# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft III
November-Dezembersitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

# Kritisch-historische Bemerkungen zur Funktionentheorie.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 15. Dezember 1928.

## I. Über den sogenannten Vivanti-Dienes'schen Satz.

1. Im Laufe meiner langjährigen mathematisch-literarischen Tätigkeit habe ich mir zu gelegentlicher Behandlung verschiedene Einzelheiten aus dem Gebiete der Funktionentheorie, teils sachlicher, teils historischer Natur angemerkt, die nach meinem Dafürhalten einer Berichtigung, Ergänzung oder verbesserten Darstellung bedürfen. Und ich möchte einen Teil der Zeit, die mir zu produktiver Tätigkeit noch zugemessen ist, dazu benützen, um vor Toresschluß noch einige von diesen Dingen auszuarbeiten und in zwangloser Folge unter dem in der Überschrift angegebenen Gesamttitel an dieser Stelle zu veröffentlichen. Ich beginne mit dem gleichfalls in der Überschrift bereits genannten Satze von Vivanti-Dienes, zeige zunächst, daß der erste Teil dieser Benennung auf einem nachweisbaren Irrtum beruht, der leider schon in die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Eingang gefunden hat, und knüpfe daran einige Bemerkungen prinzipieller Natur gegen die überhandnehmende Unsitte, beliebige Sätze und Sätzchen sofort mit Erfindermarken zu versehen. Gegen den zweiten Teil der obigen Benennung wird keinerlei Einwand erhoben, jedoch wird gezeigt, daß der Satz selbst allzu wenig leistet und leicht durch einen wesentlich besseren ersetzt werden kann. Dieser letztere führt mich schließlich zu einer Verallgemeinerung, die, so nahe sie liegen mag, bisher nicht ausgesprochen zu sein scheint und immerhin einiger Beachtung wert sein dürfte.

2. In der bekannten Monographie des Herrn Edmund Landau: „*Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (1916)“ findet sich auf S. 65 als Über-

schrift von § 17: „*Satz von Vivanti-Dienes*“ und auf S. 12 als Erläuterung zu dem Vivanti'schen Anteil an dem fraglichen Satze die Mitteilung: „*Wie zuerst Vivanti*[1]) *bemerkt hat, ist bei einer Potenzreihe, deren Koeffizienten* $\geqq 0$ *sind, ..... der positive Punkt des Konvergenzkreises ein singulärer Punkt der Funktion.*“ Diese Aussage erscheint zunächst, soweit sie von der Bedeutung des Verbums „*bemerkt hat*“ abhängt, nicht ganz eindeutig. Bestehen ja doch in dieser Beziehung die beiden Möglichkeiten: *bemerkt* = *angemerkt*, also *ausgesprochen*, andererseits *bemerkt* = *wahrgenommen* (ohne es auszusprechen). Glücklicher Weise hat Herr Landau durch den ausdrücklichen Hinweis (a. a. O. Fußn. 3) auf eine frühere Publikation diesen Zweifel selbst aufgeklärt. Daselbst (Mathem. Ann. 61 [1905], S. 534) lautet die entsprechende Aussage ganz unzweideutig folgendermaßen: „Dieser (sc. der oben genannte) Satz wurde trotz seiner *Einfachheit zuerst im Jahre 1893 von Herrn Vivanti*[2]) *ausgesprochen. Ein Beweis wurde etwa gleichzeitig von Herrn Pringsheim*[3]) *veröffentlicht.*“

Leider beruht der erste Teil dieser Aussage auf einem fraglosen Versehen, und der zweite bedarf infolgedessen der Ergänzung dahin, daß der genannte Satz von mir auch *zuerst ausgesprochen* wurde. Da die in Fußn. 2 angegebene Belegstelle auf eine kleinere, wenig verbreitete und längst eingegangene Zeitschrift sich bezieht, so will ich, um meine Behauptung *ad oculos* zu demonstrieren, die in Frage kommende Stelle aus dem in meinen Händen befindlichen Separatabzuge der nur drei Oktavseiten langen Vivanti'schen Note wörtlich anführen:

„*E noto che, se* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *dove le* $c_n$ *si suppongono reali e positivi, è convergente, insieme a tutti le sui derivate, entro in cerchio di raggio 1 col centro nell' origine, .....*[4]).

[1]) Mit dem Hinweise: Vivanti 1, S. 112, woselbst das in der folgenden Fußnote angeführte Zitat sich findet.

[2]) „*Sulle serie di potenze.*“ Rivista di matematica, Bd. 3 (1893) S. 112.

[3]) *Über Funktionen, welche in gewissen Punkten Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwicklung besitzen.*“ Math. Annalen, Bd. 44 (1894), S. 42.

[4]) Die ausgelassenen Zeilen haben mit der hier vorliegenden Frage nichts zu tun. Sie besagen lediglich, daß die Reihe auch noch für $|x| = 1$

*D' altra parte la funzione analitica di cui quella serie è un elemento ha evidentemente una singolarità nel punto $x = 1$.* Kurz zusammengefaßt:

Ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$ und sind die $c_n$ *reell* und *positiv*, so hat die Reihe $\sum c_n x^n$ den Konvergenzradius 1 und *offenbar* („*evidentemente*") die singuläre Stelle $x = 1$.

„*Offenbar*"? Auf Grund der *beiden* Voraussetzungen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 \text{ und } c_n \textit{ reell} > 0,$$

oder *welcher* von beiden? Die *ältere* Landausche Aussage, daß hier irgendein *bestimmter* Satz *ausgesprochen* worden sei, scheint mir völlig unhaltbar.

