

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

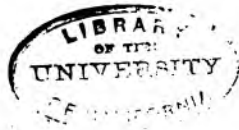
k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

Band XXI. Jahrgang 1891.

---



**München.**

Verlag der K. Akademie.

1892.

---

In Commission bei G. Franz.

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch  
eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen  
zwei Variablen definirten Curvensysteme.

Von Walther Dyck.

(Eingelaufen 3. Januar.)

(Mit Taf. I bis IV.)

§ 1.

**Fragestellung und Disposition.**

Die Untersuchungen über die gestaltlichen Verhältnisse des durch eine Differentialgleichung erster Ordnung mit reellen Coefficienten zwischen zwei Veränderlichen  $x, y$ :

$$(1.) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

in der Ebene  $(x, y)$  definirten Curvensystems haben sich vor allen Dingen mit den Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades

$$(2.) \quad X + Y \frac{dy}{dx} = 0$$

(wo  $X, Y$  reelle eindeutige Functionen von  $x, y$  bedeuten) beschäftigt. Unter der Voraussetzung, dass „im Allgemeinen“ die Entwicklung von  $X, Y$  an jeder endlichen Stelle  $x_0, y_0$  nach ganzen Potenzen von  $x - x_0, y - y_0$  möglich ist, und dabei die Glieder erster Ordnung der Entwicklung stets vor-

handen sind, lassen sich die singulären Stellen des durch die Gleichung (2.) definirten Curvensystems characterisiren durch das Verhalten der Curven des durch die Gleichung

$$(3.) \quad (m_1 x + n_1 y) + (m_2 x + n_2 y) \frac{dy}{dx} = 0$$

gegebenen Systems im Punkte  $x = 0, y = 0$ , und es fügen sich durch eine geeignete Transformation auch etwa im Unendlichen vorhandene singuläre Stellen des Systemes (2.) in diese Characteristik ein. Je nach den Werten der reellen Coefficienten  $m, n$  in (3.) lassen sich drei Haupttypen von singulären Stellen unterscheiden — auf welche wir im Folgenden noch einzugehen haben werden.<sup>1)</sup>

Von hier ab haben sich die Untersuchungen einmal auf specielle Fälle jener Typen ausgedehnt;<sup>2)</sup> weiter aber hat Poincaré in einer Reihe von Abhandlungen „Sur les courbes définies par une équation différentielle“ Methoden aufgestellt, welche den Gesamtverlauf des durch eine Differentialgleichung (2.) definirten Curvensystems, welches die Ebene  $(x, y)$  einfach überdeckt, zu discutiren gestatten; überdies hat Poincaré diese Untersuchungen auch auf Differentialgleichungen höheren Grades und auf Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt.

Betrachten wir nun die „allgemeinen“ Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0,$$

---

1) Man vergleiche hierzu etwa die Entwicklungen in Serret's Differential- und Integral-Rechnung (in der Bearbeitung von Harnack) pag. 68 ff. der 2. Abt. des II. Bandes, sowie die sogleich genauer zu besprechenden Untersuchungen von Poincaré im Journal de Mathématiques Serie 3, Bd. VII und VIII; Serie 4, Bd. I und II.

2) Vergl. z. B. Björling, Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen 1. O. und 1. Grades. Grunerts Archiv, 2. Reihe, Bd. 4.

indem wir hierfür festsetzen, dass die reelle Function  $F$  von  $x, y, y'$  für jedes die Gleichung (1.) befriedigende endliche Wertesystem  $x_0, y_0, y'_0$  nach der Taylor'schen Reihe nach ganzen Potenzen von  $x - x_0, y - y_0, y' - y'_0$  entwickelbar ist, wobei die Glieder erster Ordnung niemals sämmtlich fehlen, d. h. niemals die Gleichungen

$$(4.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

für ein Wertesystem  $x_0, y_0, y'_0$  gleichzeitig erfüllt sein sollen. Für den Verlauf des durch die Differentialgleichung definirten Curvensystems ist die „Discriminantencurve“ wesentlich, für welche zwei von den verschiedenen, jedem Punkte  $x_0, y_0$  zugeordneten Richtungen  $y'_0$  zusammenfallen. Es sind die Punkte, für welche

$$(5.) \quad F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ist. Diese Discriminantencurve ist bekanntlich „im Allgemeinen“ der Ort der Spitzen für das Curvensystem, wie dies zuerst de Morgan, Darboux und Cayley gezeigt haben.<sup>1)</sup>

Von hier aus wandte sich die Untersuchung vor Allem auf die Frage nach den „singulären Lösungen“ und die eben genannten Arbeiten von Darboux und Cayley entscheiden, unter welchen Umständen die Discriminantencurve oder ein sich abspaltender Teil derselben eine singuläre

---

1) Man vergl.: de Morgan's Aufsatz in den Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Band IX; -- Darboux's zwei Noten in den Comptes rendus vom Jahre 1870 und insbesondere die ausführliche Darstellung „Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre,“ Bulletin des Sciences Mathém., 1. Serie, Band IV (1873); und die Aufsätze Cayley's im Messenger of Mathematics, Band II (1873) und VI.

Lösung darstellt. Es muss dann jedenfalls neben den Gleichungen (5.) noch die weitere

$$(6.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

für alle Punkte dieses Ortes erfüllt sein.

Weiterhin aber gibt die Möglichkeit eines Zerfallens der Discriminantencurve in eine Reihe mehrfach zählender Factoren Anlass, noch weitere besondere Vorkommnisse, wie den Ort von Berührungspunkten je zweier Curven des Systemes u. a. zu untersuchen.<sup>1)</sup>

„Im Allgemeinen“ treten jedoch alle solche Vorkommnisse nicht ein; die Discriminantencurve ist Spitzenort, und die Gleichungen (5.) und (6.) sind nur für einzelne Punkte gleichzeitig erfüllt; diese Punkte der Discriminantencurve sind dann wesentlich singuläre Stellen, definirt durch das Gleichungssystem:

$$(7.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

1) Man vergl. hierzu neben den soeben genannten Arbeiten noch die Untersuchungen von Casorati aus den Jahren 1874—1881 in den Rendiconti und Memorie della R. Accad. dei Lincei, zum Teil abgedruckt im Bulletin von Darboux, 2. Serie Band III (1879). Ferner einen Aufsatz von Björling „Ueber die Coincidenzcurve der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung“ im „Bihang“ zu den „Handlingar“ der k. schwed. Akad., 2. Serie Band 12, Abschnitt I (1887). — Weiter einen Aufsatz von Workman „Theory of the singular solutions . . .“ im Quaterly Journal Band 22 (1887), in welchem die Litteratur ausführlich besprochen ist. — Sodann eine Note von Kapteyn im Bulletin von Darboux, 2. Serie Band XII (1888). — Auch eine Dissertation von C. Schmidt (Giessen 1884) ist zu nennen, welche indess weder auf Darboux noch auf Cayley u. a. Bezug nimmt.

und geometrisch characterisirt dadurch, dass in ihnen die Richtung der Tangente an die Integralcurve zusammenfällt mit der Richtung der Tangente an die Discriminantencurve.

Das Verhalten der Curven des Integralsystems in denselben ist meines Wissens noch nicht eingehend discutirt worden.

Es haben aber Briot und Bouquet in ihren fundamentalen Untersuchungen „Sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles“<sup>1)</sup> gezeigt, dass im Falle des Bestehens der Gleichungen (7.) die Lösung der Gleichung  $F = 0$  durch eine gewisse Transformation zurückgeführt werden kann auf die Behandlung einer Differentialgleichung ersten Grades, die an der betreffenden Stelle sich singular verhält. Weiter zieht Poincaré in der schon erwähnten Abhandlung<sup>2)</sup> die fraglichen Punkte auch gestaltlich in seine Betrachtung. Indem er aber die geometrische Darstellung des Curvensystems (1.) nicht in die  $(x, y)$ -Ebene verlegt, sondern — für seine Zwecke sehr übersichtlich — auf die Fläche

$$(8.) \quad F(x, y, z) = 0$$

(wo  $z = \frac{dy}{dx}$ ) und auf dieser Fläche ein entsprechendes einfach überdeckendes Curvensystem durch eine Differentialgleichung in Coordinaten  $u, v$  auf die Fläche darstellt, er-

1) Journal de l'école polyt. cah. 36. Hier seien noch unmittelbar anschliessende Untersuchungen von Poincaré (cah. 45.), Picard (Société math. de France Bd. 12) und insbesondere von Fuchs (Sitzungsber. der Akad. d. W. Berlin 1886) erwähnt. Indess kommen dieselben für die vorliegende, den „allgemeinen Fall“ betreffende Discussion der gestaltlichen Verhältnisse nicht in Betracht.

2) Journal de Math., Serie 4, Bd. I, pag. 196 ff.

geben sich hier die durch Gleichung (3.) characterisirten Formen, wie sie bei Gleichungen ersten Grades auftreten.

