'_1 + t'_2 + \dots = a_1 > l_1 l_2 \dots l_n$ ist. Die Rekursionsformel (1) liefert also $N(\mathfrak{U} | \mathfrak{U}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) = 0$, wie behauptet.

5. Eine Art Gegenstück zu den Sätzen 1 und 2 liefert der folgende später verwendete Satz⁴:

⁴ In Satz 3 handelt es sich um Sonderfälle von Partitionen $\mathfrak{U}', \dots, \mathfrak{U}^{(n)}$, für die $N(\mathfrak{U}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) = 1$ ausfällt. Beispiele anderer Art mit $N = 1$ sind

$$\begin{aligned} n = 2, m = 3, \mathfrak{U}' &= (2, 1), \mathfrak{U}'' = (2, 1); \\ n = 2, m = 15, \mathfrak{U}' &= (6, 3, 2^3), \mathfrak{U}'' = (5^2, 2, 1^3); \\ n = 3, m = 15, \mathfrak{U}' &= (5^2, 2, 1^3), \mathfrak{U}'' = (10, 5), \mathfrak{U}''' = (9, 4, 2), \end{aligned}$$

wobei bezüglich der letztgenannten beiden Beispiele verwiesen sei auf l. c.⁸, S. 4, 6 nebst Fig. 1 und auf die vorangegangene Note „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren III. Ein Satz über das Verhältnis der Lösungsanzahlen gewisser Partitionsaufgaben“, Formel (18) und Anm. 14.

Für $n = 2$ ist $N(\mathfrak{U}' | \mathfrak{U}'') = 1$ bekanntlich gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{U}', \mathfrak{U}''$ konjugierte Partitionen sind; oder anders ausgedrückt, daß $\mathfrak{U}', \mathfrak{U}''$ die beiden zu einer komprimierten Gitterpunktmenge gehörenden Partitionen sind (wovon eben $\mathfrak{U}' = (l_2)^{l_1}$, $\mathfrak{U}'' = (l_1)^{l_2}$ ein Sonderfall ist). Für $n > 2$ liegen die Dinge anders; vgl. die frühere Note II (diese Sitz.ber., 1940), Nr. 6, S. 73 und Anm. 71, S. 104, sowie den an anderer Stelle erscheinenden Aufsatz: „Komprimierte Gitterpunktmenge und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe“ (s. auch diese Sitz.ber., 1940, S. 9*, Sitzung vom 6. Juli 1940).

Satz 3. Seien $l_1, l_2, \dots, l_n$ positive ganze Zahlen ($n \geq 1$) und $m, L_1, L_2, \dots, L_n$ so bestimmt, daß

$$m = l_1 l_2 \dots l_n = l_1 L_1 = l_2 L_2 = \dots = l_n L_n$$

ist. Die Partition $\mathfrak{A}^{(v)}$ bestehe aus l_v Zahlen, die alle $= L_v$ sind: $\mathfrak{A}^{(v)} = (L_v^{l_v})$. Dann ist

$$N(L_1^{l_1} | L_2^{l_2} | \dots | L_n^{l_n}) = 1 \quad (3)$$

Dieser Satz ist offenbar richtig, wenn alle Zahlen $l_v = 1$ sind, desgleichen für $n = 1$, entsprechend der Formel⁵ $N(1^m) = 1$. Beim Beweis können wir also $m > 1$, $n > 1$ voraussetzen und können annehmen, Satz 3 sei gültig für $n - 1$ statt n (bei beliebigem m), sowie (für das gegebene n) für jede Zahl $< m$ anstelle von m . Da nicht alle $l_v = 1$ sind und es auf die Reihenfolge der Partitionen $\mathfrak{A}^{(v)}$ nicht ankommt, können wir $l_1 > 1$ voraussetzen. Wir definieren die Zahlen h_v, H_v ($2 \leq v \leq n$), k_v, K_v ($1 \leq v \leq n$) durch

$$\begin{aligned} k_1 &= l_1 - 1, \quad h_v = k_v = l_v \quad (2 \leq v \leq n), \\ h_2 h_3 \dots h_n &= h_2 H_2 = \dots = h_n H_n, \\ k_1 k_2 \dots k_n &= k_1 K_1 = k_2 K_2 = \dots = k_n K_n \end{aligned}$$

und setzen zwecks Anwendung⁶ der Rekursionsformel (1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'_1 &= (L_1), \quad \mathfrak{A}'_2 = (L_1^{l_1-1}), \\ m_1 &= L_1 = h_2 h_3 \dots h_n, \quad m_2 = m - m_1 = k_1 k_2 \dots k_n; \end{aligned}$$

Für $\mathfrak{Z}^{(v)}$ ($2 \leq v \leq n$) kommen dann, wenn $\mathfrak{A}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)}$ keine negativen Zahlen enthalten soll, jedenfalls nur Partitionen von m_1 mit höchstens $l_v = h_v$ positiven Zahlen in Frage. Soll nun $N(\mathfrak{A}'_1 | \mathfrak{Z}'' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) = N(L_1 | \mathfrak{Z}'' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) = N(\mathfrak{Z}'' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)})$ von null verschieden ausfallen, so darf $\mathfrak{Z}''$ nach Satz 2 keine

⁵ Wegen der Bedeutung des Falles $n = 1$ vgl. l. c.¹, Nr. 12, insbesondere Formel (9).

⁶ In Nr. 2 ist diese Rekursionsformel für $n + 1$ Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ angeschrieben, während oben die Anzahl der Partitionen mit n und diese selbst mit $\mathfrak{A}', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ bezeichnet sind. Das gibt einige auf der Hand liegende Änderungen und es ist insbesondere $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}'_2$ (statt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$) zu schreiben.

Zahl $> h_3 \dots h_n = H_2$ enthalten, woraus wegen $t_1'' + t_2'' + \dots + t_{h_1}'' = m_1 = h_2 H_2$ folgt, daß alle Zahlen von $\mathfrak{Z}''$ gleich H_2 sein müssen, analog alle Zahlen von $\mathfrak{Z}^{(v)}$ gleich H_v , also

$$\mathfrak{Z}^{(v)} = (H_v)^{h_v} \quad (2 \leq v \leq n).$$

Da demnach $\mathfrak{Z}^{(v)}$ genau so viele positive Zahlen enthält wie $\mathfrak{U}^{(v)}$ und alle diese $t_\mu^{(v)}$ einander gleich sind, so kommen für die Bildung der inneren Summe in (1) verschiedene Anordnungen der Zahlen einer Partition $\mathfrak{Z}^{(v)}$ nicht in Frage; vielmehr tritt nur ein einziges Zahlensystem $\mathfrak{U}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)}$ auf, dessen sämtliche Zahlen gleich $L_v - H_v = K_v$ sind, also

$$\mathfrak{U}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)} = (K_v)^{h_v} \quad (2 \leq v \leq n).$$

Die Doppelsumme in (1) umfaßt also in unserem Falle nur einen einzigen Summanden, den man wegen $L_1 = K_1$, $\mathfrak{U}_2' = (L_1^{h_1-1}) = (K_1^{h_1})$ auch schreiben kann:

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{U}_1' | \mathfrak{Z}'' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) \cdot N(\mathfrak{U}_2' | \mathfrak{U}'' - \mathfrak{Z}'' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)} - \mathfrak{Z}^{(n)}) = \\ = N(H_2^{h_2} | \dots | H_n^{h_n}) \cdot N(K_1^{h_1} | K_2^{h_2} | \dots | K_n^{h_n}). \end{aligned}$$

Hierin sind aber die beiden Faktoren gleich 1, gemäß unserer Annahme über die Gültigkeit von Satz 3 für kleinere Werte von n bzw. m ; somit ist auch $N(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 | \mathfrak{U}'' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) = 1$, womit (3) allgemein bewiesen ist.

