

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft I
Januar-März-Sitzung

München 1933

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Kritisch-historische Bemerkungen zur Funktionentheorie.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Februar 1933.

VI. Aus Gauß' Nachlaß.

Nachtrag zu V: Über einen Gaußschen Beweis der Irrationalität von $\tan x$ bei rationalem x).

1. Die am Schlusse meiner oben zitierten Mitteilung V gegebene Anregung¹ zur Wiederauffindung gewisser von Gauß nachgelassener Aufzeichnungen hat weit schneller einen Erfolg gehabt, als ich geglaubt hätte. Herrn Neugebauer von der Universität Göttingen ist es glücklicherweise gelungen, die vermißten Manuskripte in dem Gauß-Archiv wieder aufzufinden, und durch das Entgegenkommen des Archivars der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Herrn Schellenberg, wurde mir die Möglichkeit geboten, auf der Vermittlungsstelle der hiesigen Staatsbibliothek mich mit dem Inhalt eingehend zu beschäftigen. Die kleine, in einem besonderen Umschlage mit der Aufschrift: „Irrationalität der Tangenten rationaler Bogen“ aufgefundene Sammlung besteht aus 7 Stücken, über deren Aussehen und Inhalt ich hier im einzelnen berichten will.

Von den beiden ansehnlichsten, auf Großquartblättern niedergeschriebenen Stücken enthält das eine die sehr saubere Gaußsche Urschrift des in Bd. VIII seiner Werke abgedruckten, in meiner vorigen Mitteilung besprochenen Beweises, das andere eine kalligraphische Abschrift von fremder Hand und mit dem Vermerk: „Gauß 1850. August 20.“ Nach dem Eindruck von Papier und Tinte des Gaußschen Originals zu urteilen, dürfte dieses wesentlich früher entstanden sein als die obige (bisher unbekannte) Abschrift. Dagegen scheint mir aus deren Existenz und Datierung hervorzugehen, daß entgegen meiner früher ausgesprochenen Ansicht vielleicht doch einmal zu jener späteren

¹ Jahrg. 1932, S. 200.

Zeit an eine Veröffentlichung gedacht wurde, die dann schließlich nicht erfolgt ist, wohl aus demselben Grunde, den ich (a. a. O. S. 198) als maßgebend für eine von vornherein mangelnde Absicht der Veröffentlichung vermutet hatte.

Das dritte, auf zweieinhalb Kleinquartseiten geschriebene Stück ist dasjenige, dessen Inhalt bereits von dem ersten Herausgeber am Schlusse seiner Anmerkungen kurz angegeben wurde, und darf wohl als nicht von besonderer Wichtigkeit damit für erledigt gelten.

2. Es folgt nun als viertes und fünftes Stück auf sieben ziemlich eng und trotz einzelnen Korrekturen und angedeuteten Umstellungen ausreichend deutlich von Gauß beschriebenen Kleinoktavseiten die vom ersten Herausgeber erwähnte und im Mittelpunkt unseres Interesses stehende kritische Besprechung der Lambertschen Hauptarbeit, die *in extenso* und genau nach dem Original abgedruckt folgendermaßen lautet:

„In Legendre's *Éléments de Géométrie* ist dem Beweise des Lehrsatzes, daß die Tangente jedes rationalen Bogens irrational ist, die Bemerkung beigelegt (S. 295 in der 7. Ausgabe von 1808), daß die Irrationalität von π (welche nur ein spezieller Fall des allgemeinen Lehrsatzes ist) zuerst von Lambert in den *Mem. de l'Ac. de Berlin* 1761 bewiesen sei.

Dieser Beweis ist auf eine ziemlich schwerfällige und verworrene Art dargestellt, und man könnte sagen, daß die Denkschrift nicht sowohl einen klar entwickelten Beweis enthält, als vielmehr nur das Material zu dem Beweise. Folgende Erläuterungen können dazu dienen, das Verständnis zu erleichtern.

Als Hauptziel in der Kette der Beweisführung ist zu betrachten der Satz S. 296, § 49, daß die $R', R'', R''' \dots$ eine unendlich abnehmende Reihe bilden. Was zunächst den Sinn dieses Satzes betrifft, so ist er gar nicht so gemeint, daß die Glieder der Reihe gleich von Anfang an abnehmen. Im Gegenteil, die Reihe mag anfangs eine zunehmende sein, und dies Zunehmen mag durch eine so lange Strecke stets fortlaufen, daß man zu Gliedern von einer ungeheuren Größe gelangt. Behauptet wird nur, daß dies Zunehmen zuletzt doch wieder in ein Abnehmen übergeht, von einer solchen Art, daß infolge desselben die Glieder unter jede noch so kleine Größe herabgehen.