„*Vorsorglich*", wie die Advokaten zu sagen pflegen, möchte ich indessen mit Rücksicht auf die *spätere*, vielleicht nicht ganz unabsichtlich etwas eingeschränkte Fassung ausdrücklich bemerken, daß ein Autor durch ein solches „*offenbar*" noch keinerlei Anrecht erwirbt, als wirklicher und alleiniger Erfinder irgend eines von ihm *verschwiegenen*, aber leicht zu vermutenden und zur ausreichenden Begründung jenes fragwürdigen „*offenbar*" geeigneten Satzes patentiert zu werden[1]). Und der vorliegende Fall darf geradezu als warnendes Schulbeispiel dafür dienen, zu welch wundersamen Konsequenzen die gegenteilige Praxis führen könnte. Da nämlich unter den Vivanti'schen Voraussetzungen — überdies sogar als *erste* — die folgende: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$ figuriert und diese nach einem gleichfalls leicht zu vermutenden (aber umso schwerer zu beweisenden) Satze unweigerlich die *Singularität* der Stelle $x = 1$ nach sich zieht, so müßte man darauf gefaßt sein, auch diesen (angeblich von Herrn Fabry bewiesenen) Satz auf den Namen Vivanti getauft zu sehen. Damit soll keineswegs geleugnet werden,

konvergiert, wenn das Raabe'sche Kriterium: $\lim\limits_{n=\infty} n\left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n}\right) > 1$ erfüllt ist, und daß das gleiche für alle derivierten Reihen gilt, wenn:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n}\right) = \infty.$$

[1]) Sonst müßte man z. B. denjenigen Mathematiker, der lange vor Abel gefolgert hat, daß aus: $\lg(1+x) = \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu}$ „offenbar" sich ergebe: $\lg 2 = \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu}$, zum Erfinder des Abel'schen Grenzwertsatzes machen.

daß der Wunsch, gerade die betreffende von Herrn Vivanti offen gelassene Beweislücke (obschon auch mehrere andere dazu einluden) auszufüllen, mich zur Formulierung und zum Beweise des fraglichen Satzes angeregt hat.

Im übrigen wurde ja durch wörtliche Mitteilung der von Herrn Landau angegebenen Belegstelle die Existenz eines wirklichen *Versehens* einwandfrei nachgewiesen — eines Versehens, das bei der sonst geradezu vorbildlichen Gewissenhaftigkeit und Zuverlässigkeit dieses Autors in dem bekannten „*Dormitat quandoque bonus Homerus*“ seine Erklärung und Entschuldigung finden mag.

3. Obschon dieses Versehen, das mir bei seiner ersten Publikation im Jahre 1905 entgangen war, bald nach Erscheinen der Monographie von 1916, also vor etwa 12 Jahren mir bekannt wurde, überdies seine ausdrückliche Feststellung und eventuelle Korrektur für mich immerhin ein gewisses persönliches Interesse haben konnte, zog ich vor, es bis zum heutigen Tage vollständig mit Schweigen zu übergehen. Und wenn ich trotzdem jetzt plötzlich damit an die Öffentlichkeit trete, so dürfte man wohl von mir eine Angabe der Gründe erwarten, die mich zu diesem zwiefachen Verhalten bewogen haben.

Ich hatte — gleichfalls kurz nach Erscheinen jener Monographie — in einem daran anknüpfenden Aufsatz die Unvorsichtigkeit begangen, mein Bedauern darüber auszusprechen, daß der hartnäckige und nach meinem Dafürhalten übertriebene Gebrauch kleiner und großer *o*'s bzw. *O*'s das Studium der „*lehrreichen und dankenswerten Schrift*“ außerordentlich erschwere, was den Zorn des Verfassers wider alles Erwarten in solchem Maße erregte, daß er ostentativ jeden persönlichen Verkehr mit mir abbrach. Um den hierdurch hinlänglich gekennzeichneten Konflikt nicht noch zu verschärfen, vermied ich bis auf weiteres jede Erwähnung des Themas Vivanti. Als dann nach mehr als acht Jahren Herr Landau meinen 75 jährigen Geburtstag dazu benützte, mir durch einen wenigstens „bedingt konvergierenden“ Glückwunsch einen Friedensschluß ohne Sieger und Besiegten zu ermöglichen, so war nach der eben gemachten Erfahrung für mich erst recht nicht daran zu denken, in absehbarer Zeit diese alte Streitaxt wieder auszugraben. Und da ich andererseits weit davon entfernt war, auf allenfalls mir zustehende Prioritätsansprüche irgendwelchen Wert zu legen, so erschien es mir als das vernünftigste, die ganze Sache in Vergessenheit geraten zu lassen, zumal ich annahm, jene lediglich als Paragraphen-Überschrift des Herrn Landau aufgetretene Fehlbezeichnung werde ihre Geburtsstätte niemals verlassen. Darin hatte ich mich aber leider in einer Weise verrechnet, die mich zwingt, meinem wohlgemeinten Vorsatz gänzlich untreu zu werden, was ich aufrichtig bedaure.

