Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVI. Jahrgang 1906.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.

II.

Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche.

Von **A. Korn.**

(Eingelaufen 5. Mai.)

Nachdem wir in der ersten Abhandlung gezeigt haben, daß das elastische Gleichgewichtsproblem:

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -X,\\ \Delta v + k\frac{\partial \theta}{\partial y} &= -Y,\\ \Delta w + k\frac{\partial \theta}{\partial z} &= -Z,\end{aligned}\right\}\ \text{in dem elastischen Körper } \tau$$

$$\left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= 0,\\ v &= 0, \text{ an der Oberfläche } \omega,\\ w &= 0,\end{aligned}\right.$$

für

$$3)\qquad -1 < k < +\infty$$

bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die gegebenen Funktionen

$$X, Y, Z \text{ von } x, y, z$$

stets ein und nur ein System von Lösungen u, v, w zuläßt, wollen wir jetzt die Existenz einer abzählbar unendlichen Menge von Funktionentripeln:

$$U_\varkappa\ V_\varkappa\ W_\varkappa$$

beweisen, welche den Differentialgleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \Delta U_\varkappa + k\dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial x} + \lambda_\varkappa^2 U_\varkappa = 0, \\ \Delta V_\varkappa + k\dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial y} + \lambda_\varkappa^2 V_\varkappa = 0, \\ \Delta W_\varkappa + k\dfrac{\partial \Theta_\varkappa}{\partial z} + \lambda_\varkappa^2 W_\varkappa = 0 \end{cases}$$

genügen und an der Oberfläche verschwinden. Dabei sind die $\lambda_\varkappa^2$:

$$5)\quad \lambda_0^2 < \lambda_1^2 < {}_2^2 < \cdots$$

Konstanten, welche wir als die den elastischen Funktionentripeln $U_\varkappa\, V_\varkappa\, W_\varkappa$ zugehörigen Zahlen bezeichnen wollen.

Zur Bestimmung der Eigenschwingungen eines elastischen Körpers bei ruhender Oberfläche haben wir Funktionen $U\,V\,W$ zu bestimmen, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$6)\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \Delta V + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (k,\ \sigma^2 \text{ Konstanten des Mediums}), \\ \Delta W + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} = \sigma^2 \cdot \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases}$$

und an der Grenze verschwinden. Jedem elastischen Funktionentripel $U_\varkappa\, V_\varkappa\, W_\varkappa$ ist nun eine elastische Eigenschwingung bei ruhender Oberfläche zugeordnet:

$$7)\quad \begin{cases} U = U_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \\ V = V_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \quad (\delta \text{ beliebige Konstante}), \\ W = W_\varkappa \cos\left(\dfrac{t}{T_\varkappa} + \delta\right) 2\pi, \end{cases}$$

und die betreffende Schwingungsdauer bestimmt sich aus der dem elastischen Funktionentripel zugeordneten Zahl $\lambda_\varkappa^2$ durch die folgende Relation:

$$T_\varkappa = \frac{\lambda_\varkappa}{2\pi\sigma}. \tag{8}$$

Die Theorie der elastischen Funktionentripel läßt übrigens nicht bloß diese eine Anwendung zu, sondern die Verwendbarkeit derselben ist dieselbe, wie die der Theorie der Poincaréschen harmonischen Funktionen.

Es läßt sich zeigen, wie wir sehen werden, daß sich jedes Funktionentripel u, v, w von gewissen Stetigkeitseigenschaften nach den elastischen Funktionentripeln entwickeln läßt:

$$\begin{cases} u = \sum^\varkappa c_\varkappa U_\varkappa, \\ v = \sum^\varkappa c_\varkappa V_\varkappa, \quad (c_1\, c_2 \ldots \text{ Konstanten}). \\ w = \sum^\varkappa c_\varkappa W_\varkappa, \end{cases} \tag{9}$$

Nach dem Beweise dieser Entwicklungen kann man das System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{10}$$

das System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \mu \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \mu \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \tag{11}$$

und auch das noch allgemeinere System von Differentialgleichungen:

$$\text{12)} \quad \begin{cases} \Delta u + k \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \Delta v + k \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \Delta w + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$$

in sehr allgemeiner Weise bei gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen integrieren.

§ 1.

Ich stelle der Untersuchung den folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz. Es seien

$$u_j v_j w_j \quad (j = 0, 1, 2 \ldots p)$$

$p + 1$ Funktionentripel, die mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutig und stetig sind, an der Grenze verschwinden, und von denen sonst nichts vorausgesetzt werde, als daß die $u_j v_j w_j$ derart linear unabhängig sind, daß keine Relationen von der Form stattfinden können:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_0^p {}_j \beta_j u_j = 0, \\ \sum_0^p {}_j \beta_j v_j = 0, \\ \sum_0^p {}_j \beta_j w_j = 0 \end{array}\right\} \text{ im ganzen Innenraum,}$$

wo die β_j reelle Konstanten sind, die der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügen. Man kann dann stets die $p + 1$ reellen Konstanten:

$$a_0 a_1 \ldots a_p$$

so berechnen, daß

$$\text{13)} \quad a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

und die Funktionentripel:

$$
14) \quad \begin{cases} u = \sum_0^p {}_j\, a_j\, u_j, \\ v = \sum_0^p {}_j\, a_j\, v_j, \\ w = \sum_0^p {}_j\, a_j\, w_j \end{cases}
$$

die Ungleichung erfüllen:

$$
15) \quad \frac{\int_i (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau}{\int_i (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau} < \frac{\mathfrak{a}^2}{\sqrt[3]{p^2}}
$$

wo $\mathfrak{a}$ eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende, von den Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ gänzlich unabhängige Länge vorstellt, und wo:

$$
16) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},
$$

$$
17) \quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \mathfrak{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}
$$

gesetzt ist.

Es ist in der Tat:

$$
18) \quad \begin{cases} \int_i (\theta^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2)\, d\tau = -\int_i \Big[u \Big\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} \Big) \Big\} \\ \quad + v \Big\{ \frac{\partial \theta}{\partial y} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} \Big) \Big\} + w \Big\{ \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Big(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} \Big) \Big\} \Big]\, d\tau, \\ \quad = -\int_i [u \Delta u + v \Delta v + w \Delta w]\, d\tau, \\ \quad = \int_i \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2 \\ \qquad + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 \Big]\, d\tau, \end{cases}
$$

und wir wissen nach dem Beweise eines Poincaréschen Satzes,[1]) daß bei genügend großem p die Konstanten a_j so bestimmt werden können, daß:

$$19)\quad \begin{cases} \int\limits_i u^2\, d\tau < \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int\limits_i \left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \int\limits_i v^2\, d\tau \leqq \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int\limits_i \left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \int\limits_i w^2\, d\tau \leqq \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}} \int\limits_i \left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] d\tau. \end{cases}$$

Wir haben in dem bekannten Beweise des Poincaréschen Satzes das Gebiet τ nur in eine Anzahl $\leqq \frac{p}{3}$ Teilgebiete τ_j zu zerlegen, und die Konstanten a_j so zu berechnen, daß für jedes Teilgebiet:

$$20)\quad \int\limits_{\tau_j} u\, d\tau = \int\limits_{\tau_j} v\, d\tau = \int\limits_{\tau_j} w\, d\tau = 0,$$

dann ergibt jener Beweis auch unmittelbar die obigen Formeln.

§ 2.

Wir stellen uns jetzt das folgende Problem:

Gegeben sind drei (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraums $f_1\, f_2\, f_3$, von denen wir voraussetzen, daß in den Teilgebieten, in denen Stetigkeit vorhanden ist, für zwei Punkte 1 und 2 in genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$21)\quad \text{abs.}\left[\, f_j|_2 - f_j|_1\right] \leqq A_j r_{12}^{\lambda},\ j = 1, 2, 3 \qquad \begin{array}{l} A_1\, A_2\, A_3 \text{ endliche Kon-} \\ \text{stanten, } \lambda \text{ echter Bruch.} \end{array}$$

Es sollen drei mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen $U\, V\, W$ der Stelle des Innenraumes so gefunden werden, daß:

[1]) H. Poincaré, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1894; A. Korn, Abh. zur Potentialtheorie 4 (Berlin, Ferd. Dümmlers Verlag 1902).

$$
22) \quad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U^{1)} = -f_1, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3, \end{cases}
$$

k und λ^2 gegebene Zahlen $(-1 < k < \infty)$, und daß an der Fläche ω:

$$
23) \quad \begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = 0. \end{cases}
$$

Wir bilden successive, entsprechend den Untersuchungen meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie,[2]) die mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutigen und stetigen Funktionen:

$$
u_j \; v_j \; w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)
$$

so, daß:

$$
24) \quad \left.\begin{aligned} &\Delta u_0 + k \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = -f_1, \\ &\Delta v_0 + k \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = -f_2, \\ &\Delta w_0 + k \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -f_3, \\ &\left.\begin{aligned} &\Delta u_j + k \frac{\partial \theta_j}{\partial x} = -u_{j-1}, \\ &\Delta v_j + k \frac{\partial \theta_j}{\partial y} = -v_{j-1}, \\ &\Delta w_j + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -w_{j-1}, \end{aligned}\right\} j = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \text{in } \tau,
$$

---

[1]) Wir könnten auch ebenso leicht das allgemeinere Problem behandeln, in dem statt U, $\varphi^2 U$ steht, ... und φ^2 eine überall von null verschiedene, positive Funktion der Stelle des Innenraumes ist, die nur einer ähnlichen Bedingung 21) wie die f_j genügt.

[2]) Diese Ber. B. 36, S. 37.

während an ω stets:

25)
$$\left.\begin{cases} u_j = 0, \\ v_j = 0, \\ w_j = 0. \end{cases}\right\} j = 0, 1, 2 \ldots$$

Können wir zeigen, daß:

$$\lim_{j=\infty} (\lambda^2)^j u_j = 0$$

und daß die Reihen:

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j u_j,$$

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j v_j,$$

$$\sum_0^\infty {}_j (\lambda^2)^j w_j$$

mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes vorstellen, dann werden diese Reihen die Lösungen der gestellten Aufgabe repräsentieren. Bevor wir zu diesen Konvergenzbetrachtungen übergehen, wollen wir einige Eigenschaften der aufeinander folgenden Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ kennen lernen.

§ 3.

Wir wollen voraussetzen, es bestehen zwischen den $p+1$ Funktionentripeln

$$u_j\, v_j\, w_j \qquad (j = 0, 1, \ldots p)$$

die Relationen:

26)
$$\sum_0^p {}_j\, \beta_j\, u_j = 0,$$

$$\sum_0^p {}_j\, \beta_j\, v_j = 0,$$

$$\sum_0^p {}_j\, \beta_j\, w_j = 0,$$

wo die β_j reelle, den Gleichungen:

27) $$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, und wo p eine endliche Zahl ist. Wir wollen zusehen, zu welchen Konsequenzen dies für die drei Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ führen muß. Wir werden zunächst zeigen, daß man aus 26) stets drei Relationen von der Form

28) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_0^{p-1}{}_j\, \gamma_j\, u_j = 0\,,\\ &\sum_0^{p-1}{}_j\, \gamma_j\, v_j = 0\,,\\ &\sum_0^{p-1}{}_j\, \gamma_j\, w_j = 0 \end{aligned}\right.$$

ableiten kann, wo die γ_j ($j = 0, 1, \ldots p-1$) reelle, den Gleichungen:

29) $$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, in folgenden drei Fällen:

1. Wenn die Gleichung:

30) $$\beta_0\, x^p + \beta_1\, x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0$$

eine komplexe Wurzel:

$$x_1 + i\, x_2 \qquad (x_2 \neq 0)$$

besitzt:

2. wenn diese Gleichung eine reelle, negative Wurzel besitzt;

3. wenn diese Gleichung eine positive Doppelwurzel hat.

