Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

II. Rißmaßstab und Querrißmaßstab.

Von Frank Löbell in München.

Vorgelegt von Herrn G. Faber am 17. Januar 1947.

Wie in einer früheren Arbeit[1] sollen im folgenden die Berührebenen ε und ε' zweier einander punktweise zugeordneter reeller Flächen $\mathfrak{x}(u, v) \to \mathfrak{y}(u, v)$ des euklidischen Raumes in entsprechenden Punkten $P \to P'$ betrachtet werden, nachdem diese Ebenen so weit parallel verschoben sind, bis die Punkte P und P' in den Bezugspunkt O fallen.

1. Wir wollen diesmal von der Frage nach den Richtungen derjenigen Strahlen ausgehen, die wir erhalten, wenn wir den Endpunkt jedes Vektors $d\mathfrak{y}$ senkrecht auf die Gerade projizieren, die durch seinen Anfangspunkt O parallel zu dem Vektor $d\mathfrak{x}$ läuft, dem $d\mathfrak{y}$ entspricht. Der so erhaltene Riß von $d\mathfrak{y}$ auf $d\mathfrak{x}$ ist, als Vektor betrachtet, $d\mathfrak{x} \cdot \dfrac{d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}$; der Projektionsstrahl hat also die Richtung

$$\left(d\mathfrak{y} - d\mathfrak{x} \cdot \frac{d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}\right) \cdot d\mathfrak{x}^2 = d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}. \tag{1}$$

Mit Hilfe der Fundamentalgrößen 1. O. E, F, G des Koordinatennetzes $\mathfrak{x}(u, v)$ und der bei früherer Gelegenheit[2] eingeführten gemischten Fundamentalgrößen 1. O.

$$\bar{E} = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u, \quad \bar{F}_1 = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v, \quad \bar{F}_2 = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u, \quad \bar{G} = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v$$

des Flächenpaares $\mathfrak{x}(u, v) \to \mathfrak{y}(u, v)$ können wir, wenn wir noch die Abkürzung

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 2\,\bar{F}$$

einführen, wegen $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u\, du + \mathfrak{x}_v\, dv$, $d\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_u\, du + \mathfrak{y}_v\, dv$ für den Vektor (1) auch schreiben:

---

[1] Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl. 1946 S. 174 ff.

[2] Math. Zeitschr. 49 (1943) S. 428.

$$(E\mathfrak{y}_u - \overline{E}\mathfrak{x}_u)\,du^3 + (E\mathfrak{y}_v + 2F\mathfrak{y}_u - \overline{E}\mathfrak{x}_v - 2\overline{F}\mathfrak{x}_u)\,du^2\,dv + (2F\mathfrak{y}_v + G\mathfrak{y}_u - 2\overline{F}\mathfrak{x}_v - \overline{G}\mathfrak{x}_u)\,du\,dv^2 + (G\mathfrak{y}_v - \overline{G}\mathfrak{x}_v)\,dv^3;$$

die Projektionsstrahlen sind demnach i. allg. den Mantellinien eines Kegels 3. O. parallel, der jedoch entarten kann.

2. Interessant ist nun der Quotient, der in (1) als Faktor bei $d\mathfrak{x}$ steht: Bedeutet ζ den Winkel zwischen $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ und m den Maßstab der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ für die Richtung $d\mathfrak{x}$ an der Stelle P, so ist

$$\frac{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} = m\cos\zeta. \tag{2}$$

Die Zahl

$$n = m\cos\zeta \tag{2'}$$

wollen wir den *Rißmaßstab* der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ für die Richtung $d\mathfrak{x}$ an der Stelle (u, v) nennen. Für den Abbildungsmaßstab $\overline{m}$ und den Rißmaßstab $\overline{n}$ der inversen Abbildung $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ für dasselbe Linienelementenpaar gilt

$$\overline{m} = 1 : m, \quad \overline{n} = \frac{d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}^2} = \overline{m}\cos\zeta,$$

oder

$$m \cdot \overline{m} = 1, \quad \text{und} \quad m : n = \overline{m} : \overline{n}.$$

Nach dem Gesagten ist für die Richtung $du : dv$

$$= n\,\frac{\overline{E}\,du^2 + 2\,\overline{F}\,du\,dv + \overline{G}\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{3}$$

