Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.
Verlag der k. Akademie.
1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 163—192 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

Der in dem oben citirten Aufsatze mitgetheilte elementare Beweis für die Poincaré-Hadamard'schen Sätze über den Zusammenhang zwischen dem infinitären Verhalten gewisser ganzer transcendenter Functionen und demjenigen ihrer Coefficienten gestattet noch eine merkliche Vereinfachung. Herr Lüroth hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass der auf die Voraussetzung $\sum C_\nu r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r}$ sich beziehende Theil des Hauptsatzes § 1 und zwar zunächst in der Form, welche a. a. O. in dem Zusatze unter (12^b^) angegeben wird, ganz unmittelbar aus einer allgemeinen Bemerkung über Potenzreihen mit reellen Gliedern resultirt. Macht man nun aber von dieser Vereinfachung Gebrauch, so erscheint es angemessen, auch denjenigen Theil des Beweises, der sich auf die Voraussetzung $\sum c_\nu r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma r}$ bezw. $\leqq A \cdot e^{\gamma r^\alpha}$ bezieht, entsprechend umzugestalten. Während nämlich bei der a. a. O. von mir benützten Methode die zur Behandlung der C_ν erforderlichen Hülfsmittel auch die entsprechenden Resultate für die c_ν lieferten und mir in Folge dessen eine vollkommene symmetrische Behandlung der beiden in Betracht kommenden Voraussetzungen am Platze schien, so hört diese Möglichkeit auf, wenn man bezüglich der C_ν den von Herrn Lüroth angegebenen kürzeren Weg einschlägt. Alsdann erweist es sich aber als zweckmässiger, den Fall der c_ν mit Hülfe der schon von Herrn Hadamard[1]) benützten Schlussweise zu behandeln: man gewinnt dabei zugleich den Vortheil, von vornherein mit beliebigen complexen c_ν und der Voraussetzung $|\sum c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma^{\alpha} \cdot |x|}$ operiren zu können.[2]) Für die C_ν ist dies ohnehin der Fall, da ja die Voraussetzung $|\sum C_\nu x^\nu| \geqq A \cdot e^{\gamma^{\alpha} \cdot |x|}$ allemal a fortiori die folgende: $\sum |C_\nu| \cdot r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma^{\alpha} \cdot r}$ nach sich zieht.

Hiernach ergiebt sich nun für den Gesammtbeweis des a. a. O. p. 187 formulirten Haupt-Resultates die folgende ausserordentlich kurze und elementare Darstellung.

---

§ 1.

Hauptsatz A. *Ist für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt:*

$$(A) \qquad \left| \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu \right| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \qquad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0),$$

so hat man:

$$(a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Aus (A) folgt auf Grund des Cauchy'schen Coefficientensatzes, dass:

$$|c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ |x| > R).$$

Setzt man:

$$|x| = \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > R, \quad \text{also: } \nu > \alpha\gamma \cdot R^\alpha,$$

so wird:

---

[1]) Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 183.

[2]) Man erspart auf diese Weise die auf p. 186 meines Aufsatzes angestellte Betrachtung.

$$|c_\nu| \cdot \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \leqq A \cdot e^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

anders geschrieben:

$$\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

woraus durch Erhebung in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Uebergang zur Grenze $\nu = \infty$ unmittelbar die erste Form der Behauptung (a) resultirt.

Um die zweite zu gewinnen, braucht man nur auf die letzte Ungleichung die auf p. 170 angegebene Relation:

$$n!\, e^{n-1} < n^{n+1}, \quad \text{also: } n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n\, e$$

anzuwenden.[1]) Alsdann ergiebt sich die Beziehung:

---

[1]) Man kann sich, wie Herr Lüroth bemerkt hat, auch der Ungleichung:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1)$$

bedienen, welche aus der Reihe für e^n in folgender Weise resultirt. Man hat:

$$e^n = \sum_0^{n-1}{}^{\nu} \frac{n^\nu}{\nu!} + \sum_n^{\infty}{}^{\nu} \frac{n^\nu}{\nu!}$$
$$= s_n + r_n\,.$$

Da $\frac{n}{\nu} > 1$ für $\nu < n$, so nehmen in s_n die Terme beständig zu, sodass also:

$$s_n < n \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{(n-1)!}\,.$$

Andererseits hat man nach bekannter Schlussweise:

$$r_n < \frac{n^n}{n!} \sum_0^{\infty}{}^{\nu} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\nu = \frac{n^n}{n!} \cdot (n+1),$$

und somit

$$e^n < \frac{n^n}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!}(n+1) = \frac{n^n}{n!}(2n+1),$$

also schliesslich:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1)\,.$$

$$(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (\nu e)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

welche, in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhoben, für $\nu = \infty$ die zweite Form der Behauptung (a) liefert.

