Ueber

die kanonischen Perioden

der

Abel'schen Integrale.

(Zweite Abhandlung.)

Von

J. Lüroth

in Freiburg in Baden.

In einer Arbeit, welche in die Abhandlungen der Akademie (XV. Band II. Abtheil. Seite 331 ff.) aufgenommen wurde, habe ich die kanonischen Perioden der Abel'schen Functionen mit Benutzung der Riemann'schen Fläche abgeleitet.[1]) Es schien mir jedoch interessant zu versuchen, ob nicht auch ohne dieses Hilfsmittel es möglich wäre, jene Perioden zu finden, in ähnlicher Weise wie dies Clebsch und Gordan gethan haben, indem sie einfache Verzweigungspunkte voraussetzten. In der folgenden Arbeit erlaube ich mir meine Resultate darzulegen. Ueber die algebraische Gleichung, welche der Betrachtung zu Grunde liegt, sind gar keine speciellen Annahmen gemacht, so dass die Verzweigungspunkte einfache oder mehrfache sein können. Geometrische Betrachtungen habe ich möglichst vermieden und die Riemann'sche Fläche durch eine „Verzweigungstafel“ ersetzt, so dass die Resultate, die man sonst wohl (auch in meiner früheren Arbeit) aus der Betrachtung von Linienzügen herleitet, hier aus Reihen von Buchstaben abgelesen werden. Besonders gilt dies vom § 10, in welchem gezeigt wird, dass und wie man sich das Hinschreiben der langen Buchstabenreihen ersparen und dieselben nur auf die nothwendige Länge beschränken kann. Wenn auch die Arbeit grösstentheils eine Uebersetzung meiner früheren ist, so habe ich doch geglaubt mit Rücksicht auf die ungewohnten Betrachtungen etwas ausführlicher sein zu dürfen. Ich habe mich dabei auf Integrale erster Gattung beschränkt,

---

1) Zu den Literaturnachweisen ist noch nachzutragen: Casorati, Annali di matem. II. Ser. Tom. III Seite 1, wo eine Vereinfachung des 4. Kap. von Clebsch und Gordan gegeben wird. Auch das Diagramm, dessen ich mich in meiner früheren Arbeit bediente, findet sich schon in einer Fussnote zur Seite 123 des Werkes Teorica delle funzioni di variabili complesse, Bd. I, Pavia 1868, von Casorati angedeutet.

einmal weil die andern sich leicht dem gegebenen Schema einfügen und dann weil die Ableitung der Gleichungen, welche an die Stelle von Gl. XVI treten, Erörterungen über die Normirung der Integrale zweiter und dritter Gattung nöthig gemacht hätte, welche nur in einer ausführlichen Theorie der Abel'schen Functionen ihre passende Stelle finden können.

§ 1.

Es sei $f(x\,y) = o$ eine algebraische, irreducibele Gleichung zwischen den beiden complexen Variabeln x und y, von welchen x, wie gebräuchlich, durch einen Punkt in einer Ebene dargestellt werde.

Die durch jene Gleichung definirte Function y von x habe σ Verzweigungspunkte $w_1, w_2, \ldots w_\sigma$, von welchen auch einer im Unendlichen liegen kann. Für einen Werth x_0 von x, der keinem Verzweigungspunkt entspricht, gibt es, wenn $f(x\,y)$ in Bezug auf y vom ν^{ten} Grade ist, ν Potenzreihen $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ die nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten und für y gesetzt die Gleichung $f(x\,y) = o$ erfüllen.

Wenn man eines dieser Functionselemente von x_0 auf einem Wege fortsetzt nach x_0 zurück, der in seinem Innern keinen der Punkte w_i einschliesst oder, wenn alle Verzweigungspunkte im Endlichen liegen, sie alle einschliesst, so kommt man in x_0 mit demselben Functionselemente an, mit dem man ausgegangen war. Wenn aber der Weg nicht jene Bedingungen erfüllt, so kann man zwar mit demselben Element in x_0 ankommen mit dem man ausgegangen war, aber es braucht nicht der Fall zu sein. Da man irgend einen Weg von x_0 nach x_0 zurück, ohne das Element mit dem man ankommt zu ändern, aus Wegen zusammensetzen kann, die je nur einen Verzweigungspunkt umschliessen, so braucht man nur zu wissen wie die Functionselemente sich verändern, wenn sie über einen solch' einfacheren Weg fortgesetzt werden. Dies gilt auch dann, wenn einer der Verzweigungspunkte im Unendlichen liegt. Man hat dann nur unter dem Wege, der diesen Verzweigungspunkt allein umschliesst, einen Weg zu verstehen, der alle endlichen Verzweigungspunkte in seinem Innern enthält. Für unseren Zweck kann aber ein Weg, der nur einen Verzweigungspunkt w_i umschliesst, ohne Schaden wieder zusammengezogen werden auf eine Schleife, d. h. einen Weg der von

x_0 bis in die Nähe von w_i längs einer, sich selbst nicht schneidenden, Curve verläuft, dann w_i in einem kleinen Kreise umgibt, der keinen andern Verzweigungspunkt enthält, und schliesslich wieder längs der schon benützten Curve zurück nach x_0 führt. Entspricht w_i dem Werthe ∞ von x, so besteht die Schleife aus einer von x_0 ausgehenden Curve und einem an ihr sitzenden Kreise von solchem Radius, dass er alle endlichen Verzweigungspunkte einschliesst.

Setzt man nun die sämmtlichen Elemente $y_1, y_2, .. y_\nu$ über eine bestimmte Schleife von x_0 fort bis nach x_0 zurück, so findet man bei der Rückkehr, der Reihe nach entsprechend, die Elemente $y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_\nu}$, wobei $\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_\nu$ eine Permutation der Zahlen $1\ 2 \dots \nu$ ist. Die entsprechende Substitution kann man immer in eine Reihe von Cyklen zerlegen

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{k})\ (\mathfrak{l}\,\mathfrak{m} \dots \mathfrak{r}) \dots\dots$$

so dass durch jene Fortsetzung $y_\mathfrak{a}$ in $y_\mathfrak{b}$, $y_\mathfrak{b}$ in $y_\mathfrak{c}$ .. schliesslich $y_\mathfrak{k}$ wieder in $y_\mathfrak{a}$ übergeht; dass ferner $y_\mathfrak{l}$ in $y_\mathfrak{m}$, .. $y_\mathfrak{r}$ in $y_\mathfrak{l}$ übergeht u. s. w. Natürlich können auch einige Elemente in sich selbst übergeführt werden. Die Reihenfolge $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ hängt aber auch von dem Sinne ab, in welchem man den Kreis der Schleife durchläuft. Wir wollen bei einem endlichen oder unendlichen Verzweigungspunkt die Umlaufsrichtung als positiv oder vorwärts bezeichnen, welche den Punkt zur Rechten hat, die entgegengesetzte aber negativ oder rückwärts nennen, indem wir annehmen in der x-Ebene liege die positive Axe des Imaginären rechts von der positiven Axe des Reellen. Liefert dann ein positiver Umlauf die Cyklen

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \dots \mathfrak{k})\ (\mathfrak{l}\,\mathfrak{m} \,..\, \mathfrak{r}) \dots .$$

so liefert ein negativer die Cyklen

$$(\mathfrak{k} \dots \mathfrak{b}\,\mathfrak{a})\ (\mathfrak{r} \dots \mathfrak{m}\,\mathfrak{l}) \dots .$$

Zu jedem Verzweigungspunkte gehören ein oder mehrere Cyklen. Die Gesammtzahl aller Cyklen aller Verzweigungspunkte sei mit τ bezeichnet.

Die Zahl σ der Verzweigungspunkte muss mindestens $= 2$ sein. Denn gäbe es nur einen, so würde eine ihn umschliessende Schleife gewisse Vertauschungen von Elementen hervorbringen und andererseits doch, weil sie alle Verzweigungspunkte umschlösse, keine Aenderungen hervorbringen können.

Wir wollen zwischen Curven und Wegen unterscheiden. Jede auf der x-Ebene gezogene Linie ist eine Curve. Hat sie einen Anfang in x_0 oder geht sie, wenn sie geschlossen ist, durch x_0, so kann man sie mit jedem der Elemente $y_1 y_2 .. y_\nu$ durchlaufen, oder jedes dieser Elemente längs ihr fortsetzen und jede solche Fortsetzung wollen wir einen Weg nennen. Zu jeder Curve gehören also ν Wege, dagegen zu jedem Wege nur eine Curve. Wenn ein Weg in x_0 beginnt und endigt, so wollen wir das Anfangselement und das Endelement durch dem Namen des Weges angehängte Zeiger 1 bez. 2 andeuten. Dagegen soll allgemein ein dem Namen des Weges beigesetzter Accent bezeichnen, dass der Weg rückwärts durchlaufen werden soll. Somit ist, unter A einen Weg verstanden, der in x_0 mit $y_\mathfrak{a}$ beginnt und mit $y_\mathfrak{b}$ endigt, $A_1 = y_\mathfrak{a}$, $A_2 = y_\mathfrak{b}$, $A_1' = y_\mathfrak{b}$, $A_2' = y_\mathfrak{a}$. Ein Weg ist geschlossen, wenn die zugehörige Curve geschlossen ist und wenn bei ihm Endelement und Anfangselement übereinstimmen. Es kann sein, dass eine geschlossene Curve nur dann einen geschlossenen Weg liefert, wenn man bestimmte Elemente über sie fortsetzt, dass dagegen bei andern Elementen das Anfangs- vom Endelement verschieden ist. Hienach gehören zu jeder Schleife, wenn man sie im positiven Sinn beschrieben annimmt, ν Wege, die wir als Uebergänge bezeichnen wollen. Sind die Cyklen des Punktes w_i die oben Seite 5 angeführten, so ist also ein Uebergang derjenige Weg, welcher längs der Schleife $y_\mathfrak{a}$ in $y_\mathfrak{b}$ fortsetzt, indem er die Schleife positiv umläuft; ein zweiter Uebergang führt $y_\mathfrak{b}$ in $y_\mathfrak{c}, \ldots$ einer $y_\mathfrak{l}$ in $y_\mathfrak{m}$ über u. s. w. Wenn man die Schleife, mit $y_\mathfrak{b}$ beginnend, rückwärts durchläuft, so kommt man wieder mit $y_\mathfrak{a}$ in x_0 an. Wir wollen dann sagen der Uebergang führe vorwärts von $y_\mathfrak{a}$ zu $y_\mathfrak{b}$ und rückwärts von $y_\mathfrak{b}$ zu $y_\mathfrak{a}$. Durchläuft man die Schleife rückwärts mit $y_\mathfrak{a}$, so kommt man zu $y_\mathfrak{f}$, daher ein Uebergang vorwärts von $y_\mathfrak{f}$ zu $y_\mathfrak{a}$ und rückwärts von $y_\mathfrak{a}$ zu $y_\mathfrak{f}$ führt. Zu jeder Schleife gehören somit ν Uebergänge, so dass es deren im Ganzen $\nu\sigma$ gibt. Zu jedem Uebergange gehören zwei Functionselemente, die aber nicht verschieden zu sein brauchen.

Jeder Uebergang sei mit einem Buchstaben (hier kleine lateinische oder zuweilen deutsche) bezeichnet. Führt der Uebergang a von $y_\mathfrak{a}$

zu y_b, so führt a' von y_b zu y_a und entsprechend der obigen Festsetzung ist dann $a_1 = a_2' = y_a$, $a_2 = a_1' = y_b$.

[Beispiel: Es sei $\nu = 7$, $\sigma = 3$. Zu den 3 nach $w_1\, w_2\, w_3$ gehenden Schleifen mögen bez. die folgenden Substitutionen der Indices der Elemente gehören

$$\begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,3\,2\,5\,6\,7\,4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,3\,4\,6\,7\,2\,1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 6\,5\,3\,2\,1\,7\,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

mit den Cyklen

$$1(2\,3)(4\,5\,6\,7) \qquad (1\,5\,7)(2\,3\,4\,6) \qquad 3(1\,6\,7\,4\,2\,5)$$

so dass $\tau = 7$ ist.

Die hier auftretenden $3 \cdot 7$ Uebergänge seien wie folgt bezeichnet:

bei w_1		w_2		w_3	
$y_1\, y_1$	a	$y_1\, y_5$	h	$y_1\, y_6$	p
$y_2\, y_3$	b	$y_2\, y_3$	i	$y_2\, y_5$	q
$y_3\, y_2$	c	$y_3\, y_4$	k	$y_3\, y_3$	r
$y_4\, y_5$	d	$y_4\, y_6$	l	$y_4\, y_2$	s
$y_5\, y_6$	e	$y_5\, y_7$	m	$y_5\, y_1$	t
$y_6\, y_7$	f	$y_6\, y_2$	n	$y_6\, y_7$	u
$y_7\, y_4$	g	$y_7\, y_1$	o	$y_7\, y_4$	v

Die Schleife um w_1 ist hier zwar wie alle Schleifen eine geschlossene Curve, aber nur, wenn man sie mit dem Element y_1 durchläuft ein geschlossener Weg, weil nur y_1 sich längs ihr wieder zu y_1 fortsetzt. Durchläuft man sie zweimal indem man y_2 fortsetzt, so kommt man wieder nach y_2 zurück und hat wieder einen geschlossenen Weg; eine zweimalige Umlaufung mit y_4 dagegen liefert keinen geschlossenen Weg, sondern hiezu ist eine viermalige Umkreisung nöthig.]

Irgend einen geschlossenen oder ungeschlossenen Weg, der in x_0 beginnt und endet, kann man, ohne das Endelement zu ändern, auf Umkreisungen von Schleifen, also auf das Durchlaufen von Uebergängen reduciren und dann durch Angabe der Namen der Uebergänge vollständig beschreiben.

Ist a b c . . m in dieser Bezeichnungsweise ein Weg, so muss des Zusammenhanges wegen a mit dem Element endigen, mit dem b beginnt, dessen Endelement wieder das Anfangselement von c sein muss u. s. w. Ist der Weg geschlossen, so muss das Endelement von m mit dem Anfangselement von a übereinstimmen, oder in Zeichen es muss

$$a_2 = b_1,\ b_2 = c_1, \ldots\ m_2 = a_1$$

sein.

[So sind die am Schlusse des Beispiels angeführten Wege beziehlich a, b c, d e, d e f g.]

Wir denken uns nun von x_0 aus die Schleifen nach den einzelnen Verzweigungspunkten so gezogen, dass sie sich gegenseitig nicht treffen. Legt man dann eine geschlossene Curve C_0, die keine Schleife schneidet, also alle Verzweigungspunkte einschliesst wenn sie alle endlich sind, und sie alle ausschliesst wenn einer dem $x = \infty$ entspricht, so ist diese Curve für jedes Element ein geschlossener Weg. Man kann sie umformen in die Folge der Schleifen, die eine nach der andern, in der Reihenfolge wie sie beim positiven Umkreisen von x_0 aufeinanderfolgen, durchlaufen werden. In dieser reducirten Gestalt ist sie immer noch für jedes der ν Elemente ein geschlossener Weg, der sich durch eine Reihe von Uebergängen beschreiben lässt. Jeder dieser ν Wege heisse ein Umgang.[1]) Wenn sich die Schleifen um x_0 in der Ordnung $w_1\, w_2 \ldots w_\sigma$ folgen, so findet man einen Umgang also: man durchläuft die zu w_1 gehörige Schleife mit y_1 und komme durch den Uebergang a nach $y_\mathfrak{a}$, dann hat man mit $y_\mathfrak{a}$ die Schleife von w_2 zu umkreisen und kommt zu $y_\mathfrak{b}$. Der Uebergang $y_\mathfrak{a}\, y_\mathfrak{b}$ von w_2 heisse b. Mit $y_\mathfrak{b}$ begonnen liefert die Schleife w_3 als Endelement $y_\mathfrak{c}$ durch den Uebergang c u. s. w. Dann ist a b c . . . der Umgang. Macht man dieselbe Operation indem man mit $y_2\, y_3 \ldots y_\nu$ ausgeht, so erhält man die übrigen $\nu - 1$ Umgänge.