In der Tat berechnen wir die $p + 2$ Konstanten

$$\gamma_0\, \gamma_1\, \ldots\, \gamma_{p-1}\, x\, a$$

so, daß:

$$31)\quad \begin{cases} a\gamma_0 = \beta_0, \\ a\gamma_1 = \beta_1 + a x \gamma_0, \\ a\gamma_2 = \beta_2 + a x \gamma_1, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a\gamma_{p-1} = \beta_{p-1} + a x \gamma_{p-2}, \\ 0 = \beta_p + a x \gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots \gamma_{p-1}^2 = 1, \end{cases} \qquad a \neq 0,$$

was auf p Weisen möglich ist, entsprechend den p Wurzeln der Gleichung 30), so folgt aus 26):

$$32\,a)\quad \begin{cases} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_{p-1} u_p), \\ \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = x(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_{p-1} v_p), \\ \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = x(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 \\ \qquad + \cdots + \gamma_{p-1} w_p) \end{cases}$$

oder:

$$32\,b)\quad \begin{cases} \Delta(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p) + k \frac{\partial}{\partial x}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ + \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p), \\ \Delta(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p) + k \frac{\partial}{\partial y}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ + \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p), \\ \Delta(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p) + k \frac{\partial}{\partial z}(\gamma_0 \theta_1 + \gamma_1 \theta_2 \\ + \cdots + \gamma_{p-1}\theta_p) = -x(\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p). \end{cases}$$

Hat die Gleichung 30) eine komplexe Wurzel

$$x_1 + i x_2 \qquad (x_2 \neq 0),$$

und setzen wir:

$$33)\quad \begin{cases} \gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = X + i\,\Xi, \\ \gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 + \cdots + \gamma_{p-1} v_p = Y + i\,H, \\ \gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p = Z + i\,Z, \end{cases}$$

so folgt, wenn wir die Gleichung 32 b) bezw. mit

$$X - i\Xi, \qquad Y - iH, \qquad Z - iZ$$

multiplizieren, addieren und über den Innenraum integrieren:

$$\text{34)} \left\{ \begin{aligned} & - \int_i \left[\frac{\partial(X - i\Xi)}{\partial x} \frac{\partial(X + i\Xi)}{\partial x} + \frac{\partial(X - i\Xi)}{\partial y} \frac{\partial(X + i\Xi)}{\partial y} \right. \\ & \quad + \frac{\partial(X - i\Xi)}{\partial z} \frac{\partial(X + i\Xi)}{\partial z} + \frac{\partial(Y - iH)}{\partial x} \frac{\partial(Y + iH)}{\partial x} \\ & \quad + \frac{\partial(Y - iH)}{\partial y} \frac{\partial(Y + iH)}{\partial y} + \frac{\partial(Y - iH)}{\partial z} \frac{\partial(Y + iH)}{\partial z} \\ & \quad + \frac{\partial(Z - iZ)}{\partial x} \frac{\partial(Z + iZ)}{\partial x} + \frac{\partial(Z - iZ)}{\partial y} \frac{\partial(Z + iZ)}{\partial y} \\ & \qquad + \frac{\partial(Z - iZ)}{\partial z} \frac{\partial(Z + iZ)}{\partial z} + k \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(X + i\Xi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y}(Y + iH) + \frac{\partial}{\partial z}(Z + iZ) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(X - i\Xi) \right. \\ & \qquad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y}(Y - iH) + \frac{\partial}{\partial z}(Z - iZ) \right\} \right] d\tau \\ & = -(x_1 + i x_2) \int_i (X^2 + Y^2 + Z^2 + \Xi^2 + H^2 + Z^2)\, d\tau, \end{aligned} \right.$$

somit, falls $x_2 \neq 0$, da die linke Seite reell ist:

$$\int_i (X^2 + Y^2 + Z^2 + \Xi^2 + H^2 + Z^2)^2\, d\tau = 0,$$
$$X = Y = Z = \Xi = H = Z = 0,$$

oder:

$$\text{35)} \left\{ \begin{aligned} & \gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = 0; \quad \gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2 \\ & + \cdots + \gamma_{p-1} v_p = 0; \quad \gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2 + \cdots + \gamma_{p-1} w_p = 0 \end{aligned} \right.$$

und hieraus durch die Operationen

$$\Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \Delta + k\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

die Gleichungen:

$$\text{36)} \left\{ \begin{aligned} & \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0; \quad \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 \\ & + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = 0; \quad \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Hat die Gleichung 30) eine reelle, negative Wurzel

$$x = -x_0^2,$$

so folgt aus 34):

$$-\int\limits_i \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

$$-k\int\limits_i \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 d\tau$$

$$= x_0^2 \int\limits_i (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau,$$

und hieraus wieder: 35) und 36), da links eine Summe von lauter negativen Gliedern steht.

Hat schließlich die Gleichung 30 b) eine positive Doppelwurzel

37) $$x = \bar{x},$$

so können wir die p Konstanten

$$\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_{p-2}\, b$$

so bestimmen, daß sie zusammen mit $\bar{x}$ die Gleichungen erfüllen:

38) $$\left\{\begin{aligned} b\,\delta_0 &= \gamma_0, \\ b\,\delta_1 &= \gamma_1 + b\,\delta_0\,\bar{x}, \\ b\,\delta_2 &= \gamma_2 + b\,\delta_1\,\bar{x}, \\ &- \;-\; -\; -\; - \\ b\,\delta_{p-2} &= \gamma_{p-2} + b\,\delta_{p-3}\,\bar{x}, \\ 0 &= \gamma_{p-1} + b\,\delta_{p-2}\,\bar{x}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 &+ \cdots + \delta_{p-2}^2 = 1, \end{aligned}\right. \qquad b \neq 0$$

und wir können die Gleichungen 32 a) in der Form schreiben:

39) $$\left\{\begin{aligned} F - 2\bar{x}F_1 + \bar{x}^2 F_2 &= 0, \\ G - 2\bar{x}G_1 + \bar{x}^2 G_2 &= 0, \\ H - 2\bar{x}H_1 + \bar{x}^2 H_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$
40)\quad \begin{cases}
F = \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\
F_1 = \delta_0 u_1 + \delta_1 u_2 + \cdots + \delta_{p-2} u_{p-1}, \\
F_2 = \delta_0 u_2 + \delta_1 u_3 + \cdots + \delta_{p-2} u_p; \\
G = \delta_0 v_0 + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_{p-2} v_{p-2}, \\
G_1 = \delta_0 v_1 + \delta_1 v_2 + \cdots + \delta_{p-2} v_{p-1}, \\
G_2 = \delta_0 v_2 + \delta_1 v_3 + \cdots + \delta_{p-2} v_p; \\
H = \delta_0 w_0 + \delta_1 w_1 + \cdots + \delta_{p-1} w_{p-2}, \\
H_1 = \delta_0 w_1 + \delta_1 w_2 + \cdots + \delta_{p-2} w_{p-1}, \\
H_2 = \delta_0 w_2 + \delta_1 w_3 + \cdots + \delta_{p-2} w_p.
\end{cases}
$$

Es folgt aus 39) und 40):

$$
\Delta F + k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} F - \bar{x}^2 F_1 = 0,
$$

$$
\Delta G + k \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} G - \bar{x}^2 G_1 = 0,
$$

$$
\Delta H + k \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) + 2\bar{x} H - \bar{x}^2 H_1 = 0.
$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir bezw. mit

$$
(-F_1), \qquad (-G_1), \qquad (-H_1),
$$

addieren und integrieren über den Innenraum, dann ergibt sich:

$$
\int_i \{F^2 + G^2 + H^2 - 2\bar{x}(FF_1 + GG_1 + HH_1) + \bar{x}^2(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)\}\, d\tau = 0,
$$

und hieraus:

$$
41)\quad \begin{cases}
F - \bar{x} F_1 = 0, \\
G - \bar{x} G_1 = 0, \\
H - \bar{x} H_1 = 0,
\end{cases}
$$

das sind Gleichungen von der Form:

$$
\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0,
$$
$$
\gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{p-1} v_{p-1} = 0,
$$
$$
\gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{p-1} w_{p-1} = 0.
$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt, daß man Gleichungen von der Form:

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = 0,$$
$$\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p = 0,$$
$$\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_r w_p = 0$$

stets auf Gleichungen:

42) $$\begin{cases} \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_m u_m = 0, \\ \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0, \\ \gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m = 0 \end{cases}$$

reduzieren kann, in denen die

$$\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_m$$

reelle, der Relation:

43) $$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_m^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen und so beschaffen sind, daß die Gleichung:

44) $$\gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \cdots + \gamma_m = 0$$

m positive, einfache Wurzeln besitzt.

Bezeichnen wir mit $x_1 x_2 \ldots x_m$ diese m Wurzeln, so ist, da eine Doppelwurzel nicht existiert, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_m^2 \\ - & - & - & - \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

und wir können somit mit Hilfe der Gleichungen:

45) $$\begin{cases} u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \ldots ^{1)} \\ u_1 = x_1^{-1} U_1 + x_2^{-1} U_2 + \cdots + x_m^{-1} U_m, \ldots \\ u_2 = x_1^{-2} U_1 + x_2^{-2} U_2 + \cdots + x_m^{-2} U_m, \ldots \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ u_{m-1} = x_1^{-(m-1)} U_1 + x_2^{-(m-1)} U_2 + \cdots + x_m^{-(m-1)} U_m, \ldots \end{cases}$$

[1] Je zwei analoge Gleichungen, in denen überall u durch v bezw. w und U durch V bezw. W zu ersetzen ist.

die Funktionen

$$\begin{array}{lllll} U_1\, U_2 \ldots U_m & \text{linear durch die} & & & u_0\, u_1 \ldots u_{m-1}, \\ V_1\, V_2 \ldots V_m & \text{„} & \text{„} & \text{„} & v_0\, v_1 \ldots v_{m-1}, \\ W_1\, W_2 \ldots W_m & \text{„} & \text{„} & \text{„} & w_0\, w_1 \ldots w_{m-1} \end{array}$$

definieren. Aus 45) und 42) folgt nun, da $x_1\, x_2 \ldots x_m$ die Gleichung 44) erfüllen, auch:

$$u_m = x_1^{-m}\, U_1 + x_2^{-m}\, U_2 + \cdots + x_m^{-m}\, U_m, \ldots,^{1)}$$

so daß wir die

$$U_j\, V_j\, W_j \qquad (j = 1, 2 \ldots m)$$

anstatt durch die Gleichungen 45) auch durch die folgenden Gleichungen definieren können:

$$46)\quad u_j = x_1^{-j}\, U_1 + x_2^{-j}\, U_2 + \cdots + x_m^{-j}\, U_m, \ldots^{1)} \quad (j = 1, 2 \ldots m).$$