4. Als ich nämlich vor einiger Zeit die „*Moderne Funktionentheorie*", den im Vorjahre erschienenen 2. Band des Bieberbachschen Standard-Lehrbuches der Funktionentheorie zur Hand nahm, bemerkte ich auf S. 280 als groß gedruckte Überschrift zu § 1 des siebenten Abschnitts: Der Satz von Vivanti-Borel-Dienes. Abgesehen von dem Mißvergnügen, welches mir das unerhoffte Wiederauftauchen des „Vivanti"-Satzes bereitete, befremdete mich zunächst das mir völlig neue Auftreten des Namens Borel in dem obigen Zusammenhange[1]). Um mir hierüber nähere Auskunft zu verschaffen griff ich zu dem im großen und ganzen ausgezeichneten Artikel: „*II C 4. Neuere Untersuchungen über Funktionen einer komplexen Variablen*", den Herr Bieberbach in Bd. II, 3, 1 (1909—1921) der Enzyklopädie veröffentlicht hat. Von dem, was ich eigentlich suchte, fand ich indessen keine Spur, dagegen auf S. 461 eine für mich nicht uninteressante Überraschung, nämlich zu dem im Texte nach der Landau'schen Terminologie angeführten: „*Satz von Vivanti-Dienes*" in der zugehörigen Fußnote 186 außer der Belegstelle: G. Vivanti, Sulle serie di potenze, Rivista di matematica 3 (1893), p. 111—114[2])" die aus dem bisher Gesagten inhaltlich uns wohlbekannte Bemerkung: „Hier kommt der Satz zuerst ohne Beweis für positive Koeffizienten vor." Da ich an die sonst sprichwörtlich gewordene „Duplizität der Fälle" in dem vorliegenden Falle nicht recht glauben kann, so möchte ich

[1]) S. Mandelbrojt (The Rice Institute Pamphlet, Vol. XIV, Nr. 4) bezeichnet (a. a. O. p. 240) Hadamard als den Autor des „Vivanti"-Satzes — unter Berufung auf die 2. Auflage von H.'s bekannter Schrift: *La série de Taylor* [Paris, 1926]. Dieselbe ist mir leider nicht zur Hand. Aus den Literaturangaben der *ersten* [1901] geht jedoch unzweideutig hervor, daß H. den Satz von mir entnommen hat.

[2]) Diese ausführlichere Seitenangabe findet sich (an Stelle der auf unserer S. 344, Fußn. 1 angegebenen) auch auf S. 108 der Landau'schen „Monographie" unter Vivanti, 1.

vermuten, daß Herr Bieberbach nicht bei Einsicht in die (einigermaßen schwer zu beschaffende) Vivanti'sche Originalnote ein Opfer der gleichen optischen Täuschung, wie Herr Landau geworden ist, vielmehr die obige *unrichtige* Bemerkung von dem letzteren übernommen hat, woraus ihm bei dessen oben bereits als vorbildlich bezeichneten Gewissenhaftigkeit und Zuverlässigkeit nicht der geringste Vorwurf zu machen wäre. Wie dem auch sei, jedenfalls ist durch ihre Aufnahme in die Enzyklopädie (einschließlich der von mir angefochtenen Satzbezeichnung) für mich eine wesentlich veränderte Situation entstanden. Besteht ja doch eine ausdrücklich in den Plan der Enzyklopädie aufgenommene [1]) Hauptaufgabe darin, „*durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen*". Nun glaube ich aber als einer der ältesten Mitarbeiter der Enzyklopädie durch meine einführenden Artikel in Bd. I, 1 und II, 1, sowie durch verschiedene andere historisch-mathematische Aufsätze und besonders zahlreiche in meinen übrigen Arbeiten verstreute historische Bemerkungen nicht nur das Recht, sondern auch die Pflicht erworben zu haben, nach Möglichkeit dazu beizutragen, daß Irrtümer wie der vorliegende auf dem Wege über die Enzyklopädie nicht geradezu „geschichtsnotorisch" werden. Aus diesem Grunde möchte ich ausdrücklich dafür plädieren, daß die oben angeführte Bemerkung gelegentlich berichtigt wird und daß zwar nicht der angeblich Vivanti'sche Satz, wohl aber diese seine Benennung wieder verschwindet [2]). Wie aber soll der Satz alsdann benannt werden? Aha, „*hinc illae lacrimae*", wird wohl mancher freundliche Leser denken: „Vielleicht als Pringsheim'scher Satz?" Ach nein, ganz im Gegenteil: ich würde gegen einen derartigen Mißbrauch meines Namens a[illegible] schärfste protestieren. Wie also soll dann der Satz schlie[illegible] doch benannt werden? Nach meiner Meinung soll er und seinesgleichen [3]) geradeso wenig, wie nach seinem *Verschweiger*, nach seinem *Erfinder* bzw. seinen *Erfindern*, sondern, wo es irgend angeht,

[1]) s. Bd. I, 1, S. IX.

[2]) Mit dem „Dienes'schen" Satz, bei dem die Sache gerade umgekehrt liegt, werde ich mich weiter unten noch auseinandersetzen.

[3]) Damit meine ich Sätze, die nicht in irgend einem besonderen Zusammenhange eine *hervorragende* Wichtigkeit besitzen.

insbesondere als *Überschrift*, nach seinem *Inhalt* benannt werden (z. B. in dem vorliegenden Falle als „Spezielles Singularitäts-Kriterium“ oder ausführlicher als „Hinreichende Bedingung für die Singularität der Stelle $x = 1$ bzw. $x = r$“) was nicht ausschließt, daß nach Bedarf auch *der* bzw. *die* Erfinder, sei es im Text oder in einer Fußnote, angegeben werden.

5. Ich möchte die im Anschluß an die letzte Bemerkung sich bietende Gelegenheit nicht ungenützt lassen, etwas ausführlicher auf das mir schon längst am Herzen liegende Thema[1]) der schlagwortmäßigen Benennung einzelner mathematischer Lehrsätze durch Autorennamen einzugehen. Ich beschränke mich dabei, wie es der Zusammenhang ja von selbst ergibt, auf das Gebiet der Funktionentheorie.