6. Überlegungen, die denen von Nr. 3 und 4 ganz parallel laufen, führen nun zu den in den folgenden Sätzen 4 und 5 enthaltenen Rekursionsformeln.

Satz 4. Wenn $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ Partitionen von m sind, wobei $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_l)$ genau l positive Zahlen enthalte und unter den Zahlen a_μ von $\mathfrak{U}$ eine, etwa a_1 , gleich l sei, dann ist

$$N(l, a_2, \dots, a_m | b_1, \dots, b_l) = N(a_2, \dots, a_m | b_1 - 1, \dots, b_l - 1). \quad (4)$$

Zum Beweis werde analog wie in Nr. 3, die Rekursionsformel (1) herangezogen und $\mathfrak{U}_1 = (a_1) = (l)$, $\mathfrak{U}_2 = (a_2, \dots, a_m)$ gesetzt. Da die einzige Partition $\mathfrak{Z}$, für welche $N(\mathfrak{U}_1 | \mathfrak{Z}) = N(l | \mathfrak{Z}) > 0$ ausfällt, die Partition $\mathfrak{Z} = (1, 1, \dots, 1) = (1^l)$ und für diese

$N(l | \mathfrak{Z}) = N(l | 1^l) = 1$ ist, da ferner nur das eine System $\mathfrak{B} - \mathfrak{Z} = (b_1 - 1, \dots, b_l - 1)$ sich ergibt, so enthält in der Rekursionsformel $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B}) = \sum N(a_1 | \mathfrak{Z}) \sum N(\mathfrak{A}_2 | \mathfrak{B} - \mathfrak{Z})$ die Doppelsumme nur das eine Glied $N(l | 1^l) N(\mathfrak{A}_2 | b_1 - 1, \dots, b_l - 1)$, womit (4) bewiesen ist.

7. Der eben bewiesene Satz 4 ist nur der Spezialfall $n = 1$ des folgenden Satzes.

Satz 5. Wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ Partitionen von m sind, wobei die Partition $\mathfrak{A}^{(v)}$ genau l_v positive Zahlen enthalte ($v = 1, 2, \dots, n$) und unter den Zahlen a_μ von $\mathfrak{A}$ eine, etwa a_1 , gleich $l_1 l_2 \dots l_n = l_1 L_1 = l_2 L_2 = \dots = l_n L_n$ sei, dann ist

$$\begin{aligned} N(l_1 \dots l_n, a_2, \dots, a_m | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}) = \\ = N(a_2, \dots, a_m | \mathfrak{A}'_* | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}_*), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die Zahlensysteme $\mathfrak{A}^{(v)}_*$ definiert sind durch:

$$\mathfrak{A}^{(v)}_* = (a_1^{(v)} - L_v, a_2^{(v)} - L_v, \dots, a_{l_v}^{(v)} - L_v).$$

Dabei werde unter $N(a_2, \dots, a_m | \mathfrak{A}'_* | \dots | \mathfrak{A}^{(n)}_*)$ die Zahl Null verstanden, wenn in irgend einem der Systeme $\mathfrak{A}^{(v)}_*$ unter den Zahlen $a_\mu^{(v)} - L_v$ eine negative vorkommt.⁷

Zum Beweis von Satz 5 werde, analog wie in Nr. 4 die Rekursionsformel (1) herangezogen und $\mathfrak{A}_1 = (l_1 l_2 \dots l_n)$, $\mathfrak{A}_2 = (a_2, \dots, a_m)$, $m_1 = l_1 l_2 \dots l_n$ gesetzt. Für $\mathfrak{Z}^{(v)}$ kommt dann nur eine solche Partition von m_1 in Betracht, für die $\mathfrak{A}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)}$ keine negativen Zahlen enthält, wozu jedenfalls notwendig ist, daß $\mathfrak{Z}^{(v)}$ höchstens l_v positive Zahlen enthält: $\mathfrak{Z}^{(v)} = (t_1^{(v)}, \dots, t_{l_v}^{(v)})$. Ferner kommen für $\mathfrak{Z}', \dots, \mathfrak{Z}^{(n)}$ nur solche Partitionen in Betracht, für welche $N(l_1 \dots l_n | \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)})$, oder (was nach (2) dasselbe ist) $N(\mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) > 0$ ausfällt. Daraus aber folgt nach Satz 2, daß für alle Zahlen von $\mathfrak{Z}'$ die Ungleichung $t'_\mu \leq l_2 \dots l_n = L_1$ gelten muß, was wegen $t'_1 + \dots + t'_{l_1} = m_1 = l_1 L_1$ nicht anders möglich ist, als daß alle $t'_\mu = L_1$ sind ($1 \leq \mu \leq l_1$). Ganz ebenso schließt man aus Satz 2 für jedes v , daß $t_\mu^{(v)} = L_v$ (für $1 \leq \mu \leq l_v$), somit $\mathfrak{Z}^{(v)} = (L_v, \dots, L_v) = ((L_v)^{l_v})$ ist.

⁷ Zu dieser Festsetzung vgl. l. c.¹, Nr. 13, Formel (17).

Verschiedene Anordnungen der L_v Zahlen von $\mathfrak{Z}^{(v)}$ auf ihre L_v Plätze sind somit, weil alle diese Zahlen untereinander gleich sind, nicht möglich. Daher enthält in der Rekursionsformel $N(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 | \mathfrak{U}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) = \sum N(l_1 \dots l_n | \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) \cdot \sum N(\mathfrak{U}_2 | \mathfrak{U}' - \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)} - \mathfrak{Z}^{(n)})$ die Doppelsumme nur ein einziges Glied $N(\mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{Z}^{(n)}) N(\mathfrak{U}_2 | \mathfrak{U}' - \mathfrak{Z}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)} - \mathfrak{Z}^{(n)})$, darin $\mathfrak{Z}^{(v)} = ((L_v)^{l_v})$ gesetzt. Die Zahlensysteme $\mathfrak{U}^{(v)} - \mathfrak{Z}^{(v)}$ sind aber dann dieselben, die oben in (5) abgekürzt mit $\mathfrak{U}_*^{(v)}$ bezeichnet wurden. Somit erhalten wir $N(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 | \mathfrak{U}' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) = N(L_1^{l_1} | \dots | L_n^{l_n}) \cdot N(\mathfrak{U}_2 | \mathfrak{U}'_* | \dots | \mathfrak{U}_*^{(n)})$, womit (5) bewiesen ist, da der erste Faktor gemäß Satz 3 gleich 1 ist.

8. Eine einfache Folgerung aus Satz 5 ist

Satz 6. Seien die $n + 1 (\geq 3)$ Partitionen $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}', \dots, \mathfrak{U}^{(n)}$ von m so beschaffen, daß die Partition $\mathfrak{U}^{(v)}$ genau L_v positive Zahlen enthält ($v = 1, 2, \dots, n$) und unter den Zahlen a_μ von $\mathfrak{U}$ eine, etwa a_1 , gleich $l_1 l_2 \dots l_n$ ist, wobei wir $l_1 l_2 \dots l_n = l_1 L_1 = \dots = l_n L_n$ setzen; es ist dann

$$N(l_1 \dots l_n, a_2, \dots, a_m | \mathfrak{U}' | \mathfrak{U}'' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) = 0,$$

wenn wenigstens eine Partition $\mathfrak{U}^{(v)}$ ($1 \leq v \leq n$) vorhanden ist, unter deren Zahlen $a_1^{(v)}, \dots, a_{l_v}^{(v)}$ sich wenigstens eine Zahl $a_\mu^{(v)} < L_v$ befindet. Anders gesagt: Aus $N(l_1 l_2 \dots l_n, a_2, \dots, a_m | \mathfrak{U}' | \mathfrak{U}'' | \dots | \mathfrak{U}^{(n)}) > 0$ folgt $a_\mu^{(v)} \geq L_v$ für $1 \leq \mu \leq l_v, 1 \leq v \leq n$.