Nun folgt aus 46) und 24):

$$47)\quad \begin{aligned} - u_{j-1} &= x_1^{-j}\left(\Delta U_1 + k \frac{\partial \Theta_1}{\partial x}\right) + x_2^{-j}\left(\Delta U_2 + k \frac{\partial \Theta_2}{\partial x}\right) \\ &+ \cdots + x_m^{-j}\left(\Delta U_m + k \frac{\partial \Theta_m}{\partial x}\right), \ldots \qquad (j = 1, 2 \ldots m), \end{aligned}$$

und da wir die Gleichungen 45) auch so schreiben können:

$$48)\quad u_{j-1} = x_1^{-(j-1)}\, U_1 + x_2^{-(j-1)}\, U_2 + \cdots x_m^{-(j-1)}\, U_m, \ldots \quad (j = 1, 2 \ldots m)$$

auch:

$$49)\quad \left|\begin{aligned} 0 &= x_1^{-(j-1)} \left\{\Delta U_1 + k \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + x_1\, U_1\right\} \\ &+ x_2^{-(j-1)} \left\{\Delta U_2 + k \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} + x_2\, U_2\right\} + \cdots \\ &+ x_m^{-(j-1)} \left\{\Delta U_m + k \frac{\partial \Theta_m}{\partial x} + x_m\, U_m\right\}, \ldots \end{aligned}\right| \; j = 1, 2 \ldots m.$$

Das sind dreimal m lineare und homogene Gleichungen für die m Größen:

---

[1]) Je zwei analoge Gleichungen, in denen überall u durch v bezw. w und U durch V bezw. W zu ersetzen ist.

$$\left.\begin{array}{rl} & \Delta U_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} + x_j U_j, \\ \text{bezw.} & \Delta V_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} + x_j V_j, \\ & \Delta W_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} + x_j W_j, \end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots m,$$

es folgt somit, da die Determinante dieser Gleichungen $\neq 0$ ist, einzeln:

$$50)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta U_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = -x_j U_j, \\ \Delta V_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = -x_j V_j, \qquad j = 1, 2 \ldots m. \\ \Delta W_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = -x_j W_j, \end{array}\right.$$

Die erste Gleichung 45) lehrt uns somit: Es ist bei unserer Voraussetzung:

$$51)\quad \left\{\begin{array}{l} u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \\ v_0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m, \\ w_0 = W_1 + W_2 + \cdots + W_m, \end{array}\right.$$

wo die $U_j\, V_j\, W_j$ linear durch die $u_j\, v_j\, w_j$ ausdrückbare Funktionen des Innenraumes von w sind, welche in demselben den Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{array}{l} \Delta U_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = -x_j U_j, \\ \Delta V_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = -x_j V_j, \qquad j = 1, 2 \ldots m. \\ \Delta W_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = -x_j W_j, \end{array}$$

Dabei sind die x_j positive Zahlen, welche der Gleichung:

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0$$

genügen.

Wir sprechen das Resultat folgendermaßen aus:

I. Bestehen zwischen den successive durch die Gleichungen 24) und 25) definierten Funktionen $u_j\, v_j\, w_j$ Relationen von der Form:

$$\begin{aligned}
\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0,\\
\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0,\\
\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0,
\end{aligned}$$

wo p eine endliche Zahl, $\beta_0\, \beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, so kann man $u_0\, v_0\, w_0$ in der Form darstellen:

$$\begin{aligned}
u_0 &= U_1 + U_2 + \cdots + U_m, \quad (m \leq p)\\
v_0 &= V_1 + V_2 + \cdots + V_m,\\
w_0 &= W_1 + W_1 + \cdots + W_m,
\end{aligned}$$

wo die $U_j\, V_j\, W_j$ linear durch die $u_j\, v_j\, w_j$ resp. ausdrückbare, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω sind, die in demselben den Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= -\varkappa_i U_j,\\
\Delta V + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= -\varkappa_j V_j,\\
\Delta W_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial z} &= -\varkappa_j W_j
\end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m$$

und an der Oberfläche den Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
U_j &= 0,\\
V_j &= 0,\\
W_j &= 0,
\end{aligned}\right\} j = 1, 2 \ldots m$$

genügen; dabei sind die x_j positive Wurzeln der Gleichung:

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \cdots + \beta_p = 0.$$

Die Funktionen $f_1 f_2 f_3$ sind in der Form darstellbar:

$$52)\quad \begin{cases} f_1 = -x_1 U_1 - x_2 U_2 - \cdots - x_m U_m, \\ f_2 = -x_1 V_1 - x_2 V_2 - \cdots - x_m V_m, \\ f_3 = -x_1 W_1 - x_2 W_2 - \cdots - x_m W_m. \end{cases}$$

Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus 51) und 50).

Setzen wir bei der Voraussetzung des Satzes I

$$53)\quad \begin{cases} U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_m U_m, \\ V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \cdots + a_m V_m, \\ W = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \cdots + a_m W_m, \end{cases}$$

so genügen diese Funktionen den Differentialgleichungen:

$$54)\quad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U = -f_1, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3, \end{cases}$$

wenn:

$$55)\quad a_j = -\frac{x_j}{\lambda^2 - x_j},$$

bei der Voraussetzung:

$$\lambda^2 \neq x_j.$$

Die Lösungen 53) unseres Hauptproblems haben somit, als Funktionen von λ^2 betrachtet, einfache Pole an den Stellen:

$$\lambda^2 = x_j \qquad (j = 1, 2 \ldots m).$$

Fragen wir, kann es noch ein anderes Lösungssystem $U' V' W'$ der Aufgabe geben, so bemerken wir, daß in dem Falle der Existenz eines zweiten Lösungssystems $U' V' W'$:

$$56)\quad \begin{cases} \Delta(U'-U)+k\dfrac{\partial(\Theta'-\Theta)}{\partial x}=-\lambda^2(U'-U), \\ \Delta(V'-W)+k\dfrac{\partial(\Theta'-\Theta)}{\partial y}=-\lambda^2(V'-V), \\ \Delta(W'-W)+k\dfrac{\partial(\Theta'-\Theta)}{\partial z}=-\lambda^2(W'-W) \end{cases}$$

sein müßte; nur um solche Funktionen $U'-U$, $V'-V$, $W'-W$, die im Innenraume den Gleichungen 56) genügen und an der Oberfläche verschwinden, können sich $U\,V\,W$ und $U'\,V'\,W'$ unterscheiden.

§ 4.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß sich zwischen den successiven Funktionen $u_j\,v_j\,w_j$ keine Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0+\beta_1 u_1+\cdots+\beta_p u_p&=0,\\ \beta_0 v_0+\beta_1 v_1+\cdots+\beta_p v_p&=0,\\ \beta_0 w_0+\beta_1 w_1+\cdots+\beta_p w_p&=0 \end{aligned}$$

herleiten lassen, wo p eine endliche Zahl ist und $\beta_0\beta_1\ldots\beta_p$ reelle, der Gleichung

$$\beta_0^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_p^2=1$$

genügende Konstanten vorstellen.

Wir bilden an Stelle der Reihen $u_j\,v_j\,w_j$ die Reihen, welche entstehen, wenn man anstatt von den Funktionen $f_1\,f_2\,f_3$ von den Funktionen:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 f_1+\alpha_1 u_0+\alpha_2 u_1+\cdots+\alpha_p u_{p-1},\\ &\alpha_0 f_2+\alpha_1 v_0+\alpha_2 v_1+\cdots+\alpha_p v_{p-1},\\ &\alpha_0 f_3+\alpha_1 w_0+\alpha_2 w_1+\cdots+\alpha_p w_{p-1} \end{aligned}$$

ausgeht, wo die

$$\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p$$

$p+1$ reelle Konstanten sein sollen, die der Gleichung:

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2+\cdots+\alpha_p^2=1$$

genügen, und über die wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten.

Wir bilden also successive die Funktionentripel $\pi_j\,\chi_j\,\varrho_j$, welche in τ den Differentialgleichungen genügen:

$$
57)\left\{\begin{array}{l}
\Delta\pi_0 + k\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}),\\
\Delta\chi_0 + k\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial y} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}),\\
\Delta\varrho_0 + k\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}),\\
\left.\begin{array}{l}
\Delta\pi_j + k\dfrac{\partial\sigma_j}{\partial x} = -\pi_{j-1},\\
\Delta\chi_j + k\dfrac{\partial\sigma_j}{\partial y} = -\chi_{j-1},\\
\Delta\varrho_j + k\dfrac{\partial\sigma_j}{\partial z} = -\varrho_{j-1},
\end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots
\end{array}\right|\;\sigma_j = \frac{\partial\pi_j}{\partial x} + \frac{\partial\chi_j}{\partial y} + \frac{\partial\varrho_j}{\partial z},
$$

und an der Fläche ω den Grenzbedingungen:

$$
58)\qquad \left.\begin{cases} \pi_j = 0, \\ \chi_j = 0, \\ \varrho_j = 0, \end{cases}\right\} j = 0, 1, 2 \ldots
$$

Wir wollen zeigen, daß wir bei genügend großem p die Konstanten

$$a_0\, a_1 \ldots a_p$$

so wählen können, daß

$$
59)\qquad \left.\begin{cases} \text{abs. } \lambda^{2j}\pi_j \overline{\overline{<}}\, A\cdot L^j, \\ \text{abs. } \lambda^{2j}\chi_j \overline{\overline{<}}\, A\cdot L^j, \\ \text{abs. } \lambda^{1j}\varrho_j < A\cdot L^j, \end{cases}\right\} \begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,} \\ L \text{ echter Bruch,} \end{array}
$$

wenn λ^2 eine beliebige positive, festgegebene Zahl vorstellt, so daß die Reihen:

$$
60)\qquad \begin{cases} \pi = \pi_0 + \lambda^2\pi_1 + \lambda^4\pi_2 + \cdots \\ \chi = \chi_0 + \lambda^2\chi_1 + \lambda^4\chi_2 + \cdots \\ \varrho = \varrho_0 + \lambda^2\varrho_1 + \lambda^4\varrho_2 + \cdots \end{cases}
$$

mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω vorstellen, die in demselben den Differentialgleichungen:

$$
61)\quad \begin{cases} \Delta\pi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}), \\ \Delta\chi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}), \\ \Delta\varrho + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1}) \end{cases}
$$

und an der Fläche ω den Grenzbedingungen:

$$
62)\quad \begin{cases} \pi = 0, \\ \chi = 0, \\ \varrho = 0 \end{cases}
$$

genügen.

Wir betrachten zum Beweise dieser Behauptung den Quotienten:

$$
\frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}, \qquad (m \text{ eine endliche Zahl}),
$$

der nach 57):[1])

---

[1]) Es ist nach 57):

$$
\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau
$$

$$
= \int\limits_i \left[\left(\Delta\pi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta\chi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta\varrho_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau
$$

und:

$$
\int\limits_i \left[(1+k)\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial\varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial\chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\pi_m}{\partial z} - \frac{\partial\varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_m}{\partial x} - \frac{\partial\pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau
$$

$$
< \sqrt{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau \int\limits_i \left[\left(\Delta\pi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta\chi_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta\varrho_m + k\frac{\partial\sigma_m}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau},
$$

somit:

$$< \left[\frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i \left[(1+k)\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau} \right]^2$$

und

$$< \frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{p^4}}$$

wenn wir $a_0\, a_1 \ldots a_p$ in geeigneter Weise wählen, nach dem Hilfssatz auf S. 354, da

$$\begin{aligned} \pi_m &= a_0\, u_{m-1} + a_1\, u_m + \cdots + a_p\, u_{m+p-1}, \\ \chi_m &= a_0\, v_{m-1} + a_1\, v_m + \cdots + a_p\, v_{m+p-1}, \\ \varrho_m &= a_0\, w_{m-1} + a_1\, w_m + \cdots + a_p\, w_{m+p-1}. \end{aligned}$$

Das Resultat:

$$\text{63)} \qquad \frac{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} < \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}$$

gilt somit für jedes bestimmte, endliche m, bei beliebigem p und geeignet gewählten $a_0\, a_1 \ldots a_p$.