Wir älteren Mathematiker — ich denke dabei naturgemäß besonders an diejenigen, deren Hauptstudienzeit (nicht bloß Studentenzeit) noch in das letzte Drittel des vorigen Jahrhunderts fiel — pflegten die Mathematik als eine im wesentlichen „anonyme“ Wissenschaft zu erlernen. In den Vorlesungen, in den Lehrbüchern (z. B., um nur die besten zu nennen, in den *Cours* und *Traités d'Analyse* von Cauchy-Moigno [1840] bis Picard [1891] und bis zu der zweiten Auflage von Camille Jordan [1893ff.]), aus denen wir den größten Teil unseres mathematischen Wissens bezogen, war das Erscheinen von Autornamen eine außerordentliche Seltenheit, in den Originalabhandlungen trat der Meister hinter seinem Werke zurück. Die ausschließliche Benennung einzelner Sätze mit den Namen ihrer Entdecker blieb eine bis auf wenige geradezu trivial gewordene Beispiele (Pythagoreischer, Fermat'scher, Taylor'scher Satz) beschränkte Ausnahme[2]). Hie und da wurde ein *besonders wichtiger* Satz außer mit einer Andeutung seines Inhalts mit dem Namen des Verfassers gekennzeichnet. Hier einige glänzende Beispiele dieser Art: der Cauchy'sche Integralsatz (1814 bzw. 1825), der Abel'sche Grenzwert- (oder Stetigkeits-)Satz für Potenzreihen[3]) (1826), der Weierstraß'sche

[1]) Vgl. z. B. meine „Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre“ I, 3 [1921], S. 920, Zeile 2ff.

[2]) Unter diesen Ausnahmen wäre etwa noch der Laurent'sche Satz zu erwähnen.

[3]) Trotz seiner Unscheinbarkeit ein Markstein in der Entwickelungsgeschichte der Funktionentheorie, als Ausgangspunkt für den Begriff der *gleichmäßigen* Konvergenz. Vgl. dieser Berichte Bd. 27 (1897), S. 344.

Doppelreihensatz[1]) (1880), der Jordan'sche Kurvensatz (1893). Im übrigen war man aber auch im Gebrauche dieser „gemischten" Bezeichnungsweise äußerst sparsam, sofern es sich nicht um Unterscheidung verschiedener, einem gemeinsamen Zwecke dienender Sätze (z. B. Konvergenzkriterien) handelte.

Die im vorstehenden geschilderte Praxis hat sich leider in neuerer Zeit sehr zum Nachteil verändert. Die „Entdecker"-Sätze ohne irgendwelche anderweitige Charakterisierung wachsen wie die Pilze aus der Erde, gehen aus dem Tagesbetrieb der Zeitschriften (wo solche kurze Benennungen der Bequemlichkeit halber ihre Berechtigung haben mögen) in die Lehrbücher über und geben dem Studierenden, da die älteren, schon mehr durchgearbeiteten und zu einem Ganzen zusammengewachsenen Partien einen ähnlichen Namenreichtum nicht aufzuweisen pflegen, ein ganz *falsches* Bild von ihrer Wichtigkeit[2]). In dieser Hinsicht müßte Wandel geschaffen werden, sollten unsere modernen Lehrbücher sich nicht ziemlich rasch zu einer Art von Eitelkeitsmarkt für die jüngere und jüngste Generation auswachsen. Hierfür bieten sich zunächst zwei Wege: entweder durch reichlichere und gerechtere Verteilung von Quellenangaben und Autorennamen ein der Wahrheit näher kommendes Bild herzustellen oder zu der anonymen Darstellungsweise früherer Zeiten zurückzukehren. Ich würde eine Art Mittelweg oder vielmehr eine passende Kombination beider Methoden für das beste halten. Das erfolreiche Studium der Mathematik erfordert eine ganz besondere Konzentration des Denkens, der man jede Störung nach Möglichkeit fern halten

---

[1]) Eine der Hauptgrundlagen der Weierstraß'sche Funktionentheorie. Vgl. z. B. meine „Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre" Bd. II, 1, [1925]. S. 365, 372.

[2]) Sie liefern übrigens ein zwar recht bequemes, aber keineswegs einwandfreies Ordnungsprinzip für die Sachregister. Die glücklichen Satzbesitzer werden daselbst unter dem Schlagwort „*Satz*" der dankbaren Mit- und Nachwelt dauernd in Erinnerung gebracht, während die an Zahl und Gesamtleistung infinitär überlegenen Satzlosen in dem Massengrab der Anonymität ruhmlos der Vergessenheit anheimfallen.

Ein lehrreiches Beispiel der entgegengesetzten Art bietet der *Satz von Wigert* (Enzyklopädie, a. a. O. S. 467; Bieberbach, a. a. O. S. 288, § 3). Wigert? Bisher ein in den weitesten Kreisen unbekannter Name! Jetzt aber hat er seinen „*Satz*", sein „*monumentum aere perennius*".

sollte. Deshalb müßte man nach meinem Dafürhalten bei der Darstellung mathematischer Gegenstände alles, was den Leser von dem Gange der Untersuchung abziehen könnte, aufs sorgsamste vermeiden und, soweit seine Erwähnung wünschenswert erscheinen sollte, in einen Anhang am Ende des Bandes verbannen. Dahin gehören Quellenangaben, historische und literarische Dinge einschließlich der Hervorhebung von Autorennamen (soweit dieselben, zur Benennung besonders wichtiger Sätze nach Art der oben angeführten Beispiele bereits „klassisch" geworden, nicht bereits im Text ihren Platz gefunden haben). Dabei wäre nicht vom Text auf eine zugehörige Stelle des Anhangs[1]), sondern umgekehrt vom Anhang auf die in Betracht kommende Textstelle zu verweisen. Ich habe diese Methode bei Herausgabe meiner in der ersten Fußnote S. 349 erwähnten Vorlesungen streng durchgeführt und würde es im Interesse der Sache lebhaft bedauern, wenn ich damit lediglich ein „Muster ohne Wert" geschaffen haben sollte.