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar durch Anwendung von Satz 5, da dann unter den Zahlen der Zahlensysteme $\mathfrak{U}_*^{(v)}$ wenigstens eine negative Zahl auftritt, die rechte Seite von Gleichung (5) also null wird. Gemäß Satz 6 ist beispielsweise $N(6, 2, 1 | 3, 3, 3 | 7, 2) = 0$, da hier $l_1 = 3, l_2 = 2, a_1 = 6 = l_1 l_2, L_2 = 3$ und in der Partition $\mathfrak{U}'' = (7, 2)$ die Zahl $a_2'' = 2 < L_2$ ist. Daß in Satz 6 die Anzahl der Partitionen $n + 1 \geq 3$ voraussetzen war, ist klar: für $n = 1$ tritt ja nur eine einzige Partition $\mathfrak{U}'_* = (a'_1 - L_1, \dots, a'_{l_1} - L_1)$ auf, in der wegen $L_1 = 1$ lauter nicht-negative Zahlen vorkommen, da nach Voraussetzung die l_1 Zahlen $a'_1, \dots, a'_{l_1}$ alle ≥ 1 sind; für $n = 1$ können also gar nicht alle Voraussetzungen des Satzes 6 eintreten.

9. Zum Schluß dieses § 1 mögen noch einige bei früherer Gelegenheit⁸ erwähnte Formeln aus der Rekursionsformel (1) hergeleitet werden.

Wir beweisen zunächst für irgendeine Partition $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_m)$ der Zahl m und für $\mathfrak{A} = (1, \dots, 1) = (1^m)$ die Formel

$$N(1^m | b_1, \dots, b_m) = \frac{m!}{b_1! \dots b_m!}. \quad (6)$$

Wegen $N(1 | 1) = 1$ ist (6) richtig für $m = 1$. Zwecks vollständiger Induktion werde nun $m > 1$ und (6) als richtig für $m - 1$ anstelle von m angenommen. Wenden wir dann die Rekursionsformel (1) auf $N(1^m | \mathfrak{B})$ an, indem wir $\mathfrak{A}_1 = (1)$, $\mathfrak{A}_2 = (1^{m-1})$ setzen,⁹ so erhalten wir

$$N(1^m | \mathfrak{B}) = \sum N(1^{m-1} | \mathfrak{B} - \mathfrak{I}), \quad (7)$$

wobei die Summe zu erstrecken ist über alle m Anordnungen $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ der m -gliedrigen Partition $\mathfrak{I} = (1, 0^{m-1})$. Betrachten wir diejenige Anordnung $(t_1, \dots, t_n)$, für welche $t_\nu = 1$ und $t_\lambda = 0$ ($\lambda \neq \nu$) ist,¹⁰ so ist der zugehörige Summand in (7) nach unserer Annahme der Gültigkeit von (6) für $m - 1$ (statt m) gegeben durch

$$b_\nu \frac{(m-1)!}{b_1! \dots b_m!}; \quad (8)$$

dabei gilt diese Formel auch, falls $b_\nu = 0$ ist, da ja dann $\mathfrak{B} - \mathfrak{I}$ nicht lauter Zahlen ≥ 0 enthält, somit $N(1^{m-1} | \mathfrak{B} - \mathfrak{I}) = 0$ zu setzen ist (vgl. l. c.⁷). Summiert man nun die Zahlen (8), so erhält man wegen $\sum b_\nu = m$ die rechte Seite von (6), womit (6) bewiesen ist.

Nunmehr betrachten wir für irgend eine der Ungleichung $0 < 2k < m$ genügende Zahl k die Partition $\mathfrak{A} = (2^k, 1^{m-2k})$

⁸ Vgl. in Monatshefte f. Math. u. Physik 49 (1940), die Formeln (η_1) und (η_2), S. 41, 42, Anm. 84a.

⁹ Über den Spezialfall $\mathfrak{A}_1 = (1)$ der Rekursionsformel (1) vgl. Formel (41) der in Anm. 1 genannten Note I.

¹⁰ Das zugehörige Zahlensystem $\mathfrak{B} - \mathfrak{I}$ wird dann aus $\mathfrak{B}$ erhalten, indem man b_ν durch $b_\nu - 1$ ersetzt, alle anderen b_λ ($\lambda \neq \nu$) beibehält.

sowie irgend eine Partition $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_m)$ von m . Wenden wir auf $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B})$ die Rekursionsformel (1) an, indem wir $\mathfrak{A}_1 = (2^k)$, $\mathfrak{A}_2 = (1^{m-2k})$ setzen, so ergibt sich

$$N(2^k, 1^{m-2k} | \mathfrak{B}) = \sum_{\mathfrak{Z}} N(2^k | \mathfrak{Z}) \sum_{\mathfrak{B} - \mathfrak{Z}} N(1^{m-2k} | \mathfrak{B} - \mathfrak{Z}), \quad (9)$$

wobei die äußere Summe über alle m -gliedrigen Partitionen $\mathfrak{Z} = (z_1, \dots, z_m)$ der Zahl $2k$ zu erstrecken ist, die innere Summe über alle verschiedenen¹¹ Anordnungen der Zahlen z_μ von $\mathfrak{Z}$. Da die zu (2^k) konjugierte Partition $= (k^2)$ ist,¹² so ist $N(2^k | \mathfrak{Z}) > 0$ dann und nur dann¹³, wenn

$$\mathfrak{Z} \leq (k^2) \quad (10)$$

ist, was soviel bedeutet, wie daß alle Zahlen $z_\mu \leq k$ sind.¹⁴ In der äußeren Summe in (9) kann man sich also auf Partitionen $\mathfrak{Z}$ von $2k$ von der Gestalt

¹¹ Dabei sind (vgl. diese Sitzber. I. c. ¹, S. 34, Anm. 14) die Zahlenwerte der z_μ für Verschiedenheit oder Nichtverschiedenheit zweier Anordnungen maßgebend: zwei Anordnungen $\mathfrak{U} = (u_1, \dots, u_m)$ und $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_m)$ der Zahlen $z_1, \dots, z_m$ gelten als verschieden, wenn für wenigstens ein λ die Zahl u_λ von der Zahl v_λ verschieden ist; fassen wir also in $\mathfrak{B} - \mathfrak{U} = (b_1 - u_1, \dots, b_m - u_m)$ bzw. $\mathfrak{B} - \mathfrak{B} = (b_1 - v_1, \dots, b_m - v_m)$ die $b_1, \dots, b_m$ als m verschiedene Buchstabengrößen auf, so gibt es wenigstens ein λ , für welches $b_\lambda - u_\lambda \neq b_\lambda - v_\lambda$ ist. Die verschiedenen sich ergebenden Zahlensysteme $\mathfrak{B} - \mathfrak{Z}$ können nun natürlich auch so erhalten werden, daß man von einer Anordnung $\mathfrak{Z} = (z_1, \dots, z_m)$ ausgeht, das System $\mathfrak{B} - \mathfrak{Z} = (b_1 - z_1, \dots, b_m - z_m)$ bildet und nun die Buchstabengrößen $b_1, \dots, b_m$ permutiert; als verschieden sind dann wieder jene Zahlensysteme anzusehen, für die es wenigstens ein λ gibt, sodaß die von der Größe b_λ subtrahierte Zahl z_μ in der einen Anordnung verschieden ist (und zwar dem Zahlenwert nach verschieden) von der Zahl z_μ , die bei der anderen Anordnung von dieser Größe b_λ subtrahiert wird. Man ersieht daraus, daß Formel (9) nicht nur in der äußeren Gestalt mit der in Monatshefte I. c. ⁸, S. 42, Anm. 84a, angegebenen Formel (η_2) übereinstimmt, sondern daß auch die dort für die Summationen gegebene Erklärung inhaltlich mit der hier zugrundegelegten Erklärung sich deckt.