Jeder Uebergang kommt in einem, aber auch nur in einem Umgang vor. Denn handelt es sich um einen Uebergang m, der zu w_i gehört und von $y_\mathfrak{l}$ zu $y_\mathfrak{m}$ führt, so durchlaufe man rückwärts gehend mit dem Element $y_\mathfrak{l}$ die Schleifen $w_{i-1}, w_{i-2}, \ldots w_2, w_1$. Man kommt dann am Anfang von w_1 mit einem gewissen Elemente $y_\mathfrak{a}$ an.

1) Clebsch und Gordan. Abel'sche Functionen Seite 84.

Geht man umgekehrt mit diesem aus um die vorher beschriebene Operation zu machen, so kommt man nach Durchlaufung von w_{i-1} in x_0 mit y_l an und hat nun w_i von y_l zu y_m zu umkreisen d. h. den Uebergang m zu machen. Somit gehört dann m zum α^{ten} Umgange.

Andererseits gehöre zu einer Schleife der Cyklus $y_r\, y_s\, y_t \dots y_z$, so dass die Elemente $y_r, y_s, y_t \dots y_z$ der Reihe nach in einander übergehen, wenn man die Schleife positiv umläuft. Seien die Uebergänge $y_r\, y_s$, $y_s\, y_t, \dots$ $y_z\, y_r$ resp. mit p, q, ... z bezeichnet, so ist der durch wiederholte Umkreisung der Schleife entstandene geschlossene Weg durch p q r . . z beschrieben. Wir nennen ihn ebenfalls einen Cyklus.

[Im Beispiel hat man die 7 Umgänge a h t, b k s, c i r, d m v, e n q, f o p, g l u und die 7 Cyklen a, b c, d e f g, h m o, i k l n, p u v s q t, r.]

§ 2.

Wenn man aus allen Uebergängen eine Gruppe G_ν von möglichst wenig Uebergängen herausnimmt, die so beschaffen sind, dass man mit ihrer Hilfe von jedem Element zu jedem anderen gelangen kann, so gelten über sie folgende Sätze:[1])

I) Man kann nicht aus Uebergängen der Gruppe G_ν einen geschlossenen Weg so herstellen, dass ein Uebergang nur einmal gebraucht wird. Gesetzt die Uebergänge a, b, c, ... m von G_ν, die nicht alle verschieden zu sein brauchen, bildeten in dieser Reihenfolge einen geschlossenen Weg und einer von ihnen, f, komme nur einmal vor. Führt f von y_p zu y_q, so muss der Weg g h . . m a b . . . e mit y_q beginnen und mit y_p enden, weil ja der ganze Weg a b c . e f g . . m geschlossen sein soll. Da aber f nur einmal auftreten soll, kommt es in g . . m a . . . e nicht mehr vor und man kann also, ohne f zu benützen, von y_p zu y_q kommen und somit f auch aus G_ν fortlassen und doch noch von jedem Element zu jedem andern gelangen. Dies geht nicht, weil G_ν möglichst wenig Uebergänge enthalten soll. Folglich ist der obige Satz bewiesen.

II) Es muss mindestens ein Element geben, zu welchem von den Uebergängen in G_ν nur ein einziger führt. Denn

1) Diese bekannten Sätze werden hier des Folgenden wegen noch einmal abgeleitet.

wäre dies nicht der Fall und träte jedes Element in zwei Uebergängen aus G_ν auf, so würde ein Uebergang n von y_1 zu y_p führen; dann gäbe es einen o der von y_p zu y_q leitete, dann wieder einen p der y_q mit y_r verbände u. s. w. Wenn man so fortginge, so müsste man dann einmal zu einem Uebergange t gelangen, der nicht zu einem neuen, sondern zu einem schon benutzten Elemente, etwa zu y_q führte. Dann bildeten aber die von einander verschiedenen Uebergänge p, q, . . t den geschlossenen Weg p q . . . t, was nach dem ersten Satze nicht angeht.

Ist ϱ_ν die Zahl der Uebergänge in G_ν und sind diese a b c . . z, so sei jetzt y_a das Element oder eines der Elemente, welche nur bei einem Uebergange a auftreten, dagegen bei den andern b c . . . z nicht, und a verbinde y_a mit y_b; dann werden die $\varrho_\nu - 1$ Uebergänge b c . . z hinreichen, um von jedem der $\nu - 1$ Elemente $y_b \dots y_m$ zu jedem andern überzugehen, da ja a nur gebraucht wurde, um zu y_a zu gelangen. Andererseits kann man auch von den Uebergängen b c . . . z keinen fortlassen, weil man den betreffenden sonst auch aus G_ν ohne Schaden fortlassen könnte. Die Gruppe b c . . . z besteht also aus der Minimalzahl von Uebergängen die man braucht, um $\nu - 1$ Elemente zu verbinden, also aus $\varrho_{\nu-1}$. Somit ist $\varrho_\nu = \varrho_{\nu-1} + 1$. Da aber $\varrho_2 = 1$ ist, folgt $\varrho_\nu = \nu - 1$.

$\nu - 1$ Uebergänge, welche so beschaffen sind, dass man mit ihrer Hilfe von jedem Element zu jedem anderen kommen kann, sollen fundamentale heissen. Es ist noch zu zeigen, dass man solche immer finden kann. Mindestens ein Uebergang muss existiren, der y_1 mit einem andern Element verbindet. Denn gäbe es keinen, so würde jede Schleifenumkreisung y_1 wieder in y_1 verwandeln, man könnte also das Element y_1 in der ganzen Ebene eindeutig fortsetzen und die so definirte Function wäre, weil sie nur eine endliche Zahl von ausserwesentlichen singulären Punkten enthalten kann, rational $= g(x)$; dann hätte $f(x\,y)$ den rationalen Factor $y - g(x)$ und wäre, unserer Annahme entgegen, reducibel. Somit muss ein Uebergang existiren, der y_1 in ein anderes Element y_a verwandelt. Wenn nun kein Uebergang y_1 oder y_a mit einem andern Element verbände, so würde jeder Weg y_1 und y_a entweder unverändert lassen oder nur unter sich vertauschen, die Functionselemente $y_1 + y_a$ und $y_1\, y_a$ lieferten dann rationale Functionen $h(x)$ und $k(x)$ von x und $f(x\,y)$ hätte den Factor $y^2 - y\,h(x) + k(x)$ und wäre reducibel. Also muss ein

Uebergang vorhanden sein, der entweder y_1 oder y_a mit einem dritten Element y_b verbindet. Und so kann man weiter schliessen, bis alle ν Elemente erschöpft und dabei $\nu - 1$ Uebergänge gewonnen sind. Die Elemente werden hier in gewisser Weise geordnet $y_1\, y_a\, y_b \ldots$ und zwar kann man von jedem gelangen zu einem der links von ihm stehenden und schliesslich zu y_1, folglich auch, wie es verlangt war, von jedem zu jedem anderen. [Im Beispiel sind b d p s t u fundamentale Uebergänge].

Betrachten wir nun geschlossene Wege, die nur aus fundamentalen Uebergängen bestehen. Sei a ein solcher Uebergang. Dann muss er nach dem ersten Satze (Seite 205) mehr als einmal auftreten.

Beginnt man den Weg mit a, so möge dann eine Reihe anderer Uebergänge kommen, deren Gesammtheit ein Weg B sein möge, dann komme wieder a. Dieses kann aber jetzt vorwärts oder rückwärts durchlaufen werden müssen. Dann kann wieder eine Reihe von Uebergängen kommen, die auch noch a oder a′ enthalten kann, und deren Gesammtheit der Weg $\mathfrak{C}$ sei. Also ist der ganze geschlossene Weg entweder $a\,B\,a\,\mathfrak{C}$ oder $a\,B\,a'\,\mathfrak{C}$ zu schreiben, wobei, wie erwähnt, in B der Buchstabe a nicht mehr vorkömmt. Im ersten Falle wäre $a_2 = B_1$, daher $B\,a$ ein geschlossener, aus lauter fundamentalen Uebergängen bestehender Weg, der a nur einmal enthielte, was nicht möglich ist. Also kann nur die Form $a\,B\,a'\,\mathfrak{C}$ vorkommen. Da $a_2 = B_1$, $B_2 = a_1' = a_2$ ist, so ist B selbst wieder ein geschlossener Weg. Ferner ist, weil $a_2' = a_1 = \mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2 = a_1$, auch $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Weg und muss also, wenn er a noch enthält, entweder die Form haben $C\,a'\,D\,a\,\mathfrak{D}$ oder $C\,a\,D\,a'\,\mathfrak{D}$, wobei C und D das a nicht mehr enthalten sollen. Im ersten Falle wäre, weil $C_1 = \mathfrak{C}_1 = a_1 = a_2'$ der Weg $C\,a'$ geschlossen und enthielte a nur einmal. Also muss $\mathfrak{C}$ die Form haben $C\,a\,D\,a'\,\mathfrak{D}$. Von $\mathfrak{D}$ schliesst man dann ähnlich u. s. w. Man kann also den ganzen geschlossenen Weg schreiben

$$a\,B\,a'\,C\;\;a\,D\,a'\,E \ldots a'\,M \qquad \text{III}$$

wobei die geschlossenen Wege B, C, D, … M, die auch zum Theil fehlen können, a oder a′ nicht mehr enthalten.

§ 3.

Das Integral einer rationalen Function von x und y ist durch Angabe des Weges (im obigen Sinne) vollständig bestimmt, weil man in jedem Punkte des Weges den anzuwendenden Werth von y kennt. Wir betrachten hier nur Integrale erster Gattung, die allenthalben endlich bleiben. Solche sind unbestimmt um Perioden, d. h. um Integrale, die über geschlossene Wege genommen sind. Wenn die dem geschlossenen Wege entsprechende Curve sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne einen Verzweigungspunkt zu überschreiten, so gibt sie dem über sie erstreckten Integrale den Werth Null. Andernfalls kann man sie auf Schleifen bez. den Weg auf Uebergänge reduciren, so dass das Integral über den geschlossenen Weg gleich ist einer Summe von Integralen, die über Uebergänge erstreckt sind, welche sich zu einem geschlossenen Wege zusammenschliessen. Sei a b c . . m dieser Weg. Ist a kein fundamentaler Uebergang und führt von y_p zu y_q, so kann man aus fundamentalen Uebergängen einen andern Weg A, die Ergänzung von a, zusammenstellen, der von y_q zu y_p führt, so dass a A ein geschlossener Weg ist. Ist aber a ein fundamentaler Uebergang, so sei unter seiner Ergänzung der umgekehrt durchlaufene Uebergang, a′, verstanden. Aehnlich seien zu b, c, . . . m die Ergänzungen B, C . . . . . M gefunden. Ein über einen Weg W genommenes Integral sei hier, wo es nur auf den Weg ankommt, mit (W) bezeichnet. Weil Integraltheile sich aufheben, deren Wege sich nur durch die Richtung unterscheiden, ist dann

$$
\begin{aligned}
(a\,b\,c \ldots m) &= (a\,A\,A'\,b\,c \,.\,.\, m) = (a\,A) + (b\,c \ldots m) + (A') \\
(b\,c \ldots m) &= (b\,B\,B'\,c \ldots . m) = (B') + (b\,B) + (c \ldots m) \\
&\;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(a\,b\,c \ldots m) &= (a\,A) + (b\,B) + \,.\,.\, + (m\,M) \\
&\qquad + (A') + (B') + \ldots + (M').
\end{aligned}
$$

Weil aber $A_2{}' = A_1 = a_2 = b_1 = B_2 = B_1{}'$ ist, da a A, b B und a b c . . geschlossene zusammenhängende Wege sind, so schliesst der Anfang von B′ an das Ende von A′ an u. s. w. und schliesslich das Ende von M′ an den Anfang von A′ und daher ist der Weg A′ B′ . . . M′ geschlossen. Er besteht aber nur aus fundamentalen Uebergängen. Ist p derjenige fundamentale Uebergang mit dem er beginnt, so ist nach dem auf Seite 207 gefundenen Resultate (III), der Weg = p P p′Q, wo P und Q selbst geschlossene Wege sind. Daher ist

$$(A'\,B' \ldots M') = (p\,P\,p'\,Q) = (p\,p') + (P) + (Q) = (P) + (Q).$$

Die Wege P und Q haben die nämliche Eigenschaft, wie der ursprüngliche Weg, somit fällt aus jedem wieder ein Buchstabe fort, so dass man schliesslich Null als Werth des Integrales $(A' B' \dots M')$ findet. Da aber

$$(A' B' \dots M') = (A') + (B') + \dots + (M')$$

ist, so setzt sich also die betrachtete Periode durch Addition und Subtraction aus Integralen wie $(a A)$, $(b B) \dots$ zusammen. Ist a ein fundamentaler Uebergang, so ist die Ergänzung $A = a'$, daher $(a A) = (a a') = o$; und es bleiben also als Perioden nur Integrale, genommen über die $\nu\sigma - (\nu - 1)$ Wege, welcher jeder aus einem nichtfundamentalen Uebergang und seiner Ergänzung besteht.

IV) Den eben gemachten Schluss, dass $(A' B' \dots M') = o$ ist, kann man auf jeden geschlossenen nur aus fundamentalen Uebergängen bestehenden Weg anwenden, so dass ein über einen solchen Weg genommenes Integral stets gleich Null ist.[1])

Man kann ein Verfahren angeben, wie man diese Ergänzungen in systematischer Weise finden kann. Zu diesem Zwecke stellt man sich aus den fundamentalen Uebergängen einen geschlossenen Weg W her, auf dem man in x_0 zu sämmtlichen ν Functionselementen gelangt. Um nun die Ergänzung eines Ueberganges a zu finden, der von $y_\mathfrak{p}$ zu $y_\mathfrak{q}$ führt, theilt man W so in 3 Theile, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, dass $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 = y_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_1 = y_\mathfrak{q}$ ist. Dann ist der Weg $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ die gesuchte Ergänzung A, indem er von $y_\mathfrak{q}$ zu $y_\mathfrak{p}$ führt. Da nun auch $\mathfrak{B}'$ von $y_\mathfrak{q}$ zu $y_\mathfrak{p}$ führt, könnte man auch $\mathfrak{B}'$ als Ergänzung wählen; weil aber der Weg W ganz aus fundamentalen Uebergängen besteht, ist nach dem vorhin bewiesenen Satze IV $(W) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = o$ und somit ist die Periode $(a \mathfrak{B}')$ der $(a \mathfrak{C}\mathfrak{A})$ gleich. Mög-

---

1) Bei dem Beweise des entsprechenden Satzes meiner ersten Abhandlung (Bd. XV dieser Abhandlungen, II. Abth. auf S. 337 und 338) ist ein Versehen vorgekommen, auf das mich Herr Nöther aufmerksam machte. In dem Falle der Figur 4 daselbst ist das Integral über C nicht gleich dem über PQURSVP. Aber eine Curve wie die in Figur 4 ist nicht möglich. Denn sind in den dortigen Figuren PR und QS zwei Schnittpunkte von C mit s, welche unmittelbar aufeinanderfolgen, wenn man C durchlauft, so dass auf dem Stücke PVS von C kein Schnittpunkt mit s mehr liegt, so wäre im Falle der Figur 4 PVSQP eine geschlossene nur fundamentale Uebergänge überschreitende Curve, die s nur in einem Punkt (QS) träfe, was nicht möglich ist (Seite 338 oben). Bei Figur 5 ist aber das Integral über C gleich der Summe der über PVQP und RSUR genommen, von welchen jede mit s zwei Schnittpunkte weniger hat als C u. s. w.

licherweise lässt sich eine Ergänzung auf verschiedene Arten herstellen. Ist nun A eine zweite, von $\mathfrak{A}$ verschiedene Ergänzung von a, so ist $A\mathfrak{A}'$ ein geschlossener, nur aus fundamentalen Uebergängen bestehender Weg, daher $(A\mathfrak{A}') = o$ und $(A) = (\mathfrak{A})$, so dass die Perioden $(a\,A)$ und $(a\,\mathfrak{A})$ gleich werden.