---

§ 2.

Hauptsatz B. *Ist für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\text{(B)} \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu x^\nu\right| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \qquad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0),$$

so hat man:

$$\text{(b)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Zum Beweise dieses Satzes dienen die folgenden zwei Hülfssätze:

Hülfssatz I. *Bedeutet r eine positive Veränderliche, $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu$ eine beständig convergirende Reihe mit reellen Coefficienten und ist für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu \geqq 0,$$

so giebt es unendlich viele Indices m_ν, für welche:

$$a_{m_\nu} \geqq 0$$

ausfällt.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre unrichtig, so müsste von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\nu \geqq n$, beständig

$$a_\nu < 0$$

sein. Sodann könnte man R so fixiren, dass für $r > R$:

$$|a_n| \cdot r^n > \left| \sum_0^{n-1}{}^{\nu} a_\nu r^\nu \right|,$$

und daher, wegen $a_n r^n < 0$:

$$\sum_0^{n}{}^{\nu} a_\nu r^\nu < 0 \quad (\text{für } r > R).$$

Da überdies für jedes r

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu r^\nu < 0$$

wäre, so hätte man schliesslich:

$$\sum_0^{\infty}{}^{\nu} a_\nu r^\nu < 0 \quad \text{für } \textit{jedes } r > R,$$

was der Voraussetzung widerspricht. —

Hülfssatz II.[1]) *Ist* $\sum_0^{\infty}{}^{\nu} b_\nu^{\varkappa}$, *wo* $\varkappa > 0$, *eine convergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern,* δ *eine beliebig anzunehmende positive Zahl, so hat man:*

(1) Für $\varkappa > 1$: $\sum_0^{\infty}{}^{\nu} b_\nu^{\varkappa} < \left(\sum_0^{\infty}{}^{\nu} b_\nu \right)^{\varkappa}$.

(2) Für $\varkappa < 1$: $\sum_0^{\infty}{}^{\nu} b_\nu^{\varkappa} < \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^{\infty}{}^{\nu} (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu \right)^{\varkappa}$.

Beweis. Setzt man: $\sum_0^{\infty}{}^{\nu} b_\nu = B$, so besteht für jedes ν die Beziehung:

$$\frac{b_\nu}{B} < 1$$

und daher auch, falls $\varkappa > 1$:

$$\left(\frac{b_\nu}{B} \right)^{\varkappa - 1} < 1,$$

also:

---

[1]) Es ist dies der hier ausschliesslich in Betracht kommende Theil des auf p. 179 von mir bewiesenen Hülfssatzes. Der hier gegebene, etwas kürzere Beweis rührt in der Hauptsache von Herrn Lüroth her.

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^\varkappa < \frac{b_\nu}{B}.$$

Substituirt man hier $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf., so folgt durch Summation:

$$\frac{1}{B^\varkappa} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \frac{1}{B} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu = 1,$$

also in der That, wie unter (1) behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \quad (\varkappa > 1).$$

Um die Richtigkeit von (2) zu beweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu = A, \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu\, c_\nu = S,$$

wobei $\sum a_\nu$, $\sum a_\nu\, c_\nu$ irgend zwei convergente Reihen mit nicht-negativen Gliedern bedeuten sollen. Ist sodann für $\varkappa < 1$ auch $\sum a_\nu\, c_\nu^\varkappa$ convergent, so besteht die Identität:

$$\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu\, c_\nu^\varkappa = \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa.$$

Nun ist aber[1]) für $\varkappa < 1$:

$$\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa < 1 + \varkappa\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu - 1\right),$$

woraus durch Multiplication mit a_ν, Substitution von $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf. und Summation sich ergiebt:

---

[1]) Die betreffende, für jedes $a > 0$, $\varkappa < 1$ geltende Ungleichung, nämlich:

$$a^\varkappa < 1 + \varkappa\,(a - 1),$$

geht aus der auf p. 176 für $\varkappa > 1$ abgeleiteten Ungl. (29):

$$A^\varkappa > 1 + \varkappa\,(A - 1)$$

ohne weiteres hervor, wenn man $A = a^{\frac{1}{\varkappa}}$ setzt und schliesslich $\frac{1}{\varkappa}$ statt $\varkappa$ schreibt.