Bedenken wir jetzt, daß:

$$\begin{aligned} \int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau &= -\int\limits_i \left[\pi_{m-1} \left(\Delta \pi_m + k \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} \right) + \cdots \right] d\tau, \\ &= -\int\limits_i \left[\pi_m \left(\Delta \pi_{m-1} + k \frac{\partial \sigma_{m-1}}{\partial x} \right) + \cdots \right] d\tau, \\ &= -\int\limits_i (\pi_m \pi_{m-2} + \chi_m \chi_{m-2} + \varrho_m \varrho_{m-2})\, d\tau,\text{[1]} \end{aligned}$$

$$\int\limits_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau\,.$$

$$> \frac{\left| \int\limits_i \left[(1+k)\sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \varrho_m}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_m}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \frac{\partial \pi_m}{\partial y}\right)^2 \right] d\tau \right|^2}{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}$$

[1]) Für $m = 1$ soll

$$\begin{aligned} &\pi_{m-2} \text{ für } a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1}, \\ &\chi_{m-2} \text{ für } a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1}, \\ &\varrho_{m-2} \text{ für } a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1} \end{aligned}$$

stehen.

so folgt:

$$\left[\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau\right]^2$$
$$\overline{\overline{<}} \int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau \int_i (\pi_{m-2}^2 + \chi_{m-2}^2 + \varrho_{m-2}^2)\, d\tau,$$

oder:

$$64)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-2}^2 + \chi_{m-2}^2 + \varrho_{m-2}^2)\, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} \\ &\qquad \overline{\overline{<}} \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{aligned} \right.$$

Infolge dieses Schlusses von m auf $m-1$ ist allgemein für jedes bestimmte, endliche m bei geeignet gewählten $a_0\, a_1 \ldots a_p$:

$$65)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau}{\int_i \{(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1})^2 + (a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1})^2 + (a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1})^2\}\, d\tau} \\ &\overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_2^2 + \chi_2^2 + \varrho_2^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau} \overline{\overline{<}} \cdots \overline{\overline{<}} \frac{\int_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau}{\int_i (\pi_{m-1}^2 + \chi_{m-1}^2 + \varrho_{m-1}^2)\, d\tau} \\ &\overline{\overline{<}} \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}. \end{aligned} \right.$$

Man kann dieses Resultat aber auch für unendlich wachsende m beweisen, nach der bekannten, von Poincaré gefundenen Schlußweise: Man betrachte die für ein beliebiges endliches m unseren Voraussetzungen genügenden

$$a_0^{(m)}\, a_1^{(m)} \ldots a_p^{(m)}\,{}^{1)}$$

als Koordinaten von Punkten der Kugelfläche:

$$66)\qquad a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_p^2 = 1$$

in einem $p+1$ dimensionalen Raume, dann wird für die

[1]) Ich füge die Indices (m) zur genaueren Bezeichnung hinzu.

$$a_0^{(m)}\, a_1^{(m)} \dots a_p^{(m)}$$

eines gewissen Gebietes δ_m der Kugelfläche die Bedingung 65) erfüllt sein. Wir können in gleicher Weise, bei geeignet gewählten

$$a_0^{(m+1)}\, a_1^{(m+1)} \dots a_p^{(m+1)}$$

erreichen, daß:

$$67)\quad \begin{cases} \dfrac{\int\limits_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau}{\int\limits_i \{(a_0 f_1 + a_1 u_0 + \cdots + a_p u_{p-1})^2 + (a_0 f_2 + a_1 v_0 + \cdots + a_p v_{p-1})^2 + (a_0 f_3 + a_1 w_0 + \cdots + a_p w_{p-1})^2\}\, d\tau} \\ \leqq \dfrac{\int\limits_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \varrho_0^2)\, d\tau} \leqq \dfrac{\int\limits_i (\pi_2^2 + \chi_2^2 + \varrho_2^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_1^2 + \chi_1^2 + \varrho_1^2)\, d\tau} \leqq \cdots \leqq \dfrac{\int\limits_i (\pi_{m+1}^2 + \chi_{m+1}^2 + \varrho_{m+1}^2)\, d\tau}{\int\limits_i (\pi_m^2 + \chi_m^2 + \varrho_m^2)\, d\tau} \\ < \dfrac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^4}}, \end{cases}$$

wo die endliche Konstante rechts von m und p ganz unabhängig ist. Die Punkte

$$a_0^{(m+1)}\, a_1^{(m+1)} \dots a_p^{(m+1)},$$

welche der Bedingung 67) genügen, werden einem Gebiete δ_{m+1} der Kugelfläche 66) angehören, welches ganz in dem Gebiete δ_m enthalten ist, da die Bedingungen 65) eine Folge von 67) sind; in dieser Weise fortgehend sieht man, daß das entsprechende Gebiet δ_{m+2} ganz in dem Gebiete δ_{m+1}, δ_{m+3} ganz in dem Gebiete δ_{m+2} enthalten ist, und so fort; daraus folgt, daß ein Wertsystem:

$$a_0\, a_1 \dots a_p$$

existiert, für welches die Ungleichungen 67) auch bei unendlich wachsendem m erfüllt sind, und es ergibt sich:

$$68)\qquad \int\limits_i (\pi_j^2 + \chi_j^2 + \varrho_j^2)\, d\tau < B \cdot L_p^{2j},$$

wenn wir

$$69)\qquad L_p = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^2}}$$

setzen und unter B eine endliche Konstante verstehen, die von j ganz unabhängig ist.

Wir folgern aus 68) auch

$$\int_\tau F_j^2\, d\tau \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } L_p^{2j}$$

(man vgl. die letzte Formel Anm. S. 371), wenn man unter F_j eine der vier Funktionen

$$\sigma_j = \frac{\partial \pi_j}{\partial x} + \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_j}{\partial z},\quad \frac{\partial \varrho_j}{\partial y} - \frac{\partial \chi_j}{\partial z},\quad \frac{\partial \pi_j}{\partial z} - \frac{\partial \varrho_j}{\partial x},\quad \frac{\partial \chi_j}{\partial x} - \frac{\partial \pi_j}{\partial y}$$

versteht; denken wir uns um einen Punkt $(x\,y\,z)$ innerhalb ω eine Kugel vom Radius R, der nur klein genug gewählt ist, daß die Kugel ganz in dem Gebiete τ liegt, so ist:

$$F_j = -\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\Delta F_j}{r} - \frac{\Delta F_j}{R}\right] d\tau + \frac{1}{4\pi R^2}\int F_j\, d\omega,$$

wo die Integrale rechts über die Kugel bezw. Kugelfläche zu erstrecken sind, somit:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 F_j = \int F_j\, d\tau - \int_0^R R^2 \int_{(R)}\left[\frac{\Delta F_j}{r} - \frac{\Delta F_j}{R}\right] d\tau\, dR,$$

$$\frac{4\pi}{3} R^3 |F_j| \overline{<} \text{ endl. Zahl} \cdot \sqrt{\int F_j^2\, d\tau \cdot R^3}$$

$$+ \int_0^R \text{endl. Zahl } R^2 \sqrt{R \cdot \int \Delta F_j^2\, d\tau}\; dR,$$

$$\overline{<} (\text{endl. Zahl} \cdot R^{\frac{3}{2}} + \text{endl. Zahl} \cdot R^{\frac{7}{2}})\, L_p^j,$$

also:

$$|F_j| < \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}},$$

wenn $\mathfrak{r}$ die kleinste Entfernung des Punktes $(x\,y\,z)$ von ω ist. Ferner ist wegen der Formeln:

$$u_j = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

in dem Punkte $(x\,y\,z)$:

$$\text{abs. Max. } (\pi_j\,\chi_j\,\varrho_j) \overline{\overline{<}} \text{ abs. Max. } F_j + \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\sqrt{\mathfrak{r}}},$$

somit, wenn wir mit C_j den absolut größten Wert von $\pi_j\,\chi_j\,\varrho_j\,\sigma_j$ in $(x\,y\,z)$ bezeichnen:

$$C_j < \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}}}.$$

Andererseits ist nach den Untersuchungen meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie:

abs. $|\sigma_j|_1^2 \overline{\overline{<}}$ endl. Konst. $C_{j-1}\,r_{12}^{\lambda}$, (vgl. diese Ber. 36, S. 80, 1906),

somit

$$C_j \overline{\overline{<}} \text{endl. Konst. } C_{j-1}\,\mathfrak{r}^{\lambda} + \text{endl. Konst. } \frac{L_p^j}{\mathfrak{r}^{\frac{1}{2}}},$$

wobei man für $\mathfrak{r}$ eine beliebig kleine Länge einsetzen kann, hieraus in bekannter Weise, daß C_j, somit auch

70) $$\text{abs. Max. } (\pi_j\,\chi_j\,\varrho_j\,D_1\,\pi_j\,D_1\,\chi_j\,D_1\,\varrho_j) \overline{\overline{<}} A \cdot \bar{L}_p^j,$$

wo A eine endliche, von j unabhängige Konstante, L_p eine Zahl vorstellt, die durch Vergrößerung von p beliebig klein gemacht werden kann.

Ist nun λ^2 eine beliebige, positive, fest gegebene Zahl, so können wir dadurch, daß wir

$$\bar{L}_p \overline{\overline{<}} \frac{L}{\bar{\lambda}^2}$$

machen (L irgend ein echter Bruch), erreichen, daß

71) $$\text{abs. Max. } [\lambda^{2j}\pi_j, \lambda^{2j}\chi_j, \lambda^{2j}\varrho_j, \lambda^{2j}D_1\,\pi_j, \lambda^{2j}D_1\,\chi_j, \lambda^{2j}D_1\,\varrho_j] \overline{\overline{<}} A \cdot L_j$$

wird, und es wird dann tatsächlich in den Reihen:

72) $$\begin{cases} \pi = \pi_0 + \lambda^2\,\pi_1 + \lambda^4\,\pi_2 + \cdots, \\ \chi = \chi_0 + \lambda^2\,\chi_1 + \lambda^4\,\chi_2 + \cdots, \\ \varrho = \varrho_0 + \lambda^2\,\varrho_1 + \lambda^4\,\varrho_2 + \cdots \end{cases}$$

ein mit seinen ersten Ableitungen in τ eindeutiges und stetiges Funktionentripel gegeben, das im Innenraume den Differentialgleichungen:

$$73)\quad \begin{cases} \Delta\pi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + a_2 u_1 + \cdots + a_p u_{p-1}), \\ \Delta\chi + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = -(a_0 f_2 + a_1 v_0 + a_2 v_1 + \cdots + a_p v_{p-1}), \\ \Delta\varrho + k\dfrac{\partial\sigma}{\partial z} = -(a_0 f_3 + a_1 w_0 + a_2 w_1 + \cdots + a_p w_{p-1}) \end{cases}$$

und an der Oberfläche ω den Grenzbedingungen:

$$74)\quad \begin{cases} \pi = 0, \\ \chi = 0, \\ \varrho = 0 \end{cases}$$

genügt.

§ 5.