¹² Vgl. Anm. 4.

¹³ Vgl. I. c. ⁸, Satz VII, S. 9 bzw. Sätze (m), (o), S. 25, 27.

¹⁴ Es besagt ja (10) gemäß der I. c. ⁸, Nr. 24, Formel (49) gegebenen Definition (hiebei $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_m \geq 0$ angenommen), daß $z_2 + \dots + z_m \geq k$, also $z_1 \leq k$ sein muß (die weiteren Ungleichungen $z_v + \dots + z_m \geq 0$ für $v \geq 3$ sind ja von selbst erfüllt).

$$\mathfrak{Z} = (0^{r_0}, 1^{r_1}, \dots, k^{r_k}) \text{ mit } \begin{cases} r_0 + r_1 + \dots + r_k = m \\ 1r_1 + 2r_2 + \dots + kr_k = 2k \end{cases} \quad (11)$$

beschränken. Irgend eines der in der inneren Summe auftretenden Zahlensysteme $\mathfrak{B} - \mathfrak{Z}$ wird dann folgendermaßen erhalten: Man verteilt die Größen $b_1, \dots, b_m$ auf $k + 1$ Teilsysteme, von denen eines aus r_0 Größen, eines aus r_1 Größen, usw., das letzte aus r_k Größen b_μ besteht; in das System $\mathfrak{B} - \mathfrak{Z}$ nimmt man dann die Zahl $b_\mu - 0$, bzw. $b_\mu - 1, \dots$, bzw. $b_\mu - k$ auf, wenn die Größe b_μ im ersten, bzw. im zweiten, $\dots$, bzw. im $(k + 1)$ -sten der genannten Teilsysteme steht. Werden beispielsweise, wenn $R_\lambda = r_0 + r_1 + \dots + r_\lambda$, $R_{-1} = 0$ gesetzt wird, in das $(\lambda + 1)$ -ste dieser Teilsysteme die Größen b_μ für $R_{\lambda-1} + 1 \leq \mu \leq R_\lambda$ aufgenommen ($0 \leq \lambda \leq k$), so ergibt sich gemäß (6)

$$\begin{aligned} N(1^{m-2k} | \mathfrak{B} - \mathfrak{Z}) &= \frac{(m - 2k)!}{\prod_{\lambda=0}^k \prod_{\mu} (b_\mu - \lambda)!} = \\ &= \frac{(m - 2k)!}{b_1! \dots b_m!} \cdot \prod_{\lambda=1}^k \lambda!^{r_\lambda} \prod_{\mu} \binom{b_\mu}{\lambda}, \end{aligned}$$

wobei das innere Produkt $\prod_{\mu}$ von $\mu = R_{\lambda-1} + 1$ bis $\mu = R_\lambda$ zu erstrecken ist (falls $r_\lambda = 0$, $R_{\lambda-1} = R_\lambda$ ist, dann ist das zugehörige innere Produkt $= 1$ zu setzen). Setzt man dies in (9) ein, so ergibt sich

$$N(2^k, 1^{m-2k} | b_1, \dots, b_m) = \frac{(m - 2k)!}{b_1! \dots b_m!} \Phi^{(k)}, \quad (12)$$

worin

$$\Phi^{(k)} = \sum_{\mathfrak{Z}} N(2^k | 1^{r_1}, \dots, k^{r_k}) \cdot 1!^{r_1} \dots k!^{r_k} \sum \prod_{\lambda=1}^k \prod_{\mu} \binom{b_\mu}{\lambda} \quad (13)$$

ist und die äußere Summe über die verschiedenen Partitionen $\mathfrak{Z}$ von der Gestalt (11) zu erstrecken ist, die innere Summe aber über die verschiedenen Verteilungen der Größen $b_1, \dots, b_m$ auf die obengenannten $k + 1$ Teilsysteme.

Nimmt man speziell $k = 1$, so ergibt sich für (11) nur die eine Partition $\mathfrak{Z} = (1^2)$ und wegen $N(2 | 1^2) = 1$, $r_1 = 2$ wird

$$\Phi^{(1)} = N(2 | 1^2) 1!^2 \sum (b_1) (b_1) = \sum b_1 b_2,$$

$$N(2, 1^{m-2} | b_1, \dots, b_m) = \frac{(m-2)!}{b_1! \dots b_m!} \sum b_1 b_2. \quad (14)$$

Nimmt man $k = 2$, so erhält man für $\mathfrak{X}$ die Partitionen (2^2) , $(2, 1^2)$, (1^4) , somit

$$\Phi^{(2)} = N(2^2 | 2^2) \cdot 2!^2 \sum (b_1) (b_1) (b_2) + N(2^2 | 2, 1^2) 1!^2 2! \sum (b_1) (b_1) (b_2) +$$

$$+ N(2^2 | 1^4) 1!^4 \sum (b_1) (b_1) (b_1) (b_1),$$

also

$$N(2^2, 1^{m-4} | b_1, \dots, b_m) = \frac{(m-4)!}{b_1! \dots b_m!} [4 \sum (b_1) (b_1) (b_2) +$$

$$+ 4 \sum (b_1) (b_1) (b_2) (b_2) + 6 \sum (b_1) (b_1) (b_1) (b_1)]. \quad (15)$$

Die Formeln (6), (14), (15) stimmen überein mit der l. c. ⁸, Anm. 84 a, unter (η_1) angegebenen Formel. Daß die dort unter (η_2) aufgeführte Formel sich mit der jetzigen Formel (9) deckt, wurde bereits gesagt (vgl. Anm. 11), während Formel (η_3) , l. c., nichts anderes ist als der Spezialfall $n = 1$ der Hauptrekursionsformel (1), nur mit etwas anderer (aus Anm. 11 ersichtlicher) Fassung der Erklärung der Summationen.

Zusatz^{14a} zu Nr. 9. Die zunächst für $m > 2k$ hergeleitete Formel (12) nebst (13) gilt auch (in trivialer Weise) für $m = 2k$. Es ist nämlich in dem aus allen (b_λ^μ) gebildeten Produkt $\prod_\lambda \prod_\mu (b_\lambda^\mu)$ die Summe aller in den (b_λ^μ) auftretenden λ gleich $0 \cdot r_0 + 1 \cdot r_1 + \dots + k \cdot r_k = 2k$ und dieses Produkt kann nur dann $\neq 0$ sein, wenn alle $b_\lambda \geq \lambda$ sind, was in unserem Falle, wo auch $b_1 + \dots + b_m = 2k$ ist, nur für $b_\lambda = \lambda$ zutrifft. Die äußere Summe in (13) hat also nur ein einziges Glied, nämlich jenes, für welches $\mathfrak{X} = (0^{r_0}, 1^{r_1}, \dots, k^{r_k}) = (b_1, \dots, b_m)$ und $1!^{r_1} \dots k!^{r_k} = b_1! \dots b_m!$ ist; und da die innere Summe in (13) dabei nur einen Summanden hat (der = 1 ist), so ist die rechte Seite von (13) nichts anderes als $N(2^k | b_1, \dots, b_m) b_1! \dots b_m!$.

^{14a} Zusatz bei der Korrektur.

Es ist also (12) auch für $m = 2^k$ richtig, leistet aber nichts für die Berechnung von $N(2^k | \mathfrak{B})$.