Um die Willkür in der Wahl von W und der Aufsuchung der Ergänzungen zu vermeiden, wollen wir die Anordnung des geschlossenen Wegs und die Einfügung der nicht-fundamentalen Uebergänge zwischen die fundamentalen in eine bestimmte Regel bringen, die uns zugleich leicht gewisse Schlüsse erlauben wird, was sonst nicht der Fall wäre.

§ 4.

Zuerst stelle man sich eine Tafel her, die Verzweigungstafel, die für jede Schleife eine Reihe und für jedes Element eine Zeile hat. Die Schleifen sollen dabei in der Reihenfolge stehen wie sie sich um den Punkt x_0 folgen, also in der $w_1\, w_2 \,.\,.\, w_\sigma$. Wenn nun ein Uebergang a der zur Schleife w_i gehört, positiv durchlaufen, von $y_\mathfrak{p}$ zu $y_\mathfrak{q}$ führt, so dass $a_1 = y_\mathfrak{p}$, $a_2 = y_\mathfrak{q}$ ist, so werde in die Reihe w_i und die $\mathfrak{p}^{\text{te}}$ Zeile a_1, in die Reihe w_i und die $\mathfrak{q}^{\text{te}}$ Zeile a_2 gesetzt, das erstere links, das zweite rechts um anzudeuten, dass man die Schleife von links nach rechts, durchlaufen müsse um von $y_\mathfrak{p}$ zu $y_\mathfrak{q}$ zu gelangen. So wie mit a verfährt man mit allen Uebergängen.

[In unserem Beispiel ist die Tafel

	w_1		w_2		w_3	
y_1	a_1	a_2	$\mathbf{h}_1$	o_2	$\mathbf{p}_1$	$\mathbf{t}_2$
y_2	$\mathbf{b}_1$	c_2	i_1	n_2	q_1	$\mathbf{s}_2$
y_3	c_1	$\mathbf{b}_2$	k_1	i_2	r_1	r_2
y_4	$\mathbf{d}_1$	g_2	l_1	k_2	$\mathbf{s}_1$	v_2
y_5	e_1	$\mathbf{d}_2$	m_1	h_2	$\mathbf{t}_1$	q_2
y_6	f_1	e_2	n_1	l_2	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{p}_2$
y_7	g_1	f_2	o_1	m_2	v_1	$\mathbf{u}_2$

wobei die fetten Buchstaben sich auf die fundamentalen Uebergänge beziehen].

Wir bilden nun zuerst eine gewisse Buchstabenreihe R_0, die so zu sagen als Wegweiser für den Weg W dienen soll, den wir jetzt mit W_0 bezeichnen wollen.

In der Zeile y_1 steht der Name mindestens eines fundamentalen Ueberganges. Ist derselbe, oder wenn mehrere da sind, einer von ihnen, a und steht a_α in der ersten Zeile, so beginnen wir R_0 mit $a_\alpha\, a'_\alpha$ ($\alpha = 1$ oder 2, $a'_1 = a_2$, $a'_2 = a_1$); das a'_α sei mit $y_{\mathfrak{a}}$ identisch. In der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Zeile geht man nun von a'_α nach rechts hin und notirt in R_0 hinter a_α die dort stehenden Buchstaben der Reihe nach, indem man dabei die Tafel als geschlossen ansieht, so als ob hinter der Reihe w_σ wieder die w_1 käme, bis man wieder zu einem fundamentalen Buchstaben kommt. Ist dieser a'_α selbst, so springt man rückwärts nach a_α und notirt in R_0 $a'_\alpha\, a_\alpha$; ist er dagegen von a'_α verschieden und b_β so geht man zu $b'_\beta = y_{\mathfrak{b}}$ über ($\beta = 1$ oder 2), notirt $b_\beta\, b'_\beta$ und geht dann in der $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$ Zeile von b'_β nach rechts hin weiter, indem man in R_0 die Buchstaben dieser Zeile einfügt, bis man wieder zu einem fundamentalen kommt u. s. w.

[Im Beispiel kommt so $\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2$, dann schliessen sich die Buchstaben an die in der 6^{ten} Zeile rechts neben p_2 stehen, nämlich $f_1\, e_2\, n_1\, l_2\, \mathfrak{u}_1$, dann kommt weil u fundamental ist, $\mathfrak{u}_2$ und weiter $g_1\, f_2\, o_1\, m_2\, v_1\, \mathfrak{u}_2$, hierauf $\mathfrak{u}_1$ $\mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{t}_2\, \mathfrak{t}_1\, q_2\, e_1\, \mathfrak{d}_2\, \mathfrak{d}_1\, g_2\, l_1\, k_2\, \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{s}_2\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2\, k_1\, i_2\, r_1\, r_2\, c_1\, \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{b}_1\, c_2\, i_1\, n_2\, q_1\, \mathfrak{s}_2\, \mathfrak{s}_1\, v_2\, \mathfrak{d}_1\, \mathfrak{d}_2\, m_1$ $h_2\, \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2\, a_1\, a_2\, h_1\, o_2$].

Es sind jetzt einige Eigenschaften dieser Reihe zu beweisen.

Kommt man im Verlaufe des geschilderten Verfahrens zu einem Buchstaben r_ϱ der nicht-fundamental ist, so ist der ihm vorangehende unzweideutig bestimmt, indem es ja in der Zeile der Verzweigungstafel, in der r_ϱ steht, der zunächst links von r_ϱ stehende ist. Ist aber r fundamental, so muss man wissen, welches der nachfolgende Buchstabe ist, damit der vorhergehende unzweideutig gegeben ist. Denn folgt dem r_ϱ in der angegebenen Operation das r'_ϱ, so findet man den vorhergehenden, indem man von r_ϱ wie eben beschrieben links geht; folgt aber dem r_ϱ ein anderer Buchsabe s, so ist der vorhergehende r'_ϱ. Also bestimmt eine Gruppe von zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben den vorhergehenden unzweideutig und damit auch alle vorhergehenden und ebenso auch die nachfolgenden.

Wenn man nun wie vorhin beschrieben die Reihe $a_\alpha\, a'_\alpha\, b_\beta\, c_\gamma\, d_\delta\, i_\iota\, k_\varkappa\, l_\lambda\, m_\mu\, n_\nu \ldots$ bildet, so muss man, wegen der endlichen Anzahl von Buchstaben, einmal zu einer Gruppe von zwei Buchstaben kommen $m_\mu\, n_\nu$ die schon da war, indem z. B. $m_\mu = b_\beta$, $n_\nu = c_\gamma$ ist. Dann muss aber nach dem eben bewiesenen auch $l_\lambda = a'_\alpha$, $k_\varkappa = a_\alpha$ sein, so dass also die Reihe von $k_\varkappa\, l_\lambda \ldots$ an eine blosse Wiederholung von $a_\alpha\, a'_\alpha\, b_\beta \ldots . i_\iota$, und diese Reihe, die wir nun allein mit R_0 bezeichnen wollen, geschlossen ist.

V) Die Reihe R_0 hat, wie jetzt gezeigt werden soll, die Eigenschaft, dass wenn a ein fundamentaler Buchstabe ist, in ihr einmal $a_1\, a_2$ und einmal $a_2\, a_1$, wenn a nicht-fundamental ist, einmal a_1 und einmal a_2 auftritt. Wenden wir die geschilderte Operation an auf eine Tafel von zwei Zeilen, die durch einen fundamentalen Uebergang a verbunden sind. In der ersten Zeile stehe a_α und die andern Buchstaben der Zeile von a_α aus nach rechts gezählt mögen eine Reihe A bilden. In der zweiten Zeile stehe a_β und die andern Buchstaben bilden die Reihe B. Dann ist $R_0 = a_\alpha\, a_\beta$ B $a_\beta\, a_\alpha$ A und diese hat die angeführten Eigenschaften. Gesetzt es sei bewiesen, dass die aus $\nu-1$ Zeilen mit $\nu-2$ fundamentalen Uebergängen zu bildende Reihe R die fraglichen Eigenschaften hat. Nun gibt es nach Satz II Seite 205 stets ein Element, etwa y_1, zu dem nur ein fundamentaler Uebergang a führt. Es sei $a_\alpha = y_1$, $a'_\alpha = y_2$. Die in der ersten Zeile neben a_α rechts stehenden Buchstaben mögen die Reihe C geben. Wenn man nun auf diejenige Tafel, die aus der 2^{ten}, $3^{\text{ten}} \ldots n^{\text{ten}}$ Zeile der gegebenen gebildet ist, die Regel anwendet, indem man a'_α nicht als fundamental ansieht, so entsteht eine Reihe von der Form $Da'_\alpha E$, weil ja a'_α einmal vorkommen muss, wobei D und E Gruppen sind, welche die zu beweisenden Eigenschaften haben. Bildet man nun R_0, indem man mit dem ersten Buchstaben von D anfängt, so hat man von a'_α zu a_α zu springen, dann die Buchstaben von C hinzuschreiben, dann wieder a_α, nach a'_α zu springen, an das sich die Gruppe E anschliesst, so dass $R_0 = Da'_\alpha a_\alpha Ca_\alpha a'_\alpha E$ ist und demnach ebenfalls die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Aus R_0 entsteht nun die Beschreibung des Weges W_0, wenn man aus R_0 die nicht fundamentalen Buchstaben fortlässt, je ein Paar fundamentale die nebeneinanderstehen, wie $a_\iota\, a_\varkappa$ durch den Uebergang $a_{\iota\varkappa}$ ersetzt und dabei a_{12} mit a, a_{21} mit a' identificirt. Da nun, wie vorhin bewiesen wurde, in R_0 $a_1 a_2$ und $a_2 a_1$ auftritt, so kommt in W_0 a und a′ vor.

VI) Der Weg W_0 ist geschlossen und da er nur aus fundamentalen Uebergängen besteht, ertheilt er einem über ihn genommenen Integral den Werth Null.

Der Bequemlichkeit wegen werde aus R_0 noch eine zweite geschlossene Buchstabenreihe S_0 dadurch abgeleitet, dass man aus R_0 die fundamentalen Buchstaben fortlässt.

[In unserem Beispiel ist

$$W_0 = p\,u\,u'\,p'\,t'\,d'\,s\,b\,b'\,s'\,d\,t$$

und

$$S_0 = f_1\,e_2\,n_1\,l_2\,g_1\,f_2\,o_1\,m_2\,v_1\,q_2\,e_1\,g_2\,l_1\,k_2\,k_1\,i_2\,r_1\,r_2\,c_1\,c_2\,i_1\,n_2\,q_1\,v_2\,m_1\,h_2\,a_1\,a_2\,h_1\,o_2].$$

§ 5.

Anknüpfend an die Reihe S_0 wollen wir nun den Weg W_0 durch „Einfügung“ oder „Eröffnung“ neuer Uebergänge abändern. In S_0 sind entweder keine „Trennungen“ vorhanden, d. h. es kommt nicht vor, dass zwei gleiche Buchstaben durch zwei andere gleiche getrennt werden oder dies kommt vor. [In der obigen Reihe sind die beiden f durch die beiden n getrennt, dagegen sind die beiden l durch die beiden g nicht getrennt.] Wenn S_0 keine Trennungen hat, so sind, wie später (§ 7) bewiesen werden wird, alle Perioden Null. Wenn aber Trennungen vorkommen, indem die beiden a durch die beiden b getrennt werden, so sind auch in R_0 die beiden a durch die beiden b getrennt und R_0 hat die Form

$$R_0 = \mathfrak{A}\,a_\iota\,\mathfrak{B}\,b_\varkappa\,\mathfrak{C}\,a_\lambda\,\mathfrak{D}\,b_\mu,$$

wo ι und λ, sowie $\varkappa$ und μ Eins und Zwei sind und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ Gruppen von Buchstaben bezeichnen, die zum Theil auch fehlen können.

Aus der Reihe R_0 werde nun die neue Reihe

$$R_1 = \mathfrak{A}\,a_\iota\,a_\lambda\,\mathfrak{D}\,b_\mu\,b_\varkappa\,\mathfrak{C}\,a_\lambda\,a_\iota\,\mathfrak{B}\,b_\varkappa\,b_\mu$$

abgeleitet. Diese entsteht auch, wenn man die zur Bildung von R_0 befolgte Regel auf die Verzweigungstafel anwendet und dabei nicht nur bei den fundamentalen Uebergängen sondern auch bei den a und b in eine andere Zeile springt. Dann hat man nämlich von a_ι zu a_λ zu springen, an dieses schliesst sich $\mathfrak{D}$ an mit b_μ, von diesem springt man zu $b_\varkappa$, durchläuft $\mathfrak{C}$ u. s. w.

Man sieht, dass R_1 die Eigenschaften, die oben Seite 212 für R_0 bewiesen wurden, ebenfalls besitzt, insbesondere dass die Namen aller Uebergänge in R_1 vorkommen.

Aus R_1 werde abgeleitet die Buchstabenreihe S_1 durch Fortlassung der fundamentalen Buchstaben und der a, b; und ferner der Weg W_1, indem man wieder ein Paar nebeneinanderstehender gleicher Buchstaben, seien sie fundamental oder die a, b, durch den betreffenden Uebergang ersetzt, ähnlich wie dies geschah, um W_0 aus R_0 abzuleiten. In W_1 werden also die Uebergänge a und b durchlaufen, so dass sie ausser den fundamentalen nun erlaubt sind.

Sei u irgend ein nicht fundamentaler Uebergang und U die Ergänzung desselben. Mit Hilfe von R_0 kann man sie wie folgt finden. Zwischen u_2 und u_1, indem man von u_2 etwa nach rechts hin geht, stehe die Buchstabengruppe $\mathfrak{U}$. Wenn man dann auf $\mathfrak{U}$ die Regel anwendet, die W_0 aus R_0 hervorgehen lässt, so entsteht U. Denn ist $u_1 = y_\mathfrak{p}$, $u_2 = y_\mathfrak{q}$, so führen die in $\mathfrak{U}$ vorkommenden fundamentalen Uebergänge, die zusammen U bilden, von $y_\mathfrak{q}$ zu $y_\mathfrak{p}$, wie es verlangt wird. Geht man nach links von u_2 zu u_1, so sind um $\mathfrak{U}$ zu bilden natürlich die Buchstaben in der Reihe zu schreiben, wie man sie nun antrifft.

[So ist im Beispiel Seite 211 die Ergänzung zu l gegeben durch $u\,u'\,p'\,t'\,d'$ oder durch $p'\,t'\,d'\,s\,b\,b'\,s'$, je nachdem man nach rechts oder links geht.]