6. Ehe ich mich zur Betrachtung des Dienes'schen Satzes, der Übertragung des (ehemals) „Vivanti'schen" Satzes auf den Fall *komplexer* Koeffizienten wende, möchte ich mit Rücksicht auf eine in diesem Zusammenhange zu machende Bemerkung kurz auf die beiden Beweise für jenen spezielleren auf den Fall *reeller* Koeffizienten bezüglichen Satz eingehen.

Der ältere, von mir herrührende Beweis (s. S. 344, Fußn. 3) lautet folgendermaßen: Es habe die Reihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, wo $a_\nu \geqq 0$ *(reell)*, den Konvergenzradius 1. Wird $0 < \xi_0 < 1$ angenommen und $x_0 = \xi_0 e$ gesetzt (wo $e$ jede beliebige komplexe Zahl mit dem Absolutwert 1 bedeutet), so besteht die Transformation:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(x \mid x_0) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}^{(\nu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu,$$

wo der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x \mid x_0)$ *zum mindesten* den Einheitskreis von Innen berührt. Da die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Einheitskreise mindestens *eine* singuläre Stelle besitzen muß, so muß für irgend ein $x_0$ der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(x \mid x_0)$ *wirklich* den Ein-

[1]) Unter dieser älteren Methode habe ich z. B. bei dem Studium der ersten Auflage von O. Stolz's „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" (1885/6), aus der ich viel gelernt habe, schwer gelitten.

heitskreis von innen berühren, und das wird mit Sicherheit dann stattfinden, wenn die Absolutwerte der Koeffizienten $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_0)$ ihr *Maximum* erreichen, was offenbar für $x_0 = \xi_0$ eintritt. Die betreffende Berührung findet also im Punkte $x = 1$ statt, dieser letztere ist daher, wie behauptet, eine *singuläre* Stelle[1]). —

Während dieser Beweis die Kenntnis des Satzes von der Existenz mindestens einer singulären Stelle auf dem Konvergenzkreise voraussetzt, also wesentlich funktionentheoretischer Natur ist, hat Herr Landau[2]) einen elementar-reihentheoretischen Beweis geliefert, der lediglich die Kenntnis des Cauchy'schen Doppelreihensatzes voraussetzt. Unter Beibehaltung der oben benützten Bezeichnungen (wenn noch $\Re(x) = \xi$ gesetzt wird) findet man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(\xi) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \xi^\nu &= \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu (\xi_0 + \xi - \xi_0)^\nu \\ &= \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \sum_0^\nu{}_\lambda\, (\nu)_\lambda\, \xi_0^{\nu-\lambda} (\xi - \xi_0)^\lambda \\ &= \mathfrak{P}(\xi \mid \xi_0)\end{aligned}$$

und zwar geht die vorletzte Reihe[3]), welche für $\xi_0 < \xi < 1$ aus lauter *nichtnegativen* Bestandteilen zusammengesetzt ist, durch bloße *Umordnung* in die nach Potenzen von $\xi - \xi_0$ fortschreitende letzte Reihe über. Wäre nun $\xi = 1$ *keine* singuläre Stelle für $\mathfrak{P}(\xi)$, so müßte $\mathfrak{P}(\xi \mid \xi_0)$ für gewisse $\xi > \xi_0$ noch *absolut konvergieren.* Diese absolute Konvergenz für jene $\xi > 1$ müßte dann aber auch erhalten bleiben, wenn man die Reihe $\mathfrak{P}(\xi \mid \xi_0)$ durch Rück-Umordnung in den Zustand $\mathfrak{P}(\xi)$ zürückversetzt, was der Voraussetzung widerspricht. —

Nach einer in der oben angeführten Fußn. 186 des Bieberbach'schen Enzyklopädie-Artikels sich findenden Bemerkung soll erst dieser Beweis den *inneren* Grund des (ehemals) „Vivantischen" Satzes aufdecken. Das dürfte bis zu einem gewissen Grade Ansichtssache sein — jedenfalls bin ich der genau entgegengesetzten Ansicht. Ich verstehe nicht recht, wie ein *indirekter*, lediglich auf einer *rechnerischen Verifikation* beruhender Beweis

---

1) Einen noch kürzeren, auf demselben Prinzip beruhenden Beweis s. S. 358.

2) In der oben erwähnten Arbeit von 1905: Math. Ann. 61, S. 531/6.

3) Eigentlich eine unvollständige Doppelreihe (besser: iterierte Reihe) mit Zeilen von endlicher, für $\nu \to \infty$ ins Unendliche wachsender Gliederzahl.

*„innere“* Gründe aufdecken soll. Mir scheint gerade der *innere* Grund in dem Satze von der notwendigen Existenz mindestens *einer* singulären Stelle auf dem Konvergenzkreise zu liegen, welcher ganz direkt die singuläre Beschaffenheit der Stelle $x = 1$ nach sich zieht. Im übrigen wird sich zeigen, daß gerade die direkte Übertragung des Landau'schen Beweises auf den Fall *komplexer* Reihen-Koeffizienten eine wichtige Aufklärung und damit verbundene wesentliche Verbesserung des Dienes'schen Satzes verhindert hat.