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa < \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu + \varkappa \left(\frac{A}{S} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu - \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu.$$

Mit Benützung dieser Ungleichung liefert die obige Identität die Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa.$$

Setzt man noch:

$$a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu, \qquad a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa,$$

also:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \frac{1+\delta}{\delta}, \qquad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu = (1+\delta)^{\frac{\nu}{\varkappa}} \cdot b_\nu,$$

so folgt, wie unter (2) behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa < 1). -$$

Beweis des Hauptsatzes B. Es werde zunächst $\alpha = 1$ angenommen. Setzt man sodann $|x| = r$, so resultirt aus der Voraussetzung (B) a fortiori die folgende:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu| r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r} = A \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \frac{\gamma^\nu r^\nu}{\nu!},$$

sodass also für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse, die Beziehung besteht:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} (\nu! |C_\nu| - A\gamma^\nu) \cdot r^\nu \geqq 0.$$

Man hat somit nach Hülfssatz I für unendlich viele m_ν:

$$m_\nu! |C_{m_\nu}| \geqq A \cdot \gamma^{m_\nu}$$

und wegen:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} > \frac{1}{m_\nu e} \cdot m_\nu!,$$

zugleich auch:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} \cdot | C_{m_\nu} | > A \cdot \frac{1}{m_\nu e} \cdot \gamma^{m_\nu}.$$

Aus den beiden gefundenen Ungleichungen ergiebt sich sodann:

$$\text{(b}'\text{)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{| C_\nu |} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, | C_\nu |} \geqq \gamma,$$

eine Beziehung, welche mit der unter (b) behaupteten für $\alpha = 1$ zusammenfällt.

Ist jetzt α von 1 verschieden, so bringe man die aus der Voraussetzung (B) resultirende Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \, | C_\nu x^\nu | \geqq e^{\gamma \cdot | x |^\alpha}$$

durch die Substitution:

$$| x | = r^{\frac{1}{\alpha}}$$

auf die Form:

$$\text{(C)} \qquad \sum_0^\infty{}^\nu \, | C_\nu | \cdot r^{\frac{\nu}{\alpha}} = \sum_0^\infty{}^\nu \left(| C_\nu |^\alpha \cdot r^\nu \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot r}.$$

Im Falle $\alpha < 1$ hat man nun nach Ungl. (1) des Hülfssatzes II (für $\varkappa = \frac{1}{\alpha}$, $b_\nu = | C_\nu |^\alpha \cdot r^\nu$):

$$\sum_0^\infty{}^\nu \left(| C_\nu |^\alpha \cdot r^\nu \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\sum_0^\infty{}^\nu \, | C_\nu |^\alpha \cdot r^\nu \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

also, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (C):

$$\sum_0^\infty{}^\nu \, | C_\nu |^\alpha \cdot r^\nu > A^\alpha \cdot e^{\alpha \gamma r},$$

sodass sich mit Hülfe von (b′) unmittelbar ergiebt:

$$\text{(b}_1\text{)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{| C_\nu |^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, | C_\nu |^\alpha} \geqq \alpha \gamma \quad (\alpha < 1).$$

Im Falle $\alpha > 1$ hat man analog nach Ungl. (2) des Hülfssatzes II:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\nu} C_\nu^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

folglich, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl (C), zunächst:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha$$

$$\geqq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma r}$$

und, wenn man noch r durch $(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r$ ersetzt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r}.$$

Hieraus würde sich mit Hülfe von (b') zunächst ergeben:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq (1+\delta)^{1-\alpha} \cdot \alpha\gamma,$$

und da $\delta > 0$ unbegrenzt verkleinert werden darf, schliesslich:

$$(\mathrm{b}_2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha\gamma \quad (\alpha > 1).$$

Durch Erhebung der Relationen (b_1), (b_2) in die $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Zusammenfassung mit Ungl. (b') findet man also, wie behauptet:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

für j e d e s positive α.

Die in den Hauptsätzen (A) und (B) enthaltenen Resultate stimmen genau mit den früher auf p. 187 angegebenen überein. Daraus folgen dann die auf pp. 188, 189 zusammengestellten umkehrbaren Sätze mit Hülfe der nämlichen Schlüsse, welche a. a. O. zum Beweise der analogen Sätze von §§ 4 und 5 angewendet wurden.