Man findet nun auch in R_1 zwischen u_2 und u_1 eine Buchstabengruppe $\mathfrak{U}_1$ und kann mit Anwendung der Regel zur Ableitung von W_1 aus R_1, daraus einen Weg U_1 ableiten. Es soll ermittelt werden, wie sich U und U_1 unterscheiden. Die Differenz wird davon abhängen, in welchen der 4 Buchstabengruppen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ sich u_1 und u_2 befinden. Seien nun p q r s 4 Buchstaben bez. aus $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$, sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}\,p\,\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}\,q\,\mathfrak{J}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}\,r\,\mathfrak{L}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}\,s\,\mathfrak{N}$, so wird

$$R_0 = \mathfrak{F}\,p\,\mathfrak{G}\,a_\iota\,\mathfrak{H}\,q\,\mathfrak{J}\,b_\varkappa\,\mathfrak{K}\,r\,\mathfrak{L}\,a_\lambda\,\mathfrak{M}\,s\,\mathfrak{N}\,b_\mu$$

dagegen

$$R_1 = \mathfrak{F}\,p\,\mathfrak{G}\,a_\iota\,a_\lambda\,\mathfrak{M}\,s\,\mathfrak{N}\,b_\mu\,b_\varkappa\,\mathfrak{K}\,r\,\mathfrak{L}\,a_\lambda\,a_\iota\,\mathfrak{H}\,q\,\mathfrak{J}\,b_\varkappa\,b_\mu.$$

Bezeichnen wir die aus den Buchstabengruppen $\mathfrak{A} \dots \mathfrak{N}$ nach der oft erwähnten Regel hervorgehenden Wege mit $A \dots N$, so geben die beiden Reihen, in welchen die Klammern Integrale bezeichnen,

$$p\,(G\,H)\;q\,(J\,K)\;r\,(L\,M)\;s\,(N\,F)\;p \tag{1}$$

$$p\,(F'\,b_{\mu\varkappa}\,J')\;q\,(H'\,a_{\iota\lambda}\,L')\;r\,(K'\,b_{\varkappa\mu}\,N')\;s\,(M'\,a_{\lambda\iota}\,G')\;p \qquad (2)^{1)}$$

eine Uebersicht über die zwischen den einzelnen der 4 Buchstaben $p\,q\,r\,s$ liegenden Wegtheile und die über sie erstreckten Integrale. Die Integrale in der zweiten Reihe sind aber gleich denjenigen in der Reihe

$$p\,(G\,H)\,[b_{\mu\varkappa}]\;\;q\,(J\,K)\,[a_{\iota\lambda}]\;\;r\,(L\,M)\,[b_{\varkappa\mu}]\;\;s\,(N\,F)\,[a_{\lambda\iota}]\;p \tag{3}$$

in welcher

$$\begin{aligned}
[b_{\mu\varkappa}] &= (b_{\mu\varkappa}\,H'\,J'\,G'\,F') &&= (b_{\mu\varkappa}\,B'\,A') \\
[b_{\varkappa\mu}] &= (b_{\varkappa\mu}\,K'\,L'\,M'\,N') &&= (b_{\varkappa\mu}\,C'\,D') = -[b_{\mu\varkappa}] \\
[a_{\iota\lambda}] &= (a_{\iota\lambda}\;\,J'\,H'\,K'\,L') &&= (a_{\iota\lambda}\,B'\,C') \\
[a_{\lambda\iota}] &= (a_{\lambda\iota}\;\,G'\,F'\,M'\,N') &&= (a_{\lambda\iota}\,A'\,D') = -[a_{\iota\lambda}]
\end{aligned}$$

gesetzt ist. In der Reihe (3) stehen zwischen je zweien der $p\,q\,r\,s$ die Integrale über dieselben Wegtheile wie in der Reihe (1), abgesehen von den in eckige Klammern gesetzten Grössen.

Weil aber der Weg $B'\,A'$ die Ergänzung von $b_{\mu\varkappa}$, $A'\,D'$ die von $a_{\lambda\iota}$ ist, sind jene Grössen die Perioden, die zu den Uebergängen $b_{\mu\varkappa}$ und $a_{\lambda\iota}$ gehören, und diesen entgegensetzt sind die zu $b_{\varkappa\mu}$ und $a_{\iota\lambda}$ gehörigen Perioden. Aus der Vergleichung der Reihen (3) und (1) entsteht somit das Resultat: das Integral (U_1) über U_1 ist gleich dem (U) über U genommen plus der Summe der Perioden, welche zu den in R_1 zwischen u_2 und u_1 stehenden Uebergängen a oder b gehören. Addiren wir das Integral über u, so entsteht in $(u\,U)$ die Periode $[u]$ und in $(u\,U_1)$ eine neue, auf W_1 bezügliche Periode, die $[u]_1$ sei, und es ist $[u]_1$ gleich $[u]$ plus der Summe derjenigen Perioden $[a_{\iota\lambda}]$, $[a_{\lambda\iota}]$, $[b_{\varkappa\mu}]$, $[b_{\mu\varkappa}]$, deren Uebergänge $a_\iota\,a_\lambda$, $a_\lambda\,a_\iota$, $b_\varkappa\,b_\mu$, $b_\mu\,b_\varkappa$ in R_1 zwischen u_2 und u_1 stehen.

Setzt man also $[a_{\lambda\iota}] = [a]$, $[b_{\mu\varkappa}] = [b]$, so ist

$$[u] = [u]_1 + \delta\,[a] + \varepsilon\,[b]$$

wo δ und ε, 0, 1 oder -1 sind.

---

1) Die Reihe (2) entsteht aus R_1, indem man nach links geht.

Wenn nun die Reihe S_1 keine Trennungen mehr enthält, so sind die $[u]_1$, wie gezeigt werden wird (§ 7), alle $= 0$. Sind aber noch Trennungen da, so seien c und d zwei sich trennende Buchstaben. Dann kann man durch ein Verfahren, das dem ganz analog ist, durch welches R_1 und W_1 aus R_0 und W_0 hergeleitet wurden, indem man noch die Uebergänge c und d öffnet, R_2 und W_2 aus R_1 und W_1 ableiten und findet dann

$$[u]_1 = [u]_2 + \zeta\,[c]_1 + \vartheta\,[d]_1$$

wobei $[u]_2$ ein Integral bezeichnet über u plus dem über einen Weg U_2, der aus R_2 gerade so abgeleitet ist, wie U_1 aus R_1; und wo die Zahlen ζ, ϑ nur 1, -1, oder 0 sein können.

Wenn nöthig kann man auf diese Art weiter gehen bis zu einem Wege W_ϱ, für den die zugehörigen Reihen R_ϱ oder S_ϱ keine Trennungen mehr enthalten. Sind dabei nach und nach die Uebergänge a, b, c ... m geöffnet worden, so drücken sich die Perioden alle linear und ganzzahlig aus durch 2ϱ Integrale [a], [b], $[c]_1$, $[d]_1$, ... $[l]_{\varrho-1}$, $[m]_{\varrho-1}$ und durch $\nu\sigma - (\nu-1) - 2\varrho$ Grössen, die sich auf diejenigen Uebergänge beziehen, deren Namen in S_ϱ noch vorkommen. Ist u einer von ihnen, so ist die betreffende Grösse $[u]_\varrho$ gleich dem über den Uebergang u genommenen Integral plus dem Integrale über einen Weg U_ϱ, der aus der Buchstabengruppe $\mathfrak{U}_\varrho$ zwischen u_2 und u_1 in R_ϱ entsteht, indem man nur die in W_ϱ geöffneten und durchlaufenen Uebergänge berücksichtigt. Es wird gezeigt werden (§ 7), dass diese $[u]_\varrho$ alle gleich Null sind. (Satz VII.)

Da $(W_0) = (A B C D)$ und $(W_1) = (A\, a_{\iota\lambda}\, D\, b_{\mu\varkappa}\, C\, a_{\lambda\iota}\, B\, b_{\varkappa\mu})$ ist, so ist auch $(W_1) = 0$ und folglich ist auch weiter $(W_2) = 0 \ldots (W_\varrho) = 0$.

[In unserem Beispiel sind f und n in R_0 getrennt. Somit wird zunächst $[f] = (f u')$, $[n] = (n b b' s' d t p u u') = (n s' d t p)$ und

$$\begin{aligned} R_1 = {} & \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 o_1 m_2 v_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_1 q_2 e_1 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_1 g_2 l_1 k_2 s_1 s_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 - \\ & k_1 i_2 r_1 r_2 c_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 c_2 i_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 l_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 g_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_1 e_2 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 q_1 s_2 s_1 v_2 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 - \\ & - m_1 h_2 \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 a_1 a_2 h_1 o_2, \end{aligned}$$

worin die geöffneten Uebergänge fett gedruckt sind. Diese Reihe enthält keine Trennungen mehr, so dass die Operation beendet ist. Es findet sich hier z. B.

$$[q]_1 = [q] - [f]$$
$$[g]_1 = [g] - [n].]$$

§ 6.

In der Reihe R_0 kommen alle $\nu\sigma$ Buchstaben, die Namen sämmtlicher Uebergänge vor, daher in S_0 noch die $\nu\sigma - (\nu-1)$, welche nicht fundamental sind; in S_1 fehlen noch a und b, in S_2 weiter c und d, ... bis in S_ϱ, das keine Trennungen mehr enthält, die 2ϱ Buchstaben a, b, ... l, m fehlen, und also nur noch $\nu\sigma - (\nu-1) - 2\varrho$ vorkommen. Man könnte denken beim Fortschreiten von S_0 zu S_ϱ verschwänden einmal sämmtliche Uebergänge eines Cyklus oder eines Umganges aus einer der Reihen S. Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies nicht der Fall ist. Da die Uebergänge eines Cyklus oder eines Umganges einen geschlossenen Weg bilden, in dem jeder Uebergang nur einmal vorkommt, so können nicht alle Uebergänge eines Cyklus oder eines Umganges fundamental sein (siehe den Satz I auf Seite 205) und also in S_0 fehlen. Gesetzt es sei bewiesen, dass von jedem Cyklus und von jedem Umgange in S_0 S_1 S_2 .. $S_\varkappa$ mindestens ein Uebergang vorkomme. Wenn nun in $S_{\varkappa+1}$ die sämmtlichen Uebergänge eines Cyklus fehlten, so könnte, da beim Fortschreiten von $S_\varkappa$ zu $S_{\varkappa+1}$ zwei Buchstaben fortfallen, in $S_\varkappa$ entweder nur ein oder höchstens zwei Buchstaben aus jenem Cyklus vorhanden gewesen sein. Wenn in $S_\varkappa$ nur einer p vorkömmt und es ist p q r .. x y z der geschlossene Weg des Cyklus, von dem die Uebergänge q r ... y z in $W_\varkappa$ schon geöffnet sind, so stehen in unserer Verzweigungstafel, in der Reihe, welche den Cyklus enthält, in den Zeilen, abgesehen von der Ordnung die folgenden Gruppen von je zwei Buchstaben: $p_1 z_2$, $q_1 p_2$, $r_1 q_2$, ... $y_1 x_2$, $z_1 y_2$.

Beginnt man die Herstellung von $R_\varkappa$ bei p, so kommt man nach der Regel des § 4 Seite 211 zu z_2, springt zu z_1, rechts davon steht y_2, das einen Sprung nach y_1 veranlasst. Zu dessen Rechten steht x_2 .... schliesslich kommt man zu q_2, springt nach q_1 neben dem rechts p_2 sich findet. Also sieht der betreffende Theil von $R_\varkappa$ so aus: $p_1 z_2 z_1 y_2 y_1 \ldots q_2 q_1 p_2$.

Wenn man hieraus $S_\varkappa$ bildet, so sind die offenen Uebergänge q r ... y z fortzulassen und es bleibt $S_\varkappa = \ldots p_1 p_2 \ldots.$

Weil hier die beiden p ungetrennt neben einander stehen, können sie durch den Fortschritt zu $S_{\varkappa+1}$ und den weiteren Reihen auch nicht fortfallen.

Sind aber in $S_\varkappa$ noch zwei Uebergänge p und t aus dem Cyklus vorhanden und ist er $p\,q\,..\,s\,t\,u\,...\,y\,z$, so stehen in der Verzweigungstafel in den einzelnen Zeilen, von der Ordnung abgesehen, die Gruppen $p_1 z_2,\ q_1 p_2,\ \ldots\ldots\ t_1 s_2,\ u_1 t_2,\ \ldots\ z_1 y_2$. Beginnt man mit p_1, so wird man zuerst erhalten $p_1 z_2 z_1\ y_2 y_1 \,..\, u_2 u_1 t_2$, weil die Uebergänge $u \ldots y\,z$ schon geöffnet sind. Von t_2 kommt man dann durch eine Reihe anderer Buchstaben auch sicher einmal zu t_1 und dann folgt die Reihe $t_1 s_2 s_1 \ldots q_2 q_1 p_2$, so dass

$$R_\varkappa = p_1 z_2 z_1\ y_2 y_1 \,..\, u_2 u_1 t_2 \ldots\ldots t_1\ s_2 s_1 \ldots q_2 q_1 p_2 \ldots$$

und

$$S_\varkappa = p_1 t_2 \ldots t_1 p_2 \ldots$$

wird. Da die beiden Buchstaben p und t sich also in $S_\varkappa$ nicht trennen, können sie auch aus $S_{\varkappa+1}$ nicht verschwunden sein. Wenn es sich statt um einen Cyklus um den Umgang $p\,q\,..\,s\,t\,u\,...\,y\,z$ handelte, so stünden in unserer Tafel in je einer Zeile, abgesehen von der Ordnung, die Gruppen $q_2 r_1, \ldots s_2 t_1,\ t_2 u_1, \ldots y_2 z_1,\ z_2 p_1,\ p_2 q_1$, indem z. B. q_2 in einem Fach rechts und in dem nächstfolgenden derselben Zeile r_1 links steht u. s. w. Wenn nun alle Uebergänge des Umganges bis auf p geöffnet sind, so wird

$$R_\varkappa = p_2 q_1 q_2 r_1 r_2 \ldots s_1 s_2 t_1 t_2 u_1 \,..\, y_2 z_1 z_2 p_1 \ldots$$
$$S_\varkappa = p_2 p_1 \ldots\ldots$$

Ist aber auch t noch nicht geöffnet, so wird

$$R_\varkappa = p_2 q_1 q_2 \,..\, s_1 s_2 t_1 \ldots t_2 u_1 u_2 \,..\, z_1 z_2 p_1 \ldots$$
$$S_\varkappa = p_2 t_1 \ldots t_2 p_1 \ldots$$

und weder in diesem noch im vorigen Falle ist ein Verschwinden von $p\,t$ bez. p möglich. (VIII) Also muss jede Reihe $S_0 \ldots S_\varrho$ von jedem Cyklus und jedem Umgang mindestens noch einen Buchstaben enthalten.

Man kann aus den eben gebildeten Reihen noch folgendes entnehmen: Lässt man aus der Bezeichnung des Cyklus oder des Umganges die Namen derjenigen Uebergänge fort, die in $W_\varkappa$ schon geöffnet sind, also in $S_\varkappa$ nicht mehr vorkommen, und ist dann der Cyklus bez. Umgang gegeben durch $p\,t \ldots$, so tritt in $S_\varkappa$ auf: im Falle eines Cyklus die Gruppe $p_1 t_2$, und bei einem Umgang die $p_2 t_1$. Wenn also in $S_\varkappa$ die Gruppe $p_1 p_2$ oder $p_2 p_1$ vorhanden ist, so folgt, dass alle Uebergänge des Cyklus bez. des Umganges, dem p angehört, schon in $W_\varkappa$ geöffnet sind, denn andernfalls stände neben p_1 bez. p_2 ein anderer Buchstabe als p_2 oder p_1. (Satz IX.)

Wir wollen nun die τ Cyklen aber (des folgenden wegen) rückwärts durchlaufen und die ν Umgänge in irgend einer Ordnung als die geschlossenen Wege $T_1, T_2 \ldots T_\omega$ bezeichnen, indem wir $\tau + \nu = \omega$ setzen. Wenn man in den Buchstabenreihen, welche diese Wege darstellen, diejenigen Buchstaben fortlässt, welche in $S_\varkappa$ nicht mehr vorkommen, so kann nach dem eben bewiesenen keine Reihe ganz wegfallen. Die so entstehenden ω „reducirten“ Gruppen seien $U_1^{(\varkappa)} U_2^{(\varkappa)} \ldots U_\omega^{(\varkappa)}$. Von ihnen nehme man eine beliebige Zahl heraus, deren Gesammtheit G sei. (X) Dann gibt es Buchstaben, die in G nur einmal vorkommen. Die Gruppen, welche G bilden, zerfallen in solche, die aus Cyklen entstanden sind — ihre Gesammtheit sei C — und solche aus Umgängen, deren Gesammtheit U sei. Weil jeder Cyklus und jeder Umgang nur verschiedene Buchstaben enthält und jeder Uebergang nur einem Cyklus und einem Umgang angehört, so ist der Satz bewiesen, wenn G nur aus C oder nur aus U besteht.