Nun lässt sich allerdings aus den Poincaré'schen Formulierungen sofort erkennen, dass die Curvensysteme in der  $(x\ y)$ -Ebene aus der Projection der von ihm auf der Fläche  $F(x, y, z) = 0$  betrachteten folgen. Es lässt sich auch der Umstand, dass die Discriminantencurve der Ort der Spitzen der Integralcurven ist, direct aus der Bemerkung ablesen, dass die auf der Fläche  $F = 0$  verlaufenden Curven die „Umrisscurve“  $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$  (die dann in der Projection die Discriminantencurve abgiebt) in der (Projections-) Richtung der  $z$ -Axe durchsetzen. Das Verhalten des Curvensystems in den singulären Stellen (der Umrisscurve) bedarf aber noch einer speciellen Discussion, um aus ihm den Verlauf in der Projection auf die  $xy$ -Ebene abzulesen. Auf der Fläche  $F = 0$  erscheinen die in Gleichungen von der Form (3.) gekennzeichneten drei Haupttypen, aber ihre Lage gegen die Umrisscurve und gegen die Projectionsrichtung (die  $z$ -Axe) ist in den einzelnen Fällen wesentlich und erst aus deren Fixirung ergibt sich der Character der singulären Stelle in der  $xy$ -Ebene.<sup>1)</sup>

Es erscheint mir daher nicht unwesentlich, auf eine genaue Discussion des Verlaufes der Curven in der Umgebung dieser singulären Stellen einzugehen und zwar in der  $(x\ y)$ -Ebene selbst. Sie ist in § 2 der vorliegenden Mitteilung ausgeführt, und zwar dadurch, dass in der Umgebung der singulären Stelle die allgemeine Differentialgleichung ersetzt wird durch eine Gleichung, welche die Glieder niedrigster Ordnung in der Entwicklung umfasst: Dies ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung

1) Vergleiche Seite 39 des Folgenden.

zweiten Grades, welche die Eigenschaft besitzt, sich direct integrieren zu lassen. Die von Briot und Bouquet (für den Fall auch noch weiterer Bedingungsgleichungen) gegebene Methode, jeden Zweig der Differentialgleichung durch eine Transformation auf eine Gleichung ersten Grades zurückzuführen, kommt hier einfach in der Integrationsmethode der Differentialgleichung zweiten Grades zum Ausdruck.

Es ergeben sich dabei drei wesentlich von einander verschiedene Haupttypen für diese „im Allgemeinen“ sich bildenden Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche (eben jener Transformation entsprechend) den bei den Differentialgleichungen ersten Grades auftretenden Typen in bestimmter Weise zugeordnet sind.<sup>1)</sup> Dabei seien aber gleich hier zwei wesentliche Unterschiede zwischen dem Verlauf des Curvensystems im einen und andern Falle gekennzeichnet: Der erste folgt sofort aus den oben gemachten Bemerkungen; das Curvensystem umgibt bei den Differentialgleichungen ersten Grades die singuläre Stelle vollständig, während dasselbe in der Umgebung der singulären Stelle im Falle der allgemeinen Differentialgleichung auf das Innengebiet der Discriminantencurve, welches doppelt überdeckt wird,<sup>2)</sup> beschränkt ist. Und weiter: Bei den Gleichungen ersten Grades wird der Differentialquotient  $\frac{dy}{dx}$  an der singulären Stelle unbestimmt, während er für die allgemeinen Gleichungen an den durch die Gleichungen (7.) bezeichneten Stellen einen ganz bestimmten Wert besitzt. Es ist ein Vorkommnis viel speciellerer Art, wenn hier

1) Man vergleiche die Tafeln I, II, III.

2) Selbstverständlich abgesehen von dem Umstande, dass weitere Zweige des Systems, welche sich an der betreffenden Stelle nicht singulär verhalten, noch über der Stelle ausgebreitet sein können.



ein solches Unbestimmtwerden eintritt; dann wird nämlich die letzte der Gleichungen (7.) dadurch erfüllt, dass gleichzeitig

$$(9.) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wird. Es ist nicht uninteressant, auch diese Punkte, für welche sich zunächst wieder Gleichungen von der Form (3.) zu Grunde legen lassen, weiter zu verfolgen.<sup>1)</sup> Ich will mich aber in der gegenwärtigen Mitteilung zunächst „auf den allgemeinen Fall“ (wenn diese zur Abkürzung gewählte Bezeichnung gestattet ist) beschränken. —

Neben den durch die Gleichungen (7.) definirten „wesentlich“ singulären Stellen treten nun für unsere Differentialgleichungen (sofern sie nur von höherem als zweiten Grade sind) im Allgemeinen noch Singularitäten auf, welche man als „ausserwesentliche“ bezeichnen kann: Es sind diejenigen Stellen der Ebene  $(x, y)$ , in welchen die Discriminantencurve eine Spitze besitzt, also definiert durch das Gleichungssystem:

$$(10.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0.$$

Ich bin in § 3 (vergl. auch Tafel IV, Fig. IV) auf das Verhalten des Curvensystems in diesen Stellen kurz eingegangen.

Mit den durch die Gleichungen (7.) und (10.) definirten singulären Stellen sind die im Allgemeinen eintretenden besonderen Vorkommnisse erschöpft.

Für eine Discussion des Gesamtverlaufes der Curven des durch eine Gleichung (1.) definirten Systemes liefert nun — wie in § 4 näher ausgeführt — die Bestimmung des

---

1) Wobei dann insbesondere das Verhalten der Discriminantencurve, die in solchen Stellen mehrfache Punkte besitzt, wesentlich ist.

Characters der singulären Stellen die Möglichkeit, die Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse auf eine Reihe von je einfach von den Curven des Integralsystems überdeckten Schichten zu übertragen, deren jede durch (geschlossene) Teile der Discriminantencurve abgegrenzt ist und auf deren Rand — soferne im Innern der Gebiete keine singulären Stellen vorhanden sind — sich die singulären Punkte verteilen. Dabei nimmt jeder singuläre Punkt an zwei längs der Discriminantencurve zusammenhängenden Schichten Teil. So lassen sich für jedes Teilgebiet Relationen zwischen der „Charakteristik“ (Zusammenhangszahl) desselben und den auf dem Rande befindlichen singulären Stellen aufstellen, wie sie Poincaré für jedes geschlossene Gebiet von  $F=0$  und die auf ihm nach den Typen der Gleichungen (3.) unterschiedenen singulären Stellen gegeben hat, und von der Art wie ich sie für beliebige, ein zweidimensionales Gebiet einfach überdeckende Curvensysteme in Beiträgen zur Analysis situs (vergl. z. B. Math. Annalen Bd. 32, pag. 500) aufgestellt habe.

Auch bei diesen Abzählungen habe ich in der gegenwärtigen Mitteilung singuläre Stellen im Innern der Gebiete als „im Allgemeinen nicht auftretend“ nicht berücksichtigt. Solche Abzählungen bieten indess gerade auch bei specielleren Fragestellungen Interesse. Ich möchte gleich hier ein Beispiel erwähnen, welches H. A. Schwarz mit Bezug auf die singulären Stellen der Haupttangentialcurven einer Minimalfläche aufgestellt hat<sup>1)</sup>. Es war die in einer mündlichen Unterredung mir von Herrn Schwarz mitgeteilte Formel, welche mich, zusammen mit der Lektüre der Poincaré'schen Abhandlungen veranlasst hat, meine Studien über Analysis situs speciell auf die durch Differential-

1) „Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen.“  
Gesammelte Mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz.  
Band I pag. 131 und Zusatz pag. 319—321.

gleichungen erster Ordnung definirten Curvensysteme anzuwenden. Ich denke dabei auch auf solche speciellere Fragestellungen bei nächster Gelegenheit einzugehen. Einige diesbezügliche Bemerkungen habe ich in § 5 mit Bezug auf den Verlauf der Haupttangentencurven einer Fläche angefügt. Es schien mir nämlich nicht uninteressant zu zeigen, dass die sämtlichen drei Haupttypen wesentlich singulärer Punkte im Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche vorkommen können an (parabolisch gekrümmten) Stellen, in welchen die Fläche eine ganz bestimmte Tangentialebene besitzt, sich also im gewöhnlichen Sinne regulär verhält<sup>1)</sup>.

Der Character der in der vorliegenden Mitteilung untersuchten „im Allgemeinen vorhandenen“ singulären Stellen eines Curvensystems ist wesentlich bedingt durch die Definition des Systems durch eine Differentialgleichung. Bekanntlich gelangt man zu ganz anderen Resultaten, wenn man von der Definition eines Curvensystems durch eine Gleichung zwischen  $x, y$  und einem willkürlichen Parameter ausgeht. Es schien mir passend, (in einem letzten § 6) die unter der letzteren Annahme „im Allgemeinen“ eintretenden besonderen Vorkommnisse zusammenzustellen, wo dann der wesentliche Unterschied der beiden Annahmen klar zum Ausdruck gelangt.