Wir definieren jetzt die $p+1$ Funktionentripel

$$U\,U'\,U''\ldots U^{(p)},\quad V\,V'\,V''\ldots V^{(p)},\quad W\,W'\,W''\ldots W^{(p)}\text{[1]}$$

durch die dreimal $p+1$ linearen Gleichungen:

$$75)\quad \begin{cases} a_0 U + a_1 U' + a_2 U'' + \cdots + a_p U^{(p)} = \pi, \ \ldots\text{[2]} \\ U - \lambda^2 U' = u_0, \ldots \\ U' - \lambda^2 U'' = u_1, \ldots \\ - - - - - - - - - - - \\ U^{(p-1)} - \lambda^2 U^{(p)} = u_{p-1}; \end{cases}$$

man kann dann zeigen, daß für den Fall des Nichtverschwindens der Determinante dieser Gleichungen:

$$76)\quad \begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ 1 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ = (-\lambda^2)^p a_0 + (-\lambda^2)^{p-1} a_1 + \cdots - \lambda^2 a_{p-1} + a_p, \end{cases}$$

---

[1]) Die Zeichen (j) sollen hier als Indizes stehen.

[2]) Je zwei analoge Gleichungen, die dadurch entstehen, daß man für U bezw. $V\,W$, für π bezw. $\chi\,\varrho$, für u bezw. $v\,w$ schreibt.

die Funktionen $U\,V\,W$ mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω darstellen, die den Differentialgleichungen:

$$77)\quad \begin{cases} \Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U = -f_1, \\ \Delta V + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \lambda^2 V = -f_2, \\ \Delta W + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W = -f_3 \end{cases}$$

und den Grenzbedingungen:

$$78)\quad \begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = 0 \end{cases}$$

genügen. Wir schreiben hierzu die an zweiter bis $p+1^{\text{ter}}$ Stelle stehenden Gleichungen 75) in der Form:

$$79)\quad U^{(j-1)} - \lambda^2 U^{(j)} - u_{j-1} = 0, \ldots \quad (j = 1,[1]\ 2 \ldots p)$$

und folgern hieraus durch die Operationen

$$\Delta + k\frac{\partial \theta}{\partial x},\quad \Delta + k\frac{\partial \theta}{\partial y},\quad \Delta + k\frac{\partial \theta}{\partial z},$$

daß:

$$80)\quad \left.\begin{cases} \Delta U^{(j-1)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(j-1)}}{\partial x} - \lambda^2\left(\Delta U^{(j)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(j)}}{\partial x}\right) \\ \qquad + u_{j-2}{}^{2)} = 0, \\ \Delta V^{(j-1)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(j-1)}}{\partial y} - \lambda^2\left(\Delta V^{(j)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(j)}}{\partial y}\right) \\ \qquad + v_{j-2} = 0, \\ \Delta W^{(j-1)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(j-1)}}{\partial z} - \lambda^2\left(\Delta W^{(j)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(j)}}{\partial z}\right) \\ \qquad + w_{j-2} = 0. \end{cases}\right|\ j = 1, 2 \ldots p$$

---

[1]) Im Falle $j = 1$ steht $U^{(j-1)}\,V^{(j-1)}\,W^{(j-1)}$ für $U\,V\,W$.

[2]) Im Falle $j = 1$ steht $u_{j-2}\,v_{j-2}\,w_{j-2}$ für $f_1\,f_2\,f_3$.

Während nun die an erster Stelle stehenden Gleichungen 75) mit Rücksicht auf die Gleichungen 73) die Relationen liefern:

$$
81^a)\quad \begin{cases}
a_0\left\{\Delta U \;\;+ k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U \;\;+ f_1\right\} \\
+ a_1\left\{\Delta U' \;+ k\dfrac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' \;+ u_0\right\} \\
+ a_2\left\{\Delta U'' + k\dfrac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1\right\} + \cdots \\
+ a_p\left\{\Delta U^{(p)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1}\right\} = 0, \ldots
\end{cases}
$$

folgen, wenn man die Gleichungen 79) mit λ^2 multipliziert und bezw. zu 80) addiert, die folgenden Gleichungen, die wir für $j = 1, 2 \ldots p$ explicite hinschreiben:

$$
81^b)\quad \begin{cases}
\Delta U + k\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1 \\
\quad - \lambda^2\left(\Delta U' + k\dfrac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0\right) = 0, \ldots \\
\Delta U' + \dfrac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0 \\
\quad - \lambda^2\left(\Delta U'' + k\dfrac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1\right) = 0, \ldots \\
- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\
\Delta U^{(p-1)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(p-1)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p-1)} + u_{p-2} \\
\quad - \lambda^2\left(\Delta U^{(p)} + k\dfrac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1}\right) = 0, \ldots
\end{cases}
$$

Die Gleichungen 81 a) und 81 b) bilden zusammen ein System von dreimal $p + 1$ linearen, homogenen Gleichungen in Bezug auf die dreimal $p + 1$ Größen:

$$\Delta U + k\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 U + f_1, \quad \Delta U' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \lambda^2 U' + u_0,$$

$$\Delta U'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial x} + \lambda^2 U'' + u_1, \ldots \Delta U^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial x} + \lambda^2 U^{(p)} + u_{p-1};$$

$$\Delta V + k\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \lambda^2 V + f_2, \quad \Delta V' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial y} + \lambda^2 V' + v_0,$$

$$\Delta V'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial y} + \lambda^2 V'' + v_1, \ldots \Delta V^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial y} + \lambda^2 V^{(p)} + v_{p-1};$$

$$\Delta W + k\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \lambda^2 W + f_3, \quad \Delta W' + k\frac{\partial \Theta'}{\partial z} + \lambda^2 W' + w_0,$$

$$\Delta W'' + k\frac{\partial \Theta''}{\partial z} + \lambda^2 W'' + w_1, \ldots \Delta W^{(p)} + k\frac{\partial \Theta^{(p)}}{\partial z} + \lambda^2 W^{(p)} + w_{p-1}.$$

Ist ihre Determinante D (76) $\neq 0$, so müssen sie einzeln verschwinden; im Besonderen genügen also $U\,V\,W$ den Differentialgleichungen 77).

Nach den Definitionsgleichungen 75) sind $U\,V\,W$ in der Form darstellbar:

$$\text{82)} \quad \begin{cases} U = \dfrac{P}{D}, \\ V = \dfrac{Q}{D}, \\ W = \dfrac{R}{D}, \end{cases}$$

wenn:

$$\text{83)} \quad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} \pi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ Q = \begin{vmatrix} \chi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ v_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ v_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \\ R = \begin{vmatrix} \varrho & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ w_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ w_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ w_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Formeln 82) stellen in jedem Falle die Lösungen unseres Hauptproblems dar, falls nicht λ^2 gerade eine Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

ist; dieser Ausnahmefall bedarf einer besonderen Diskussion.

§ 6.

Wir haben λ^2 bisher als eine bestimmte, festgegebene positive Zahl betrachtet, wir wollen jetzt λ^2 als eine beliebige, positive Zahl unterhalb dieser festen Zahl auffassen. Die Funktionen $\pi \chi \varrho$, somit auch $P\,Q\,R$ sind in allen diesen Fällen mit ihren ersten Ableitungen (nach $x\,y\,z$) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes von ω; dagegen wachsen die Lösungen $U\,V\,W$ unseres Hauptproblems ins Unendliche, wenn sich λ^2 einer Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

unendlich nähert und nicht etwa gleichzeitig auch P bezw. $Q\,R$ zu Null konvergieren.

Die Wurzeln

$$\lambda_1^2\, \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2 \qquad (< \lambda^2)$$

der Gleichung:

$$D = 0$$

werden somit Pole der Funktionen $U\,V\,W$ in Bezug auf die Variable λ^2 sein, falls dieselben nicht Nullstellen für P bezw. $Q\,R$ sind.

Unsere wesentliche Aufgabe wird daher jetzt sein, das Verhalten der Funktionen $P\,Q\,R$ an den Stellen

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\, \lambda_2^2,\, \ldots\, \lambda_p^2$$

zu untersuchen. Es folgt aus 83):

$$\varDelta P = \begin{vmatrix} \varDelta \pi & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ \varDelta u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \varDelta u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ \varDelta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \ldots$$

und:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta P + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) \\ +\lambda^2 P \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} -(a_0 f_1 + a_1 u_0 + a_0 u_1 + \cdots + a_p u_{p-1}) & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} & a_p \\ -f_1 + \lambda^2 u_0 & -\lambda^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -u_0 + \lambda^2 u_1 & 1 & -\lambda^2 & \ldots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -u_{p-2} + \lambda^2 u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda^2 \end{vmatrix}, \ldots$$

oder:

$$84) \quad \begin{cases} \Delta P + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) + \lambda^2 P = -f_1 D, \\ \Delta Q + k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) + \lambda^2 Q = -f_2 D, \\ \Delta R + k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) + \lambda^2 R = -f_3 D. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Werte von $P\,Q\,R$ für

$$\lambda^2 = \lambda_j^2 \qquad (j = 1, 2 \ldots p)$$

mit $P_j\,Q\,R_j$, so folgt:

$$85) \quad \begin{cases} \Delta P_j + k\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right) = -\lambda_j^2 P_j, \\ \Delta Q_j + k\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right) = -\lambda_j^2 Q_j, \\ \Delta R_j + k\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_j}{\partial y}+\dfrac{\partial R_j}{\partial z}\right) = -\lambda_j^2 R_j. \end{cases}$$

Definition. Wir bezeichnen als elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω 3 mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle des Innenraumes $U_j\,V_j\,W_j$, welche in demselben den Differentialgleichungen genügen:

$$86^a) \quad \begin{cases} \Delta U_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} + \lambda_j^2 U_j = 0, \\ \Delta V_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} + \lambda_j^2 V_j = 0, \\ \Delta W_j + k\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} + \lambda_j^2 W_j = 0, \end{cases}$$

den Grenzbedingungen:

86^b)
$$\begin{cases} U_j = 0, \\ V_j = 0, \\ W_j = 0 \end{cases}$$

und der Beziehung:

86^c)
$$\int_i (U_j^2 + V_j^2 + W_j^2)\, d\tau = 1;$$

λ_j^2 bezeichnen wir als die dem elastischen Funktionentripel $U_j V_j W_j$ zugehörige Zahl.

Wir können nach dieser Definition das Resultat 85) auch so aussprechen:

Die Werte, welche PQR für

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2, \ldots \lambda_p^2$$

annehmen, sind entweder identisch Null oder elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω, multipliziert mit von Null verschiedenen Konstanten.

Die Wurzeln λ_j^2, denen elastische Funktionentripel entsprechen, können nicht Doppelwurzeln der Gleichung

$$D = 0$$

sein. Für eine solche Doppelwurzel wäre:

$$\frac{dD}{d\lambda^2} = 0,$$

somit nach 84).

$$\lambda_j^2 P_j = -\Delta P_j - k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z}\right), \ldots$$

$$\Delta\frac{dP_j}{d\lambda^2} + k\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{dP_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dQ_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dR_j}{d\lambda^2}\right\} = -\lambda_j^2\frac{dP_j}{d\lambda^2} - P_j \ldots$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. miteinander, addiert und integriert über den Innenraum, so folgt mit Rücksicht auf die Relation:

$$\int\limits_i \left[P_j\left[\varDelta \frac{dP_j}{d\lambda^2} + k\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{dP_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dQ_j}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dR_j}{d\lambda^2}\right\}\right] + \cdots\right] d\tau$$

$$= \int\limits_i \left[\frac{dP_j}{d\lambda^2}\left[\varDelta P_j + k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z}\right)\right] + \cdots\right] d\tau,$$

daß:

$$\int\limits_i \left[P_j\left[\varDelta P_j + k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z}\right)\right] + \cdots\right] = 0,$$

oder:

$$\int\limits_i \left[(1+k)\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial Q_j}{\partial y} + \frac{\partial R_j}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_j}{\partial y} - \frac{\partial Q_j}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial z} - \frac{\partial R_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_j}{\partial x} - \frac{\partial P_j}{\partial y}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

also:

$$P_j = Q_j = R_j = 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist, daß einer Doppelwurzel λ_j^2 kein elastisches Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht.