Dem Gesagten entsprechend ist Formel (14) für $m \geq 2$, Formel (15) für $m \geq 4$ gültig.

§ 2. Geometrische Bedeutung der Sätze.

10. Die in den Sätzen 1–6 (Nr. 3–8) angegebenen Formeln lassen sich aus der geometrischen Bedeutung¹⁵ der Probleme $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \dots | \mathfrak{A}^{(n)})$ unmittelbar einsehen. Sei beispielsweise $n = 2$. Die Zahlen l_1, l_2 mögen die gleiche Bedeutung haben, wie in Satz 2 und 5. Wir fassen $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \mathfrak{A}'')$ auf als Aufgabe, im dreidimensionalen Raum mit den Koordinaten x, x_1, x_2 eine Gesamtheit $\mathfrak{L}$ von m Gitterpunkten so zu bestimmen, daß in jeder Ebene $x_v = \mu$ ($v = 0, 1, 2$) genau $a_\mu^{(v)}$ dieser Gitterpunkte liegen. Für die Koordinate x_1 bzw. x_2 eines solchen Gitterpunktes (x, x_1, x_2) gibt es dann nur l_1 bzw. l_2 Möglichkeiten $1 \leq x_1 \leq l_1$, $1 \leq x_2 \leq l_2$, sodaß zu einem festen Wert μ der Koordinate x höchstens $l_1 l_2$ Gitterpunkte aus $\mathfrak{L}$ in $x = \mu$ liegen können; das heißt aber, es muß für jedes μ die Ungleichung $a_\mu \leq l_1 l_2$ gelten, was gerade den Inhalt von Satz 2 in unserem Falle $n = 2$ ausmacht.

11. Die gleiche Überlegung zeigt aber, daß wenn eine der Zahlen a_μ , etwa a_1 , genau gleich $l_1 l_2$ ist, dann in der Ebene $x = 1$ alle den Ungleichungen $1 \leq x_1 \leq l_1$, $1 \leq x_2 \leq l_2$ genügenden Gitterpunkte $(x, x_1, x_2) = (1, x_1, x_2)$ zu $\mathfrak{L}$ gehören müssen. Die Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{A}' | \mathfrak{A}'')$ reduziert sich dann auf eine nur die Ebenen $x = 2, x = 3, \dots$ betreffende Aufgabe, wobei für diese Ebenen der Reihe nach $a_2, a_3, \dots$ Gitterpunkte vorgeschrieben sind. Was aber irgend eine der Ebenen $x_1 = \mu$ betrifft, so entfallen für die reduzierte Aufgabe jene $L_1 = l_2$ Gitterpunkte, die in $x_1 = \mu$ und zugleich in $x = 1$ liegen, sodaß in der neuen Aufgabe anstelle von $\mathfrak{A}' = (a'_1, \dots, a'_{l_1})$ das Zahlensystem $\mathfrak{A}'_* = (a'_1 - L_1, \dots, a'_{l_1} - L_1)$ zu setzen ist; und analog anstelle von $\mathfrak{A}''$ das Zahlensystem $\mathfrak{A}''_* = (a''_1 - L_2, \dots, a''_{l_2} - L_2)$. Die reduzierte Aufgabe lautet also $\mathfrak{P}(a_2, \dots, a_m | \mathfrak{A}'_* | \mathfrak{A}''_*)$ und

¹⁵ Vgl. l. c. ¹, S. 26, Nr. 3.

(etwa vorhandene) Lösungen der reduzierten und der ursprünglichen Aufgabe entsprechen einander umkehrbar eindeutig; das aber macht in unserem Falle $n = 2$ den Inhalt von Satz 5 aus.

Ganz ebenso ist die Gültigkeit von Satz 2 und Satz 5 für $n > 2$, desgleichen für $n = 1$ einzusehen, womit auch Satz 1 und 4 neuerdings bestätigt sind.

12. Auf die gleiche Weise erkennt man die Richtigkeit von Satz 6. Es genüge wieder, dies für $n = 2$, $a_1 = l_1 l_2$ im Raum mit den Koordinaten x, x_1, x_2 zu erläutern. Da alle Gitterpunkte einer Lösung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{B}' | \mathfrak{B}'')$ nur dem Bereich $1 \leq x_1 \leq l_1, 1 \leq x_2 \leq l_2$ angehören können, so müßten wegen $a_1 = l_1 l_2$ sämtliche Gitterpunkte $x = 1, 1 \leq x_1 \leq l_1, 1 \leq x_2 \leq l_2$ zu $\mathfrak{L}$ gehören; das ergäbe aber, daß in jeder der Ebenen $x_1 = 1, \dots, x_1 = l_1$ mindestens $l_2 = L_1$ Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ liegen, also alle Zahlen $a'_1, \dots, a'_{l_1} \geq L_1$ sein müßten, analog alle $a''_\mu \geq L_2$. So sieht man an dem in Nr. 8 genannten Beispiel der Aufgabe $\mathfrak{P}(6, 2, 1 | 3, 3, 3 | 7, 2)$, daß wegen $a_1 = 6 = l_1 l_2$ zu einer Lösung $\mathfrak{L}$ alle Gitterpunkte $x = 1, 1 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 \leq 2$ gehören müßten; dann hätte man aber mit den Punkten $(1, 1, 2), (1, 2, 2), (1, 3, 2)$ bereits $L_2 = 3$ Gitterpunkte von $\mathfrak{L}$ in der Ebene $x_2 = 2$, in Widerspruch zu $a''_2 = 2$.

13. Was schließlich Satz 3 betrifft, so werde beispielsweise für $n = 3$ die Aufgabe $\mathfrak{P}(L_1^{l_1} | L_2^{l_2} | L_3^{l_3})$ betrachtet. Ein System $\mathfrak{L}$ von Gitterpunkten (x_1, x_2, x_3) , das die Aufgabe löst, kann nur Koordinaten x_2, x_3 aufweisen, die den Ungleichungen $1 \leq x_2 \leq l_2, 1 \leq x_3 \leq l_3$ genügen, in jeder Ebene $x_1 = \mu$ können also zu $\mathfrak{L}$ höchstens alle $l_2 l_3 = L_1$ diesen Ungleichungen genügenden Gitterpunkte (μ, x_2, x_3) gehören; und wegen $a'_\mu = L_1$ müssen sie auch alle dazugehören, woraus klar ist, daß das System $\mathfrak{L}$ eindeutig festgelegt ist, also tatsächlich nur eine einzige Lösung der Aufgabe existiert, womit (3) bestätigt ist.

§ 3. Tabellen.

14. Die Durchrechnung verschiedener Beispiele zu den in diesen Noten behandelten Fragen ergab ein Material von Zahlen $N(\mathfrak{B}' | \mathfrak{B}'' | \dots | \mathfrak{B}^{(n)})$, wovon ein Teil — zu Tabellen

für $n = 3$, $m \leq 5$ und $n = 4$, $m \leq 3$ ergänzt — im Folgenden wiedergegeben wird.¹⁶ Übrigens war es die zu anderem Zweck erfolgte Ausrechnung einer kleinen Tabelle für die Darstellung der Potenzprodukte der symmetrischen Grundfunktionen durch die Potenzproduktsummen (also in unserer jetzigen Bezeichnung: einer Tabelle für die Zahlen $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B})$) und das an dieser Tabelle bemerkte, mir damals nicht bekannte „Symmetriegesetz“, was den ersten Anstoß zur Beschäftigung mit dem in Monatshefte 48, 49 (vgl. l. c.⁸) und in diesen Noten behandelten Gegenstand gab.

Zu den Tabellen sei noch Folgendes bemerkt.