Lambert setzt dem Satze ein *Donc* vor, als ob er unmittelbar aus den im § 48 aufgestellten Relationen und aus dem Umstande folge, daß die dort aufgestellte Reihe für $\tan \frac{\varphi}{\omega}$ schneller als jede geometrische Progression konvergiere. Das hätte aber in ein helleres Licht gestellt werden sollen.

Eigentlich folgt aber daraus, daß $\frac{R''}{(3\omega\omega - \varphi\varphi)P}$, $\frac{R'''}{(15\omega^3 - 6\omega\varphi\varphi)P}$ usw. eine schneller als jede geometrische Progression abnehmende Reihe bilden, noch nicht unmittelbar, daß R' , R'' , R''' usw. unendlich abnehmen, da ja die Nenner $(3\omega\omega - \varphi\varphi)P$, $(15\omega^3 - 6\omega\varphi\varphi)P$ usw. selbst eine divergente Reihe bilden, und zwar eine solche, die stärker divergiert als irgendeine steigende geometrische Progression.

Die natürliche Anordnung des Schlusses ist folgende. Zur Abkürzung bezeichne ich die Größen

$$\frac{\omega}{\varphi}, \frac{3\omega\omega - \varphi\varphi}{\varphi\varphi}, \frac{15\omega^3 - 6\omega\varphi\varphi}{\varphi^3}, \frac{105\omega^4 - 45\omega\omega\varphi\varphi + \varphi^4}{\varphi^4} \text{ usw.}$$

oder was dasselbe ist

$$w, 3ww - 1, 15w^3 - 6w, 105w^4 - 45ww + 1 \text{ usw.}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ usw. Man hat dann folgende Sätze:

I. Die Größen $w, 3ww, 15w^3, 105w^4$ usw. bilden eine Reihe, die schneller zunimmt als jede geometrische Progression. Dies ist für sich klar.

II. Dasselbe gilt unter Einschränkung von den Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ usw., deren Anfangsteile jene sind.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht zu übersehen, wenn w größer als 1 ist, und Lamberts Raisonement (§ 31) involviert diese Voraussetzung, ohne daß sie bevorwortet wäre, im Gegenteil drückt Lambert sich immer so aus, als hätten seine Sätze allgemeine Gültigkeit. Die allgemein gültigen Endresultate lassen sich aber auf dem von Lambert eingeschlagenen Wege nicht beweisen, da bei kleinem w die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ usw. nicht auf eine so offenbare Art divergieren wie bei größeren.

Kommt es aber nur darauf an, die Irrationalität von π zu beweisen, so ist Lamberts Weg zureichend, weil $\frac{1}{4}\pi$ die rationale Tangente 1 hat und dafür $w > 1$ ist.

Es ist unter dieser Einschränkung leicht zu übersehen, daß die Größen

$$B = \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma\delta} + \frac{\alpha}{\delta\varepsilon} + \text{usw.}$$

$$C = \frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma\delta} + \frac{\beta}{\delta\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon\zeta} + \text{usw.}$$

$$D = \frac{1}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta\varepsilon} + \frac{\gamma}{\varepsilon\zeta} + \text{usw.}$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\delta}{\varepsilon\zeta} + \text{usw.}$$

eine Reihe bilden, die schneller abnimmt als jede geometrische Progression, also auch schneller als diese

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varphi^3} + \frac{1}{\varphi^4} + \text{usw.}$$

Daraus folgt jetzt, daß

$\frac{R'}{\varphi}, \frac{R''}{\varphi}, \frac{R'''}{\varphi}$ usw. eine abnehmende Reihe bilden, wenn nicht gleich, doch gewiß von einem wenn auch weit entfernten Gliede an, weil nämlich $\varphi B, \varphi\varphi C, \varphi^3 D$ usw. gleich sind.

Nun sind aber, falls R' und R'' zweien ganzen Zahlen r', r'' proportional sind, auch die folgenden $R''', \mp R''''$ ganzen Zahlen r''', r'''' proportional, wobei eine von irgendeinem Gliede an fortwährend ins Unendliche fallende Abnahme eine Ungereimtheit ist. Das Endresultat ist demnach,

daß jeder rationale Bogen, der = oder kleiner ist als π , keine rationale Tangente haben kann.

