BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über approximative Nomographie. IV

Herrn Otto Haupt zum 75. Geburtstag gewidmet

Von Georg Aumann in München

Mit einer Figur

Vorgelegt am 4. Mai 1962

1. In einer demnächst erscheinenden Arbeit [1] habe ich gezeigt, daß die Eigenschaft einer Überdeckung $\bigcup_q A_q$ einer endlichen Menge M mit Mengen A_q ein A-Geflecht zu sein (s. [2], S. 29) nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist dafür, daß durch jede „ausgeglichene Verwandte" $g|M$ der Funktion $f|M$ (s. [2]) das Problem, f durch eine Linearkombination der charakteristischen Funktionen t_q der A_q im Sinne einer Tschebyscheffschen Approximation zu approximieren, gelöst wird.

Inzwischen hat sich gezeigt, daß viele für die Praxis bedeutungsvolle Überdeckungen keine A-Geflechte sind, auch nicht jenes, welches zum Approximationsproblem

$$a_{ijk} \sim x_{ij} + y_{jk} + z_{ki} \tag{1}$$

(a_{ijk} gegeben, x_{ij}, y_{jk}, z_{ki} gesucht) gehört und von welchem in [2] in Aussicht gestellt wurde, daß es sich wohl als A-Geflecht erweisen würde.

Im folgenden möchte ich noch einige Beispiele von A-Geflechten und von Überdeckungen, die keine A-Geflechte sind, bringen und abschließend eine Bemerkung über konvexe Funktionen mehrerer Veränderlichen hinzufügen, die einen plausiblen Grund enthält dafür, daß die Methode der „alternierenden Symmetrisierung" nur in besonderen Fällen als wirkungsvoller Lösungsalgorithmus für das oben genannte Approximationsproblem in Frage kommt.

2. Unter Bezugnahme auf die Definitionen in [2] gilt

Satz. *Jede Überdeckung* $\bigcup_q A_q = M$ *einer endlichen Menge* M, *bei der jeder Punkt von* M *höchstens zwei Mengen* A_q *angehört, ist ein* A*-Geflecht.*

Beweis. Zur gegebenen Wechselfunktion $\sigma \mid M$ bestimmen wir eine Einengung, zu der sich in einfacher Weise eine zugehörige Funktion s, wie sie der Hauptsatz von [2] verlangt, bestimmen läßt.

1) Wir beginnen mit einem Punkt x_0 mit $\sigma(x_0) = +1$. Er liegt auf einer Menge A_0 und auf A_0 ein zweiter Punkt x_1 mit $\sigma(x_1) = -1$. Gehört x_1 einer von A_0 verschiedenen Überdeckungsmenge, etwa A_1, an, so finden wir auf A_1 einen Punkt x_2 mit $\sigma(x_2) = +1$, usw. Das Verfahren endet mit einem letzten Punkt x_l, wobei entweder (Fall A) x_l nur der einen Überdeckungsmenge A_{l-1} angehört, oder x_l auch einer Menge A_l angehört, die mit einer früheren Menge A_i, $i < l$, identisch ist. Fällt dabei x_l mit x_i bzw. x_{i+1} zusammen (Fall B), so haben wir in $x_i x_{i+1} \ldots x_l$ bzw. $x_{i+1} x_{i+2} \ldots x_l$ ein geschlossenes Polygon mit alternierenden σ-Werten und mit je in einem A_q gelegenen Seiten. Die Einengung von $\sigma \mid M$ auf die Ecken dieses Polygons ergibt bereits eine Funktion s der verlangten Art. Wenn aber x_l von x_i und x_{i+1} verschieden ist, so stehen wir vor zwei Möglichkeiten: Entweder $\sigma(x_l) = \sigma(x_i)$ (Fall C), dann ist $x_{i+1} \ldots x_l$ ein geschlossenes Polygon wie im Falle B, oder wir haben $\sigma(x_l) = -\sigma(x_i)$ (Fall D).

2) Im Fall A benennen wir um: $x_l = y_0, \ldots, x_0 = y_l$, und im Falle D gemäß $x_{i+2} = y_0, \ldots, x_l = y_{l-i-2}$, $x_i = y_{l-i-1}, \ldots, x_0 = y_{l-1}$, und setzen die Kette $y_0 \ldots y_l$ bzw. $y_0 \ldots y_{l-1}$ nach der in 1) beschriebenen Art fort, bis wir wieder mit einem letzten Punkt $y_{l'}$ auf einen der Fälle A bis D stoßen. Die Fälle B und C erledigen sich dabei wie in 1).