In den Tabellen für $n = 3$, d. i. für die Lösungsanzahlen $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B} | \mathfrak{C})$, sind mitenthalten die Angaben für $n = 2$, — also für die Zahlen $N(\mathfrak{A}' | \mathfrak{A}'')$ der zum betreffenden Grad m gehörenden Cayley-Perronschen Matrix, — da gemäß (2) für den Fall, daß $\mathfrak{A} = (m)$ ist, $N(\mathfrak{A} | \mathfrak{B} | \mathfrak{C}) = N(\mathfrak{B} | \mathfrak{C})$ ist. Aus dem gleichen Grunde konnten die Tabellen für $n = 4$, d. i. für die Lösungsanzahlen $N(\mathfrak{A}' | \mathfrak{A}'' | \mathfrak{A}''' | \mathfrak{A}''')$ beschränkt werden auf die Fälle, in denen keine der Partitionen $\mathfrak{A}^{(v)}$ gleich m ist, da die anderen Fälle gemäß (2) aus den Tabellen für $n = 3$ zu entnehmen sind. Übrigens ist $\binom{P+n-1}{n}$ die Anzahl der Zahlen N in einer Tabelle für die Dimension n und den Grad m , wenn $P = P(m)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl m bedeutet. So enthält unsere Tabelle für $n = 3$, $m = 4$, da $P(4) = 5$ ist, $\binom{7}{3} = 35$ Zahlen; eine Ergänzung unserer Tabelle für $n = 4$ durch Hinzunahme des Grades $m = 4$ würde demnach eine Ausdehnung der Tabelle um $\binom{8}{4} - \binom{7}{3} = 35$ weitere Zahlen erfordern.

Für die Berechnung der Zahlenwerte N ist außer den Rekursionsformeln (1), (2) und den in § 1 angegebenen Formeln, noch für $N(m | \mathfrak{B} | \mathfrak{C}) = N(\mathfrak{B} | \mathfrak{C})$ der Satz zu verwenden, daß $N(\mathfrak{B} | \mathfrak{C}) = 1$, bzw. $= 0$ ist, wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}^{-1}$, bzw. $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}^{-1}$ ist.¹⁷ So ergibt sich $N(5 | 4, 1 | 2, 1^3) = 1$, $N(5 | 4, 1 | 3, 2) = 0$,

¹⁶ Wegen weiteren Materials vgl. auch die Zahlenbeispiele l. c.¹, S. 39, Anm. 16, und S. 54, Nr. 26, sowie die Formeln (28), S. 44 und (43), S. 54; ferner in der vorangegangenen Note III die Formel (18), S. 142 und die Angaben am Schluß von Nr. 13.

¹⁷ Vgl. den in Anm. 13 angeführten Satz VII.

da $(4, 1)^{-1} = (2, 1^3)$ und $(3, 2) > (2, 1^3)$ ist. Die Gleichung $N(5 | 4, 1 | 3, 2) = 0$ läßt sich aber auch aus Satz 2 (Nr. 4) erkennen, darin $l_1 = l_2 = 2$, $a_1 = 5$ gesetzt. Aus dem erstgenannten Satz (l. c.¹⁷) ergibt sich auch $N(4 | 2^2 | 2^2) = 1$ für $\mathfrak{B} = (2^2)$, $\mathfrak{C} = (2^2) = \mathfrak{B}^{-1}$; dasselbe läßt sich auch aus Satz 3 für $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 2$, $L_1 = 4$, $L_2 = 2$, $L_3 = 2$ schließen. Daß $N(4, 1 | 4, 1 | 3, 2) = 0$ ist, folgt sofort aus Satz 6 (Nr. 8) für $l_1 = l_2 = 2$, $L_1 = L_2 = 2$, $a_1 = 4 = l_1 l_2$, $a'_2 = 1 < L_2$. Im übrigen ist auch die Anwendung der Hauptrekursionsformel (1) bei gedrängter Anschreibung¹⁸ nicht allzu mühsam¹⁹ und gestattet vielfach, dieselbe Zahl N zur Kontrolle auf mehreren Wegen zu berechnen, wofür zwei Beispiele folgen mögen:

$$\begin{aligned} N(3, 2 | 3, 2 | 3, 1^2) &= N(2, 3 | 3, 2 | 3, 1^2) = \\ &= N(2 | 2 | 1^2) \sum N(3 | (3); (2, 1) | (3); (2, 1) \text{ 2mal}) + \\ &\quad + N(2 | 1^2 | 2) \sum N(3 | 2, 1 | 1^3) + \\ &\quad + N(2 | 1^2 | 1^2) \sum N(3 | 2, 1 | (3); (2, 1) \text{ 2mal}) = \\ &= 1 \cdot 2 N(3 | 2, 1 | 2, 1) + 1 \cdot N(3 | 2, 1 | 1^3) + \\ &\quad + 2 \cdot 2 N(3 | 2, 1 | 2, 1) = \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 9; \\ \text{oder } &= N(3, 1, 1 | 3, 2 | 3, 2) = \sum N(3, 1 | (3, 1); (2^2) | (3, 1); (2^2)) = \\ &= N(3, 1 | 3, 1 | 3, 1) + 2 N(3, 1 | 3, 1 | 2^2) + \\ &\quad + N(3, 1 | 2^2 | 2^2) = 1 + 2 \cdot 2 + 4 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(3, 1^2 | 2, 1^3 | 1^5) &= \\ &= \sum N(3, 1 | (2, 1^2) \text{ 3mal}; (1^4) | (1^4) \text{ 5mal}) = 15 N(3, 1 | 2, 1^2 | 1^4) + \\ &\quad + 5 N(3, 1 | 1^4 | 1^4) = 15 \cdot 48 + 5 \cdot 96 = 1200; \\ \text{oder } &= N(2, 1^3 | 3, 1^2 | 1^5) = \sum N(2, 1^2 | (3, 1) \text{ 2mal}; (2, 1^2) | (1^4) \text{ 5mal}) = \\ &= 10 N(2, 1^2 | 3, 1 | 1^4) + 5 N(2, 1^2 | 2, 1^2 | 1^4) = \\ &= 10 \cdot 48 + 5 \cdot 144 = 1200; \\ \text{oder } &= N(1^5 | 3, 1^2 | 2, 1^3) = \\ &= \sum N(1^4 | (3, 1) \text{ 2mal}; (2, 1^2) | (2, 1^2) \text{ 3mal}; (1^4)) = \\ &= 6 N(1^4 | 3, 1 | 2, 1^2) + 2 N(1^4 | 3, 1 | 1^4) + 3 N(1^4 | 2, 1^2 | 2, 1^2) + \\ &\quad + N(1^4 | 2, 1^2 | 1^4) = 6 \cdot 48 + 2 \cdot 96 + 3 \cdot 144 + 288 = 1200. \end{aligned}$$

¹⁸ Vgl. das in Note I, l. c.¹, Nr. 15 gegebene Muster.

¹⁹ Besonders gilt dies bei Auftreten des l. c.⁹ erwähnten Sonderfalles, daß unter den Zahlen einer Partition die Zahl 1 auftritt (Formel (41), Nr. 26 der Note I).

15. An früherer Stelle (Note II, l. c. ⁴) wurde besonders auf diejenigen Probleme $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{B} | \mathfrak{C})$ hingewiesen, bei denen eine Lösung auftritt, die durch eine komprimierte Gitterpunktmenge dargestellt wird. In den folgenden Tabellen ist ein solches Problem $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{B} | \mathfrak{C})$ durch einen Stern (*) in der Rubrik für N gekennzeichnet. Bei allen anderen in den Tabellen auftretenden Problemen $\mathfrak{P}(\mathfrak{A} | \mathfrak{B} | \mathfrak{C})$ werden sämtliche Lösungen durch nicht-komprimierte Gitterpunktmenge dargestellt.