Durch Legendre ergibt sich dasselbe Resultat ohne die Beschränkung auf die Größe der Bogen.

Der allgemeine Ausdruck für die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. ist in zierlichster Gestalt folgender.

Es sei G das n^{te} Glied jener Größenreihe, H die korrespondierende Zahl (S. 281). Es ist dann

$$G + iH = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2n-1) w^n F(k, -n, -2n, \frac{2i}{kw}),$$

wo k unendlich groß.¹

Für unendlich großes n ist das F nichts anderes als

$$\cos \frac{1}{w} + i \sin \frac{1}{w}.$$

Damit schließt das fragliche Manuskript.

3. Um zunächst auf dasjenige einzugehen, was Gauß an sachlichen Einwendungen gegen die Lambertsche Arbeit vorbringt, so muß man ihm vollständig recht geben, wenn er die von Lambert vorgenommene Abschätzung (§ 49, unter Berufung auf § 34, 35), welche die schließliche Nullkonvergenz der mit R' , R'' , R''' , ... bezeichneten Divisionsreste beweisen soll, nur unter der Voraussetzung $w > 1$ stichhaltig erscheint (was mir übrigens bei meiner ersten Besprechung der Lambertschen Arbeit [1898] entgangen war), und daß überdies auch unter dieser Voraussetzung die fragliche Abschätzung noch eine etwas ausführlichere Begründung, etwa in der von Gauß angegebenen Art, wünschenswert macht.

Wenn nun aber Gauß über den ganzen Lambertschen Beweis nichts Anerkennenderes zu sagen weiß, als daß er ihn ziemlich schwerfällig und verworren dargestellt finde, so dürfte der Grund hiervon zum guten Teil darin zu suchen sein, daß er von seinem Standpunkt aus einen umfangreichen und zugleich unentbehrlichen Bestandteil des Beweises von vornherein für gänzlich überflüssig halten mußte. Denn leider hatte er sich (wie weiterhin noch ganz unverkennbar zum Vorschein kommen wird) ein für allemal auf die seinen Kettenbruch-Entwicklungen von 1812 (vgl. S. 198/99 meines vorigen Berichts) zugrunde liegende Auffassung festgelegt, daß derartige rein formal gewonnene Kettenbruch-Entwicklungen keines weiteren Gültigkeitsbeweises bedürfen. Und nun in striktem Gegensatz hierzu Lambert! Den für $\tan v$ durch Anwendung des Euklidischen Algorith-

¹ Dabei bedeutet das Symbol F , wie üblich, die hypergeometrische Reihe, deren Benützung erkennen läßt, daß die obige Niederschrift nach 1812 entstanden sein dürfte.

mus auf den Potenzreihen-Quotienten $\frac{\sin v}{\cos v}$ formal gefundenen Kettenbruch (S. 268—75):

$$(1) \quad \frac{1}{v^{-1}} - \frac{1}{3 v^{-1}} - \frac{1}{5 v^{-1}} - \frac{1}{7 v^{-1}} - \dots$$

will er allenfalls gelten lassen (S. 276), wenn v^{-1} eine natürliche Zahl, andernfalls aber hält er den Nachweis für unentbehrlich, daß dieser Kettenbruch *gegen den Wert* $\tan v$ *konvergiere*, mit anderen Worten, daß, unter $\frac{A_n}{B_n}$ den n^{ten} Näherungsbruch verstanden: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \tan v$. Hierzu bestimmt er mit aller Sorg-

falt unter Anwendung der vollständigen Induktion das Bildungsgesetz der A_n , B_n ($v = 1, 2, \dots, n$) und findet (S. 285/86) bei $v^{-1} = w$ nach Division von Zähler und Nenner mit dem Anfangsgliede (S. 281) von B_n , nämlich:

$$(2) \quad w^n (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2n - 1),$$

die Beziehung:

$$(3) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{w^{-1} - \frac{w^{-3}}{3!} \cdot \frac{2n-4}{2n-1} + \frac{w^{-5}}{5!} \cdot \frac{(2n-6)(2n-8)}{(2n-1)(2n-3)} - \dots}{1 - \frac{w^{-2}}{2!} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} + \frac{w^{-4}}{4!} \cdot \frac{(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)} - \dots},$$

hieraus durch Rücksubstitution $v = w^{-1}$ und für $n \rightarrow \infty$:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \dots} = \frac{\sin v}{\cos v}, \text{ q. e. d.}$$