Da stets durch eine reelle Parametertransformation — ohne weitergehende Differenzierbarkeitsanforderungen wenigstens an der Stelle (u, v) — F und $\overline{F}$ zugleich zum Verschwinden gebracht werden können, so schließen wir nach bekannten Gedankengängen, daß es in jeder Berührebene ε zwei reelle, zueinander senkrechte Richtungen gibt, für die n Extremwerte annimmt, wenn nicht alle Werte von n untereinander gleich sind; die charakteristische Bedingung für das Eintreten dieser Ausnahme lautet:

$$E : F : G = \overline{E} : \overline{F} : \overline{G}. \tag{4}$$

Speziell ordnet sich diesem Fall auch die Möglichkeit unter, daß für alle Richtungen $dv : du$ $n = 0$ ist, d. h. die Flächen sich an einer Stelle durch Orthogonalität der Linienelemente entsprechen, wofür notwendig und hinreichend ist, daß dort gilt:

$$\overline{E} = \overline{F} = \overline{G} = 0. \tag{5}$$

Im allgemeinen tritt senkrechte Lage von $d\mathfrak{x}$ zu $d\mathfrak{y}$ für zwei Richtungen ein, die reell verschieden, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, je nachdem gilt

$$\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 \gtreqless 0. \tag{6}$$

3. Die extremen Rißmaßstäbe können wir dadurch berechnen, daß wir die allgemeingültige, aus (3) folgende Beziehung, in der $dv : du = \varkappa$ gesetzt werde,

$$En - \overline{E} + 2\,(Fn - \overline{F})\,\varkappa + (Gn - \overline{G})\,\varkappa^2 = 0$$

bei festgehaltenem u und v nach $\varkappa$ differenzieren und $\frac{\partial n}{\partial \varkappa} = 0$ setzen; wir finden so für die Werte von $\varkappa$, die die Richtungen extremer Werte n geben:

$$(Fn - \overline{F}) + (Gn - \overline{G})\,\varkappa = 0.$$

Elimination von $\varkappa$ aus den beiden vorstehenden Relationen führt auf die Gleichung

$$(En - \overline{E})\,(Gn - \overline{G}) - (Fn - \overline{F})^2 = 0$$

oder

$$(EG - F^2)\,n^2 - (E\overline{G} + G\overline{E} - 2\,F\overline{F})\,n + \overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = 0 \tag{7}$$

für die Extremwerte n_1 und n_2 von n; Elimination von n ergibt die Gleichung

$$E\overline{F} - F\overline{E} + (E\overline{G} - G\overline{E})\,\varkappa + (F\overline{G} - G\overline{F})\,\varkappa^2 = 0 \qquad 8)$$

für die Richtungsgrößen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, die die nach dem oben Gesagten zueinander senkrechten Richtungen extremer Rißmaßstäbe bestimmen. Es ist aber zu beachten, daß (8) auch identisch in $\varkappa$ erfüllt sein kann, dann und nur dann nämlich, wenn (4) gilt oder

$$\overline{E} = \lambda E, \quad \overline{F} = \lambda F, \quad \overline{G} = \lambda G \tag{4'}$$

ist; (7) hat dann zusammenfallende Wurzeln $n_1 = n_2 = \lambda$, und es gehören zu allen Richtungen $d\mathfrak{x}$ Rißmaßstäbe vom gleichen Wert $n = \lambda$.

Wenn wir die schon bei früherer Gelegenheit eingeführten Differentialinvarianten[3] gegenüber der Gruppe der gemeinsamen Parametertransformationen, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$, heranziehen und die sechs aus ihnen gebildeten skalaren Invarianten vom Gewicht 2, die die Größen und Winkel der Vektoren $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ festlegen, benützen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{j}_1^2 = EG - F^2 = W^2, \quad \mathfrak{j}_2^2 = E'G' - F'^2, \quad \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2, \\ &\mathfrak{j}_1\mathfrak{j} = E\bar{G} + G\bar{E} - 2F\bar{F}, \quad \mathfrak{j}_2\mathfrak{j} = \bar{E}G' + \bar{G}E' - 2\bar{F}F', \\ &\mathfrak{j}^2 = EG' + GE' - 2FF' + 2\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1^2 - \bar{F}_2^2, \end{aligned} \tag{9}$$