Zusatz²⁰. Zum Schluß sind noch für die in Note II eingeführten Anzahlen komprimierter n -dimensionaler Gitterpunktmenge einige Zahlenwerte beigelegt, u. zw. sind angegeben Anzahlen $P^n(m; \mathfrak{B})$ für $n = 3$ und Anzahlen $P^n(m)$ für $n = 2$ und $n = 3$, jedesmal für $m \leq 14$.

Was dabei die Berechnung der Zahlen $P^2(m) = P(m)$ anlangt, für die ja bis zu $m = 600$ reichende Tabellen vorhanden sind²¹, so vgl. man das l. c. ²⁰, S. 120 in Anm. 94 über Formel (27) Gesagte. Was ferner die Tabelle für die Zahlen $P^3 = P^3(m; \mathfrak{B})$ anlangt, so konnten bei den einzelnen Gradzahlen m viele Partitionen $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \dots)$ weggelassen werden; einesteils konnten nämlich wegen $P^3(m; b_1, \dots, b_k, 1) = P^3(m-1; b_1, \dots, b_k)$ alle Partitionen $\mathfrak{B}$ wegbleiben, unter deren Zahlen b_μ die Zahl 1 (neben anderen Zahlen oder mehrmals) vorkommt, sodaß beispielsweise für $m = 13$, $\mathfrak{B} = (9, 2, 1, 1)$ die zugehörige Zahl $P^3(m; \mathfrak{B}) = 58$ bereits unter $m = 11$, $\mathfrak{B} = (9, 2)$ sich findet; andernteils konnten alle Partitionen $\mathfrak{B}$ mit mehreren einander gleichen Zahlen wegbleiben, da beispielsweise die zu $m = 13$, $\mathfrak{B} = (3, 3, 3, 2, 2)$ oder $\mathfrak{B} = (3, 2, 2, 2, 2, 2)$ gehörende Zahl P^3

²⁰ Dieser Zusatz bei der Korrektur ergab sich gelegentlich der Ausgestaltung des § 10 der Note: „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmenge“, diese Sitzber., Jahrgang 1940, S. 69; vgl. Anm. * auf S. 69, sowie wegen Definition der Anzahlen $P^n(m)$ bzw. $P^n(m; \mathfrak{B})$ ebenda Nr. 51 bzw. 56, speziell auch Anm. 98.

²¹ Vor allem ist auch das asymptotische Wachstum von $P(m)$, insbesondere von Hardy und Ramanujan studiert worden. Siehe G. N. Watson, Journal f. d. reine und angewandte Mathematik, 179 (1938), S. 97 und Hardy and Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford, 1938, Chap. XIX.

offenbar denselben Wert hat²², wie die zu $m = 5$, $\mathfrak{B} = (3, 2)$ gehörende Zahl $P^3 = 4$; endlich konnte bei jedem Wert von m die aus einer einzigen Zahl $b_1 = m$ bestehende Partition $\mathfrak{B} = (m)$ wegb bleiben, weil die zugehörige Zahl $P^3(m; \mathfrak{B})$ einfach gleich $P^2(m)$ ist, also unter der Rubrik für die Zahlen $P^2(m)$ zu finden ist. Daraus ergibt sich, daß in der Tabelle für die Zahlen $P^3 = P^3(m; \mathfrak{B})$ die Gradzahlen $m \leq 4$ überhaupt nicht aufgeführt zu werden brauchten, bei den höheren Gradzahlen m aber von der Gesamtheit aller Partitionen $\mathfrak{B}$ nur ein kleiner Teil, beispielsweise von den 101 Partitionen der Zahl $m = 13$ nur ihrer 9. Was die Berechnung der Zahlen $P^3(m; \mathfrak{B})$ anlangt, so sei auf das l. c.²⁰ Nr. 65 ausführlich dargelegte Beispiel $m = 13$, $\mathfrak{B} = (7, 4, 2)$ verwiesen. Gemäß l. c., S. 121, Formel (29) wird dann $P^3(m)$ durch Addition der für alle Partitionen $\mathfrak{B}$ von m gebildeten Zahlen $P^3(m; \mathfrak{B})$ erhalten.

Die Anzahl $P^2(m)$ aller komprimierten 2-dimensionalen Gitterpunkt mengen vom Grad m — anders gesagt die Anzahl $P(m)$ aller Partitionen von m — ist bezüglich ihres Wachstums mit m bekanntlich eingehend untersucht worden (vgl. l. c.²¹). Von dem natürlich viel stärkeren Wachstum der Anzahl $P^3(m)$ der komprimierten 3-dimensionalen²³ Gitterpunkt mengen ist wohl zur Zeit außer den hier angegebenen Werten für $m \leq 14$ nichts bekannt.

²² Außer für die angeführten Partitionen $(3^3, 2^2)$ und $(3, 2^5)$ hat P^3 nach dem vorher Gesagten denselben Wert 4 natürlich auch für die Partitionen $(3^3, 2, 1^2)$, $(3^2, 2^3, 1)$, $(3^2, 2^2, 1^3)$, $(3^2, 2, 1^5)$, $(3, 2^4, 1^2)$, $(3, 2^3, 1^4)$, $(3, 2^2, 1^6)$, $(3, 2, 1^8)$, die darum alle in der Tabelle bei $m = 13$ fehlen.

²³ Für eine beliebige Dimension n seien nur die Formeln beigelegt: $P^n(1) = 1$, $P^n(2) = n$, $P^n(3) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $P^n(4) = \frac{1}{6}n(n^2 + 6n - 1)$, sowie (für $m \geq 1$, $n \geq 0$)

$$\begin{aligned} P^n(m) &= \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{m-1-\nu} \binom{n}{\nu} \binom{n-1-\nu}{m-1-\nu} P^\nu(m) = \\ &= \binom{n}{m-1} + \sum_{\nu=0}^{m-2} (-1)^{m-\nu} \binom{n}{\nu} \binom{n-1-\nu}{m-2-\nu} P^\nu(m); \end{aligned}$$

dabei ist $P^0(m) = 1$ für $m = 1$ und $= 0$ für $m > 1$.

Lösungsanzahlen $N(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}|\mathfrak{C})$.