---

1) Hierzu vergleiche man den Aufsatz von Klein im VI. Bande der mathematischen Annalen „Ueber Flächen dritter Ordnung,“ in welchem einer der hier zu besprechenden Typen dargestellt ist für den Verlauf der Haupttangentencurven in der Umgebung der sogenannten asymptotischen Punkte (a. a. O. pag. 576 und Tafel VI).

Bezüglich des Verhaltens der Haupttangentencurven in singulären Punkten einer Fläche habe ich zusammen mit Herrn Finsterwalder im math. Institut der techn. Hochschule Untersuchungen veranlasst, über die bei anderer Gelegenheit berichtet werden soll.

§ 2.

**Die wesentlich singulären Stellen einer „allgemeinen“  
Differentialgleichung erster Ordnung.**

Um das Verhalten des durch die Gleichung

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0$$

definierten Curvensystems in der Umgebung eines singulären Punktes, für welchen

$$(7.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

statthat, zu studiren, sei der singuläre Punkt im Coordinatenanfangspunkt  $x = 0, y = 0$  angenommen und die  $x$ -Axe in ihm als Tangente an die Discriminantencurve, so dass

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0$$

ein Lösungssystem der Gleichungen (7.) bildet.

Die nach den Voraussetzungen über die Funktion  $F$  an jeder Stelle mögliche Potenzentwicklung gestaltet sich im Nullpunkt zunächst folgendermassen:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{F}_2 y}{2} \\ + \frac{1}{2}(\overline{F}_{11} x^2 + 2\overline{F}_{12} xy + \overline{F}_{22} y^2) + (\overline{F}_{13} x + \overline{F}_{23} y)y' + \frac{1}{2}\overline{F}_{33} y'^2 \\ + \frac{1}{6}(\overline{F}_{111} x^3 + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Nun wird die Gleichung

$$\frac{d y}{d x} = y'$$

erfüllt, wenn man setzt:

$$y = y' \cdot x \cdot v$$

wo  $v$  für  $x = 0$  nicht verschwindet. Substituiren wir diesen Wert von  $y$  in der obigen Entwicklung, so erhalten wir Aufschluss über die Grössenordnung der einzelnen Terme derselben. Die oben durch Unterstreichen hervorgehobenen Glieder sind in  $x$  und  $y'$  von der zweiten Dimension, alle übrigen von höherer. Indem wir eine etwas kürzere Bezeichnungswaise für die Zahlencoefficienten jener Glieder einführen, von denen „im Allgemeinen“ keines verschwindet, erhalten wir folgenden Satz:

Das Verhalten des durch die Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(11.) \quad y'^2 + 2cx'y' + bx^2 + 2ay = 0$$

definirten Curvensystems in der Umgebung des Punktes  $x = 0, y = 0$  ist typisch für die „im Allgemeinen“ auftretenden, durch die Gleichungen (7.) definirten Singularitäten einer Differentialgleichung erster Ordnung.<sup>1)</sup>

Die Integration dieser Differentialgleichung lässt sich sofort bewerkstelligen. Ich führe dieselbe, um die Beziehung der hier auftretenden Singularitäten zu den bei den Gleich-

---

1) Man vergleiche bezüglich der allgemeinen Formulirung der Reduction einer Differentialgleichung auf die Glieder niedrigster Dimension, vor Allem die schon genannte Abhandlung von Briot und Bouquet (im 36. Heft des Journal de l'école Polyt.) Abschn. III und IV. Weitere Ausführungen darüber enthält auch ein neuerdings erschienener Aufsatz von Fine „On the Functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux Polygon-Construction of these equations. American Journal Bd. XI, 1889.

Wählt man für  $F(x, y, z) = 0, y' = z$  wieder die Deutung als Fläche über der  $(xy)$ -Ebene, so besagt hier die Beschränkung auf die Glieder (10.), dass die Fläche, welche wegen  $\overline{F}_1 = 0, \overline{F}_3 = 0$  im Coordinatenanfangspunkt die Ebene  $(xz)$  berührt, ersetzt wird durch ein Paraboloid.

ungen 1. Grades stattfindenden möglichst scharf hervortreten zu lassen, im Folgenden näher aus:

Durch Differentiation nach  $x$  entsteht aus (11.) die Differentialgleichung ersten Grades in  $x$  und  $y'$ :

$$(12.) \quad (c x + y') \frac{dy'}{dx} + b x + (a + c) y' = 0$$

Es sei nun der Uebersichtlichkeit der folgenden Entwicklung wegen in dieser Differentialgleichung  $x$  durch die Bezeichnung  $x'$  ersetzt. Wir deuten dann den Verlauf der Curven dieses Systems (12.) in einer Ebene ( $x', y'$ ) und kehren von ihr zu den Curven des Systems (11.) zurück mit Hilfe der ein-zweideutigen Abbildung der Ebene ( $x', y'$ ) in die ursprüngliche Ebene ( $x, y$ ):

$$(13.) \quad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -c x \pm \sqrt{(c^2 - b) x^2 - 2 a y}, \end{aligned}$$

wo dann umgekehrt:

$$(13a.) \quad y = -\frac{1}{2a} (y'^2 + 2 c x' y' + b x'^2)$$

ist.

Das Integral der Differentialgleichung (12.) lässt sich nun bekanntlich in der Form<sup>1)</sup>

$$(14.) \quad (x' + \lambda_1 y')^{p_1} \cdot (x' + \lambda_2 y')^{p_2} = C$$

darstellen, wobei man hat:

$$\lambda_1 = \frac{a + 2c + \sqrt{D}}{2b}, \quad \lambda_2 = \frac{a + 2c - \sqrt{D}}{2b},$$

1) Es ist für das Folgende unerlässlich, hier eine Reihe bekannter Formeln zusammenzustellen, bezüglich deren man etwa Serret-Harnack, Diff. u. Integral-Rechnung II, 2 pag. 66 ff. vergleiche.

$$g_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{-a + \sqrt{D}}{\sqrt{D}}, \quad g_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{a + \sqrt{D}}{\sqrt{D}},$$

$$D = (a + 2c)^2 - 4b,$$

und hier ergeben sich nun die drei Haupttypen der singulären Stellen der Differentialgleichung ersten Grades folgendermassen:

I. Für

$$(16.) \quad (a + 2c)^2 - 4b < 0$$

werden die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , und ebenso  $g_1$  und  $g_2$  imaginär. Die Integralcurven bilden ein System logarithmischer Spiralen um den Nullpunkt. [Fig. I' der Tafel].

II' und III'. Für

$$(17.) \quad (a + 2c)^2 - 4b > 0$$

hat man zu unterscheiden, ob

II'.  $g_1$  und  $g_2$  gleiches Vorzeichen

III'.  $g_1$  und  $g_2$  verschiedenes Vorzeichen besitzen. Dies hängt davon ab, ob

$$(18.) \quad c(a + c) - b \gtrless 0$$

ist.

Im Falle II' bilden die beiden Geraden

$$G_1 \equiv x' + \lambda_1 y' = 0 \quad \text{und} \quad G_2 \equiv x' + \lambda_2 y' = 0$$

zwei ausgezeichnete Richtungen durch den singulären Punkt und es schliesst sich das Curvensystem an diese in der den Exponenten  $g_1$  und  $g_2$  entsprechenden Ordnung asymptotisch an. [Fig. II' der Tafel.]

Im Falle III' laufen sämtliche Curven des Integralsystems durch den singulären Punkt und berühren hier die

eine der beiden ausgezeichneten Geraden, und zwar die Gerade  $G_2$ , bez.  $G_1$ , je nachdem

$$(19.) \quad \begin{array}{l} -\frac{g_2}{g_1} < 1 \\ \phantom{-\frac{g_2}{g_1}} > 1 \end{array}$$

ist. [Fig. III' der Tafel.]

Die Transformation (13.) verwandelt nun diese Typen in die von uns gewünschten für die singuläre Stelle  $x = 0$ ,  $y = 0$  der Differentialgleichung (11.). Die gestaltliche Umformung ergibt sich dabei in übersichtlichster Weise: Die Ebene  $(x', y')$  wird derart auf die Ebene  $(x, y)$  abgebildet, dass das Geradenbüschel:

$$x' + \lambda y' = 0$$

übergeht in das System der die  $x$ -Axe berührenden Parabeln:

$$(20.) \quad (b \lambda^2 - 2 c \lambda + 1) x^2 + 2 a \lambda^2 y = 0,$$

während die Parallelen zur  $y'$ -Axe wegen

$$x' = x$$

wieder in solche zur  $y$ -Axe verwandelt werden. Die Gerade

$$(21.) \quad c x' + y' = 0$$

wird übergeführt in die Parabel

$$(b - c^2) x^2 + 2 a y = 0$$

und diese bildet in der Ebene  $(x, y)$  die Discriminantencurve: Der Teil

$$(b - c^2) x^2 + 2 a y < 0$$

dieser Ebene erscheint doppelt überdeckt bez. von den Bildern der beiden Hälften

$$c x' + y' \gtrless 0$$

der Ebene  $(x', y')$ .