Andernfalls aber kann auch in Folge dessen ein Buchstabe nur dadurch zweimal in G vorkommen, dass er C und U angehört. Ist also der Satz falsch, so ist jeder in C auftretende Buchstabe auch in U und umgekehrt, und die Gruppen C und U können sich nur durch die Einordnung der Buchstaben in die Reihen unterscheiden. Es ist zu zeigen, dass diese Annahme unmöglich ist. Sei p ein Buchstabe aus C und p q . . . der reducirte Cyklus, dem er angehört. Dann beginnt $S_\varkappa$ mit $p_1 q_2$ nach dem auf Seite 218 bewiesenen. Das q gehört aber auch zu U und dort zu einem Umgange q r . . ., . Desswegen enthält $S_\varkappa$ auch die Gruppe $q_2 r_1$; r gehört in C zu einem Cyklus r s . . ., wesswegen $S_\varkappa$ die Gruppe $r_1 s_2$ enthalten muss u. s. w. $S_\varkappa$ hat also die Form $p_1 q_2 r_1 s_2 \ldots$, wobei man aus Buchstaben, die G angehören, nicht herauskommt. Da aber nach Art seiner Bildung $S_\varkappa$ alle die Buchstaben enthalten muss, die in den $U_1^{(\varkappa)} \ldots U_\omega^{(\varkappa)}$ auftreten, so ist ein Widerspruch vorhanden, der sich entweder so löst, dass G alle die $U^{(\varkappa)}$ umfasst, oder dass es in G Buchstaben gibt, die nur einmal vorkommen.

Hievon kann man folgende Anwendung machen. In $U_1^{(\varkappa)}$ kommt kein Buchstabe zweimal vor. Ist p einer der Buchstaben aus $U_1^{(\varkappa)}$, so gehört er noch einer anderen Reihe etwa $U_2^{(\varkappa)}$ an. Die beiden $U_1^{(\varkappa)}$ und $U_2^{(\varkappa)}$ enthalten mindestens einen Buchstaben q nur einmal, der dann noch in einer weiteren Reihe $U_3^{(\varkappa)}$ auftreten muss. Die drei Reihen $U_1^{(\varkappa)}\, U_2^{(\varkappa)}\, U_3^{(\varkappa)}$ enthalten wieder einen Buchstaben r nur einmal, der sich dann noch in einer Reihe $U_4^{(\varkappa)}$ finden muss u. s. w. Schliesslich enthalten die Reihen $U_1^{(\varkappa)}\, U_2^{(\varkappa)} \ldots U_{\omega-1}^{(\varkappa)}$ einen Buchstaben z nur einmal und der muss dann noch in $U_\omega^{(\varkappa)}$ vorkommen. Die Buchstaben p q ... z sind natürlich alle verschieden und ihre Zahl ist $\omega - 1$; sie kommen alle in den $U^{(\varkappa)}$ und folglich auch in $S_\varkappa$ vor, das, wie wir sahen, $\nu\sigma - (\nu - 1) - 2\varkappa$ Buchstaben enthält.

Also muss, für $\varkappa = 0, 1, \ldots \varrho$

$$\nu\sigma - (\nu - 1) - 2\varkappa \geqq \omega - 1$$

und besonders, für $\varkappa = \varrho$,

XI) $$2\varrho \leqq \nu\sigma - \nu - \omega + 2$$

sein.

§ 7.

Die Reihe S_ϱ enthält keine Trennungen gleicher Buchstaben mehr, daher kommt es sicher mindestens einmal vor, dass zwei gleiche Buchstaben neben einanderstehen. Kommt in S_ϱ die Gruppe $\mathfrak{n}_1\,\mathfrak{n}_2$ vor, so gehört nach dem Resultate IX) auf Seite 218 $\mathfrak{n}$ einem Wege T, etwa T_1 an, der ein Cyklus ist; ist dagegen die Gruppe $\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{n}_1$, so ist der Weg T_1 ein Umgang, und zwar werden dann alle anderen Uebergänge, aus welchen T_1 ausser $\mathfrak{n}$ noch besteht, in W_ϱ schon durchlaufen. Ist $S_\varrho = \bar{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{n}_1\,\mathfrak{n}_2$ und gehört $\mathfrak{n}$ dem Cyklus an $\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, so ist

$$R_\varrho = \mathfrak{A}\,\mathfrak{n}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{n}_2,$$

wo $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}$ Gruppen von Buchstaben vorstellen.

Man leite nun eine neue Reihe ab, $R_{\varrho+1}$, indem man das Durchlaufen von n jetzt gestattet und also in der Tafel von n_1 direct zu n_2 überspringt. Dann wird

$$R_{\varrho+1} = \mathfrak{A}\, n_1\, n_2$$

und die zugehörige Reihe $S_{\varrho+1}$ wird, durch Weglassen von n,

$$S_{\varrho+1} = \overline{\mathfrak{A}}.$$

Da $U_1^{(\varrho)}$ hier einfach n war, so fällt es mit n ganz weg, wenn man diesen Buchstaben aus den Reihen $U^{(\varrho)}$ fortlässt und so neue Reihen $U^{(\varrho+1)}$ herstellt. Es wäre möglich, dass mit $U_1^{(\varrho)}$ hiebei noch eine zweite Reihe $U_2^{(\varrho)}$ wegfiele, die dann auch nur n sein könnte und, weil T_1 ein Cyklus sein sollte, nun einem Umgange entsprechen müsste. Dann müsste aber nach dem Resultat IX auf Seite 218 in S_ϱ neben n_2 sofort wieder n_1 stehen und folglich die ganze Reihe S_ϱ einfach $n_1\, n_2$ sein. Aber in diesem Falle könnten neben den Reihen $U_1^{(\varrho)}$ und $U_2^{(\varrho)}$ keine weiteren existiren, weil ja sonst deren, von n verschiedene, Buchstaben sich in S_ϱ finden müssten. Es gäbe also dann nur einen Cyklus, was nicht angeht, weil ja mindestens zwei Verzweigungspunkte vorhanden sein müssen. Also kann mit n nur $U_1^{(\varrho)}$ fortfallen, während die $\omega - 1$ anderen $U^{(\varrho)}$ in neue Reihen $U_2^{(\varrho+1)} \ldots U_\omega^{(\varrho+1)}$ übergehen. Der Reihe $R_{\varrho+1}$ entspricht ein Weg $W_{\varrho+1}$, der aus $R_{\varrho+1}$ hervorgeht, wenn man, unter α irgend einen der geöffneten Uebergänge a b . . l m n verstanden, für $\alpha_\iota\ \alpha_\varkappa\ \alpha_{\iota\varkappa}$ setzt.

Entspricht der Gruppe $\mathfrak{A}$ durch diese Substitution der Weg A, so wird

$$W_\varrho = A\, \mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\, \mathfrak{a}'$$

und

$$W_{\varrho+1} = A\, n.$$

Weil nach unserer Annahme T_1 der rückwärts durchlaufene Cyklus sein soll, ist es $= \mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\, \mathfrak{a}'\, n'$. Fügt man nun in W_ϱ hinter A den Weg $n\, n'$ ein, so zerfällt W_ϱ in $W_{\varrho+1}$ und T_1, was durch die Gleichung

$$W_\varrho = W_{\varrho+1} + T_1$$

angedeutet sei.

Gesetzt aber $U_1^{(\varrho)} = n$ entspreche einem Umgange $T_1 = n\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, so ist $R_\varrho = \mathfrak{A}\, n_2\, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{k}_1\, \mathfrak{k}_2\, n_1$, $S_\varrho = \overline{\mathfrak{A}}\, n_2\, n_1$.

Dann folgt, wenn man n durchlaufen darf, $R_{\varrho+1} = \mathfrak{A}\, n_2\, n_1$, $S_{\varrho+1} = \mathfrak{A}$ und $U_1^{(\varrho)}$ fällt mit n fort. Würde damit noch eine zweite Reihe $U_2^{(\varrho)}$ wegfallen, das dann einem Cyklus entspräche, so wäre $S_\varrho = n_2\, n_1$ und es würde nur ein Cyklus existiren. Somit wird auch jetzt mit n nur $U_1^{(\varrho)}$ fortfallen, während die andern $\omega - 1$ Reihen $U^{(\varrho)}$ in ebensoviele Reihen $U^{(\varrho+1)}$ übergehen. Der Weg $W_{\varrho+1}$ wird $A\, n'$, der $W_\varrho = A\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}$, $T_1 = n\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b} \,.\,.\, \mathfrak{k}$, also ist auch hier $W_\varrho = W_{\varrho+1} + T_1$.

Die Reihe $R_{\varrho+1}$ entsteht aus unserer Tafel genau nach dem in § 4 Seite 211 geschilderten Verfahren, nur mit dem Unterschiede, dass nicht nur bei den Buchstaben a b . . l m und den fundamentalen, sondern auch noch bei n Sprünge stattfinden. Man kann also auf $R_{\varrho+1}$, $S_{\varrho+1}$, $W_{\varrho+1}$ die obigen Schlüsse anwenden. Besteht demnach $S_{\varrho+1}$ nur aus $o_\iota\, o_\varkappa$, so gibt es nur noch zwei Reihen $U^{(\varrho+1)}$, die zwei Wegen T_2 und T_3 entsprechen, von welchen der eine der rückwärts durchlaufene Cyklus $o\, \mathfrak{m}\, \mathfrak{n} \ldots \mathfrak{p}$, der andere der Umgang $o\, \mathfrak{r}\, \mathfrak{s} \ldots \mathfrak{x}$ sei, welchen beiden o angehört und in welchen die mit deutschen Buchstaben bezeichneten Uebergänge schon geöffnet sind.

Ist dann $S_{\varrho+1} = o_1\, o_2$, so ist

$$\begin{aligned} R_{\varrho+1} &= o_1\, \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{m}_2\, \mathfrak{m}_1\, o_2\, \mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2 \\ W_{\varrho+1} &= \mathfrak{p}' \,.\,.\, \mathfrak{m}'\, o'\, o\, \mathfrak{r} \ldots \mathfrak{x} \\ &= T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Bei der Annahme $S_{\varrho+1} = o_2\, o_1$ folgt für $W_{\varrho+1}$ das nämliche. Dann ist also $\omega = 3$ und S_ϱ enthält nur die beiden Buchstaben n und o. Kommen nun in $S_{\varrho+1}$ ausser o noch andere Buchstaben vor, während $o_1\, o_2$ nebeneinander stehen, so kann man $S_{\varrho+2}$, $W_{\varrho+2}$, $R_{\varrho+2}$ ableiten, indem man das Durchlaufen von o gestattet. Dann fällt $U_2^{(\varrho+1)}$ fort, es entstehen $\omega - 2$ andere Reihen $U_3^{(\varrho+2)} \ldots U_\omega^{(\varrho+2)}$ und man kann setzen

$$W_{\varrho+1} = W_{\varrho+2} + T_2.$$

In dieser Weise kann man weiter gehen, bis man zu einer Reihe $S_{\varrho+\mu}$ kommt, die nur noch e i n e n Buchstaben enthält, für welche nur noch zwei Reihen $U^{(\varrho+\mu)}$ existiren und

$$W_{\varrho+\mu} = T_{\mu+1} + T_{\mu+2}$$

ist. Dann sind aus S_ϱ nach und nach μ Buchstaben weggefallen, einer ist in $S_{\varrho+\mu}$ noch übrig geblieben, so dass sicher $\mu+1$ in S_ϱ vorhanden waren. Da aber $\mu+2 \leqq \omega$ sein muss, weil ja die $T_1 \ldots T_{\mu+2}$ zu den ω Wegen T gehören, so folgt

$$\mu+1 = \nu\sigma - (\nu-1) - 2\varrho \leqq \omega - 1$$

und dies gibt mit dem Resultate XI der Seite 220 die Gleichung

XII) $$\nu\sigma - (\nu-1) - 2\varrho = \omega - 1$$
$$2\varrho = \nu\sigma - \nu - \omega + 2 = \nu\sigma - 2\nu - \tau + 2.\text{[1]}$$

Bezeichnet man mit τ_λ die Anzahl der zum Verzweigungspunkt w_λ gehörigen Cyklen, so ist $\tau = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \tau_\lambda$ und also, da $\nu\sigma = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \nu$ ist,

XII) $$2\varrho = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} (\nu - \tau_\lambda) - 2(\nu - 2).$$

Was nun die Perioden betrifft, die oben zu Ende des § 5 mit $[u]_\varrho$ bezeichnet wurden, so ist zunächst $[n]_\varrho = (n) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}\, n)$ und dies ist $= 0$, weil das über einen ganzen Cyklus genommene Integral erster Gattung $= 0$ ist, da der Cyklus auf den Verzweigungspunkt zusammengezogen werden kann. Wenn aber u von n verschieden ist, so sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\, u_1\, \mathfrak{C}\, u_2\, \mathfrak{D}$ und es bezeichnen B, C, D die aus $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ entstehenden Wege, wenn man die Regel anwendet, die W_ϱ aus R_ϱ entstehen lässt. Dann hat man

$$\begin{aligned}[u]_\varrho &= (u) + (D\,\mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}'\,B) \\ &= (u) + (D\,n\,B) + (n'\,\mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}') \\ &= (u) + (D\,n\,B).\end{aligned}$$

Wenn man aber $[u]_{\varrho+1}$ aus $R_{\varrho+1}$ so ableitet, wie eben $[u_\varrho]$ aus R_ϱ abgeleitet wurde, nur mit Anwendung der Substitutionen die $R_{\varrho+1}$ in $W_{\varrho+1}$ überführen, so wird $[u]_{\varrho+1} = (u) + (D\,n\,B)$, d. h. es ist $[u]_\varrho = [u]_{\varrho+1}$ und dasselbe Resultat ergibt sich, wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{k}\, n$ einen Umgang darstellt. Also ist $[o]_\varrho = [o]_{\varrho+1} = 0$ und indem man so weiter schliesst, zeigt man, dass alle $[u]_\varrho = 0$ sind, dass sich folglich alle Perioden eines

1) Ein anderer Beweis findet sich in § 10.

Integrales erster Gattung linear und ganzzahlig durch die 2ϱ Perioden $[a]$, $[b]$, $[c]_1 \ldots [l]_{\varrho-1}$, $[m]_{\varrho-1}$ ausdrücken. (Satz XIII.)

Wenn es sich um die praktische Herstellung dieser „normalen“ oder „kanonischen“ Perioden handelt, so kann man folgendes beachten. Offenbar braucht man in die Buchstabenreihen und in die Verzweigungstafel ausser den fundamentalen Buchstaben nur die a, b, ... l, m aufzunehmen, denn die übrigen liefern Perioden gleich Null. Die Namen dieser letzteren treten allein in S_ϱ auf und können wie in § 6 zu Ende angegeben, aus den Reihen $U^{(\varrho)}$ abgeleitet werden. Wenn dann n in $U_1^{(\varrho)}$ nur einmal vorkommt, so kommt es auch in T_1 nur einmal vor, dafür aber in T_2. Tritt in $U_1^{(\varrho)}$ und $U_2^{(\varrho)}$ der Buchstabe p nur einmal auf, so findet er sich auch in T_1 und T_2 nur einmal, dagegen noch in T_3 u. s. w. Man kann nun zeigen (§ 10), dass wenn man umgekehrt aus den $T_1 \ldots T_\omega$ $\omega - 1$ Buchstaben wie angegeben bestimmt, diese sich nicht zu den kanonischen Perioden eignen, sondern nur die übrigen, von welchen noch $\nu - 1$ die fundamentalen Uebergänge liefern. Man braucht also auch jene $\omega - 1$ nicht in die Verzweigungstafel aufzunehmen.