Wie stellt sich Gauß zu diesem mit Rücksicht auf seine Entstehungszeit (1767) geradezu erstaunlichen Beweise? Er bringt nur am Ende seiner Besprechung das in (2) — (4) enthaltene Lambertsche Resultat ohne jede Andeutung seiner Herkunft in seine „zierlichste Gestalt“. Da nämlich seine α , β , γ , δ die Nenner der Näherungsbrüche, also unsere B_n , sind, so wird das mit G bezeichnete n^{te} Glied $= B_n$ und sodann entsprechend

$H = A_n$. Da ferner bei der Quotientenbildung (3) der Faktor (2) weggefallen ist, würde also an die Stelle unserer Beziehung (3) in der Gaußschen Schreibweise die folgende treten:

$$B_n + A_n i = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2n - 1) w^n F(k, -n, -2n, \frac{2i}{kw}) \text{ (für } k = \infty \text{)}$$

und sodann an die Stelle von (4):

$$\cos \frac{1}{w} + i \sin \frac{1}{w} = F(k, -n, -2n, \frac{2i}{kw}) \begin{pmatrix} k = \infty \\ n = \infty \end{pmatrix}.$$

Der Rest ist Schweigen! D. h. für den grundsätzlichen, bis in die Gegenwart wirksamen Fortschritt, welchen dieser Beweis darstellt, zeigt Gauß bei seiner Einstellung nicht das leiseste Verständnis.

Im übrigen ergänzt er ja das oben angeführte absprechende Urteil über die Lambertsche Arbeit durch das Zugeständnis, daß die letztere immerhin das „Material“ zu dem fraglichen Beweise enthalte. Unter diesen Begriff dürfte insbesondere jenes Gleichungssystem (6), nämlich:

$$\begin{aligned} R' &= \omega M - \varphi P \\ R'' &= 3\omega R' - \varphi^2 M \\ R''' &= 5\omega R'' - \varphi^2 R' \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

fallen, welches ich in meiner vorigen Mitteilung V (s. S. 196/97) als vermutliche Grundlage des dort besprochenen Gaußschen Beweises bezeichnet hatte. Über die Richtigkeit dieser Hypothese kann jetzt nicht mehr der geringste Zweifel bestehen. Denn ziemlich am Anfange seiner Besprechung zitiert Gauß bei der Erwähnung der Größen R' , R'' , R''' , ... ausdrücklich die Seite 296 der Lambertschen Arbeit, und da die obigen Gleichungen, denen diese Größen zu genügen haben, sich auf S. 294 finden, so können sie ihm keinesfalls entgangen sein und haben dann nach Einführung der Potenzreihen für $M = \sin \frac{\varphi}{\omega}$ und $P = \cos \frac{\varphi}{\omega}$ die entsprechenden Reihen für die R' , R'' , R''' , ... und damit die in V näher beschriebene Möglichkeit ihrer Abschätzung geliefert (die dann weiter trägt als die von Lambert nur für $v < 1$ ausreichende).

Wenn Gauß gegen Ende seiner Besprechung zugibt, daß Lambert die Irrationalität der Tangente jedes rationalen Bogens, der ≤ 1 , bewiesen habe,¹ demgegenüber aber hinzufügt, durch Legendre ergebe sich dasselbe Resultat ohne die Beschränkung auf die Größe der Bogen, so erscheint diese Gegenüberstellung wenig glücklich: denn Lambert hat die angegebenen² Resultate wirklich bewiesen, während diejenigen Legendres wegen Mangels unentbehrlicher Grundlagen völlig in der Luft schweben. Hiervon, insbesondere von der Stellung, die Gauß zu dieser Frage eingenommen hat, soll jetzt noch die Rede sein.

4. Die letzten zwei Stücke der vorliegenden Gaußschen Aufzeichnungen beziehen sich ausschließlich auf die Legendresche Darstellung in Note IV seiner *Éléments de Géométrie* S. 289—96. Das erste, ein zweiseitig eng beschriebener Zettel, ungefähr $\frac{2}{3}$ eines Kleinoktavblattes, enthält, abgesehen von dem ersten Satze: „Die Art, wie Legendre den Kettenbruch ableitet, hat eine gewisse Eleganz“, zunächst eine (bis auf den Ersatz des Legendreschen z durch y) genaue Abschrift der wesentlichsten Legendreschen Formeln zur Kettenbruch-Entwicklung von $\tan x$ *ohne irgendwelche kritische Bemerkung*. Dabei wird insbesondere aus der Rekursionsformel:

$$\psi(y) = \frac{a}{y + \psi(y+1)}$$

ohne weiteres geschlossen, daß sodann:

$$\psi(y) = \frac{a}{y} + \frac{a}{y+1} + \frac{a}{y+2} + \dots,$$

woraus in Verbindung mit dem oben der Legendreschen Leistung bedingungslos gespendeten Lob deutlich hervorgeht, daß