Für die weitere Characterisirung der Abbildung ist es nun wichtig, die gegenseitige Lage der Geraden

(24.)  $G \equiv x' = 0$ ,  $G_1 \equiv x' + \lambda_1 y' = 0$ ,  $G_2 \equiv x' + \lambda_2 y' = 0$   
und jener eben genannten

$$G_3 \equiv x' + \frac{1}{c} y' = 0$$

für die Fälle II und III genau zu bezeichnen.

Man schneide zu dem Ende die letzten drei Geraden durch eine Parallele zur  $y$ -Axe ( $G$ ) und bezeichne die Ordinaten der Schnittpunkte bez. mit  $y_1, y_2, y_3$ , dann ist für die gegenseitige Lage, wie sich sofort aus den oben mitgetheilten Formeln ergibt, folgende einfache Beziehung massgebend:

(25.)  $y_2 - y_3 : y_3 - y_1 : y_2 - y_1 = g_2 : g_1 : g_1 + g_2$

a) Aus der ersten dieser Proportionen folgt unmittelbar, dass im Falle II, also für  $\frac{g_2}{g_1} > 0$ , die Geraden  $G$  und  $G_3$  von den beiden anderen  $G_1$  und  $G_2$  getrennt werden, während sie im Falle III, für  $\frac{g_2}{g_1} < 0$  nicht getrennt werden.

b) In letzterem Falle besagt dann der zweite Teil der Proportion (25.), also etwa:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = 1 + \frac{g_2}{g_1},$$

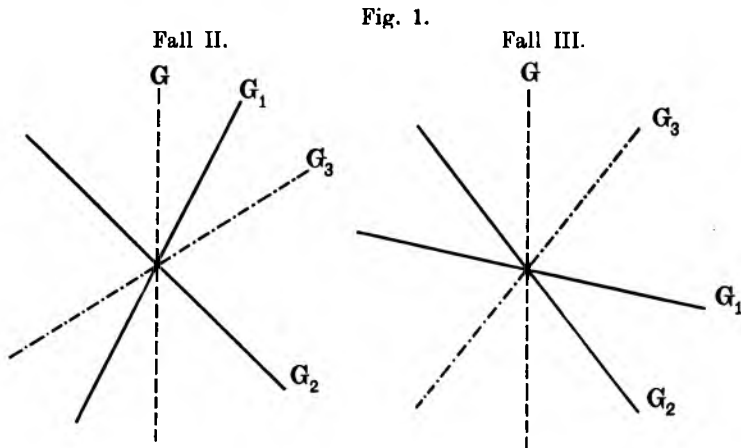
dass die Geraden  $G$  und  $G_1$  von  $G_2$  und  $G_3$  getrennt, beziehungsweise nicht getrennt werden, je nachdem

$$-\frac{g_2}{g_1} < 1$$

ist, also (vergleiche die Formel (19.)) je nachdem die Gerade  $G_2$  oder  $G_1$  von den Curven des Integralsystems berührt wird. Diese letztere Bedingung lässt sich auch so aussprechen:

Im Falle III wird die Gerade  $G_3$  und diejenige der beiden Geraden  $G_1, G_2$ , welche von den Curven des Systems nicht berührt wird, getrennt von der Geraden  $G$  und der zweiten der Geraden  $G_1, G_2$ .

Der Zusammenhalt der durch (a) und (b) gekennzeichneten möglichen Lagen ergibt also im Falle II wie III wesentlich nur je eine schematische Figur, welche die gegenseitige Lage der vier Geraden bezeichnet:



Dabei ist in Figur III die Gerade, welche von den Curven des Systems berührt wird, mit  $G_1$  bezeichnet.

Nunmehr lässt sich das Resultat der Transformation auf unsere in den Figuren I', II', III' der Tafeln dargestellten Typen auch gestaltlich mit aller Bestimmtheit angeben.

Man beachte dabei, dass alle Schnittpunkte unserer in der  $(x' y')$ -Ebene gegebenen Curven mit der Geraden

$$c x' + y' = 0$$

zu Spitzen auf der Discriminantencurve

$$(b - c^2) x^2 + 2 a y = 0$$

der  $(x, y)$ -Ebene Veranlassung geben <sup>1)</sup>.

**I. Fall I.** Die logarithmischen Spiralen des Typus I' ergeben in der  $(x, y)$ -Ebene Curven, welche im Innenbereich der Discriminantencurve unendlich oft um den singulären Punkt oscilliren, und dabei mit Spitzen auf die Discriminantencurve auftreffen. Vergl. Fig. (I) der Tafel, in welcher (wie auch in den folgenden Figuren) die Beziehung zur darüberstehenden Figur (I') durch verschiedene Ausführung der entsprechenden Linien angedeutet ist <sup>2)</sup>.

**II. Im Falle II** erhält man aus den Geraden  $G_1$  und  $G_2$

$$x' + \lambda_1 y' = 0 \text{ und } x' + \lambda_2 y' = 0$$

(vergl. Formel (20)) die zwei durch den singulären Punkt laufenden Parabeln:

$$x^2 + 2 \lambda_1 y = 0 \text{ und } x^2 + 2 \lambda_2 y = 0,$$

1) Die Gerade

$$c x' + y' = 0$$

verbindet in der  $(x', y')$ -Ebene die Punkte, für welche  $y'' = \infty$ , d. h. die Tangente parallel zur  $y'$ -Axe ist; so lässt sich (vergl. die Figuren I', II', III' der Tafeln) aus diesem Umstand die oben entwickelte gegenseitige Lage der Geraden  $G_1, G_2, G_3$  auch gestaltlich erschliessen.

2) In Figur I, wie in II und III ist ferner durch die ganz fein ..... punktirte Linie die Curve der Wendepunkte für das System angedeutet; es ist dies die Curve, welche (vergl. Darboux a. a. O. Bulletin Band IV, pag. 161) durch Elimination von  $y'$  aus den zwei Gleichungen

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

entsteht; in unserem Falle der Gleichung (10.) erhält man die Parabel

$$b(a^2 - c^2 + b) \cdot x^2 + 2 a(a + c)^2 \cdot y = 0$$

welcher in der Ebene  $(x', y')$  die gleichfalls punktirt angedeutete Gerade

$$b x' + (a + c) y' = 0$$

entspricht.

welche die  $x$ -Axe im Coordinatenanfangspunkt zur Tangente haben, während die übrigen Curven des Systems in Zweigen mit Spitze und im anderen ohne Spitze in der durch Fig. II der Tafel characterisirten Weise verlaufen<sup>1)</sup>.

**III.** Im Falle **III** laufen sämtliche Curven des Systems die  $x$ -Axe berührend, wieder unter Auszeichnung der soeben in II gegebenen Parabeln durch den singulären Punkt hindurch. Dabei entstehen die Spitzen auf der Discriminantencurve in der in Figur III angedeuteten Weise.

Mit diesen drei Formen sind die im Allgemeinen bei jeder Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht vom ersten Grade ist, auftretenden Typen der durch die Gleichungen (7.) definirten singulären Stellen erschöpft.

Analog wie bei den singulären Stellen der Differentialgleichungen ersten Grades ist auch hier nur im Falle II und III, wenn  $\frac{g_2}{g_1}$  eine rationale Zahl ist, das System in der Umgebung der singulären Stelle mit einem algebraischen Curvensystem vergleichbar.

Mit Bezug auf die in den Tafeln gegebenen Zeichnungen seien noch die Formen hervorgehoben, in welchen in den Fällen I', II', III' das Unbestimmtwerden von  $y''$  im Nullpunkt geometrisch zum Ausdruck kommt, und wie im Gegensatz dazu in den Figuren I, II, III die Convergenz des Differentialquotienten nach dem Werte  $y' = 0$  sich ausspricht.

Endlich sei noch erwähnt, dass für das Verhalten eines Curvensystems für im Unendlichen gelegene singuläre Stellen ganz dieselben Typen massgebend sind, soferne wir dabei die Ebene im projectiven Sinne auffassen, mit „einer unendlich weiten Geraden“, eine Auffassung, die wir im Nachfolgenden beibehalten wollen.

1) Auf einen solchen Fall bezieht sich die von Klein (vergl. oben pag. 32) Anmerkung) Annalen VI gegebene Figur.