In dem Beispiel von Clebsch und Gordan ist $\nu = 4$, $\sigma = 12$, $\tau = 36$, $\omega - 1 = 39$, $2\varrho = 6$. Man reicht hier aus mit der Tafel

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_1	a_1		e_1					q_2				
y_2	a_2	c_1					n_1	q_1	r_1	t_1		
y_3		c_2							r_2		v_1	x_1
y_4			e_2				n_2			t_2	v_2	x_2

womit, und mit den fundamentalen Buchstaben a c e

$$R_0 = a_1\, a_2\, c_1\, c_2\, r_2\, v_1\, x_1\, c_2\, c_1\, n_1\, q_1\, r_1\, t_1\, a_2\, a_1\, e_1\, e_2\, n_2\, t_2\, v_2\, x_2\, e_2\, e_1\, q_2$$

mit

$$S_0 = r_2\, v_1\, x_1\, n_1\, q_1\, r_1\, t_1\, n_2\, t_2\, v_2\, x_2\, q_2$$

wird. n und q trennen sich, also sind zwei der kanonischen Perioden

$$[n] = (n\, e'\, a) \qquad [q] = (q\, a),$$

dann wird

$$R_1 = q_2\, q_1\, r_1\, t_1\, a_2\, a_1\, e_1\, e_2\, n_2\, n_1\, q_1\, q_2\, a_1\, a_2\, c_1\, c_2\, r_2\, v_1\, x_1\, c_2\, c_1\, n_1\, n_2\, t_2\, v_2\, x_2\, e_2\, e_1$$
$$S_1 = r_1\, t_1\, r_2\, v_1\, x_1\, t_2\, v_2\, x_2.$$

Hier trennen sich r und t und liefern das zweite Periodenpaar

$$[r]_1 = (r\, c'\, n\, e'\, q') \qquad [t]_1 = (t\, e'\, q').$$

Indem wir nun die Substitutionen q' für $q_2\, q_1$ u. s. w. der Kürze wegen schon bei R_2 eintreten lassen, wird

$$R_2 = q'\, r\, v_1\, x_1\, c'\, n\, t'\, a'\, e\, n'\, q\, a\, c\, r'\, t\, v_2\, x_2\, e'$$
$$S_2 = v_1\, x_1\, v_2\, x_2,$$

woraus das letzte Periodenpaar

$$[v]_2 = (v\, e'\, q') \qquad [x]_2 = (x\, e'\, q'\, r)$$

folgt und die Operation beendet ist.

§ 8.

Wir gehen nun zur Ableitung zweier von Riemann gegebener Gleichungen über und schicken ihr einen Satz voraus.

Es sei v das Integral einer rationalen Function ψ von x und y, φ eine andere rationale Function von x und y und es werde $\varphi\, d\, x$ mit $d\, u$ bezeichnet. Es werde nun $\int v\, d\, u$ genommen über einen zusammenhängenden Weg M N, verglichen mit dem, welches über den ebenfalls zusammenhängenden Weg M P P′ N genommen ist, wobei in jedem Punkte der betreffenden Wege für v derjenige Werth zu setzen ist, den man erhält, indem man $\int \psi\, d\, x$ über den Weg bis zu jenem Punkt erstreckt. Nennen wir $\int \psi\, d\, x$ über den zweiten Weg M P P′ N, bis zu einem variabeln Punkt erstreckt w, so ist $v = w$, wenn der Punkt in M oder N gelegen ist. Somit unterscheiden sich die Integrale $\int v\, d\, u$ und $\int w\, d\, u$ um $\int w\, d\, u$ erstreckt über P P′. Ist α ein Punkt von P, so wird er in dem Wege P P′ zweimal, in verschiedenen Richtungen, berührt. Folgt auf α bei P der Wegtheil Q, so kommt bei P′ v o r α der Wegtheil Q′. Die beiden Werthe von w in α unterscheiden sich also um $\int \psi\, d\, x$ genommen über Q Q′ und sind also gleich. Da ferner du für den Punkt α in P einen entgegengesetzten Werth hat von dem den es in demselben Punkt von P' erhält, so ist $\int w\,du$ über PP' genommen gleich Null und somit $\int v\,du$ über $MN = \int v\,du$ über $MPP'N$. (Satz XIV.)

Indem wir jetzt wieder unter φ und ψ Integranden erster Gattung verstehen, wollen wir $\int v\,du$ über die verschiedenen Wege $W_\varkappa$ nehmen und die Werthe vergleichen.

Es sei $R_0 = \mathfrak{A}\, a_\iota\, \mathfrak{B}\, b_\varkappa\, \mathfrak{C}\, a_\lambda\, \mathfrak{D}\, b_\mu$ und die den Gruppen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ entsprechenden Theile von W_0 bez. A B C D, dann ist $W_0 = A\,B\,C\,D$, $W_1 = A\, a_{\iota\,\lambda}\, D\, b_{\mu\,\varkappa}\, C\, a_{\lambda\,\iota}\, B\, b_{\varkappa\,\mu}$ (siehe § 5, Seite 213). Setzen wir der Kürze wegen $a_{\lambda\,\iota} = a$, $b_{\mu\,\varkappa} = b$, so ist $\int v\,du$ über W_0 gleich dem über $A\,B\,b'\,b\,C\,D$, wie der obige Satz lehrt; und indem man diesen Satz wiederholt anwendet, zeigt sich, dass der Weg W_0 und der

$$V = A\,B\,b'.\,b\,C\,a\,B\,b'.\,b\,B'\,A'.\,b\,B'\,a'\,C'\,b'.\,b\,C\,a\,B\,b'\,A\,a'\,D$$

dem $\int v\,du$ denselben Werth ertheilen.

Der letzte Theil $b\,C\,a\,B\,b'\,A\,a'\,D$ ist der geschlossene Weg W_1, nur mit anderem Anfang als vorhin, der erste Theil sei mit U bezeichnet, so dass der ganze Weg $V = U\,W_1$ ist. Der Werth, den v in irgend einem unbestimmten Punkte ζ des Weges V hat, d. h. der Werth von $\int \psi\,dx$ vom Anfang von A bis zu ζ über jenen Weg erstreckt sei $v\,(V\,\zeta)$. Er hängt davon ab, ob ζ in U oder in W_1 liegt. Bezeichnen wir den Punkt ζ für den ersten Fall mit ξ, für den zweiten mit η, so ist für letzteren $v\,(V\,\eta) = \int \psi\,dx$ über U plus dem über W_1 bis zum Punkte η genommen. Der erste Theil ist Null, weil jeder Wegtheil in U zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird, der zweite sei mit $v\,(W_1\,\eta)$ bezeichnet, so dass also $v\,(V\,\eta) = v\,(W_1\,\eta)$ und somit

$$\int\limits_{W_0} v\,du = \int\limits_{U} v(U\,\xi)\,du + \int\limits_{W_1} v(W_1\,\eta)\,du = \int\limits_{U} v(U\,\xi)\,du + \int\limits_{W_1} v\,du.$$

ist, wobei die den Integralen angehängten Buchstaben die Wege angeben, über welche sie zu nehmen sind.

Der Weg U enthält die geschlossenen Wege $\mathrm{A\,B\,b'} = B'$ und $\mathrm{b\,C\,a\,B\,b'} = A$ und ist $= B'\,A\,B\,A'$, so dass das erste der obigen Integrale in 4 Theile zerfällt, die sich auf die Wege B', A, B, und A' beziehen. Sind $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ 4 Punkte auf diesen Wegen und sind $\mathrm{v}(\alpha)$, $\mathrm{v}(\beta)$, $\mathrm{v}(\gamma)$, $\mathrm{v}(\delta)$ die entsprechenden Werthe von $\mathrm{v}(\mathrm{U}\,\xi)$, $\mathrm{d\,u}_\alpha \ldots \mathrm{d\,u}_\delta$ die von $\varphi\,\mathrm{d\,x}$, so wird

$$\int\limits_{\mathrm{U}} \mathrm{v}(\mathrm{U}\,\xi)\,\mathrm{d\,u} = \int\limits_{\mathrm{B'}} \mathrm{v}(\alpha)\,\mathrm{d\,u}_\alpha + \int\limits_{\mathrm{A}} \mathrm{v}(\beta)\,\mathrm{d\,u}_\beta + \int\limits_{\mathrm{B}} \mathrm{v}(\gamma)\,\mathrm{d\,u}_\gamma + \int\limits_{\mathrm{A'}} \mathrm{v}(\delta)\,\mathrm{d\,u}_\delta$$

Wenn aber die Punkte α, γ einerseits und β, δ andrerseits zu demselben x gehören, so ist $\mathrm{d\,u}_\alpha = -\mathrm{d\,u}_\gamma$, $\mathrm{d\,u}_\beta = -\mathrm{d\,u}_\delta$ und die rechte Seite

$$= \int\limits_{\mathrm{B}} \Big(\mathrm{v}(\gamma) - \mathrm{v}(\alpha)\Big)\,\mathrm{d\,u}_\gamma + \int\limits_{\mathrm{A'}} \Big(\mathrm{v}(\delta) - \mathrm{v}(\beta)\Big)\,\mathrm{d\,u}_\delta.$$

$\mathrm{v}(\gamma) - \mathrm{v}(\alpha)$ ist $\int \psi\,\mathrm{d\,x}$ genommen über einen Theil Γ von B', der mit α beginnt, über A und den anschliessenden Theil von B bis γ. Dieser ist aber Γ', so dass

$$\mathrm{v}(\gamma) - \mathrm{v}(\alpha) = \int\limits_{\mathrm{A}} \psi\,\mathrm{d\,x} = \int\limits_{\mathrm{A}} \mathrm{d\,v}$$

ist. Ebenso ist

$$\mathrm{v}(\delta) - \mathrm{v}(\beta) = \int\limits_{\mathrm{B}} \psi\,\mathrm{d\,x} = \int\limits_{\mathrm{B}} \mathrm{d\,v},$$

so dass schliesslich

$$\int\limits_{\mathrm{U}} \mathrm{v}(\mathrm{U}\,\xi)\,\mathrm{d\,u} = \Big(\int\limits_{\mathrm{B}} \mathrm{d\,u}\Big)\Big(\int\limits_{\mathrm{A}} \mathrm{d\,v}\Big) + \Big(\int\limits_{\mathrm{A'}} \mathrm{d\,u}\Big)\Big(\int\limits_{\mathrm{B}} \mathrm{d\,v}\Big)$$

wird.

Die geschlossenen Wege A und B sind diejenigen, welche man braucht, um die oben Seite 215 mit [a] und [b] bezeichneten Perioden zu berechnen. Nennt man diese Perioden für die Function u wie eben [a] und [b], die für v dagegen [A] und [B], so ergibt sich schliesslich

$$\int\limits_{\mathrm{W_0}} \mathrm{v\,d\,u} = \int\limits_{\mathrm{W_1}} \mathrm{v\,d\,u} - [\mathrm{a}]\,[\mathrm{B}] + [\mathrm{b}]\,[\mathrm{A}]$$

Eine ähnliche Gleichung findet man zwischen den über W_1 und W_2 genommenen Integralen u. s. w. Bezeichnet man immer mit den in eckigen Klammern gesetzten grossen Buchstaben Perioden des Integrals $\int \psi\, dx$, die über dieselben Wege genommen sind, wie die mit kleinen Buchstaben bezeichneten von $\int \varphi\, dx$, so kommt schliesslich die Gleichung

$$\int\limits_{W_0} v\, du = -[b]\,[A] + [a]\cdot[B] - [d]_1\,[C]_1 + [c]_1\,[D]_1$$
$$+ \,.\,. - [m]_{\varrho-1}\,[L]_{\varrho-1} + [l]_{\varrho-1}\,[M]_{\varrho-1}$$
$$+ \int\limits_{W_\varrho} v\, du.$$

Der Weg W_0, der geschlossen ist und nur aus fundamentalen Uebergängen besteht, hat nun nach dem Resultat III des § 2 die Form $\mathfrak{a}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{L}$, wenn $\mathfrak{a}$ einen fundamentalen Uebergang bezeichnet und $\mathfrak{K}$ wie $\mathfrak{L}$ geschlossene Wege sind, die $\mathfrak{a}$ nicht mehr enthalten. Enthalten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ einen andern fundamentalen Uebergang $\mathfrak{b}$, so muss jeder der beiden Wege ihn doppelt enthalten, dann kommt er aber in W_0 viermal vor, während er (siehe V Seite 212) nur zweimal auftritt. Also kann $\mathfrak{b}$ nur in $\mathfrak{K}$ oder in $\mathfrak{L}$ auftreten. Daher sind in W_0 keine Trennungen gleicher Buchstaben durch andere vorhanden und folglich muss W_0 die Form haben $\mathfrak{E}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'\,\mathfrak{F}$. Der Weg $\mathfrak{E}\,\mathfrak{F} = W_0'$ hat dann denselben Character und nach dem vorausgeschickten Satz XIV ist also

$$\int\limits_{W_0} v\, du = \int\limits_{W_0'} v\, du.$$

Indem man so successive weiter schliesst, findet sich Null als Werth von $\int\limits_{W_0} v\, du$.

Mit den Bezeichnungen von § 7 ist aber $\int\limits_{W_\varrho} v\, du$ gleich demselben Integral über den Weg $A\, n\, T_1$ bez. $A\, n'\, T_1$, also über $W_{\varrho+1}\, T_1$ genommen. Da $\int \varphi\, dx$ und $\int \psi\, dx$ über $W_{\varrho+1}$ genommen gleich Null sind, so findet man durch eine ähnliche Ueberlegung, wie sie vorhin bei dem Wege $V = U\, W_1$ angestellt wurde

$$\int\limits_{W_\varrho} v\, du = \int\limits_{W_{\varrho+1}} v\, du + \int\limits_{T_1} v\, du.$$

Durch wiederholte Anwendung derselben Ueberlegung ergibt sich endlich

$$\int\limits_{w_\varrho} v\,d\,u = \sum_{\lambda=1}^{\omega} \int\limits_{T_\lambda} v\,d\,u.$$

so dass man erhält

$$\text{XV)} \qquad -\sum_{\lambda=1}^{\omega} \int\limits_{T_\lambda} v\,d\,u = [A]\,[b] - [B]\,[a] + \ldots + \\ + [L]_{\varrho-1}\,[m]_{\varrho-1} - [M]_{\varrho-1}\,[l]_{\varrho-1}.$$

Entspricht nun T_λ einem Umgang, so umschliesst die zugehörige Curve C_0 (§ 1 Seite 204) entweder alle oder keinen Verzweigungspunkt, folglich ist v ausserhalb bez. innerhalb eine einwerthige, vom Wege unabhängige Function des Ortes, die keinen singulären Punkt hat und desshalb ist $\int\limits_{T_\lambda} v\,d\,u = o$. Entspricht aber T_λ einem Cyklus des Verzweigungspunktes w_λ, so kann man den geschlossenen Weg ohne den Werth des Integrals zu ändern auf den wiederholt durchlaufenen Kreis um w_λ zusammenziehen. Da aber v und u allenthalben endliche Integrale sein sollen, so kann man in der Nähe von w_λ v nach positiven Potenzen von $(x - w_\lambda)^{1/\alpha}$ entwickeln, du aber kann, wenn es negative enthält, nur solche enthalten, deren Exponent $\geqq \frac{1}{\alpha} - 1$ ist, wobei α die Anzahl der Uebergänge im Cyklus ist. Das α mal über den erwähnten Kreis erstreckte Integral verschwindet somit. Ist der Verzweigungspunkt $x = \infty$, so hat man nur $\frac{1}{x}$ für $x - w_\lambda$ zu setzen, um das nämliche zu finden. So ergibt sich endlich die Riemann'sche Gleichung

$$\begin{aligned} [A]\,[b] - [B]\,[a] + [C]_1\,[d]_1 - [D]_1\,[c]_1 + \ldots \\ + [L]_{\varrho-1}\,[m]_{\varrho-1} - [M]_{\varrho-1}\,[l]_{\varrho-1} = o. \end{aligned} \qquad \text{(XVI)}$$

§ 9.