7. Der Dienes'sche Satz[1]) pflegt gewöhnlich in folgender Form ausgesprochen zu werden:

*Hat die Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ *den Konvergenzradius 1 und gehören die Punkte* $a_\nu$ *einem Winkelraume an von weniger als 180⁰ mit dem Scheitel im Nullpunkt, so ist die Stelle* $x = 1$ *eine singuläre.*

Für den Beweis genügt es, den Fall zu betrachten, daß der fragliche Winkelraum der rechten Halbebene angehört und durch die positiv-reelle Axe halbiert wird (da ja der oben ausgesprochene allgemeinere Fall durch Drehung um einen gewissen Winkel $\vartheta$, welchen die nunmehrige Mittellinie mit der positiv-reellen Axe bildet — arithmetisch gesprochen, durch Multiplikation der Reihe mit $e^{-\vartheta i}$ auf diesen spezielleren zurückgeführt werden kann)[2]).

Setzt man $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$ und beachtet, daß $\dfrac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}$ als *Tangens* des (absolut gemessen weniger als 90⁰ betragenden) Winkels $\varphi_\nu$, den der Halbstrahl $\overline{0\, a_\nu}$ mit der positiv-reellen Axe bildet, unter einer endlichen Schranke $B > 0$ bleiben muß, so lassen sich die oben gemachten Voraussetzungen des Satzes auch folgendermaßen formulieren:

$$\text{I. } \alpha_\nu \geqq 0, \qquad \text{II. } \overline{\lim_{\nu \to \infty}}\, |\alpha_\nu + \beta_\nu i|^{\frac{1}{\nu}} = 1, \qquad \text{III. } |\beta_\nu| < B \cdot \alpha_\nu\ ^{3)}.$$

---

1) *„Essai sur les singularités des fonctions analytiques“*. Journ. de math. (6), 5 (1909), p. 338/40.

2) Der Dienes'sche (im Gegensatz zu dem Landau'schen wesentlich funktionentheoretische) Beweis behandelt gleich den allgemeinen Fall.

3) Anders geschrieben $\cos \varphi_\nu > \dfrac{1}{1 + B^2} > 0$.

Man erkennt leicht an Beispielen einfachster Art, daß die Bedingung III die Wirkung des Satzes sehr stark und, wie sich zeigen wird, in ganz überflüssiger Weise beschränkt. Sie verlangt offenbar, daß die $|\beta_\nu|$ für $\nu \to \infty$ *höchstens* von der Größenordnung der $\alpha_\nu$ sein dürfen; daß ferner für $\alpha_\nu = 0$ auch $\beta_\nu = 0$ sein muß. Hiernach wären z. B. folgende Reihen von der Wirkung des Satzes *ausgeschlossen*, während sie nichtsdestoweniger die singuläre Stelle $x = 1$ aufweisen:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \beta_\nu = 1 \text{ oder } (-1)^\nu,$$

$$\text{also: } \sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{\nu} + (\pm 1)^\nu i\right) x^\nu = \lg \frac{1}{1-x} \mp \frac{i x}{1 \mp x}.$$

$$\alpha_\nu = 1, \quad \beta_\nu = \nu \text{ oder } (-1)^\nu,$$

$$\text{also: } \sum_1^\infty{}^\nu \left(1 + (\pm 1)^\nu \nu i\right) x^\nu = \frac{x}{1-x} \mp \frac{i x}{(1 \mp x)^2}.$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}(1 + (-1)^\nu), \text{ d. h. } \alpha_{2\nu} = 1, \ \alpha_{2\nu+1} = 0,$$

$$\beta_\nu = 1 \text{ oder } (-1)^\nu,$$

$$\text{also: } \sum_0^\infty{}^\nu \left\{\frac{1}{2}(1 + (-1)^\nu) + (\pm 1)^\nu i\right\} x^\nu$$

$$= \sum_0^\infty{}^\nu x^{2\nu} + i \sum_0^\infty{}^\nu (\pm 1)^\nu x^\nu = \frac{1}{1-x^2} + \frac{i}{1 \mp x}.$$

Ein Blick auf diese Beispiele lehrt aber folgendes:

1. Der *reelle* Teil dieser Reihen besitzt jedesmal die singuläre Stelle $x = 1$.

2. Der *imaginäre* Teil kann sie gleichfalls besitzen oder auch nicht, ist aber *in keinem Falle* im Stande, die vom reellen Teil herrührende Singularität zu zerstören.

Wir werden nun zeigen, daß diese *beiden* Erscheinungen nicht auf dem speziellen Bildungsgesetz der obigen Reihen herrühren, vielmehr *stets* auch dann eintreten, wenn die oben mit I, II, III bezeichneten Voraussetzungen des Dienes'schen Satzes bestehen.

Da nämlich $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i) x^\nu$ den Konvergenzradius 1 haben soll, so muß mindestens *eine* der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu x^\nu$, $\sum \beta_\nu x^\nu$ den Konvergenzradius 1 haben[1]). Das trifft dann aber in erster

---

[1]) Der Konvergenzradius der anderen Reihe kann dann noch $\geq 1$ (niemals $< 1$) sein.