¹ Für den Fall $v = 1$ scheint mir diese Angabe nicht ganz zutreffend. Hier bleibt zwar der Lambertsche Gültigkeitsbeweis für die Kettenbruch-Entwicklung von $\tan v$ unverändert in Kraft. Dagegen müßte der entsprechende Irrationalitätsbeweis (wegen der nur für $v < 1$ gültigen Lambertschen Abschätzung der $R', R'', R''', \dots$) noch nachgeholt werden (was etwa nach Art des Legendreschen Beweises für seinen Irrationalitätssatz geschehen kann).

² Wegen des Falles $v = 1$ vgl. Fußnote 1.

Gauß, als er dies niederschrieb, noch geradeso wie in seiner Arbeit von 1812 jede weitere Begründung dieses Schlusses für überflüssig hielt.

Die Rückseite des Zettels enthält außer den Endformeln für die Kettenbruch-Entwicklung von $\tan x$ und $\tan \frac{m}{n}$ eine kurze Wiedergabe des Legendreschen „Irrationalitätssatzes“, dessen Nachweis ohne vorhergegangenen Konvergenzbeweis auf einem Fehlschluß beruht. Denn aus der bloßen Erkenntnis, daß der in Frage stehende Kettenbruch keinen rationalen Wert hat, kann doch nicht geschlossen werden, daß er einen irrationalen Wert haben müsse: er braucht ja überhaupt keinen „Wert“ zu haben. Nichtsdestoweniger erhebt Gauß gegen Legendres Schlußweise keinerlei Einwendung. Er nimmt also ohne weiteres an, daß auch der (abgesehen von gewissen Einschränkungen) *ad libitum* hingeschriebene (also nicht mehr gesetzmäßig aus einer analytischen Funktion hergeleitete) Kettenbruch *eo ipso* eine bestimmte Zahl vorstellen müsse. Die Konvergenzfrage bleibt dabei gänzlich außer Spiel.

Die gleiche Auffassung zeigt sich auch auf dem letzten Stück, einem ziemlich flüchtig beschriebenen Kleinoktavblatt. Dasselbe enthält zunächst als Beispiel dafür, daß ein aus (unechten) rationalen Brüchen gebildeter unendlicher Kettenbruch eine rationale Zahl darstellen könne, den rein periodischen Kettenbruch mit der Periode $\frac{u^2 - n^2}{2n}$ (u, n natürliche Zahlen und $u > n$), welcher den rationalen Wert $u - n$ besitzt. Es folgt dann eine nochmalige kurze Wiederholung des Beweises für den Legendreschen Irrationalitätssatz, die sich von derjenigen auf dem zuvor erwähnten Zettel nicht wesentlich unterscheidet.

Hat die vorstehende Prüfung der Gaußschen Aufzeichnungen gezeigt, daß Gauß bei deren Niederschrift bezüglich der Gültigkeit einer Kettenbruch-Entwicklung noch ganz auf dem Standpunkt seiner Arbeit von 1812 stand und daß er sogar jede Berührung mit den Begriffen der Konvergenz und Divergenz eines Kettenbruches prinzipiell vermeidet, so läßt sich das vielleicht darauf zurückführen, daß jene Aufzeichnungen nur wenig später entstanden sein mögen. Kann das zum mindesten nicht be-

stritten werden, so ergibt die in Nr. 1 erwähnte Abschrift aus dem Jahre 1850 die bisher unbekannte Tatsache, daß Gauß sich damals noch mit dem vorliegenden Gedankenkreise beschäftigt hat, also zu einer Zeit, wo er die Unzulänglichkeit seines früheren Standpunkts längst erkannt haben mußte. Wenn er es trotzdem unterlassen hat, sich gelegentlich berichtigend darüber zu äußern, so mag die Erklärung für dieses auffallende Verhalten wohl keineswegs in einem Versagen seines mathematischen Genius, vielmehr in gewissen Charaktereigenheiten zu suchen sein.