Tritt nun etwa der Fall A ein, so haben wir, die Fallunterscheidung von 1) mitberücksichtigend, die Möglichkeiten:

AA: Hier liefert die Einengung von σ auf die von unserem Verfahren berührten Punkte eine Funktion s;

DA: Hier wählen wir $s = \sigma$ auf der zur Fortsetzung der y-Kette gehörigen „Schleife" und $s = 2\sigma$ auf den restlichen von unserem Verfahren betroffenen Punkten.

3) Tritt aber bei der Fortsetzung der y-Kette der Fall D ein, so ergeben sich die Möglichkeiten AD, die wie der Fall DA von oben behandelt wird, oder der Fall DD. Hier müssen wir zwei Möglichkeiten in Betracht ziehen:

(a) Die zur ersten Schleife $x_{i+1} \ldots x_l x_{i+1}$ gehörigen Mengen A_q werden bei der Bildung der zweiten Schleife gar nicht berührt. Dann setzen wir $s = \sigma$ auf den Punkten der beiden Schleifen und $s = 2\sigma$ auf den berührten Punkten außerhalb der beiden Schleifen.

(b) Der letzte Punkt $y_{l'}$ der fortgesetzten y-Kette liegt auf einer der Überdeckungsmengen der ersten Schleife. Drei Fälle bleiben zu betrachten:

(b 1) $y_{l'}$ liegt auf der x_{i+m} und x_{i+m+1} enthaltenden Überdeckungsmenge ($m = 1, \ldots,$ oder $l - i - 1$). Dann ist $x_i = y_{l-i-1}$, $y_{l-1}, \ldots, y_{l'}, x_{i+m}, x_{i+m-1}, \ldots, x_{i+1}, x_i$ ein geschlossenes Polygon der gewünschten Art.

(b 2) $y_{l'} = x_{i+1}$. Dann tut es das Polygon $x_i = y_{l-i-1}, \ldots, y_{l'}, x_i$.

(b 3) $y_{l'}$ ist ein vierterPunkt auf der Überdeckungsmenge, die schon x_i, x_{i+1}, und x_l trägt. Dabei haben wir für σ zweimal den Wert $+1$ und -1. Daher liefert hier die Einengung von σ auf alle berührten Punkte eine Funktion s der verlangten Art.

3. Es gibt aber auch A-Geflechte, bei denen ein Punkt auch mehr als zwei Überdeckungsmengen angehören kann. Wir nennen eine Überdeckung $\bigcup\limits_q A_q = M$ der endlichen Menge M baumartig, wenn es keineFolge von lauter verschiedenen Punkten $x_1 \ldots x_n$ von M gibt, so daß $n > 2$ und je zwei aufeinander folgende Punkte sowie der erste und letzte in je einer Überdeckungsmenge enthalten sind.

Satz. *Jede baumartige Überdeckung einer endlichen Menge ist ein A-Geflecht.*

Beweis. Man kann eine Kette konstruieren, die dem in 2. behandelten Fall AA entspricht.

4. Die Tabelle

1 + 2 —	4 + 5 —	1 — 3 +	4 — 2 +	5 + 3 —
6 — 2 +	3 — 5 +	6 + 5 —	6 + 2 —	3 + 2 —
3 — 6 +	3 + 4 —	3 + 6 —	6 — 4 +	
		1 + 3 —	3 + 2 —	1 — 2 +
1 — 3 +	4 — 5 +	1 + 5 —	3 — 4 +	1 + 5 —

beschreibt eine σ-Funktion auf einer $5 \times 5 \times 6$-Matrix, wobei die Zahl die Stockwerknummer und das dahinter stehende Vorzeichen das Vorzeichen von σ angibt. An allen nicht weiter bezeichneten Plätzen hat σ den Wert 0. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß jede zu σ passende Funktion s identisch verschwindet. Die Säulen in allen drei Richtungen einer dreidimensionalen Matrix bilden also kein A-Geflecht; das Approximationsproblem (1) ist einer Behandlung mittels „alternierender Symmetrisierung" nicht zugänglich.