wenn wir ferner beachten, daß die Differentialinvariante[3] $j = \bar{F}_1 - \bar{F}_2$ ist, so können wir (7) auf die Form bringen:

$$\mathfrak{j}_1^2 n^2 - \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}\, n + \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 - \tfrac{1}{4} j^2 = 0 \tag{7'}$$

oder mit Hilfe des in einer früheren Arbeit[4] eingeführten vektoriellen Polynomes $\mathfrak{l}(\lambda) = \mathfrak{j}_1\lambda^2 - \mathfrak{j}\lambda + \mathfrak{j}_2$ auf die Gestalt:

$$4\,\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{l}(n) - j^2 = 0. \tag{7''}$$

4. Wir wollen diese Verhältnisse genauer dadurch studieren, daß wir die Vektoren $d\mathfrak{x}$ als Einheitsvektoren, also als Radien des Einheitskreises in ε um den Mittelpunkt O wählen, so daß die Vektoren $d\mathfrak{y}$ die Halbmesser der Tissotschen Indikatrix[5] in ε' bilden.

Sind $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ Einheitsvektoren von Hauptrichtungen[5] in ε, $m_1\mathfrak{e}_1'$ und $m_2\mathfrak{e}_2'$ die ihnen entsprechenden Vektoren in ε', wobei m_1 und m_2 die Hauptmaßstäbe[5] der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ an der Stelle (u, v) bedeuten, so kann $d\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi$ gesetzt

---

[3] Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 218 ff. Im folgenden werden auch die absoluten Invarianten $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{j}_1 : W$ usw. benützt.

[4] Vgl. die in Fußnote 1 zitierte Arbeit S. 177. — Auch die Bestimmungsgleichung für die Hauptmaßstäbe m_1 und m_2 kann mit Hilfe des Polynoms $\mathfrak{l}$ auf eine einfache Form gebracht werden:

$$\mathfrak{l}(m)\,\mathfrak{l}(-m) - j^2 m^2 = 0;$$

vgl. die in Fußnote 3 angeführte Arbeit S. 232, Gleichung (22).

[5] Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, 1942, S. 301 f. u. S. 305.

werden, und es wird dann $d\mathfrak{y} = m_1 \mathfrak{e}_1' \cos\varphi + m_2 \mathfrak{e}_2' \sin\varphi$, also der Rißmaßstab

$$\begin{aligned} n(\varphi) &= (\mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi)(m_1 \mathfrak{e}_1' \cos\varphi + m_2 \mathfrak{e}_2' \sin\varphi) = \\ &= m_1 \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1' \cos^2\varphi + (m_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_1' + m_2 \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2') \cos\varphi \sin\varphi + \\ &+ m_2 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_2' \sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{3'}$$

Hiernach ist der Ort der Punkte, in die die Punkte der Tissotellipse in ε' bei senkrechter Projektion auf die Durchmesser der entsprechenden Punkte des Einheitskreises in ε übergehen, die Kurve 6. O. $r = n(\varphi)$, wo r und φ Polarkoordinaten in ε mit O als Pol und $\mathfrak{e}_1$ als Nullstrahl bedeuten. Diese Kurve können wir uns aus dem Mittelpunktskegelschnitt $r'^2 = 1 : n(\varphi)$, der auch in ein Parallelenpaar ausarten, sogar ganz ins Unendliche rücken kann, durch die Transformation $r = 1 : r'^2$ hervorgegangen denken. Dies macht deutlich, daß es, wie wir oben schon sahen, i. allg. genau zwei zueinander senkrechte Richtungen in ε gibt, für die n extreme Werte annimmt, nämlich die Hauptachsenrichtungen dieses Kegelschnittes; wir nennen diese die Hauptrißrichtungen, die Extremwerte von n die Hauptrißmaßstäbe an der Stelle P. Die Asymptoten des Kegelschnitts weisen in die Richtungen, in denen die Kurve $r = n(\varphi)$ durch ihren singulären Punkt O hindurchgeht; das sind die Richtungen $d\mathfrak{x}$, die — wegen $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x}^2 = 0$ — senkrecht zu $d\mathfrak{y}$ sind, die demnach symmetrisch zu den Hauptrißrichtungen liegen. Die Kurve schrumpft in den Punkt O zusammen, wenn jede Richtung $d\mathfrak{x}$ senkrecht zu ihrer entsprechenden $d\mathfrak{y}$ ist, wenn also Entsprechen durch Orthogonalität der Linienelemente vorliegt.