Es ist ferner leicht zu ersehen, daß die Wurzeln λ_j^2 der Gleichung

$$D = 0,$$

denen identisch verschwindende $P_j Q_j R_j$ entsprechen, nicht Pole für die Lösungen $U V W$ unseres Hauptproblems sein können, da in diesem Falle, wenn das betreffende λ_j^2 eine m fache Wurzel der Gleichung

$$D = 0$$

ist $(m = 1, 2, \ldots p)$:

$$D = \frac{dD}{d\lambda^2} = \frac{d^2 D}{(d\lambda^2)^2} = \cdots = \frac{d^{m-1} D}{(d\lambda^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{(d\lambda^2)^m} \neq 0$$

$$U = \frac{\dfrac{d^m P}{(d\lambda^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{(d\lambda^2)^m}}, \quad V = \frac{\dfrac{d^m Q}{(d\lambda^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{(d\lambda^2)^m}}, \quad W = \frac{\dfrac{d^m R}{(d\lambda^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{(d\lambda^2)^m}}$$

und $\dfrac{d^m P}{(d\lambda^2)^m}, \dfrac{d^m Q}{(d\lambda^2)^m}, \dfrac{d^m R}{(d\lambda^2)^m}$ an der Stelle $\lambda^2 = \lambda_j^2$ eindeutig und stetig sind.[1]) Wir können das Resultat in folgender Weise zusammenfassen:

II. Bestehen zwischen den successive durch die Gleichungen 24) und 25) definierten Funktionen

$$u_j\; v_j\; w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

keine Relationen von der Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0, \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0, \\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0, \end{aligned}$$

wo p eine endliche Zahl, $\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_p$ reelle, der Gleichung:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1$$

genügende Konstanten vorstellen, so kann man für ein beliebiges

$$\lambda^2 \gtreqless \frac{1}{L_m}, \quad L_m = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{m^2}},$$

wenn m eine beliebig große, fest gegebene Zahl vorstellt, ein Lösungssystem unseres Hauptproblems in der folgenden Form angeben:

$$87)\quad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{X(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \\ V &= \frac{Y(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \\ W &= \frac{Z(\lambda^2, x, y, z)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_n^2)}, \end{aligned} \right| \quad 0^{2)} \leqq n < m,$$

---

[1]) Dies ist ohne weiteres klar für $m = 1$; für $m = 2$ folgt aus 84) und $\frac{dD}{d\lambda^2} = 0$, da nun das betreffende λ_j^2 eine Doppelwurzel der Gleichung $D = 0$ ist:

$$\frac{dP}{d\lambda^2} = 0, \ldots \quad \text{somit:} \quad U = \frac{\frac{d^2 P}{(d\lambda^2)^2}}{\frac{d^2 D}{(d\lambda^2)^2}}, \ldots$$

und so fort, für $m = 3, 4 \ldots$

[2]) Für den Fall $n = 0$ soll die rechte Seite einfach für $X(\lambda^2, x, y, z)$, $Y(\lambda^2, x, y, z)$, $Z(\lambda^2, x, y, z)$ stehen.

wo $\lambda_1^2\ \lambda_2^2 \ldots \lambda_m^2$ bestimmte, von einander verschiedene positive Zahlen $\left(< \frac{1}{L_m}\right)$ sind, XYZ für jeden Wert von λ^2:

$$0 \overline{\overline{<}} \lambda^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{L_m}$$

ein mir ihren ersten Ableitungen in τ eindeutiges und stetiges Funktionentripel darstellen und abgesehen von einem konstanten Faktor für

$$\lambda^2 = \lambda_j^2 \qquad (j = 1, 2 \ldots n)$$

in ein elastisches Funktionentripel des Innenraumes von ω mit zugehöriger Zahl λ_j^2 übergehen.

Die kurze auf den Satz I folgende Betrachtung (S. 367) zeigt uns, daß der Fall:

$$\begin{aligned}\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0,\\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0,\\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0\end{aligned}$$

(p endlich) keinen Ausnahmefall des vorstehenden Satzes darstellt:

Zusatz 1 zu II. Der Satz II gilt in gleicher Weise, auch wenn zwischen den successiven Funktionen:

$$u_j\ v_j\ w_j \qquad (j = 0, 1, 2 \ldots)$$

Relationen von der Form:

$$\begin{aligned}\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p &= 0,\\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p &= 0,\\ \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_p w_p &= 0\end{aligned}$$

(p endlich) bestehen.

Zusatz 2 zu II. Für irgend ein von

$$\lambda_1^2\ \lambda_2^2 \ldots \lambda_n^2$$

verschiedenes λ^2 kann sich eine andere Lösung $U'V'W'$ unseres Hauptproblems von der Lösung 87) nur um Funktionen

$$U' - U,\ V' - V,\ W - W$$

unterscheiden, die selbst ein elastisches Funktionentripel für den Innenraum von ω mit dem betreffenden λ^2 als zugehöriger Zahl bilden.

Dies folgt genau in derselben Weise, wie in dem Spezialfalle S. 369. Die Frage nach der Existenz der Lösungen unseres Hauptproblems wird durch den Satz II vollständig beantwortet, wir wollen uns nun besonders mit den Polen dieser Lösungen und den elastischen Funktionentripeln beschäftigen, welche diesen Polen entsprechen.

§ 7.

III^a). Die einem elastischen Funktionentripel $U_j V_j W_j$ zugehörige Zahl λ_j^2 ist eine reelle, positive, von null verschiedene Zahl.

Der Beweis von III^a) liegt in der Betrachtung S. 359—362.

III^b). Jedes elastische Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht der Ungleichung:

$$\text{abs. Max. } (U_j V_j W_j) \quad \overline{\overline{<}}\; a \cdot \lambda_j^2,$$

wo a eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Konstante vorstellt.

Zum Beweise dieses Satzes braucht man eine Verallgemeinerung der Formeln 137) meiner ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie (diese Ber. 36, S. 80, 1906); man kann nämlich ohne Schwierigkeit auch aus den Formeln 103), 105) und 136) folgern,[1]) daß auch in dem Falle

$$F \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \mp 0$$

die Formeln 136) bestehen. Bedenkt man, daß wegen der Definitionsgleichungen:

[1]) In einer Abhandlung „Sur les équations de l'élasticité", die demnächst in den Ann. de L'Ec. Norm. erscheinen wird, werde ich übrigens etwas ausführlicher auf diese Verallgemeinerung eingehen.

$$\Delta U_j + k\frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = -\lambda_j^2 U_j, \ldots :$$

$$\int_\tau \Theta_j^2\, d\tau \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \lambda_j^2, \quad \int_\tau \mathfrak{U}_j^2\, d\tau \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \lambda_j^2, \ldots$$

und setzt man:

$$C_j = \text{abs. Max. } (U_j V_j W_j),$$

so folgt leicht wegen der Formeln:

$$U_j = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{W}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{V}_j \frac{d\tau}{r}, \ldots :$$

$$C_j \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \frac{\lambda_j}{\sqrt{\mathfrak{r}}} + \text{ endl. Konst. } \mathfrak{r} \cdot \lambda_j^2 C_j, \quad \text{(}\mathfrak{r}\text{ beliebig kleine Länge),}$$

somit die Behauptung, wenn man $\mathfrak{r} = \frac{1}{\lambda_j^2} \times$ einer genügend kleinen, endlichen Konstanten setzt.

III[c]) Setzt man:

$$\text{88}^{a}) \qquad \begin{cases} f_1 = U_j, \\ f_2 = V_j, \\ f_3 = W_j, \end{cases}$$

wo $U_j V_j W_j$ ein elastisches Funktionentripel des Innenraumes von ω, λ_j^2 die zugehörige Zahl vorstellt, so ist:

$$\text{88}^{b}) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = \frac{U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ v &= v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = \frac{V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ w &= w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w^2 + \cdots = \frac{W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{aligned} \right| \quad (\lambda^2 < \lambda_j^2).$$

Denn es ist in diesem Falle:

$$u_0 = \frac{U_j}{\lambda_j^2}, \ldots$$

$$u_1 = \frac{U_j}{\lambda_j^4}, \ldots \qquad \text{und so fort.}$$

$$u_2 = \frac{U_j}{\lambda_j^6}, \ldots$$

Diese Überlegung beweist zugleich den Zusatz:

Zusatz zu III[c]). Setzt man:

$$
89^{a})\qquad \begin{cases} f_1 = a_1\, U_1 + a_2\, U_2 + \cdots + a_p\, U_p, \\ f_2 = a_1\, V_1 + a_2\, V_2 + \cdots + a_p\, V_p, \\ f_3 = a_1\, W_1 + a_2\, W_2 + \cdots + a_p\, W_p, \end{cases}
$$

wo $a_1\, a_2 \ldots a_p$ Konstanten, $U_j\, V_j\, W_j$ $(j = 1, 2, \ldots p)$ p elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω mit den zugehörigen Zahlen $\lambda_1^2\, \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2$ vorstellen, so ist:

$$
89^{b})\qquad \begin{cases} u \equiv u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = \sum_1^p {}_j \dfrac{a_j\, U_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \\ v \equiv v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = \sum_1^p {}_j \dfrac{a_j\, V_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \\ w \equiv w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w_2 + \cdots = \sum_1^p {}_j \dfrac{a_j\, W_j}{\lambda_j^2 - \lambda_j^2}, \end{cases}
$$

solange λ^2 kleiner als die kleinste der Zahlen $\lambda_1^2\, \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2$ und p eine endliche Zahl ist.

III[d]). Es existiert für jede stetig gekrümmte, geschlossene Fläche ω und für jeden Wert von $k > -1$ eine endliche, positive Zahl m von solcher Beschaffenheit, daß, falls p eine beliebige endliche positive ganze Zahl $\overline{\overline{>}}\ m$ vorstellt, die Zahl der überhaupt möglichen, linear unabhängigen elastischen Funktionentripel des Innenraumes von ω mit zugehörigen Zahlen

$$
\lambda_j^2 < \frac{1}{L_p}, \quad L_p = \frac{\text{endl. Konst.}}{\sqrt[3]{p^2}},
$$

$\overline{\overline{<}}\, p$ sein muß.

Man kann nach unseren früheren Resultaten bei genügend großem p die Konstanten $a_1\, a_2 \ldots a_p$ so wählen, daß:

$$
a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2 = 1
$$

und die Reihen 89[b]) für ein beliebiges

$$\lambda^2 < \frac{1}{L_p}$$

konvergent sind. Wären nun alle

$$\lambda_j^2 < \frac{1}{L_p},$$

so würden die Gleichungen:

$$u = \sum_1^p{}^j \frac{a_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$
$$v = \sum_1^p{}^j \frac{a_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \quad \text{des vorangehenden Zusatzes zu III}^{c})$$
$$w = \sum_1^p{}^j \frac{a_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

diesem Resultate widersprechen, es muß somit wenigstens eines der λ_j^2

$$> \frac{1}{L_p}$$

sein, wenn $U_j V_j W_j$ p linear unabhängige elastische Funktionentripel des Innenraumes von ω vorstellen.