## § 3.

**Die ausserwesentlich singulären Stellen einer „allgemeinen“ Differentialgleichung erster Ordnung.**

Zur Discussion der durch das Gleichungssystem

$$(10.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

definirten singulären Stellen unseres Curvensystems, den Spitzen der Discriminantencurve, sei wieder

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0$$

als Lösungssystem von (10.) angenommen. Die Entwicklung von  $F$  an dieser Stelle gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{F_1}} x + \underline{\underline{F_2}} y + \\ + \frac{1}{2} (\underline{\underline{F_{11}}} x^2 + 2 \underline{\underline{F_{12}}} x y + \underline{\underline{F_{22}}} y^2) & + (\underline{\underline{F_{13}}} x + \underline{\underline{F_{23}}} y) y' \\ & + \frac{1}{6} \underline{\underline{F_{111}}} y'^3 + \dots \end{aligned}$$

Hier sind analog wie in § 2 die Glieder niedrigster Ordnung (durch doppeltes Unterstreichen) hervorgehoben und dann auch (durch einfaches Unterstreichen) die Glieder nächst höherer Ordnung. Für die Betrachtung des Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle legen wir also (mit kürzerer Bezeichnung) die Differentialgleichung dritten Grades zu Grunde:

$$(26.) \quad 0 = a x - y + b x y' + c y'^3$$

bei welcher „im Allgemeinen“ keines der Glieder fehlt.

Gehen wir zunächst auf die erste Annäherung durch

$$(27.) \quad 0 = a x + c y'^3$$

ein, so kennzeichnet dieselbe die Singularität der einen durch den singulären Punkt laufenden Curve des Systems:  $y'$  als Parameter betrachtet, ergibt sich für  $x$  und

$y$  eine Entwicklung nach ganzen Potenzen von  $y'$ , welche mit  $y'^3$  bzw. mit  $y'^4$  beginnt<sup>1)</sup>.

Die Discriminantencurve für Gleichung (27.) ist durch  $x=0$  gebildet. Erst die Gleichung (26.) gibt für die Discriminantencurve in der singulären Stelle den Character der Spitze; man erhält hier für die Discriminantencurve die Gleichung

$$27 c (a x - y)^2 + 4 b^3 x^3 = 0$$

Der Umstand, dass längs der Geraden  $x=0$  von den drei durch die Gleichung (26.) gegebenen Fortschreitungsrichtungen nur eine reell ist, lässt sofort erkennen, dass in der durch die Discriminantencurve zerschnittenen  $(x y)$ -Ebene der Teil vom Winkel Null in der Umgebung der singulären Stelle dreifach, der andere Teil einfach von den Curven des Systems überdeckt ist. Die Curve der Wendepunkte ist für (26.) eine Gerade, die nicht durch die Spitze der Discriminantencurve hindurchgeht, so dass die Umgebung der singulären Stelle frei von Wendepunkten ist. Das für die Gleichung (26.) als verallgemeinerter Clairaut'scher Gleichung auf die einfachste Weise herzustellende allgemeine Integral lässt die näheren Eigenschaften des Curvensystems im Einzelnen verfolgen. Für die specielle, durch den singulären Punkt laufende Curve ergibt sich für  $x$  und  $y$  die schon oben aus der Gleichung (27.) erschlossene Entwicklung nach ganzen Potenzen von  $y'$ , welche die Bezeichnung der Stelle als ausserwesentlich singulär rechtfertigt. Der weitere Verlauf des Curvensystems in der Umgebung des Nullpunktes bietet die Auflösung dieser Singularität in Curven mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt, wie sie der Form nach auch bei der Auflösung jener Singularität im Gebiete algebraischer Curven entstehen. Man vergleiche die schematische Darstellung durch Fig. IV der IV. Tafel.

---

1) Vergl. Briot-Bouquet, a. a. O. Nr. 98, pag. 192.

## § 4.

**Relationen zwischen der Anzahl der singulären Stellen in einem gegebenen, von der Discriminantencurve begrenzten Gebiete. Bemerkungen über den Gesamtverlauf der Curvensysteme.**

Handelt es sich darum, sich über den Gesamtverlauf des durch unsere Differentialgleichung

$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0$$

definirten Curvensystems zu orientiren, so wird man zunächst mit Hilfe der Discriminantencurve, längs welcher die verschiedenen Wertsysteme  $y'$ , welche den Stellen  $(x, y)$  zugehören, zusammenhängen, die Ebene  $(x, y)$  in eine Anzahl nur einfach überdeckter Gebiete zerlegen — es sind dies, wenn wir wieder an die von Poincaré gewählte Deutung von  $F = 0$  als Fläche denken, die einzelnen Schichten der Projection dieser Fläche auf die  $(x, y)$ -Ebene. Nehmen wir z. B.  $F$  als eine rationale ganze Function von  $x, y, y'$ , in  $y'$  vom Grade  $n$  an, so sind es eine Anzahl von höchstens  $n$  durch die Discriminantencurve von einander getrennten Gebieten (die ihrerseits wieder aus mehreren Stücken bestehen können). Ich habe in einer früheren Untersuchung<sup>1)</sup> ausführlich gezeigt, in welcher Weise wir diese einzelnen Gebiete und ihre gegenseitige Lage im Sinne der Analysis situs vollständig characterisiren können.

Jedem der Teilgebiete kommt nun eine „characteristische Zahl“  $K_i$  zu — die bekannte Zusammenhangszahl, die ich in der Form der „Kronecker'schen Cha-

1) Beiträge zur Analysis situs III. Mitteilung. Berichte der k. sächs. Gesellschaft d. W. vom März 1887 pag. 44.

racteristiken<sup>1)</sup> voraussetze. Die Characteristik  $K$  der ganzen Fläche  $F = 0$  ist dann

$$K = \Sigma K_i.$$

Eine analoge Zahl ergibt sich für jeden einzelnen, in sich geschlossenen Teil von  $F = 0$ . Die Bemerkung, durch die Zerschneidung längs der Discriminantencurve auch für die einzelnen, je einfach überdeckten berandeten Teilgebiete die charakteristischen Zahlen  $K_i$  zu fixiren, und diese als weitere Characteristiken für die Differentialgleichung zu verwenden, gestattet dann, den Verlauf des durch die Differentialgleichung gegebenen Curvensystems in der Ebene  $(x, y)$  noch eingehender zu verfolgen.

Im Allgemeinen befinden sich, wie oben gezeigt, die sämtlichen singulären Stellen des Curvensystems auf der Discriminantencurve; jede von ihnen nimmt also an zwei übereinanderliegenden Gebieten Teil, so zwar, dass für die einzelnen Zweige der Curven des Integralsystems immer in der Spitze der Uebergang von dem einen in das andere Gebiet statthat. Dadurch erhalten für das einzelne, einfach überdeckte Gebiet die wesentlich singulären Stellen vom Typus I, II, III die durch die hier folgenden Figuren 2., 3. und 4. gegebene Gestalt:

Fig. 2. I. Fall.



Für die durch die Spitzen der Discriminantencurve gegebenen ausserwesentlich singulären Stellen muss bei der

1) Man vergleiche für das Folgende speciell etwa meinen Aufsatz zur Analysis situs im 32. Bande der math. Annalen pag. 474 ff. und weiterhin für die sogleich zu besprechende Relation pag. 500. Ferner sehe man die betr. Entwicklungen Poincaré's in den genannten Aufsätzen, insbesondere Capitel XIII.



Fig. 3. II. Fall.

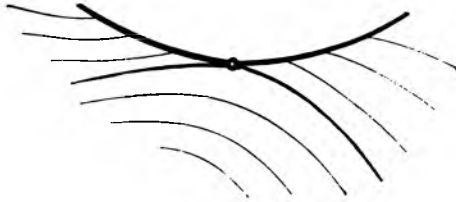
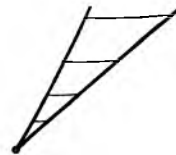


Fig. 4. III. Fall.



Fig. 5.



Zerschneidung der Gebiete längs der Discriminanten-curve beachtet werden, dass das eine der zerschnittenen Teilgebiete über der  $(x y)$ -Ebene sich überkreuzt, wie in der untenstehenden Figur 5, in welcher die zerschnittenen Teile von einander getrennt dargestellt sind:

Hat man in der angegebenen Weise die Zerschneidung getroffen, so läuft in jedem Teilgebiet durch jeden Punkt des Innern sowie des Randes nur je eine Curve des Integral-systems. Von den wesentlich singulären Stellen I, II, III des Randes aber laufen beziehungsweise je 0, 2,  $\infty$  viele Zweige aus; von den ausserwesentlich singulären Stellen ver-

laufen 2 Zweige in das eine, 0 Zweige in das andere der zerschnittenen Gebiete.