Linie die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$, da wegen: $a_\nu > \frac{1}{B} |\beta_\nu|$ der Konvergenzradius *niemals größer* sein kann, als derjenige von $\sum \beta_\nu x^\nu$[1]). Anders ausgesprochen: Die Bedingungen I, II, III zusammen involvieren stets die Beziehung $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu^{\frac{1}{\nu}} = 1$. Nimmt man diese *an Stelle der Bedingung* III in die *Voraussetzung* auf, so erweist sich die Voraussetzung der Beziehung III, also die dadurch geschaffene Beschränkung der $\beta_\nu$, als *völlig überflüssig.* Denn nunmehr liefert ja die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ sofort die singuläre Stelle $x = 1$, und diese kann, wie schon aus den oben gegebenen Beispielen mit hinreichender Deutlichkeit hervorgeht, durch das Hinzutreten des imaginären Teils $i \sum \beta_\nu x^\nu$ niemals zerstört werden.

Es dürfte einigermaßen auffallen, daß die unheilvolle Wirkung jener Voraussetzung III bisher niemals bemerkt worden zu sein scheint. Den Grund hiervon darf man wohl in der äußerlich recht eleganten, aber, wie soeben gezeigt, *den wahren Zusammenhang verschleiernden* geometrischen Fassung suchen, sodann aber in dem Umstande, daß die Übertragung des zuvor angeführten Landau'schen Beweises auf den Fall *komplexer* Reihenkoeffizienten *wesentlich* auf der durch die Voraussetzung III eingeführten *Beschränkung* der $a_\nu$, $\beta_\nu$ (in der Form wie in Fußn. 3, S. 353 angegeben) beruht, *ohne* dieselbe hinfällig wird.

8. Die vorstehenden Überlegungen haben mich zu der Überzeugung geführt, daß das Problem, den ehemals „Vivanti'schen" Satz auf den „*komplexen*" Fall zu übertragen, durch den Dienesschen Satz nur in sehr unzulänglicher Weise gelöst wird und daß es vielleicht einen gewissen Fortschritt bedeuten würde, wenn man

---

[1]) Oder auch folgendermaßen: Aus $a_\nu \geqq 0$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, |a_\nu + \beta_\nu i|^{\frac{1}{\nu}} = 1$ folgt: $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu^{\frac{1}{\nu}} \leqq 1$, $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, |\beta_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leqq 1$ in *dem* Sinne, daß mindestens in *einer* der beiden Ungleichungen das *Gleichheits*zeichen gilt. Andererseits folgt aber aus $a_\nu > \frac{1}{B} |\beta_\nu|$, daß: $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a_\nu^{\frac{1}{\nu}} \geqq \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, |\beta_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ (wegen: $\lim\limits_{\nu\to\infty} B^{\frac{1}{\nu}} = 1$), also mit Sicherheit: $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\, a^{\frac{1}{\nu}} = 1$.

ihn durch den folgenden ersetzt und allenfalls zur Stellung eines Corollars degradiert:

Satz: *Gehören die Punkte* $a_\nu$ *der rechten Halbebene (einschließlich der begrenzenden imaginären Axe) an und haben die beiden Potenzreihen* $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, $\mathfrak{P}_1(x) \equiv \sum_0^\infty{}^\nu \Re(a_\nu) x^\nu$ *den Konvergenzradius* 1, *bestehen also die drei Voraussetzungen:*

$$\Re(a_\nu) \geqq 0, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \Re(a_\nu)^{\frac{1}{\nu}} = 1, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1$$

*anders geschrieben (für* $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$*):*

$$\alpha_\nu \geqq 0, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}} = 1, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |\beta_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leqq 1,^{1)}$$

*so besitzt die Reihe* $\mathfrak{P}(x)$ *die singuläre Stelle* $x = 1$.

*Beweis.* Wir setzen:

$$(1) \quad \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x) + i\,\mathfrak{P}_2(x) \quad \left(\text{wo also: } \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu x^\nu\right).$$

Wird eine positive Zahl $\xi_0 < 1$ beliebig angenommen, so hat man zunächst für $\xi_0 < \xi < 1$:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(\xi) = \mathfrak{P}(\xi\,|\,\xi_0) = \mathfrak{P}_1(\xi\,|\,\xi_0) + i\,\mathfrak{P}_2(\xi\,|\,\xi_0).$$

Da $\mathfrak{P}_1(x)$ wegen $\alpha_\nu \geqq 0$ nach dem ehemals „Vivanti'schen" Satze[2]) die singuläre Stelle $x = 1$ hat, so divergiert die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe $\mathfrak{P}_1(\xi\,|\,\xi_0)$ für $\xi > 1$ nach $+\infty$, kann also durch das Hinzutreten des rein imaginären Bestandteils niemals zu einer *konvergenten* Reihe werden. Die Stelle $x = 1$ ist also für $\mathfrak{P}(\xi)$ bzw. $\mathfrak{P}(x)$ eine *singuläre.*

*Zusatz.* Sind die $a_\nu$ statt auf die ganze rechte Halbebene nur auf einen symmetrisch zur positiv-reellen Axe liegenden, weniger als $180^0$ betragenden Winkelraum verteilt, so kann die Voraus-

---

[1]) Aus: $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} (\sqrt{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2})^{\frac{1}{\nu}} = 1$ folgt: $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |\beta_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leqq 1$; *umgekehrt* folgt aus der letzten Beziehung, wegen $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}} = 1$, die erste. Diese darf also, wie im Text geschehen, in dem vorliegenden Zusammenhange durch die andere ersetzt werden.

[2]) Will man diesen Satz nicht als bekannt voraussetzen, so wäre an dieser Stelle mein in der vorigen Nummer angegebener Beweis einzuschieben.

setzung $\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, \Re(\alpha_\nu)^{\frac{1}{\nu}} \equiv \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, \alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}} = 1$ als bereits von selbst erfüllt (s. oben, insbesondere Fußn. 1, S. 355) unterbleiben.