Wir können diesem Satze sofort die folgenden Zusätze hinzufügen:

Zusatz 1 zu III^d). Die Anzahl der elastischen Funktionentripel, die von einander linear unabhängig sind und zugehörige Zahlen

$$\lambda_j^2 \leqq m$$

besitzen, wo m eine endliche Zahl vorstellt, ist endlich.

Zusatz 2 zu III^d). Die Anzahl der möglichen, linear unabhängigen elastischen Funktionentripel mit derselben zugehörigen, endlichen Zahl λ_j^2 ist endlich.

III^e). Sind $U_i V_i W_i$ und $U_k V_k W_k$ irgend zwei elastische Funktionentripel mit den von einander verschiedenen zugehörigen Zahlen λ_i^2 und λ_k^2, so ist:

$$\text{90)} \qquad \int_\tau (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau = 0, \quad (\lambda_i^2 \neq \lambda_k^2).$$

Wir multiplizieren zum Beweise die Relationen:

$$\Delta U_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial x} = -\lambda_i^2 U_i,$$

$$\Delta V_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial y} = -\lambda_i^2 V_i,$$

$$\Delta W_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial z} = -\lambda_i^2 W_i$$

bezw. mit $U_k V_k W_k$, addieren und integrieren über den Innenraum, dann folgt:

$$\lambda_i^2 \int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau$$

$$= -\int_i \left[U_k\left(\Delta U_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial x}\right) + V_k\left(\Delta V_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial y}\right) + W_k\left(\Delta W_i + k\frac{\partial \Theta_i}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$

$$= -\int_i \left[U_i\left(\Delta U_k + k\frac{\partial \Theta_k}{\partial x}\right) + V_i\left(\Delta V_k + k\frac{\partial \Theta_k}{\partial y}\right) + W_i\left(\Delta W_k + k\frac{\partial \Theta_k}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$

$$= \lambda_k^2 \int_i (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau;$$

es folgt somit die Gleichung 90), sobald

$$\lambda_i^2 \neq \lambda_k^2.$$

Zusatz zu IIIe.). Können wir drei Funktionen $f_1 f_2 f_3$ der Stelle des Innenraumes, die an der Oberfläche ω verschwinden, in der Form darstellen:

$$91)\qquad \begin{cases} f_1 = C_1\, U_1 + C_2\, U_2 + \cdots, \\ f_2 = C_1\, V_1 + C_2\, V_2 + \cdots, \\ f_3 = C_1\, W_1 + C_2\, W_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo $U_j V_j W_j$ $(j = 1, 2 \ldots)$ elastische Funktionentripel mit von einander verschiedenen Zahlen $\lambda_1^2\, \lambda_2^2 \ldots$ vorstellen, so müssen die Konstanten C_j die Werte haben:

$$92)\qquad C_j = \int_i (f_1\, U_j + f_2\, V_j + f_3\, W_j)\, d\tau, \quad (j = 1, 2 \ldots).$$

Wir haben zum Beweise nur die Formeln 91) bezw. mit $U_i V_i W_i$ zu multiplizieren, zu addieren und über den Innenraum zu integrieren, schließlich die Formeln

$$\int_\tau (U_i U_k + V_i V_k + W_i W_k)\, d\tau = 0, \quad (i \neq k)$$

$$\int_\tau (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2)\, d\tau = 1$$

zu beachten.

Die Frage, unter welchen Bedingungen wir vorgelegte Funktionentripel $f_1 f_2 f_3$ nach elastischen Funktionentripeln entwickeln können, soll uns in dem folgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 8.

Die Untersuchung, welche uns zu dem Satze II. führte, hat uns gelehrt, daß jedem Pole λ_j^2 der Lösungen unsers Hauptproblems:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} + \lambda^2 U &= -f_1, \\ \Delta V_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} + \lambda^2 V &= -f_2, \\ \Delta W_j + k \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} + \lambda^2 W &= -f_3, \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau$$

$$U = V = W = 0, \quad \text{an } \omega$$

(für $0 < \lambda^2 < \frac{1}{L_p}$, wo p eine endliche, im übrigen beliebig große positive Zahl vorstellt), ein elastisches Funktionentripel $U_j V_j W_j$ entspricht, und daß die Anzahl dieser Pole höchstens $= p$ ist.

Wir definieren nun die Funktionen $R_p S_p T_p$ durch die Gleichungen:

$$93) \quad \left\{\begin{aligned} R_p &= f_1 - C_1 U_1 - C_2 U_2 - \cdots - C_p U_p, \\ S_p &= f_2 - C_1 V_1 - C_2 V_2 - \cdots - C_p V_p, \\ T_p &= f_3 - C_1 W_1 - C_2 W_2 - \cdots - C_p W_p, \end{aligned}\right.$$

wo:

94) $C_j = \int\limits_\tau (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau, \ (j = 1, 2 \ldots n, \ 0 \overline{\overline{<}} n \overline{\overline{<}} p),$

entsprechend den n Polen von UVW im Intervalle

$$0 < \lambda^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{L_p}$$

während

95) C_j[1] $= 0, \quad (j = n + 1, n + 2, \ldots p)$

sein soll, und wir wollen jetzt von den Funktionen $f_1 f_2 f_3$ voraussetzen, daß sie an der Oberfläche ω verschwinden und in τ eindeutig und stetig sind mit ihren ersten Ableitungen, während ihre zweiten Ableitungen endlich und integrabel vorausgesetzt werden sollen.

Es gilt dann gleiches auch für die Funktionen $R_p S_p T_p$.[2]) Wir werden von dem Ausdruck

$$\int\limits_\tau (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\, d\tau$$

zunächst nachweisen, daß er durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

---

[1]) Mit der Festsetzung, daß auch

$$C_j U_j = C_j V_j = C_j W_j = 0 \quad (j = n + 1, n + 2, \ldots p).$$

[2]) Der Beweis, daß die zweiten Ableitungen von $U_j V_j W_j$ stetig sind, folgt daraus, daß man in dem in der ersten Abhandlung zur Elastizitätstheorie behandelten allgemeinen Gleichgewichtsprobleme die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u v w$ stets beweisen kann, falls $f_1 f_2 f_3$ von der Art stetig sind:

$$\text{abs.} \left| f_j \right|_1^2 < \text{endl. Konst.}\, r_{12}^\lambda, \ldots, \ 0 < \lambda < 1.$$

Eine ausführliche Behandlung dieser Dinge wird in meiner demnächst in den Ann. de l'Ec. Norm. erscheinenden Arbeit: Sur les équations de l'élasticité gegeben. Für den Beweis der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $u v w$ ist allerdings noch die Bedingung hinzuzufügen, daß die ersten Ableitungen der Richtungskosinusse der inneren Normalen $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auch von der Art stetig sind:

$$\text{abs.} \left| D_1 \cos(\nu x) \right|_1^2 < \text{endl. Konst.}\, r_{12}^\lambda, \ldots, \ 0 < \lambda < 1.$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Lösungen $u\,v\,w$ des folgenden Problems:

$$96)\quad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \lambda^2 u = -R_p, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \lambda^2 v = -S_p, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \lambda^2 w = -T_p, \\ u = v = w = 0, \quad \text{an } \omega, \end{cases}$$

welche wir analog der zu dem Satze II. führenden Untersuchung zu finden imstande sind, und wir wollen zunächst zeigen, daß die früheren Werte

$$\lambda^2 = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2, \ldots \lambda_n^2$$

nicht Pole des Funktionentripels $u\,v\,w$ sein können.

Multiplizieren wir die erste Gleichung 96) mit U_j, die zweite mit V_j, die dritte mit W_j, addieren und integrieren über den Innenraum, so folgt mit Rücksicht auf

$$\int_i \left[U_j\left(\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + V_j\left(\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + W_j\left(\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] d\tau$$
$$= -\lambda_j^2 \int_i (u\,U_j + v\,V_j + w\,W_j)\,d\tau$$

und

$$\int_i (R_p\,U_j + S_p\,V_j + T_p\,W_j)\,d\tau = 0,$$

daß:

$$97)\quad (\lambda^2 - \lambda_j^2)\int_i (u\,U_j + v\,V_j + w\,W_j)\,d\tau = 0,$$
$$(j = 1, 2 \ldots n).$$

Ist λ_1^2 das kleinste λ_j^2, so ist, wenn wir $u_j\,v_j\,w_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ durch die Gleichungen definieren:

$$
98) \quad \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial x} = -R_p, \\[2ex]
\Delta v_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial y} = -S_p, \\[2ex]
\Delta w_0 + k\dfrac{\partial \theta_0}{\partial z} = -T_p; \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
\Delta u_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial x} = -u_{j-1}, \\[2ex]
\Delta v_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial y} = -v_{j-1}, \\[2ex]
\Delta w_j + k\dfrac{\partial \theta_j}{\partial z} = -w_{j-1},
\end{array}\right\} j = 1, 2 \ldots
\end{array}\right\} \text{ in } \tau, \\[2ex]
u_j = v_j = w_j = 0, \text{ an } \omega, \quad (j = 0, 1, 2 \ldots),
\end{array}\right.
$$

$$
99) \quad \left\{\begin{array}{l}
u = u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^4 u_2 + \cdots = U - \sum_1^n {}_j \dfrac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\[2ex]
v = v_0 + \lambda^2 v_1 + \lambda^4 v_2 + \cdots = V - \sum_1^n {}_j \dfrac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\[2ex]
w = w_0 + \lambda^2 w_1 + \lambda^4 w_2 + \cdots = W - \sum_1^n {}_j \dfrac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}.
\end{array}\right.
$$

Nun ist nach Satz II:

$$
100) \quad \left\{\begin{array}{l}
U = \dfrac{\gamma_1 U_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + U', \\[2ex]
V = \dfrac{\gamma_1 V_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + V', \\[2ex]
W = \dfrac{\gamma_1 W_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + W',
\end{array}\right.
$$

wo γ_1 eine Konstante, U' V' W' Größen darstellen, die auch für $\lim (\lambda_1^2 - \lambda^2) = 0$ endlich bleiben; es folgt somit aus 99):

$$u = (\gamma_1 - C_1)\frac{U_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + U' - \sum_2^n{}_j \frac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$
$$v = (\gamma_1 - C_1)\frac{V_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + V' - \sum_2^n{}_j \frac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$
$$w = (\gamma_1 - C_1)\frac{W_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + W' - \sum_2^n{}_j \frac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2},$$

oder

101)
$$\begin{cases} (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, u = (\gamma_1 - C_1)\, U_1 + \varepsilon_1, \\ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, v = (\gamma_1 - C_1)\, V_1 + \varepsilon_2, \\ (\lambda_1^2 - \lambda^2)\, w = (\gamma_1 - C_1)\, W_1 + \varepsilon_3, \end{cases}$$

wo $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ durch Verkleinerung von $(\lambda_1^2 - \lambda^2)$ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Es folgt hieraus mit Benützung von 97) — diese Gleichung gilt, wie nahe wir auch λ^2 an λ_1^2 heranrücken lassen — durch Übergang zur Grenze $\lim (\lambda_1^2 - \lambda^2) = 0$:

$$\gamma_1 - C_1 = 0$$

und

102)
$$\begin{cases} u = U' - \sum_2^n{}_j \dfrac{C_j U_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ v = V' - \sum_2^n{}_j \dfrac{C_j V_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \\ w = W' - \sum_2^n{}_j \dfrac{C_j W_j}{\lambda_j^2 - \lambda^2}, \end{cases}$$

wo $U'\, V'\, W'$ endlich bleiben, wie nahe wir auch λ^2 an λ_1^2 heranrücken lassen.