Die Gleichung XV oben gilt nicht nur wenn φ und ψ Integranden erster Gattung sind, sondern auch dann, wenn man, $x = \xi + i\eta$ setzend, $\Phi\,d\xi + \Psi\,d\eta$ für du und $\Phi_1\,d\xi + \Psi_1\,d\eta$ für dv schreibt, wenn nur die 4 Functionen Φ, Ψ, Φ_1, Ψ_1 in den Punkten der vorkommenden Wege eindeutig als solche Functionen des Ortes gegeben sind, dass die über die Wege $T_1 \dots T_\omega$ genommenen Integrale der beiden Ausdrücke du und dv Null sind. Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man die Schlüsse des vorigen § unter diesen Annahmen wiederholt.

Wir machen davon eine Anwendung, um eine zweite von Riemann herrührende Gleichung zu beweisen, welche für die Convergenz der ϑ-Functionen wichtig ist. Es sei der in § 8 gebrauchte Integrand erster Gattung φ, wenn man ihn in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt $= \varphi_1 + i\varphi_2$, so ist $du = \varphi\,dx = \varphi_1\,d\xi - \varphi_2\,d\eta + i(\varphi_1\,d\eta + \varphi_2\,d\xi) = d\zeta + i\,d\vartheta$. Da φ_1 und φ_2 für jeden Punkt der x Ebene und jedes Element nur einen Werth haben und da $\int du = \int d\zeta + i\int d\vartheta$ über einen der Wege $T_1 \dots T_\omega$ genommen Null liefert, so ist auch $\int d\zeta$ und $\int d\vartheta$ über einen solchen Weg genommen gleich Null. Die vorhin erwähnten Bedingungen sind also erfüllt und man darf in der Gl. XV der vorigen Seite für du setzen $d\vartheta$ und ζ für v.

An die Stelle der Grössen [a] und [A] treten nun $\int d\vartheta$ bez. $\int d\zeta$ über den Weg A genommen. Diese Integrale sind aber der Coefficient von i und der reelle Theil des $\int \varphi\,dx$, wenn dies über A erstreckt wird, d. h. es sind der Coefficient von i und der reelle Theil im Ausdruck der Periode [a]. Setzt man somit

$$[a] = \alpha' + i\alpha,$$

so ist in der fraglichen Gleichung für [a] zu setzen α und α' für [A]. Ist ebenso

$$[b] = \beta' + i\beta,$$

so treten β und β' an Stelle von [b] bez. [B]. Setzen wir weiter $[c]_1 = \gamma_1' + i\gamma_1, \dots [l]_{\varrho-1} = \lambda'_{\varrho-1} + i\lambda_{\varrho-1}$, $[m]_{\varrho-1} = \mu'_{\varrho-1} + i\mu_{\varrho-1}$, so folgt hienach

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' + \gamma_1'\delta_1 - \gamma_1\delta_1' + \dots + \lambda'_{\varrho-1}\mu_{\varrho-1} - \lambda_{\varrho-1}\mu'_{\varrho-1}$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\omega} \int_{T_\lambda} \zeta\,d\vartheta. \qquad \text{(XVII)}$$

In Bezug auf $\int \zeta \, d\vartheta$ gelten nun folgende Sätze:

1) Wenn der geschlossene Integrationsweg eine Curve ist, die in ihrem Innern keinen Verzweigungspunkt enthält, so ist in diesem Innern ζ als einwerthige Function des Ortes zu erklären und dann kann man beweisen,[1]) dass das Integral einen positiven Werth hat, wenn man bei der Integration die Curve so umläuft, dass das Innere zur Fortschreitungsrichtung auf der Curve so liegt, wie die η Axe zur ξ Axe. Liegt also, wie wir angenommen haben (§ 1), die η Axe rechts von der ξ Axe, so hat man die Curve so zu durchlaufen, dass man das Innere der Curve zur Rechten hat.

2) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei geschlossene Wege, die beide in demselben Punkt beginnen und enden. Dann ist $\int \zeta \, d\vartheta$ genommen über den Weg $\mathfrak{B}$ gleich demselben Integral, wenn man es über den Weg $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}$ nimmt. Das letztere zerfällt in die beiden Theile, das über $\mathfrak{A}$ und das über $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$. Für einen Punkt dieses letzteren Weges ist für ζ derjenige Werth zu setzen, der folgt, wenn man $\int d\zeta$ vom Anfang von $\mathfrak{A}$ an über den Weg $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}$ erstreckt. Dieser Werth ist aber gleich $\int\limits_{\mathfrak{A}} d\zeta$ plus dem Integral $\int d\zeta$ vom Beginn von $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ bis zu jenem Punkt genommen. Bezeichnen wir diesen letzteren Werth mit ζ_1, $\int\limits_{\mathfrak{A}} d\zeta$ mit ζ_0, so wird

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} \zeta \, d\vartheta = \int\limits_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta \, d\vartheta = \int\limits_{\mathfrak{A}} \zeta \, d\vartheta + \int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} (\zeta_0 + \zeta_1) \, d\vartheta$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{A}} \zeta \, d\vartheta + \int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta_1 \, d\vartheta + \zeta_0 \int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} d\vartheta.$$

Dem geschlossenen Wege $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ entspricht auf der x Ebene eine Curve. Wenn im Innern derselben weder ein Verzweigungspunkt noch ein singulärer Punkt liegt, so ist $\int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} d\vartheta = 0$.

---

1) Es ist mir kein anderer Beweis bekannt als der Riemann'sche (Werke Seite 124), der auf der Umformung des Randintegrals in ein Flächenintegral beruht.

Wird diese Curve im Wege $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ q mal durchlaufen, so zerfällt $\int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta_1 \, d\vartheta$ in eine Summe von q Integralen, von welchen sich auf jeden Umlauf eines bezieht. Im Anfang von $\mathfrak{A}'$ hat y q verschiedene Werthe und nach diesen unterscheiden sich in den q Integralen die Functionen ζ_1 und $d\vartheta$. Für ein bestimmtes dieser Integrale ist aber, in einem bestimmten Punkt des Weges, der Werth von ζ_1 nicht abhängig vom Wege und ist also eine einwerthige Function des Ortes. Nach dem ersten Satze oben ist also $\int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} \zeta_1 \, d\vartheta > 0$, wenn die Durchlaufung des Weges $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ so geschieht, dass die umlaufene Fläche rechts liegt. Unter dieser Annahme und der $\int\limits_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}} d\vartheta = 0$, ist demnach

XVIII $$\int\limits_{\mathfrak{B}} \zeta \, d\vartheta > \int\limits_{\mathfrak{A}} \zeta \, d\vartheta.$$

Nehmen wir jetzt zuerst an, dass kein Verzweigungspunkt im Unendlichen liegt. Jeder der Wege $T_1 \ldots T_\omega$ ist ein rückwärts durchlaufener Cyklus oder ein Umgang. Wenn T_λ ein rückwärts durchlaufener Cyklus ist, sei er $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$ die Uebergänge bezeichnen, aus welchen er besteht. Dann zerfällt der Weg $\mathfrak{p}$ in drei Theile, von welchen der erste und letzte der Curve der Schleife und der mittleren dem Kreis entspricht, welcher um den Verzweigungspunkt gelegt ist. Diese 3 Theile seien als $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ unterschieden. Ebenso sei dies bei $\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$ der Fall, so dass der ganze Weg durch $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3$ bezeichnet werden kann. Nun beginnt $\mathfrak{q}_1$ mit demselben Element, mit dem $\mathfrak{p}_3$ endigt, und weil beide sich auf dieselbe Curve beziehen, ist $\mathfrak{p}_3' = \mathfrak{q}_1$; ebenso ist $\mathfrak{q}_3' = \mathfrak{r}, \ldots \mathfrak{t}_3' = \mathfrak{p}_1$ so dass nach dem Satze XIV Seite 226, der auch hier gilt, das über den Weg $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{t}$ genommene Integral gleich dem über $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{t}_2$ genommenen ist. Der Werth von y, mit dem $\mathfrak{p}_2$ endigt, ist dem gleich, mit welchem $\mathfrak{q}_2$ beginnt u. s. w., folglich schliessen sich die Kreiswege, $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{t}_2$ zu einem geschlossenen, den Verzweigungspunkt q mal umlaufenden Kreis zusammen, der rückwärts, d. h. so zu durchlaufen ist, dass die Fläche links liegt.

Setzt man aber für Punkte in der Nähe des Verzweigungspunktes $x = w_\lambda + r(\cos t + i \sin t)$, so kann man $\zeta + i\vartheta$ in eine Reihe nach positiven Potenzen von $(x - w_\lambda)^{\frac{1}{q}}$ entwickeln, aus der man ζ und $d\vartheta$ entnehmen kann. Die angeführte Integration, die in Bezug auf t zwischen den Grenzen o und $-2\pi q$ auszuführen ist, liefert dann für $\int \zeta\, d\vartheta$ eine negative Summe von Quadraten, so dass $\int\limits_{T_\lambda} \zeta\, d\vartheta < o$ ist. Ist aber T_λ ein Umgang, so sei im Resultat XVIII voriger Seite $\mathfrak{A}$ der Weg T_λ, $\mathfrak{B}$ dagegen derjenige, welcher aus einer vom Punkte x_0 ausgehenden Curve $\mathfrak{D}$, einem um x_0 geschlagenen sehr grossen Kreise $\mathfrak{C}$ und endlich aus $\mathfrak{D}'$ besteht; dabei nehmen wir an, die Wegtheile seien mit demjenigen Element durchlaufen mit dem T_λ beginnt und endigt. Da im Wege $T_\lambda{}'\mathfrak{B}$ die eingeschlossene Fläche zur Rechten des Umlaufenden liegt, ist

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} \zeta\, d\vartheta > \int\limits_{T_\lambda} \zeta\, d\vartheta.$$

Der Weg $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$; weil $d\vartheta$ über $\mathfrak{B}$ genommen, Null ist, da der Kreis sämmtliche Verzweigungspunkte einschliesst, so ist der Beginn der Integration im Wege $\mathfrak{B}$ ohne Einfluss auf den Integralwerth, so dass man

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} \zeta\, d\vartheta = \int\limits_{\mathfrak{D}'\mathfrak{D}\mathfrak{C}} \zeta\, d\vartheta = \int\limits_{\mathfrak{C}} \zeta\, d\vartheta$$

setzen kann, wobei der Kreis im positiven Sinne durchlaufen wird. Da aber $\zeta + i\vartheta$ für $\varphi = \infty$ endlich bleibt und $x = \infty$ kein Verzweigungspunkt ist, gibt es, für x mit grossen absoluten Werthen, ν nach positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Potenzreihen und jedem Umgange entspricht eine dieser Reihen.

Durch Einführung von Polarcoordinaten findet man leicht, dass das

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} \zeta\, d\vartheta < o$$

ist und somit auch von $\int\limits_{\mathfrak{B}} \zeta\, d\vartheta$ und $\int\limits_{T_\lambda} \zeta\, d\vartheta$ das nämliche gilt. Im Ganzen ist dann also auch

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \int\limits_{T_\lambda} \zeta\, d\vartheta < o.$$

Liegt aber einer der Verzweigungspunkte im Unendlichen, so wird bei einem Umgange T_λ die eingeschlossene Fläche so umlaufen, dass sie links bleibt und, weil sie keine singulären Punkte enthält, ist dann das über T_λ genommene Integral negativ. Bei einem endlichen Verzweigungspunkt gilt die vorhin angestellte Betrachtung. Entspricht aber T_λ dem im Unendlichen liegenden Verzweigungspunkt, so sei ein jeder Uebergang in Theile zerlegt wie sie den oben benutzten Curven $\mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}'$ entsprechen. Wie bei einem endlichen Verzweigungspunkte findet sich dann, dass nur die auf den Kreis $\mathfrak{C}$ bezüglichen Wegtheile zum Integral beitragen und sich zu einem geschlossenen Weg zusammensetzen. Weil aber in T_λ der Cyklus rückwärts zu durchlaufen war, ist der Kreis $\mathfrak{C}$ hier so zu durchlaufen, dass der Punkt ∞ links liegt, d. h. im positiven Sinne und mit Hilfe einer Reihe findet sich, dass auch in diesem Falle das Integral < 0 ist.

Somit ist allgemein

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' + \gamma_1'\delta_1 - \gamma_1\delta_1' + \ldots + \lambda_{\varrho-1}'\mu_{\varrho-1} - \lambda_{\varrho-1}\mu_{\varrho-1}' > 0,$$

welches die Riemann'sche Ungleichung ist.[1])

§ 10.

Man kann die in § 4 vorgetragenen Operationen an sich und allgemeiner betrachten.

Es sei eine Gruppe R von Buchstabenreihen gegeben, in welchen die Buchstaben $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, ... jeder einmal vorkommen. Die Buchstaben seien in zwei Abtheilungen zerlegt: die activen und die passiven Buchstaben. Durch Anwendung der Regel, die in § 4 angewandt wurde, um R_0 aus der Verzweigungstafel abzuleiten, kann man nun aus den Reihen R andere S herstellen, indem man nur an die Stelle der fundamentalen Buchstaben dort hier die activen treten lässt. Dabei soll (der Gleichförmigkeit wegen) die Aenderung eintreten, dass wenn a ein activer Buchstabe ist, an Stelle der Gruppen $a_1 a_2$ oder $a_2 a_1$, die jene Regel fordern würde, einfach a_1 bez. a_2 gesetzt werden soll. Wie im angeführten Paragraphen kann man dann zeigen, dass jede Reihe S, die man mit irgend

1) Theorie der Abel'schen Functionen § 21 (Werke: Seite 125).

einem Buchstaben beginnt, nothwendig geschlossen sein muss. Vielleicht aber enthält eine solche Reihe noch nicht alle Buchstaben der Reihen R, dann bildet man eine zweite, dritte ... bis alle in R vorkommenden Buchstaben erschöpft sind. Die Reihen S sollen die abgeleiteten der Reihen R heissen. Wie oben in § 4 folgt, dass jeder Buchstabe a_α in einer, aber auch nur einer der Reihen S auftritt.

Betrachtet man die Reihen S als gegebene, so kann man aus ihnen wieder neue ableiten. Diese sind dann wieder die R. Denn enthält eine Reihe von R nur passive Buchstaben, so ist die abgeleitete ihr gleich, und liefert als neue abgeleitete wieder die ursprüngliche. Enthält sie aber auch active Buchstaben, so sei $a_\alpha \mathfrak{A}\, b_\beta$, wo $\mathfrak{A}$ nur passive Buchstaben enthält, eine Gruppe aus ihr; dann kommt in einer abgeleiteten Reihe, wenn wir a_α' das a mit dem Index $\frac{2}{\alpha}$ nennen, die Gruppe $a_\alpha' \mathfrak{A}\, b_\beta$ vor, und deren abgeleitete enthält wieder die Gruppe $a_\alpha \mathfrak{A}\, b_\beta$.

[Beispiel. Die Gruppe R sei $a_1\, c_2\, d_2\, f_2\, (e_1)$, $(b_2\, g_1\, e_2\, h_2)$, $c_1\, f_1\, k_2\, d_1\, k_1$, $a_2\, (b_1\, h_1\, g_2)$, wo die passiven Buchstaben oder Gruppen aus solchen in Klammern gesetzt sind. Dann wird S sein: $a_1\, (b_1\, h_1\, g_2)\, a_2\, c_2\, f_1\, (e_1)$, $(b_2\, g_1\, e_2\, h_2)$, $c_1\, d_2\, k_1\, d_1\, f_2\, k_2$.]