9. Da die an Gleichung (2) anknüpfende Schlußweise keineswegs auf den dort vorliegenden Fall beschränkt ist, daß die *reelle* Reihe *eigentlich divergiert*, vielmehr erhalten bleibt, wenn sie nur *überhaupt divergiert*, so kann sie auch zum Beweise des folgenden *wesentlich allgemeineren* und, soviel mir bekannt ist, trotzdem er sehr nahe zu liegen scheint, *niemals ausgesprochenen Satzes* dienen:

*Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die mit dem Konvergenzradius 1 begabte Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) \equiv \sum_0^\infty {}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) x^\nu$ die singuläre Stelle $x = 1$ besitzt, besteht darin, daß dies zum mindesten bei einer der beiden Reihen $\mathfrak{P}_1(x) \equiv \sum_0^\infty {}^\nu \alpha_\nu x^\nu$* und *$\mathfrak{P}_2(x) \equiv \sum_0^\infty {}^\nu \beta_\nu x^\nu$ der Fall ist.*

*Beweis.* Unter Beibehaltung der in der vorigen Nummer benützten Bezeichnungen hat man, wie dort in Gleichung (2), zunächst für $\xi_0 < \xi < 1$:

$$\mathfrak{P}(\xi) = \mathfrak{P}(\xi \mid \xi_0) = \mathfrak{P}_1(\xi \mid \xi_0) + i\,\mathfrak{P}_2(\xi \mid \xi_0). \tag{3}$$

Sind nun $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ an der Stelle $x = 1$ beide *regulär*, so *konvergieren* $\mathfrak{P}_1(\xi \mid \xi_0)$, $\mathfrak{P}_2(\xi \mid \xi_0)$ noch für gewisse $\xi > 1$ und liefern somit längs der reellen Axe eine analytische Fortsetzung der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, die somit in diesem Falle an der Stelle 1 sich auch *regulär* verhält. Für das Gegenteil ist also *notwendig*, daß mindestens für eine der beiden Reihen $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ die Stelle $x = 1$ eine *singuläre* sein muß.

Angenommen, dies sei für $\mathfrak{P}_1(x)$ zutreffend, so *divergiert* $\mathfrak{P}_1(\xi \mid \xi_0)$ für $\xi > 1$. Da $\mathfrak{P}_1(\xi \mid \xi_0)$, $\mathfrak{P}_2(\xi \mid \xi_0)$ aus lauter reellen Gliedern bestehen, so stellt die eine den *reellen*, die andere mit dem Faktor $i$ behaftet den *imaginären* Teil der Reihe $\mathfrak{P}(\xi \mid \xi_0)$ vor. Die letztere ist aber infolge der Divergenz von $\mathfrak{P}_1(\xi \mid \xi_0)$ gleichfalls *divergent*, mag $\mathfrak{P}_2(\xi \mid \xi_0)$ für $\xi > 1$ *divergieren* oder *konvergieren*. Die Stelle $x = 1$ ist also für $\mathfrak{P}(x)$ eine *singuläre*, insbesondere auch dann, wenn sie es ebenfalls für $\mathfrak{P}_2(x)$ ist.

Da ferner:

$$\frac{1}{i}\,\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_2(x) - i\,\mathfrak{P}_1(x),$$

so folgt aus dem eben bewiesenen, daß die Stelle $x = 1$ für $\frac{1}{i}\,\mathfrak{P}(x)$, also auch für $\mathfrak{P}(x)$ eine *singuläre* ist, falls sie diese Eigenschaft für $\mathfrak{P}_2(x)$ besitzt. —

Sieht man die Singularität der Stelle $x = 1$ für $\mathfrak{P}_1(x)$ im Falle $a_\nu \geqq 0$ als erwiesen an, so erscheint der Satz von Nr. 8 als eine unmittelbare Folgerung aus dem eben bewiesenen.

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß man die vorstehenden Ergebnisse (einschließlich des ehemals „Vivanti-schen" Satzes) noch etwas kürzer als hier herleiten kann aus der bekannten[1]) *notwendigen und hinreichenden* Bedingung für den singulären Charakter einer auf dem Konvergenzkreise mit dem Radius 1 gelegenen Stelle $e$:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\, \tfrac{1}{2} \left| \sum_0^\lambda{}^\nu (\lambda)_\nu\, a_\nu\, e^\nu \right|^{\frac{1}{\lambda}} = 1.$$

Da dieser Ausdruck immer nur $\leqq 1$ ausfallen kann und da andererseits, wegen Vorhandenseins mindestens *einer* singulären Stelle für $|x| = 1$, der Wert 1 mindestens *ein*mal auftreten muß, so ist das bei *reellen* $a_\nu \geqq 0$ sicher der Fall für $e = 1$ — womit der ehemals „Vivanti'sche" Satz bewiesen ist.

Aus den Ungleichungen:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\, \tfrac{1}{2} \left| \sum_0^\lambda{}^\nu (\lambda)_\nu\, a_\nu \right|^{\frac{1}{\lambda}} \begin{cases} \geqq \overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}}\, \tfrac{1}{2} \left| \sum\limits_0^\lambda{}^\nu (\lambda)_\nu\, \alpha_\nu \right|^{\frac{1}{\lambda}} \\ \geqq \overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}}\, \tfrac{1}{2} \left| \sum\limits_0^\lambda{}^\nu (\lambda)_\nu\, \beta_\nu \right|^{\frac{1}{\lambda}} \end{cases}$$

ergibt sich dann leicht alles weitere.

---

[1]) S. z. B. dieser Berichte Jahrgang 1912, S. 19, Gleichung (14).