Die Stelle $\lambda^2 = \lambda_1^2$ ist somit kein Pol für die Lösungen $u\, v\, w$, dieselben können überhaupt keinen Pol $\overline{\overline{<}}\, \lambda_1^2$ haben. Die Reihe 99) konvergieren hiernach nicht blos für alle Werte von λ^2, die kleiner als λ_1^2 sind, sondern für alle λ^2, die kleiner sind, als das nächstgrößere λ_2^2; wir können nun in analoger Weise weiterschließen und finden, daß die Reihen 99) für alle λ^2, deren Wert $\overline{\overline{<}}\, \dfrac{1}{L_p}$ ist, konvergiert; wir können aus dieser Konvergenz schließen, es ist:

103)
$$\frac{\int\limits_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\,d\tau}{\int\limits_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau} \leqq L_p^2;$$

es bestehen nämlich nach einer früheren Betrachtung die Ungleichungen:

$$\frac{\int\limits_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\,d\tau}{\int\limits_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau} \leqq \frac{\int\limits_i (u_1^2+v_1^2+w_1^2)\,d\tau}{\int\limits_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\,d\tau} \leqq \frac{\int\limits_i (u_2^2+v_2^2+w_2^2)\,d\tau}{\int\limits_i (u_1^2+v_1^2+w_1^2)\,d\tau} \leqq \cdots;$$

wäre nun:

$$\frac{\int\limits_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\,d\tau}{\int\limits_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau} > L_p^2,$$

so würde hieraus folgen:

$$\lambda^{4j}\int\limits_i (u_j^2+v_j^2+w_j^2)\,d\tau > (\lambda^2 L_p)^{2j}$$

und das würde der Konvergenz der Reihen 99) für $\lambda^2 = \frac{1}{L_p}$ widersprechen. Wir haben damit tatsächlich die Ungleichung 103) bewiesen.

Es ist nun andererseits:

$$\int\limits_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau$$
$$= -\int\limits_i \left[R_p\left(\Delta u_0 + k\frac{\partial\theta_0}{\partial x}\right) + S_p\left(\Delta v_0 + k\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\right) + T_p\left(\Delta w_0 + k\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\right)\right] d\tau,$$
$$= \int\limits_i [(1+k)\,\tau_p\,\theta_0 + \pi_p\,\mathfrak{u}_0 + \chi_p\,\mathfrak{v}_0 + \varrho_p\,\mathfrak{w}_0]\,d\tau,$$

wo:

104)
$$\tau_p = \frac{\partial R_p}{\partial x} + \frac{\partial S_p}{\partial y} + \frac{\partial T_p}{\partial z},\quad \pi_p = \frac{\partial T_p}{\partial y} - \frac{\partial S_p}{\partial z},\quad \chi_p = \frac{\partial R_p}{\partial z} - \frac{\partial T_p}{\partial x},$$
$$\varrho_p = \frac{\partial S_p}{\partial x} - \frac{\partial R_p}{\partial y},$$

somit:

105)
$$\int\limits_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau$$
$$\leqq \sqrt{\int\limits_i [(1+k)\tau_p^2+\pi_p^2+\chi_p^2+\varrho_p^2]\,d\tau \int\limits_i [(1+k)\theta_0^2+\mathfrak{u}_0^2+\mathfrak{v}_0^2+\mathfrak{w}_0^2]\,d\tau}$$

oder, da:

$$\int_i [(1+k)\,\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2]\,d\tau = +\int_i [u_0 R_p + v_0 S_p + w_0 T_p]\,d\tau,$$

$$\overline{\overline{<}}\sqrt{\int_i (u_0^2+v_0^2+w_0^2)\,d\tau \int_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau},$$

$$\overline{\overline{<}}\, L_p \int_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)\,d\tau, \text{ nach 103)},$$

so folgt aus 105):

106) $$\int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\,d\tau \overline{\overline{<}} L_p \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau.$$

Es ist nun weiter nach 93):

107) $$\int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau$$

$$= \int_i [(1+k)\tau^2 + \mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2 - \lambda_1^2 C_1^2 - \lambda_2^2 C_2^2 - \cdots - \lambda_n^2 C_n^2]\,d\tau \overline{\overline{>}} 0,$$

wo:

108) $$\tau = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},\quad \pi = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\quad \chi = \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\quad \varrho = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Diese stets positive Größe 107) nimmt nach der soeben abgeleiteten Ungleichung mit wachsendem p fortdauernd ab, so daß, wie groß auch p sein möge:

109) $$\int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau$$

$$\overline{\overline{<}} \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \pi^2 + \chi^2 + \varrho^2]\,d\tau,$$

somit folgt nach 106):

110) $$\int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)\,d\tau \overline{\overline{<}} L_p \int_i [(1+k)\,\tau^2 + \pi^2 + \chi^2 + \varrho^2]\,d\tau.$$

Diese Formel beweist die Behauptung, daß das Integral:

$$\int_i (R_p^2 + S_p^2 + T_p^2)$$

durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir wollen nun aber auch zeigen, daß die Funktionen

$R_p S_p T_p$ durch Vergrößerung von p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Es ist:

$$111)\quad \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau$$
$$\overline{\gtrless} \sqrt{\int_i (R_p^2+S_p^2+T_p^2)dt \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\Delta S_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\Delta T_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial z}\right)^2\right] d\tau},$$

und da:

$$112)\quad \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau$$
$$= \int_i \left[\left(\Delta f_1 + k\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau - \lambda_1^4 C_1^2 - \lambda_2^4 C_2^2 - \cdots - \lambda_n^4 C_n^2 \overline{\gtrless} 0$$

eine mit wachsendem p stets abnehmende Größe, also:

$$113)\quad \int_i \left[\left(\Delta R_p + k\frac{\partial \tau_p}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau \overline{\lessgtr} \int_i \left[\left(\Delta f_1 + k\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau$$

ist, so folgt aus 111) und 106):

$$114)\quad \int_i [(1+k)\,\tau_p^2 + \pi_p^2 + \chi_p^2 + \varrho_p^2]\,d\tau < \text{endl. Konst. } L_p.$$

Wir bemerken weiter, daß nach 112) die Reihe:

$$\lambda_1^4 C_1^2 + \lambda_2^4 C_2^2 + \cdots$$

konvergiert, und daß, wenn wir mit $\overline{F}$ eine der vier Größen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n) + \frac{\partial}{\partial z}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n) - \frac{\partial}{\partial z}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n) - \frac{\partial}{\partial x}(C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots + C_n W_n),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_n V_n) - \frac{\partial}{\partial y}(C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots + C_n U_n)$$

bezeichnen:

$$\int\limits_{\tau} \Delta F^2 \, d\tau \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \lambda_p^2;$$

da nun, wenn wir mit F eine der vier Größen $\tau_p \pi_p \chi_p \varrho_p$ bezeichnen, (man vgl. die analoge Untersuchung auf S. 375):

$$F \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \sqrt{\frac{L_p}{\mathrm{r}^3}} + \text{endl. Konst. } \sqrt{\mathrm{r}}\, \lambda_p + \text{endl. Konst.},$$

wo r eine beliebig kleine Länge sein kann, so ergiebt sich, wenn wir:

$$\mathrm{r} = \text{endl. Konst. } \frac{1}{\lambda_p}$$

setzen:

115) $$\text{abs. Max. } (\tau_p \pi_p \chi_p \varrho_p) \overline{\gtrless} \text{ endl. Konst. } \frac{1}{\sqrt[4]{L_p}}.$$

Es bestehen nun die Formeln:

116) $$R_p = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\tau} \tau_p \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\tau} \varrho_p \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\tau} \chi_p \frac{d\tau}{r}, \ldots$$

Sei $(x\,y\,z)$ irgend ein Punkt in τ, wir konstruieren wieder um denselben, ähnlich wie S. 375, eine Kugel mit dem Radius r, bezeichnen das Gebiet, das τ und diese Kugel gemein haben, mit τ_1, dann ist:

117ᵃ) $$\left\{\begin{aligned} |R_p^{\tau_1}| &< \text{endl. Konst. abs. Max. } (\tau_p \varrho_p \chi_p) \int\limits_{\tau_1} \frac{d\tau}{r^2}, \\ &\overline{\gtrless} \frac{\text{endl. Konst. r}}{\sqrt[4]{L_p}}, \text{ mit Rücksicht auf 115),} \end{aligned}\right.$$

wenn wir durch Hinzufügung des Index τ_1 andeuten, daß in 116) die Integrale rechts nur über τ_1 erstreckt werden sollen, ferner:

117) $$\left\{\begin{aligned} |R_p^{\tau-\tau_1}| &< \text{endl. Konst.} \sqrt{\int\limits_{\tau-\tau_1} \frac{d\tau}{r^4} \cdot \int\limits_{\tau-\tau_1} (\tau_p^2 + \varrho_p^2 + \chi_p^2)\, d\tau}, \\ &\overline{\gtrless} \text{ endl. Konst.} \sqrt{\frac{L_p}{\mathrm{r}}}, \text{ mit Rücksicht auf 114).} \end{aligned}\right.$$

Somit folgt:

118) $$|R_p| \overline{\overline{<}} \frac{c_1}{\sqrt[4]{L_p}} \mathfrak{r} + c_2 \sqrt{\frac{L_p}{\mathfrak{r}}},$$

wo c_1 und c_2 endliche Konstanten sind.

Setzen wir daher:

119) $$\mathfrak{r} = \sqrt{L_p}$$

so ergiebt sich:

120) $$|R_p| \overline{\overline{<}} c \sqrt[4]{L_p}, \ldots$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt.

Wir erhalten das Resultat:

IV. Jedes Tripel von Funktionen $f_1 f_2 f_3$, die an ω verschwinden, in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und für welche die Ausdrücke:

$$\Delta f_1 + k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right),$$
$$\Delta f_2 + k \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right),$$
$$\Delta f_3 + k \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right),$$

endlich und integrabel sind, kann in Reihen entwickelt werden, die nach den elastischen Funktionentripeln $U_j V_j W_j$ fortschreiten:

$$f_1 = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots,$$
$$f_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots,$$
$$f_3 = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots,$$

Dabei sind die Konstanten dieser Entwicklungen:

$$C_j = \int_\tau (f_1 U_j + f_2 V_j + f_3 W_j)\, d\tau.$$

Berichtigungen zu der Abhandlung:

Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen. (Diese Ber. B. 31, S. 3.)

S. 6, Zeile 8 von unten lies:

„größer als echter Bruch $\times r_{12}$“ statt „kleiner als r_{12}“

Anm. [2]) ist fortzulassen.

S. 9, Zeile 16 von oben lies:

„endl. Konst abs. Max. $H \cdot r_{12}$ statt „2 abs. Max. $H \cdot r_{12}$“.

Berichtigung zu der Abhandlung I. (Diese Ber. B. 31, S. 37.)

S. 53, in Formel 36) lies: $r_{12}^{\lambda j}$ statt r_{12}.

S. 56, Zeile 12 und 13 von unten lies: „die“ statt „deren erste Ableitungen“;

in Formel 45 lies: $\left| \Xi_j \right|_1^2$ statt $\left| \frac{\partial \Xi_j}{\partial h} \right|_1^2$;

Zeile 9 von unten ist: „h eine beliebige tangentiale Richtung“, zu streichen.