5. Der Rißmaßstab n einer beliebigen Richtung $d\mathfrak{x}$ läßt sich durch die Hauptrißmaßstäbe n_1 und n_2 und den Winkel χ ausdrücken, den $d\mathfrak{x}$ mit derjenigen Hauptrißrichtung bildet, deren Rißmaßstab mit n_1 bezeichnet wurde. Es seien nämlich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ senkrechte Einheitsvektoren in ε, zu denen die Werte $n = n_1$ und $n = n_2$ gehören; $\mathfrak{f}_1'$ und $\mathfrak{f}_2'$ seien die $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ entsprechenden Vektoren in ε', wobei i. allg. $\mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2' \neq 0$ ist. Es ist dann für $d\mathfrak{x} = \mathfrak{f}_1 \cos\chi + \mathfrak{f}_2 \sin\chi$

$$\begin{aligned} n &= (\mathfrak{f}_1 \cos\chi + \mathfrak{f}_2 \sin\chi)(\mathfrak{f}_1' \cos\chi + \mathfrak{f}_2' \sin\chi) \\ &= \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1' \cos^2\chi + (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2' + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_1') \cos\chi \sin\chi + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_2' \sin^2\chi; \end{aligned}$$

wir erkennen, wenn wir $\chi = 0$ und $\chi = \frac{\pi}{2}$ einsetzen, daß

$$\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1' = n_1, \quad \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_2' = n_2$$

ist; da für $\chi = 0$ und für $\chi = \frac{\pi}{2}$ $\frac{\partial n}{\partial \chi} = 0$ sein sollte, muß ferner gelten:

$$\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2' + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_1' = 0.$$

Hieraus folgt aber

$$n = n_1 \cos^2\chi + n_2 \sin^2\chi. \tag{10}$$

Für die zu $d\,\mathfrak{x}$ senkrechte Richtung $d\,\mathfrak{x}^* = -\mathfrak{f}_1 \sin\chi + \mathfrak{f}_2 \cos\chi$ wird hiernach der Rißmaßstab

$$n^* = n_1 \sin^2\chi + n_2 \cos^2\chi. \tag{10'}$$

Die Rißmaßstäbe für zwei zueinander senkrechte Linienelemente der Fläche $\mathfrak{x}$ genügen folglich den Beziehungen

$$n + n^* = n_1 + n_2, \tag{11a}$$
$$n - n^* = (n_1 - n_2) \cos 2\chi; \tag{11b}$$

hierbei gilt vermöge (7')

$$n_1 + n_2 = \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} : \mathfrak{j}_1^2 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}. \tag{11c}$$

Für die Winkel $\chi = \psi$, die die Richtungen verschwindenden Rißmaßstabes mit $\mathfrak{f}_1$ bilden, finden wir aus (10),

$$n_1 \cos^2\psi + n_2 \sin^2\psi = 0. \tag{12}$$

Demnach bilden die Richtungen $d\,\mathfrak{x}$, die auf ihren entsprechenden Richtungen $d\,\mathfrak{y}$ senkrecht stehen, einen rechten Winkel miteinander, wenn $n_1 = -n_2 \neq 0$ ist; wegen (11c) ist dann

$$\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} = 0, \tag{13}$$

was nach (7') auch in dem Fall gilt, in dem die Gleichung (12) identisch in ψ erfüllt ist, wenn nämlich $n_1 = n_2 = 0$ ist.

Aus dem Begriff der Hauptrichtungen folgt somit als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jeder Hauptrichtung eine zu ihr senkrechte Richtung entspricht:

$$\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} = \mathfrak{j}_2 \mathfrak{j} = 0. \tag{13'}$$

Wie die Summe $n + n^*$ wollen wir auch das Produkt $n \cdot n^*$ berechnen: Nach (10) und (10′) wird

$$\begin{aligned} nn^* &= (n_1 \cos^2\chi + n_2 \sin^2\chi)\,(n_1 \sin^2\chi + n_2 \cos^2\chi) \\ &= (n_1^2 + n_2^2)\cos^2\chi \sin^2\chi + n_1 n_2 (\cos^4\chi + \sin^4\chi), \end{aligned}$$

also

$$nn^* = n_1 n_2 + (n_1 - n_2)^2 \cos^2\chi \sin^2\chi. \tag{14}$$

Hiernach ist $n_1 n_2$ das Minimum der Werte, die die Produkte nn^* je zweier zu senkrechten Richtungen $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{x}^*$ gehöriger Rißmaßstäbe an der Stelle P annehmen können, während das Maximum von $n\,n^*$, $\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)^2$, für $\chi = \pm\frac{\pi}{4}$ angenommen wird und ersichtlich nie negativ ist.