Zwischen diesen singulären Stellen und der Charakteristik  $K_i$  des Teilgebietes besteht dann eine Relation, welche aus der allgemeinen, Annalen 32. pag. 501 gegebenen sich sofort ablesen lässt. Die wesentlich singulären Punkte von der Kategorie I seien als Punkte  $P_0$  bezeichnet und in der Anzahl  $p_0$  vorhanden, ebenso seien  $p_2$  Punkte  $P_2$  der Kategorie II und  $p_\infty$  Punkte  $P_\infty$  der III. Art vorhanden. Die letzteren Punkte erweisen sich dabei, wie die vorstehende Figur 4 zeigt, als specielle Formen von Punkten  $P_\infty$  des Randes, äquivalent denjenigen, welche auf pag. 502 jener Abhandlung und in der mittleren Fig. 12<sup>f</sup> der dortigen Tafel III gegeben sind. Durch Ausschneiden der singulären Stelle (wie in vorstehender Figur 4 durch die stark gezeichnete Linie angedeutet) ergibt sich nämlich unsere Stelle  $P_\infty$  für die Abzählung als äquivalent mit einer Stelle  $P_0$ . Die ausserwesentlich singulären Stellen sind als Punkte  $R_2$  bzw.  $R_0$  zu bezeichnen; sie seien in der Zahl  $r_2$  bzw.  $r_0$  in dem Teilgebiete vorhanden.

Die „Punktcharacteristiken“ für die Abzählung von  $K_i$  sind sonach

für die Punkte  $P_0, P_2, P_\infty$  beziehungsweise  
 $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2},$

für die Punkte  $R_0, R_2$  beziehungsweise  
 $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},$

und so ergibt sich aus der eben citirten Formel:

Für jedes Teilgebiet von der Charakteristik  $K_i$  besteht die Relation:

$$(28.) \quad K_i = \frac{(p_0 + p_\infty - p_2) + (r_0 - r_2)}{2}.$$

Summirt man über die sämmtlichen Teilgebiete und beachtet, dass dann jeder singuläre Punkt zweimal vorkommt, so folgt:

$$(29.) \quad K = \Sigma K_i = s_0 + s_1 - s_2,$$

wo jetzt die  $s$  die Gesamtanzahlen der wesentlichen Singularitäten I<sup>ter</sup>, II<sup>ter</sup> und III<sup>ter</sup> Art bedeuten, und die Zahlen für die ausserwesentlich singulären Punkte  $R_0, R_2$ , die immer paarweise auftreten, in Wegfall kommen.

Formeln von der Gestalt (29.) erhält man für jeden in sich geschlossenen Teil der Fläche  $F = 0$ . Diese sind (bis auf die Zählweise) identisch mit den von Poincaré a. a. O.<sup>1)</sup> gegebenen.

Bezüglich der Allgemeingültigkeit der Formeln (28.) und (29.) sei noch erwähnt, dass es keinerlei Unterschied macht, ob etwa einige Teilgebiete sich durch das Unendliche hinerstrecken. Solche Gebiete sind dann (sofern sie nicht durch eine blosse Projection ganz ins Endliche gebracht werden können) Gebiete „von umkehrbarer Indicatrix“, was aber, wie ich schon Annalen 32 hervorgehoben, für die zu Grunde gelegte Art, den Zusammenhang abzuzählen, ohne jeden Einfluss ist<sup>2)</sup>.

Für die Ausführung der in Formel (28.) angedeuteten Summation über die Punkte  $P$  und  $R$  für ein Teilgebiet von der Charakteristik  $K_i$  werden nun die Punkte  $R_2$  und  $R_0$

1) Journal de math. Serie 4 Bd. I pag. 203.

2) Darin und in der gleichfalls hier benutzten directen Summirbarkeit der Formeln liegt der Vorteil der Abzählung des Zusammenhanges mit Hülfe der Punktcharacteristiken. Poincaré betrachtet, um der Schwierigkeit zu entgehen, die unendlich weiten Elemente der Ebene übersichtlich in die Formulirung einzubegreifen, die Projection der Ebene auf eine Kugel vom Centrum aus. Hier tritt also der Character der Ebene als Fläche mit umkehrbarer Indicatrix dadurch hervor, dass die Ebene zweimal auf die Kugel abgebildet erscheint, wobei dann der Aequator als „Uebergangelinie“ die Stelle der unendlich weiten Geraden in der Ebene vertritt.

(wie Fig. 5 zeigt) durch die im Sinne der Analysis situs zu bestimmende Gestalt des Teilgebietes von selbst getrennt. Für die Unterscheidung der Punkte  $P_0$ ,  $P_\infty$  und  $P_2$  dienen die Ungleichungen (16.), (17.), (18.), deren Gestalt dieselben wieder als Punktcharacteristiken eines Functionensystems im Kronecker'schen Sinne erkennen lässt, wie dies ja aus der ganzen Fragestellung ohne Weiteres deutlich ist<sup>1)</sup>.

Hat man nun, um ein einzelnes Teilgebiet von der Characteristik  $K_i$  — das aus einem Stücke bestehen möge — zu studiren, die Art und Verteilung der singulären Stellen auf dem Rande fixirt, eine Aufgabe, die neben der Bestimmung von Punktcharacteristiken im Wesentlichen lediglich die wiederholte Anwendung des Sturm'schen Satzes erfordert<sup>2)</sup>,

1) Bezüglich einer geometrischen Characteristik, welche, wie in Formel (28) und (29), die Punkte  $P_0$  und  $P_\infty$  einerseits und die Punkte  $P_2$  andererseits zusammenordnet, mag noch das Folgende bemerkt sein:

Man beschränke sich in der Umgebung der singulären Stelle auf das durch die Figuren I, II und III der Tafeln bezeichnete Gebiet, welches doppelt von den Curven des Systems überdeckt ist. Construirt man hier das Orthogonalsystem derjenigen Trajectorien, welche je die Winkel des ursprünglichen Systems halbiren, so ergibt sich leicht: Die singulären Stellen des ursprünglichen Systems (welche nicht singulär sind für das System der Trajectorien) werden durch Berührungen einer Trajectorie des Systems mit der Discriminantencurve bezeichnet, und zwar berührt diese Trajectorie die Discriminantencurve in den Punkten  $P_0$  bzw.  $P_\infty$  von aussen, in den Punkten  $P_2$  von innen. Dabei sind von diesen in die singulären Stellen fallenden Berührungspunkten noch leicht diejenigen weiteren Berührungspunkten der Trajectorien mit der Discriminantencurve zu trennen, in welchen eine Curve des Integralsystems (also die betr. Spitzentangente) senkrecht steht auf der Discriminantencurve.

2) Vergl. den schon erwähnten Aufsatz III zur Analysis situs, Berichte der sächs. Ges. d. W. vom März 1887.

so lassen sich die gestaltlichen Möglichkeiten für ein dieses Gebiet überdeckendes Curvensystem auf eine Reihe von kanonischen Formen zurückführen, zu denen noch die Aenderung der Systemcurven je um gewisse „Periodenwege“, welche die verschiedenen Teilränder des Gebietes umkreisen, hinzutreten.

Ich denke in weiterer Ausführung dieser Untersuchungen, die ganz im Sinne der Poincaré'schen Darstellungen liegen, auf die hiermit gegebenen Mannigfaltigkeiten noch näher einzugehen. Hier seien nur noch folgende besondere Fälle erwähnt, bei denen wir voraussetzen, dass ausserwesentlich singuläre Punkte  $R$  fehlen sollen (wie dies z. B. bei den Haupttangencurven einer Fläche, und überhaupt für jedes durch eine Differentialgleichung zweiten Grades definirte System im Allgemeinen der Fall ist). Man entnimmt dann der Formel (28.) unmittelbar die folgenden Sätze:

1. Im Falle eines „einfach zusammenhängenden, einfach berandeten“ Gebietes, für welches  $K_i = 1$  ist, sind mindestens zwei singuläre Stellen vom Typus I oder III vorhanden.

Dabei ist bemerkenswert, dass für diese Minimalzahl der singulären Stellen der leicht darzustellende Gesamtverlauf des Curvensystems im Sinne der Analysis situs vollständig festgelegt ist mit der Unterscheidung der folgenden drei Fälle: Im Gebiete liegen

- a) 2 singuläre Stellen vom Typus I
- b) 1 singuläre Stelle vom Typus I und 1 vom Typus III
- c) 2 singuläre Stellen vom Typus III. —

Die Discussion des Gesamtverlaufes des durch die Differentialgleichung (11.) definirten Curvensystems, welches das Gebiet  $(b - c^2)x^2 + 2ay < 0$  doppelt überdeckt, ist nicht ohne Interesse und kann, soferne es sich dabei um den „elliptischen“ Teil der Ebene handelt (wie in Fig. I.) als

Beispiel für den Verlauf von speciellen Curvensystemen in einem Gebiete  $K_i = 1$  dienen.

2. Im Falle  $K_i = -n^1$ ) sind in dem Gebiete mindestens  $2n$  Stellen vom Typus II vorhanden; die Art der Verteilung dieser Stellen auf die verschiedenen Ränder des Gebietes liefert dabei die kanonischen Formen für den Gesamtverlauf des Systems.

Speziell hat man: Nur für die Charakteristik  $K_i = 0$  eines Teilgebietes kann es eintreten, dass das überdeckende Curvensystem keinerlei singuläre Stellen besitzt.

### § 5.

#### Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Haupttangentialcurven einer Fläche $z = f(x, y)$ .