$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$	N	$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$	N	$\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$	N
m = 1		m = 4 (Fortsetzung)		m = 5 (Fortsetzung)	
1 1 1	* 1	3,1 3,1 1 ⁴	16	5 3,1 ² 2,1 ²	7
m = 2		3,1 2 ² 2 ²	4	5 3,1 ² 1 ⁵	20
2 2 2	0	3,1 2 ² 2,1 ²	10	5 2 ² ,1 2 ² ,1	5
2 2 1 ²	* 1	3,1 2 ² 1 ⁴	24	5 2 ² ,1 2,1 ³	12
2 1 ² 1 ²	2	3,1 2,1 ² 2,1 ²	22	5 2 ² ,1 1 ⁵	30
1 ² 1 ² 1 ²	4	3,1 2,1 ² 1 ⁴	48	5 2,1 ³ 2,1 ³	27
m = 3		3,1 1 ⁴ 1 ⁴	96	5 2,1 ³ 1 ⁵	60
3 3 3	0	2 ² 2 ² 2 ²	8	5 1 ⁵ 1 ⁵	120
3 3 2,1	0	2 ² 2 ² 2,1 ²	16	4,1 4,1 4,1	0
3 3 1 ³	* 1	2 ² 2 ² 1 ⁴	36	4,1 4,1 3,2	0
3 2,1 2,1	* 1	2 ² 2,1 ² 2,1 ²	34	4,1 4,1 3,1 ²	* 1
3 2,1 1 ³	3	2 ² 2,1 ² 1 ⁴	72	4,1 4,1 2 ² ,1	2
3 1 ³ 1 ³	6	2 ² 1 ⁴ 1 ⁴	144	4,1 4,1 2,1 ³	8
2,1 2,1 2,1	4	2,1 ² 2,1 ² 2,1 ²	70	4,1 4,1 1 ⁵	25
2,1 2,1 1 ³	9	2,1 ² 2,1 ² 1 ⁴	144	4,1 3,2 3,2	* 1
2,1 1 ³ 1 ³	18	1 ⁴ 1 ⁴ 1 ⁴	288	4,1 3,2 3,1 ²	3
1 ³ 1 ³ 1 ³	36		576	4,1 3,2 2 ² ,1	7
m = 4		m = 5		4,1 3,2 2,1 ³	19
4 4 4	0	5 5 5	0	4,1 3,2 1 ⁵	50
4 4 3,1	0	5 5 4,1	0	4,1 3,1 ² 3,1 ²	9
4 4 2 ²	0	5 5 3,2	0	4,1 3,1 ² 2 ² ,1	16
4 4 2,1 ²	0	5 5 3,1 ²	0	4,1 3,1 ² 2,1 ³	41
4 4 1 ⁴	* 1	5 5 2 ² ,1	0	4,1 3,1 ² 1 ⁵	100
4 3,1 3,1	0	5 5 2,1 ³	0	4,1 2 ² ,1 2 ² ,1	29
4 3,1 2 ²	0	5 5 1 ⁵	* 1	4,1 2 ² ,1 2,1 ³	66
4 3,1 2,1 ²	* 1	5 4,1 4,1	0	4,1 2 ² ,1 1 ⁵	150
4 3,1 1 ⁴	4	5 4,1 3,2	0	4,1 2,1 ³ 2,1 ³	141
4 2 ² 2 ²	* 1	5 4,1 3,1 ²	0	4,1 2,1 ³ 1 ⁵	300
4 2 ² 2,1 ²	2	5 4,1 2 ² ,1	0	4,1 1 ⁵ 1 ⁵	600
4 2 ² 1 ⁴	6	5 4,1 2,1 ³	* 1	3,2 3,2 3,2	4
4 2,1 ² 2,1 ²	5	5 4,1 1 ⁵	5	3,2 3,2 3,1 ²	9
4 2,1 ² 1 ⁴	12	5 3,2 3,2	0	3,2 3,2 2 ² ,1	18
4 1 ⁴ 1 ⁴	24	5 3,2 3,1 ²	0	3,2 3,2 2,1 ³	42
3,1 3,1 3,1	* 1	5 3,2 2 ² ,1	* 1	3,2 3,2 1 ⁵	100
3,1 3,1 2 ²	2	5 3,2 2,1 ³	3	3,2 3,1 ² 3,1 ²	22
3,1 3,1 2,1 ²	6	5 3,2 1 ⁵	10	3,2 3,1 ² 2 ² ,1	38
		5 3,1 ² 3,1 ²	* 1	3,2 3,1 ² 2,1 ³	88
		5 3,1 ² 2 ² ,1	2	3,2 2 ² ,1 2 ² ,1	200
					64

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$	N	$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$	N	$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$	N
m = 5 (Fortsetzung)		m = 5 (Fortsetzung)		m = 5 (Fortsetzung)	
$3,2 \mid 2^2,1 \mid 2,1^3$	138	$3,1^2 \mid 2^2,1 \mid 2^2,1$	132	$2^2,1 \mid 2,1^3 \mid 2,1^3$	882
$3,2 \mid 2^2,1 \mid 1^5$	300	$3,1^2 \mid 2^2,1 \mid 2,1^3$	282	$2^2,1 \mid 2,1^3 \mid 1^5$	1800
$3,2 \mid 2,1^3 \mid 2,1^3$	288	$3,1^2 \mid 2^2,1 \mid 1^5$	600	$2^2,1 \mid 1^5 \mid 1^5$	3600
$3,2 \mid 2,1^3 \mid 1^5$	600	$3,1^2 \mid 2,1^3 \mid 2,1^3$	582	$2,1^3 \mid 2,1^3 \mid 2,1^3$	1782
$3,2 \mid 1^5 \mid 1^5$	1200	$3,1^2 \mid 2,1^3 \mid 1^5$	1200	$2,1^3 \mid 2,1^3 \mid 1^5$	3600
$3,1^2 \mid 3,1^2 \mid 3,1^2$	50	$3,1^2 \mid 1^5 \mid 1^5$	2400	$2,1^3 \mid 1^5 \mid 1^5$	7200
$3,1^2 \mid 3,1^2 \mid 2^2,1$	82	$2^2,1 \mid 2^2,1 \mid 2^2,1$	208	$1^5 \mid 1^5 \mid 1^5$	14400
$3,1^2 \mid 3,1^2 \mid 2,1^3$	182	$2^2,1 \mid 2^2,1 \mid 2,1^3$	432		
$3,1^2 \mid 3,1^2 \mid 1^5$	400	$2^2,1 \mid 2^2,1 \mid 1^5$	900		

Lösungszahlen $N(\mathfrak{A}' \mid \mathfrak{A}'' \mid \mathfrak{A}''' \mid \mathfrak{A}''')$.

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}''$ $\mathfrak{A}'''$	N	$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}''$ $\mathfrak{A}'''$	N
m = 2		m = 3 (Fortsetzung)	
$1^2 \mid 1^2 \mid 1^2 \mid 1^2$	8	$2,1 \mid 2,1 \mid 1^3 \mid 1^3$	54
		$2,1 \mid 1^3 \mid 1^3 \mid 1^3$	108
m = 3		$1^3 \mid 1^3 \mid 1^3 \mid 1^3$	216
$2,1 \mid 2,1 \mid 2,1 \mid 2,1$	13		
$2,1 \mid 2,1 \mid 2,1 \mid 1^3$	27		

Formeln für die Anzahlen $P^3(m, \mathfrak{B})$ und $P^n(m)$ siehe nächste Seite.

**Anzahlen $P^3(m; \mathfrak{B})$ und $P^n(m)$ von komprimierten
Gitterpunkt mengen.**

m	$\mathfrak{B}$	P^3	m	$\mathfrak{B}$	P^3	m	$P^2(m)$	$P^3(m)$
5	(3, 2)	4	12	(7, 3, 2)	48	1	1	1
6	(4, 2)	8		(7, 5)	39	2	2	3
7	(4, 3)	7		(8, 4)	70	3	3	6
	(5, 2)	12		(9, 3)	78	4	5	13
8	(5, 3)	13		(10, 2)	82	5	7	24
	(6, 2)	20	13	(6, 4, 3)	37	6	11	48
9	(4, 3, 2)	10		(6, 5, 2)	34	7	15	86
	(5, 4)	12		(7, 4, 2)	70	8	22	160
	(6, 3)	21		(7, 6)	30	9	30	280
	(7, 2)	28		(8, 3, 2)	74	10	42	498
10	(5, 3, 2)	18		(8, 5)	70	11	56	857
	(6, 4)	25		(9, 4)	105	12	77	1475
	(7, 3)	35		(10, 3)	112	13	101	2481
	(8, 2)	42		(11, 2)	110	14	135	4169
11	(5, 4, 2)	20	14	(5, 4, 3, 2)	26			
	(6, 3, 2)	32		(6, 5, 3)	37			
	(6, 5)	19		(7, 4, 3)	62			
	(7, 4)	42		(7, 5, 2)	70			
	(8, 3)	54		(8, 4, 2)	116			
	(9, 2)	58		(8, 6)	66			
12	(5, 4, 3)	18		(9, 3, 2)	106			
	(6, 4, 2)	42		(9, 5)	120			
				(10, 4)	158			
				(11, 3)	154			
				(12, 2)	152			