6. Die in (14) auftretende Funktion $(n_1 - n_2)^2$, im wesentlichen die Diskriminante der Gleichung (7) oder (7′), für die wir also

$$(n_1 - n_2)^2 = J^2 + (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z})^2 - 4\,\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2 \tag{15}$$

erhalten, läßt sich noch mit einer anderen geometrischen Größenart in Zusammenhang bringen, die wir folgendermaßen einführen:

Es sei $d\mathfrak{x}$ ein Einheitsvektor in ε, $d\mathfrak{y}$ der ihm entsprechende Vektor in ε'; wie wir den Rißmaßstab als Projektion von $d\mathfrak{y}$ auf $d\mathfrak{x}$ erklärten, so bilden wir jetzt die Projektion von $d\mathfrak{y}$ auf den aus $d\mathfrak{x}$ durch Stürzen in ε hervorgehenden Einheitsvektor $d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x}$, wobei $\mathfrak{c} = \mathfrak{Z}_1$ der Normalvektor der Fläche $\mathfrak{x}$ in P ist. Das Skalarprodukt $d\mathfrak{x}^* d\mathfrak{y}$, das wir somit betrachten wollen, oder, wenn wir bei $d\mathfrak{x}$ beliebige Länge zulassen, die Größe

$$q = \frac{d\mathfrak{x}^*\, d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{\mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} \tag{16}$$

nennen wir den zur Richtung $d\mathfrak{x}$ gehörenden *Querrißmaßstab* der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ an der Stelle P; er ergibt sich zu

$$q = \frac{(E\bar{F}_2 - F\bar{E})\,du^2 + (E\bar{G} - G\bar{E} - F\bar{F}_1 + F\bar{F}_2)\,du\,dv + (F\bar{G} - G\bar{F}_1)\,dv^2}{W\,(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2)} \tag{16'}$$

Damit hat eine zu den bisher vorwiegend gebrauchten Grundformen eines Flächenpaares hinzutretende Differentialform, die schon früher[6] in einem speziellen Fall in Erscheinung trat, ihre anschauliche Deutung gefunden.

7. Wir wollen die Querrißmaßstäbe für die beiden senkrechten Einheitsvektoren $d\mathfrak{x} = \mathfrak{f}_1 \cos\chi + \mathfrak{f}_2 \sin\chi$ und $d\mathfrak{x}^* = -\mathfrak{f}_1 \sin\chi + \mathfrak{f}_2 \cos\chi$ berechnen, wobei $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ die gleiche Bedeutung wie in Abschnitt 5 haben sollen:

$$\begin{aligned} q &= (-\mathfrak{f}_1 \sin\chi + \mathfrak{f}_2 \cos\chi)\,(\mathfrak{f}_1' \cos\chi + \mathfrak{f}_2' \sin\chi) \\ &= (\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_2' - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1') \cos\chi \sin\chi + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1' \cos^2\chi - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2' \sin^2\chi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q^* &= (-\mathfrak{f}_1 \cos\chi - \mathfrak{f}_2 \sin\chi)\,(-\mathfrak{f}_1' \sin\chi + \mathfrak{f}_2' \cos\chi) \\ &= (\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1' - \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_2') \cos\chi \sin\chi + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1' \sin^2\chi - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2' \cos^2\chi. \end{aligned}$$

Da, wie wir oben (in Abschnitt 5) sahen,

$$\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1' = n_1, \quad \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_2' = n_2, \quad \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2' = -\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1',$$

ferner wegen $\mathfrak{j}_1^2 = (\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2)^2 = 1$ per definitionem $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2' - \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1' = J$ ist, so erhalten wir

$$q = (n_2 - n_1) \cos\chi \sin\chi - \tfrac{1}{2} J. \tag{17}$$

Hiernach nimmt q für $\chi = \frac{\pi}{4}$ und für $\chi = -\frac{\pi}{4}$ Extremwerte an:

$$q_{(1)} = \tfrac{1}{2}(n_2 - n_1 - J) \text{ und } q_{(2)} = \tfrac{1}{2}(n_1 - n_2 - J). \tag{17'}$$