Eine nicht uninteressante Anwendung unserer Untersuchungen lässt sich für die Theorie der Haupttangentialcurven einer Fläche

$$(30.) \quad z = f(x, y)$$

machen. Hier hat man es für die Projection der Haupttangentialcurven auf die  $(x, y)$ -Ebene mit einer Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(31.) \quad F(x, y, y') \equiv f_{22} y'^2 + 2 f_{12} y' + f_{11} = 0$$

zu tun, in welcher die  $f_{ik}$  die zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x, y$  bezeichnen: Die Discriminantencurve ist hier einfach die parabolische Curve:

$$(32.) \quad f_{12}^2 - f_{11} f_{22} = 0$$

der Fläche. Auf ihr liegen im Allgemeinen stets wesentlich

1) Für aus einem Stück bestehende, in die Ebene ausbreitbare Gebiete ist die Zahl  $K_i$  stets  $< 1$ ; die Zahl der Randcurven des Gebietes ist dabei gleich  $2 - K_i$ .

singuläre Stellen der Haupttangencurven, die Punkte, für welche ausser der Gleichung (31.)  $F = 0$ , noch (Formel 7) die anderen:

$$(33.) \quad \begin{aligned} & f_{22} y' + f_{12} = 0 \\ & f_{222} y'^3 + 3 f_{122} y'^2 + 3 f_{112} y' + f_{111} = 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Es ergibt sich nun, dass in der That die Differentialgleichung (31.) allgemein genug ist, um für eine Fläche  $z = f(x, y)$  singuläre Punkte der Haupttangencurven von allen drei Typen auftreten zu lassen, ohne dass darum an der betreffenden Stelle in der Entwicklung der Function  $z = f(x, y)$  die Glieder erster Ordnung verschwinden, d. h. ohne dass die Fläche an einer solchen Stelle aufhört eine ganz bestimmte Tangentialebene zu besitzen.

Es sei der Coordinatenanfangspunkt eine solche singuläre Stelle. Entwickeln wir dort die Function  $z = f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} z = & \overline{f_1} x + \overline{f_2} y + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \overline{f_{11}} x^2 + 2 \overline{f_{12}} x y + \overline{f_{22}} y^2 \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left\{ \overline{f_{111}} x^3 + 3 \overline{f_{112}} x^2 y + 3 \overline{f_{122}} x y^2 + \overline{f_{222}} y^3 \right\} \\ & + \frac{1}{24} \left\{ \overline{f_{1111}} x^4 + \dots \right. \\ & \left. \dots \right\} \end{aligned}$$

und setzen nun weiter

$$x = 0, \quad y = 0 \quad y' = 0$$

als ein Lösungssystem der drei Gleichungen (31.) und (33.) voraus, so wird im Nullpunkt

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{111} = 0.$$

Wenn wir jetzt die Differentialgleichung (31.) bilden und in ihr die Glieder niedrigster Ordnung (wie auf pag. 33) heraus-

greifen, so erhalten wir vier Glieder, welche aus den drei in der obigen Entwicklung unterstrichenen Gliedern hervorgehen. In der auf pag. 34 angewendeten kürzeren Bezeichnung gelangen wir so zu der Differentialgleichung:

$$(31a.) \quad y'^2 + 4 a x y' + b x^2 + 2 a y = 0,$$

welche den Verlauf der Haupttangentencurven in der Umgebung des Nullpunktes characterisirt.

Nach den Formeln (11.), (16.), (17.) und (18.) des § 2 ist dann im Punkte  $x = 0$ ,  $y = 0$  eine wesentlich singuläre Stelle vom

Typus I für  $25 a^2 - 4 b < 0$

Typus II für  $25 a^2 - 4 b > 0$  und  $6 a^2 - b > 0$

Typus III für  $25 a^2 - 4 b > 0$  und  $6 a^2 - b < 0$

(w. z. b. w.).

Wesentlich anders beschaffen, um dies noch kurz zu erwähnen, sind bekanntlich die gestaltlichen Verhältnisse der Krümmungslinien einer allgemeinen Fläche, überhaupt irgend welcher, durch eine Differentialgleichung zweiten Grades definirter Orthogonalsysteme. Hier existirt keine reell verlaufende Discriminantencurve, vielmehr reducirt sich dieselbe auf einzelne (in allen Fällen  $K \geq 0$  stets vorhandene) isolirte, mehrfach zählende Punkte. Diese erweisen sich demnach für das Curvensystem als singuläre Stellen von (in unserem Sinne) höherer Art.

## § 6.

**Singuläre Stellen eines Curvensystems, welches durch eine „allgemeine“ Gleichung  $\Phi(x, y, c) = 0$  mit einem Parameter  $c$  definirt ist.**

Um den Unterschied genau zu kennzeichnen, welcher für die Definition eines Curvensystems, ausgehend von der Differentialgleichung



$$(1.) \quad F(x, y, y') = 0$$

oder von einer Curvengleichung

$$(34.) \quad \Phi(x, y, c) = 0$$

mit einem willkürlichen Parameter, sich ergibt, seien jetzt noch kurz die „im Allgemeinen“ eintretenden singulären Stellen eines durch (34.) definirten Systems zusammengestellt. Dabei machen wir für die Function  $\Phi$  von  $x, y, c$  nunmehr dieselben Voraussetzungen, die wir bisher für die Function  $F$  von  $x, y, y'$  festgehalten haben.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

gibt wieder die „Discriminantencurve“. Deuten wir für  $c = z$  wieder  $\Phi(x, y, z) = 0$  als Fläche über der  $(x, y)$ -Ebene, so sind jetzt einfach die Horizontalschnitte derselben die Curven des Systems. Diese Horizontalschnitte durchschneiden im Allgemeinen die „Umrisscurve“  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$  auf der Fläche; in der Projection berühren sie die Projection der Umrisscurve, die Discriminantencurve.

Die auf der Discriminantencurve auftretenden singulären Stellen sind: Erstens diejenigen, welche durch das (den Gleichungen (7.) analoge) System:

$$(35.) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

gegeben sind — für welche auf der Fläche  $\Phi = 0$  ein Horizontalschnitt die Umrisscurve berührt; zweitens diejenigen Stellen, für welche (den Gleichungen (10.) analog) die Beziehungen:

$$(36.) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2} = 0$$

statthaben, es sind die Spitzen der Discriminantencurve.

In der Projection auf die  $(x, y)$ -Ebene ist für die durch (35.) gegebenen Punkte die Berührung von Systemcurve und Discriminantencurve vierpunktig. — In der Umgebung der durch (36.) bezeichneten Spitzen der Discriminantencurve verhält sich das Curvensystem (wie Fig. V der Tafel IV darstellt) völlig allgemein; in jedem Punkt der Discriminantencurve, und so auch in der Spitze, berührt eine Curve des Systems, in der Spitze in Richtung der Spitzentangente.

Weiter aber bilden ausser diesen auf der Discriminantencurve gelegenen singulären Stellen noch die Punkte, für welche gleichzeitig

$$(37.) \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

statthat, singuläre Punkte unseres Curvensystems<sup>1)</sup>. Es sind die Doppelpunkte der Systemcurven, die sich in isolirte und in Doppelpunkte mit 2 reellen Aesten trennen.

Stellt man nun die den Formeln (28.) und (29.) analogen Beziehungen zwischen den singulären Stellen eines solchen Systems und den zugehörigen Characteristiken  $K$  und  $K_1$  derselben auf, so ist folgendes zu beachten:

Betrachten wir wieder die von den Curven des Systems einfach überdeckten Teilgebiete, welche sich über der Ebene  $(x, y)$  (beziehungsweise auf der Fläche  $\Phi = 0$ ) durch die Discriminantencurve von einander trennen, so besitzt ein solches Gebiet einmal singuläre Stellen auf dem Rande.

1) Das gleichzeitige Bestehen der analogen Gleichungen

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

für die Differentialgleichung (1) bezeichnet gewisse Wendepunkte des zugehörigen Curvensystems, also keine singulären Stellen in dem hier zu Grunde gelegten Sinne.

Durch einen beliebigen Punkt des Randes läuft eine Systemcurve; die durch die Gleichungen (35.) definirten singulären Stellen sind als Punkte  $\overset{r}{\Pi}_3$  und  $\overset{r}{\Pi}_0$  zu bezeichnen, indem nämlich an den Berührungsstellen einer Horizontalcurve mit der Umrisscurve in dem einen der beiden, durch die Umrisscurve getrennten Flächenteile zwei Curvenzweige verlaufen, in dem anderen keiner. — Die durch die Gleichungen (36.) definirten Punkte des Randes verhalten sich wie gewöhnliche Punkte des Randes, wie wir erkennen, wenn wir an Fig. V (Tafel IV) die Zerschneidung längs der Umrisscurve vornehmen, welche in Fig. 5 auf pag. 46 für den analogen Fall angedeutet ist. Es ist dann unmittelbar ersichtlich, dass vom singulären Punkte aus je eine Curve des Systems in die beiden dort getrennten Gebietsteile verläuft.