5. Das Beispiel in 4. kann auch dazu verwendet werden, zu zeigen, daß die zu den „ebenen" Approximationsproblemen

$$a_{ik} \sim x_i + y_k + z_{i+k} \tag{2}$$

$$a_{ik} \sim x_i + y_k + u_{i+k} + v_{i-k} \tag{3}$$

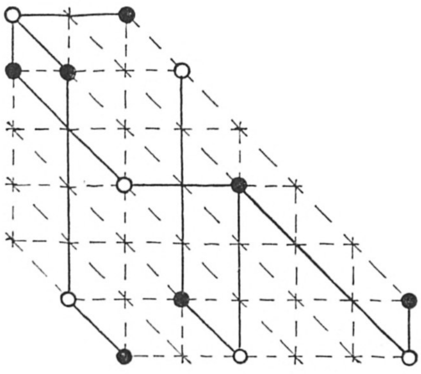
gehörigen Überdeckungssysteme, nämlich das *„Dreiecksnetz" und das „Vierernetz", keine A-Geflechte* darstellen.

Um für (2) eine passende Funktion σ zu erhalten, projizieren wir das Gerüst der obigen dreidimensionalen Matrix so in die Ebene, daß sich die Bilder der senkrechten Säulen und auch die einzelnen Stockwerke nicht überdecken. Die bei der Projektion mitgenommene Funktion σ können wir als eine Wechselfunktion auf einem Dreiecksnetz deuten. Auch jetzt ist jede zu σ gehörige Funktion s Null.

Hat man aber für das Dreiecksnetz eine solche Funktion σ, so gewinnt man daraus eine für das Viererネetz, indem man ein zweites kongruentes Dreiecksnetz nimmt, dieses mit der Funktion $-\sigma$ belegt und so weit in der vierten Richtung parallel verschiebt, daß keine Überdeckung der Netze stattfindet, wo sie Werte $\sigma \neq 0$ tragen. Es entsteht dabei ein Viererネetz mit einer Wechselfunktion, die nur die Lösung $s = 0$ zuläßt.

Dieses hier benutzte Verfahren kann auch dazu dienen, für höher-dimensionale Überdeckungssysteme nachzuweisen, daß sie keine A-Geflechte sind; jedoch erhält man auf diese Weise nicht die einfachsten Gegenbeispiele. Für das Dreiecksnetz zeigt die folgende Figur ein verhältnismäßig einfaches Beispiel einer Wechselfunktion der fraglichen Art (die kreisförmig schwarz bzw. weiß markierten Stellen stellen die Punkte mit $\sigma = +1$ bzw. -1 dar; an allen anderen Stellen ist $\sigma = 0$. Die durchgezogenen Linien verbinden Stellen gleichen Absolutbetrages der zugehörigen Funktion s).

Dreiecksnetz



$f(x, y) \sim a(x) + b(y) + c(x + y)$

6. Die letzten Beispiele zeigen, daß die alternierende Symmetrisierung einen ziemlich beschränkten Anwendungsbereich be-

sitzt. Zur Erklärung dieses Versagens sei auf den folgenden bemerkenswerten Umstand hingewiesen:

Bei den hier in Frage stehenden Approximationsaufgaben handelt es sich um die Minimalisierung der in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_r$ konvexen Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sup\{|f(a) - \sum_q x_q t_q(a)|: a \in M\}.$$

Nun kann es bei nicht stetig differenzierbaren konvexen Funktionen F vorkommen, daß für einen Punkt $(x_1^0, \ldots, x_r^0)$ jede der Funktionen

$$F_i(x) = F(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0\; x, x_{i+1}^0, \ldots, x_r^0)$$

für $x = x_i^0$ ein Minimum besitzt, jedoch F als Funktion aller Veränderlichen im Punkt $(x_1^0, \ldots, x_r^0)$ nicht:

Beispiel: $F(x_1, x_2) = \max\{|2x_1 - x_2|, |x_1 - 2x_2|\}$.

$F(1, x_2)$ und $F(x_1, 1)$ haben beide in $x_2 = 1$ bzw. $x_1 = 1$ ihr Minimum, aber $F(1, 1)$ ist offensichtlich kein Minimalwert von F.

Da die Methode der alternierenden Symmetrisierung aber gerade versucht, das Minimum einer konvexen Funktion zu erreichen durch Wanderung auf koordinatenachsenparallelen Geraden von einem ,,partiellen Minimum" zu einem anderen tiefer liegenden, so wird mit Hinblick auf das beschriebene mögliche Verhalten konvexer Funktionen klar, daß nur in besonderen Fällen diesem Weg ein Erfolg beschieden sein wird.

Literatur:

[1] G. Aumann, Approximation by Step Functions. Erscheint in den Proc. Amer. Math. Soc. 1963.

[2] G. Aumann, Über approximative Nomographie. III. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 1960, 27–34.