Berechnen wir nach (17) auch q^*, so finden wir

$$q + q^* = -J, \tag{18a}$$

$$q - q^* = (n_2 - n_1) \sin 2\chi. \tag{18b}$$

Damit haben wir eine neue Deutung der Schiefe J gewonnen: ihr negativer Wert ist nach (18a) das Doppelte des „mittleren Querrißmaßstabes".

Ferner erkennen wir, wenn wir in (18b) $\chi = 0$ und $\chi = \frac{\pi}{2}$ setzen, die Gültigkeit des Satzes:

Die Querrißmaßstäbe der Hauptrißrichtungen sind einander gleich.

Die aus (18a) und (18b) folgende Beziehung

[6] Vgl. Math. Zeitschr. 49 (1943) S. 434, Gleichungen (14) und (14').

$$q\,q^* = \tfrac{1}{4}\,(J^2 - (n_2 - n_1)^2 \sin^2 2\,\chi) \tag{18}$$

zeigt, daß $q q^*$ seinen Maximalwert $\frac{1}{4}\,J^2$ für die Hauptrißrichtungen, seinen Minimalwert $\frac{1}{4}\,(J^2 - (n_2 - n_1)^2) = \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 - \frac{1}{4}\,(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J})^2$ für die Winkelhalbierenden der Hauptrißrichtungen annimmt.[7]

8. Rißmaßstab und Querrißmaßstab sind Verallgemeinerungen geläufiger Begriffe der Flächentheorie: Ist $\mathfrak{y}$ die Einheitskugel um O, auf die $\mathfrak{x}$ nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen abgebildet sei, so ist n die Biegung (Normalkrümmung) und q die negative Drillung (geodätische Windung) der Fläche $\mathfrak{x}$ in der Richtung $d\mathfrak{x}$ an der Stelle P;[8] ist nämlich $\mathfrak{a}$ der Einheitsvektor von $d\mathfrak{x}$, $ds = \mathfrak{a}\,d\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{c}$ der Einheitsvektor der Normalen von $\mathfrak{x}$ in P ist, so daß $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}\,(u, v)$ ist, so ist bekanntlich[9] $b = \mathfrak{a}\,\dfrac{d\mathfrak{c}}{ds}$ die Biegung und $a = -\mathfrak{b}\,\dfrac{d\mathfrak{c}}{ds}$ die Drillung.

Erinnern wir uns ferner, daß $a\,a^* + b\,b^*$ das Wölbungsmaß (Krümmungsmaß) der Fläche $\mathfrak{x}$ an der Stelle P ist, so regt dies dazu an, die Funktion[10] $n\,n^* + q\,q^* = n_1 n_2 + \left(\dfrac{q - q^*}{2}\right)^2 + q\,q^* = n_1 n_2 + \frac{1}{4} J^2$, d. h. gemäß (7′) die Größe

$\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ als Verallgemeinerung des Krümmungsmaßes

und ähnlich die Größe

$\dfrac{n_1 + n_2}{2} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}$ als Verallgemeinerung der mittleren Krümmung

anzusehen.

Die Lehre von den Flächenkrümmungen ist demnach zum Teil in der Theorie der Flächenabbildungen enthalten.

---

[7] Aus (11b) und (18b) folgt $(n - n^*)^2 + (q - q^*)^2 = (n_1 - n_2)^2$.

[8] Zu diesen Bezeichnungen vgl. man Jahresber. d. DMV 53 (1943), 2. Abt., S. 33.

[9] Siehe Jahresber. d. DMV 39 (1930) S. 174, Gleichungen (14) und (15); die oben angegebenen Ausdrücke für $b = N$ und $a = T$ ergeben sich, wenn (14) skalar mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{f}$ und mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$ multipliziert und $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \dfrac{d\mathfrak{c}}{ds}$ (Gl. (15)) eingesetzt wird.

[10] Man vergleiche (14) und (18b), ferner (18a).