Im Innern der Gebiete sind dann weitere singuläre Punkte  $\overset{i}{\Pi}_0$  und  $\overset{i}{\Pi}_4$  vorhanden (wenn wir an der Bezeichnung des Index nach der Anzahl der von einem Punkt auslaufenden Aeste festhalten).

Für die Characteristik  $K_i$  eines Flächenteiles ergibt sich sonach (aus der Annalen 32 pag. 501 gegebenen Formel) die folgende Beziehung zu den durch die Gleichungen (35.) und (37.) gegebenen singulären Stellen:

$$(38.) \quad K_i = \frac{1}{2} (\overset{r}{\pi}_0 - \overset{r}{\pi}_2) + (\overset{i}{\pi}_0 - \overset{i}{\pi}_4),$$

in welcher die  $\overset{r}{\pi}_v, \overset{i}{\pi}_v$  die Anzahlen der betreffenden singulären Stellen bezeichnen.

Dehnt man die Formel über die ganze Fläche aus, so fallen hier auch noch die Stellen (35.) des Randes einfach heraus, weil stets eine Stelle  $\overset{r}{\Pi}_0$  mit einer anderen  $\overset{r}{\Pi}_3$  correspondirt und man erhält die bekannte Formel:

$$(39.) \quad K = \sigma_0 - \overset{i}{\sigma}_4$$

Das Resultat des Vergleiches der für die eine und andere Definition eines Curvensystems „im Allgemeinen“ eintretenden singulären Stellen lässt sich der Hauptsache nach folgendermassen zusammenfassen:

Sehen wir ab von dem verschiedenen (aber stets „algebraischen“) Verhalten der Systeme längs der Discriminantencurve, die im einen Fall als Ort von Spitzen, im andern Fall als Ort der Berührungspunkte der Systemcurven erscheint; sehen wir ebenso ab von dem ebenfalls „algebraischen“ Character der Systemcurven in den Spitzen der Discriminantencurve, so kommt der wichtigste Unterschied der beiden Definitionen dadurch zum Ausdruck, dass die weiteren, im „Allgemeinen“ auftretenden singulären Stellen eines Curvensystems wesentlich singulär (transcendenter Natur) sind, wenn wir ausgehen von der Definition durch eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = 0$$

dagegen ausserwesentlich singulär (algebraischer Natur), sofern eine Gleichung

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

mit einem Parameter zu Grunde gelegt wird, vorausgesetzt, dass den Functionen  $F$  und  $\Phi$  die Eingangs bezeichnete Eigenschaft, „algebraischer“ Natur zu sein, beigelegt wird.

---

Fig. I'

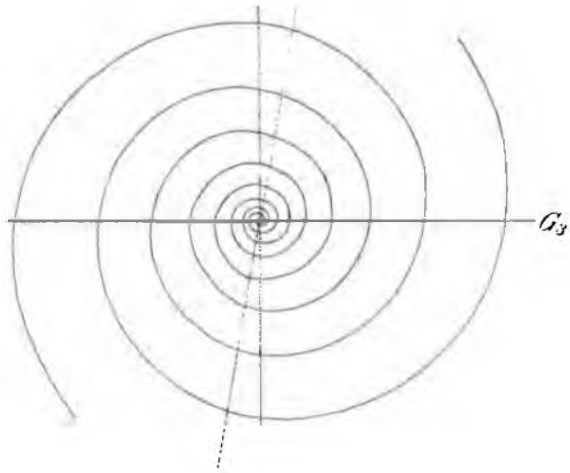
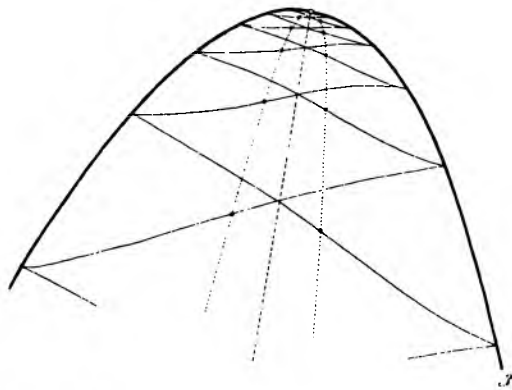


Fig. I.



Handlung von W. Dyck.

Fig. II'

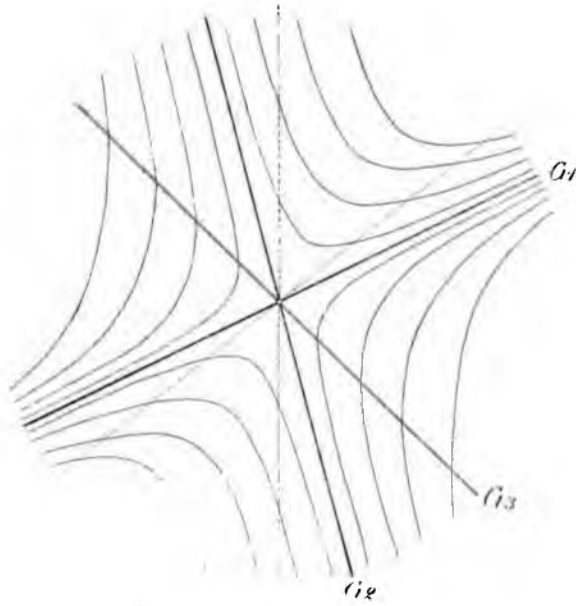


Fig. II.

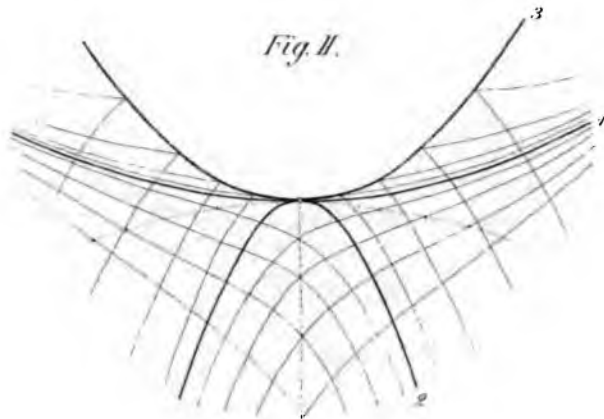


Fig. III. 1

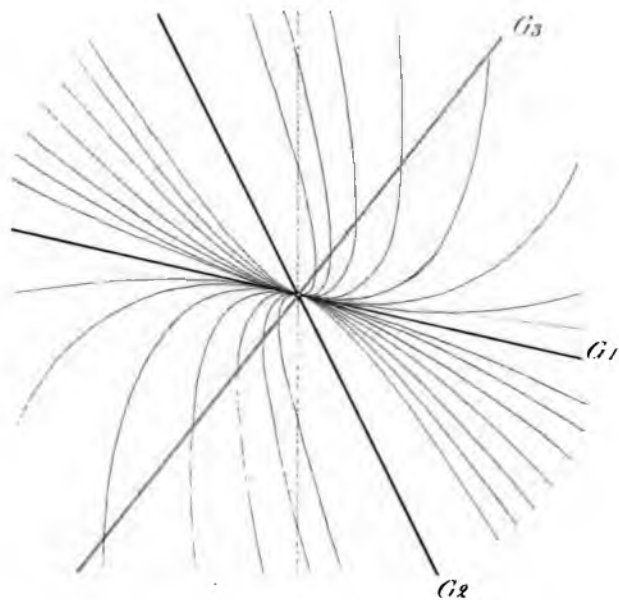


Fig. III.

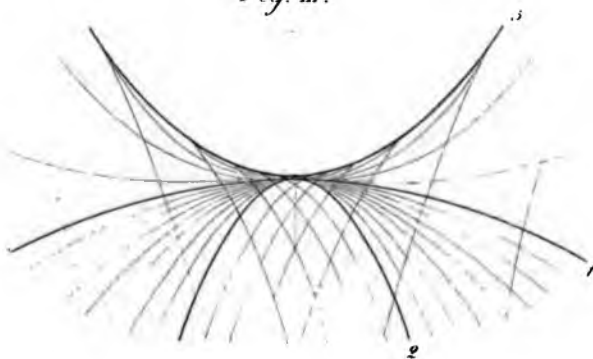


Fig. IV.

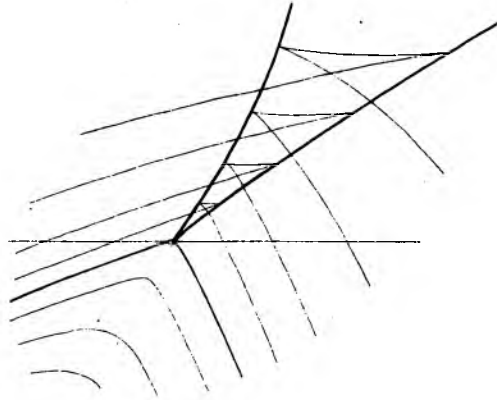


Fig. V.