Es soll nun untersucht werden, wie die Reihen S sich verändern, wenn man annimmt, ein activer Buchstabe werde passiv oder umgekehrt. Sei a ein passiver Buchstabe, der in zweien der Reihen S vorkommt, so dass diese sind, $a_1 \mathfrak{A}$, $a_2 \mathfrak{B}$, unter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Gruppen von Buchstaben verstanden. Wird nun a activ, so ändern sich die andern Reihen von S nicht, die beiden aber verschmelzen in die eine $a_2 \mathfrak{A}\, a_1 \mathfrak{B}$. Denn wenn a activ ist, so hat man nach der Regel des § 4 zu schreiben $a_2\, a_1$, von a_1 kommt man zu der Gruppe $\mathfrak{A}$ und wieder nach a_1, dann springt man nach a_2 und findet $\mathfrak{B}$, womit die Reihe schliesst. Nach der Uebereinkunft im Beginn dieses Paragraphen hat man aber a_1 für $a_1 a_2$ und a_2 für $a_2 a_1$ zu schreiben. Kommen die beiden a in derselben Reihe S vor, so dass sie $a_1 \mathfrak{A}\, a_2 \mathfrak{B}$ ist, so entstehen durch das Activwerden von a die beiden Reihen $a_1 \mathfrak{B}$ und $a_2 \mathfrak{A}$.

War aber a ein activer Buchstabe, der passiv wird, so mögen zunächst die beiden a in verschiedenen Reihen, $a_1 \mathfrak{A}$ und $a_2 \mathfrak{B}$, auftreten. Diese sind ausführlicher geschrieben $a_1 a_2 \mathfrak{A}$ und $a_2 a_1 \mathfrak{B}$. Wenn nun a passiv wird, so hat man neben a_1 die Buchstabengruppe zn stellen, die auf a_1 folgt, ohne dass man springt und diese ist $\mathfrak{B}$, an dessen Ende schliesst sich a_2 und von ihm aus gelangt man, wenn man ohne Sprung weitergeht, zu $\mathfrak{A}$ und zu a_1 zurück. Also entsteht aus den beiden Reihen die eine $a_1 \mathfrak{B} a_2 \mathfrak{A}$. Wenn aber die beiden a in einer Reihe vorkommen, wie in $a_1 \mathfrak{A} a_2 \mathfrak{B}$, so entstehen durch die Passivirung die beiden Reihen $a_1 \mathfrak{B}$ und $a_2 \mathfrak{A}$, wie man sieht, wenn man ausführlicher $a_1 a_2 \mathfrak{A} a_2 a_1 \mathfrak{B}$ schreibt.

Sind die Buchstaben a b . . l activ, so sei die Operation der Ableitung der Reihen S aus den R mit (a b . . l) (R) bezeichnet. Dann kann man den bewiesenen Satz in die Formeln fassen

$$(a\,b\,c\,..\,l)(R) = (a)((b\,c\,..\,l)(R)); \quad (b\,c\,..\,l)(R) = a((a\,b\,c\,...\,l)(R)).$$

Somit ist speciell $(a\,b)(R) = (a)((b)(R)) = (b)((a)(R))$, denn die linke Seite $(a\,b)(R)$ ist ein ganz bestimmtes, eindeutig definirtes Resultat. Oder weniger umständlich geschrieben es ist $a\,b\,(R) = b\,a\,(R) = (a\,b)(R)$. Daraus ergibt sich aber $a\,b\,c\,R = (a\,b)(c\,R) = a(b(c\,R)) = a(c(b\,R)) = a\,c\,b\,(R)$ u. s. w.

Diese Operationen erfüllen also das Commutations- und Associationsprincip und ausserdem ist, wie schon gezeigt, $a^2 R = R$. Die obige Ueberlegung zeigt noch, dass wenn R aus r Reihen besteht, a (R) deren $r - 1$ oder $r + 1$ enthält.

Seien nun a b . . . l Buchstaben die in R vorkommen und $a\,b\,...\,l\,(R) = S$. Wenn dann einer der Buchstaben a b . . l z. B. a in zwei verschiedenen der Reihen S vorkömmt, so wird $a(S) = b\,...\,l\,(R)$ diese beiden Reihen in eine verschmelzen. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man also aus den Buchstaben a b . . . l eine Anzahl $\alpha\,\beta\,...\,\zeta$ aussondern, so dass in $\alpha\,\beta\,..\,\zeta\,(R) = \Sigma$ jede Reihe jeden der Buchstaben $\alpha\,\beta\,..\,\zeta$, den sie überhaupt enthält, zweimal enthält. Wenn nun in einer Reihe von Σ zwei der Buchstaben $\alpha\,\beta\,\gamma\,..\,\zeta$ z. B. $\alpha\,\beta$ sich trennen, so dass die Reihe ist $\alpha_\iota\,A\,\beta_\varkappa\,B\,\alpha_\lambda\,\Gamma\,\beta_\mu\,\Delta$, so wird $\alpha(\Sigma)$ aus dieser Reihe die beiden $\alpha_\iota\,\Gamma\,\beta_\mu\,\Delta$, $\alpha_\lambda\,A\,\beta_\varkappa\,B$ hervorgehen lassen und die anderen nicht ändern, und in $\alpha\,\beta\,(\Sigma)$ werden ebenfalls die letzteren ungeändert geblieben sein, dagegen die beiden ersteren Reihen in die eine $\beta_\mu\,B\,\alpha_\lambda\,A\,\beta_\varkappa\,\Delta\,\alpha_\iota\,\Gamma$ zusammenschmelzen, so dass dann $\alpha\,\beta\,(\Sigma) = \gamma\,...\,\zeta\,(R)$ ebensoviele Reihen als Σ enthält. Kommen in $\gamma\,...\,\zeta\,(R)$ noch Trennungen der Buchstaben $\gamma \ldots \zeta$ vor, so kann man in ähnlicher Weise weitergehen, ohne die Reihenzahl zu verändern und kann also schliesslich Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}$ finden, so dass die Reihen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}\,(R)$ keine Trennungen der $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}$ mehr enthalten, sondern vielleicht nur von den andern Buchstaben.

[Beispiel: Es sei R: $a_1\,c_2\,d_2\,f_2\,e_1$, $b_2\,g_1\,e_2\,h_2$, $c_1\,f_1\,k_2\,d_1\,k_1$, $a_2\,b_1\,h_1\,g_2$. Dann ist $a\,b\,c\,d\,(R) = a_1\,b_1\,g_1\,e_2\,h_2\,b_2\,h_1\,g_2\,a_2\,c_2\,f_1\,k_2\,d_1\,f_2\,e_1$ und $c_1\,d_2\,k_1$. Hiemit wird

$$a\,b\,d\,(R) = a_1\,b_1\,g_1\,e_2\,h_2\,b_2\,h_1\,g_2\,a_2\,c_2\,d_2\,k_1\,c_1\,f_1\,k_2\,d_1\,f_2\,e_1.$$

Hier sind die 3 Buchstaben a b d nicht mehr getrennt.

Dagegen besteht $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,k\,(R)$ aus den 3 Reihen $b_2\,h_1$, $f_2\,k_2\,c_1\,d_2\,k_1\,d_1$, und $a_1\,b_1\,g_1\,a_2\,c_2\,f_1\,e_1\,h_2\,g_2\,e_2$. Dann ist $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,k\,(R)$ aus den beiden Reihen $f_2\,k_2\,c_1\,d_2\,k_1\,d_1$ und $b_2\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,b_1\,g_1\,a_2\,c_2\,f_1\,e_1\,h_2$ zusammengesetzt und $a\,b\,d\,e\,f\,g\,k\,(R)$ ist die eine Reihe $f_2\,k_2\,c_1\,f_1\,e_1\,h_2\,b_2\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,b_1\,g_1\,a_2\,c_2\,d_2\,k_1\,d_1$. Damit wird weiter

$$d\,e\,f\,g\,k\,(R) = f_2\,k_2\,c_1\,f_1\,e_1\,h_2\,b_2\,g_1\,a_2\,b_1\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,c_2\,d_2\,k_1\,d_1$$

und ferner

$$d\,e\,g\,(R) = f_2\,e_1\,h_2\,b_2\,g_1\,a_2\,b_1\,h_1\,g_2\,e_2\,a_1\,c_2\,d_2\,k_1\,c_1\,f_1\,k_2\,d_1,$$

wo nun zwischen den d, e, g keine Trennungen mehr existiren.]

In Bezug auf die Buchstaben a b . . l sei nun R, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, *irreducibel*, d. h. es sei unmöglich, R so in kleinere Gruppen zu theilen, dass jede alle diejenigen der Buchstaben a b . . . l, die sie überhaupt enthält, zweimal enthält. Wenn dann a b . . . l (R) = S reducibel wäre in Bezug auf a b . . l, so sei T eine Gruppe, welche z. B. die Buchstaben a b . . f allein und jeden zweimal enthielte. Dann entstände, wenn man a b . . l (S) = R bildete, aus T eine Reihengruppe, die auch nur die Buchstaben a b . . f und jeden zweimal enthielte, so dass R reducibel wäre. *Also ist a b . . . l (R) irreducibel.*

Betrachtet man nun b c . . l (R). Es umfasse V diejenigen Reihen von S, welche a enthalten und W die andern, in welchen a nicht auftritt. Dann besteht b c . . l (R) aus den Reihen a (V) und den a (W), die W selbst sind, weil dieses ja a nicht enthält. Wäre nun in Bezug auf b c . . l W reducibel, so wäre es auch S; wäre a (V) reducibel in Bezug auf dieselben Grössen, so müsste es aus zwei Reihen bestehen und dann wäre V nur eine Reihe; bildete aber ein Theil von a (V) mit einem von

W eine irreducibele Gruppe, und der andere Theil von a (V) mit dem Rest von W eine zweite, so wäre a (V) aus zwei Reihen zusammengesetzt und V nur aus einer. Wenn also die beiden a in zwei verschiedenen Reihen von S vorkommen, so ist b c . . l (R) in Bezug auf b c . . l irreducibel. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses folgt dann, dass $\Sigma = \alpha\beta\ldots\zeta$ (R) in Bezug auf $\alpha\beta\,..\,\zeta$ irreducibel sein muss. Da aber jede Reihe von Σ jeden überhaupt in ihr auftretenden Buchstaben zweimal enthält, so kann es nur dann irreducibel sein, wenn es nur aus einer Reihe besteht und dann besteht auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{h}$ (R) nur aus einer Reihe.

Es sei die Gruppe R r-reihig und die S s-reihig; die Zahl der Buchstaben a b . . l sei q, die der $\alpha\beta\,..\,\zeta$ sei q'. Da nun beim Uebergang von a b . . l (R) zu $\alpha\beta\,..\,\zeta$ (R) $q - q'$ Buchstaben fortgefallen sind, und beim Wegfall eines jeden Buchstabens 2 Reihen in eine zusammengezogen wurden, so sind auch $q - q'$ Reihen fortgefallen und da in $\alpha\beta\,..\,\zeta$ (R) eine geblieben ist, so ist $s - (q - q') = 1$. Ist ferner die Zahl der Buchstaben $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}$ mit q'' bezeichnet, so ist die Differenz $q' - q''$ gerade. Weil die Reihe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}$ (R) keine Trennungen der Buchstaben $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}$ mehr enthält, so müssen einmal zwei gleiche Buchstaben z. B. $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ unmittelbar neben einander stehen oder wenigstens nur durch eine Buchstabengruppe $\mathfrak{B}$ getrennt sein, die keinen der Buchstaben $\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{h}$ enthält, so dass

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}\,(R) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{C}$$

ist, wo die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ noch die Buchstaben $\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{h}$ enthalten müssen Damit ist aber

$$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}\,(R)) = \mathfrak{b}\ldots\mathfrak{h}\,(R) = \begin{cases}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{C}\\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{B}.\end{cases}$$

$\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{B}$ enthält keinen der $\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{h}$ mehr, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{C}$ dagegen wird ebenfalls keine Trennungen enthalten und folglich auf dieselbe Weise wieder Anlass zu zwei Reihen geben u. s. w., bis man schliesslich R selbst mit r Reihen findet. Also muss die Zahl der Buchstaben $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}$ gleich $r - 1$ sein. Daher hat man, wenn man $q - q' = \lambda$, $q' - q'' = 2\mu$ setzt, $q'' = r - 1$ und somit

$$\lambda = s - 1, \qquad 2\mu = q - s - r + 2.$$

Wenn man also auch die Auswahl der Buchstaben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,..\,\mathfrak{h}$ auf verschiedene Art vornehmen kann, so sind doch die Zahlen λ und μ bei den verschiedenen Arten die nämlichen.

Ist $r = q + 1$, so wird $2\mu + \lambda = o$, d. h. $\lambda = o$, $\mu = o$, $s = 1$, folglich ist dann schon S eine einzige Reihe ohne Trennungen. [Im ersten der obigen Beispiele ist $r = 4$, $q = 4$, $s = 2$, daher $\lambda = 1$, $2\mu = o$; im zweiten ist $r = 4$, $q = 9$, $s = 3$, und es wird $\lambda = 2$, $2\mu = 4$].

Es seien, um eine Anwendung zu machen, die Reihen R unsere ω Wege $T_1 \dots T_\omega$ von § 6 (Seite 219) mit passenden Indices. Ist nämlich $a\,b\,c\,..\,i\,k$ ein Cyklus, $a\,m\,n \dots z$ ein Umgang, so seien 2 der Reihen R

$$k_2\, i_2 \dots b_2\, a_2 \text{ und } a_1\, m_1 \dots z_1.$$

Wenn dann alle Buchstaben activ sind, so beginnt eine der Reihen S mit $z_2\, a_1\, k_2 \dots$ und eine andere mit $b_1\, a_2\, m_1 \dots$. Nun stehen aber in einer Zelle der Verzweigungstafel des Cyklus wegen $a_1\, k_2$ und links neben a_1 steht, wegen des Umganges, z_2; ferner steht in einer andern Zelle wegen des Cyklus $b_1\, a_2$ und, wegen des Umganges, rechts von a_2 das m_1. Folglich sind die Reihen S die ν Zeilen der Verzweigungstafel und s ist $= \nu$. q ist ferner $= \nu\sigma$ und somit, weil R bez. S irreducibel ist,

$$\lambda = \nu - \iota,\quad 2\mu = \nu\sigma - \nu - \omega + 2 = 2\varrho$$

wie diese Zahlen oben (XII Seite 223) gefunden waren.

Wenn man bei einer irreducibelen Gruppe R von q Buchstaben $a\,b \dots o\,p\,t\,u \dots z$ und r Reihen, $w = q - r + 1$ Buchstaben $a\,b \dots p$ gefunden hat, derart, dass in Bezug auf die $r - 1$ übrigen $t\,u\,..\,z$ R ebenfalls irreducibel ist, so ist $t\,u\,..\,z\,(R)$ eine Reihe P, ohne Trennungen der Buchstaben $t\,u\,..\,z$ durch einander. Dann ist $a\,t\,u\,..\,z\,(R) = a\,(P)$ zweireihig. Ob aber $b\,a\,(P)$ drei- oder einreihig ist, kann man nicht sagen; wir wollen annehmen, es sei $(2 + \delta_2)$-reihig, wo δ_2 entweder $+1$ oder -1 ist, dagegen $c\,b\,a\,(P)$ $(2 + \delta_2 + \delta_3)$-reihig, wo δ_3 wieder $+1$ oder -1 ist u. s. w. Schliesslich bestehe $p\,o\,..\,c\,b\,a\,(P)$ aus $2 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_w$ Reihen. Es ist aber $p\,o \dots c\,b\,a\,(P) = a\,b\,c\,..\,p\,t\,u\,..\,z\,(R) = S$ und besteht somit aus $s = q - r + 2 - 2\mu = w + 1 - 2\mu$ Reihen, so dass

$$\delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_w = w - 1 - 2\mu$$

sein muss.

Ist $\mu = o$, so folgt $\delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_w = w - 1$, so dass alle $\delta_\varkappa = +1$ sein müssen. Dann ist also b a (P) 3 reihig und muss b in zwei verschiedenen Reihen enthalten, weil sonst beim Uebergang zu a (P) eine Reihe in zwei zerfallen, also 4 Reihen entstehen würden, während a (P) zweireihig ist. Ferner ist c b a (P) 4-reihig und muss aus einem ähnlichen Grund, wie der eben erwähnte, c in zwei verschiedenen Reihen enthalten u. s. w. Man kann also aus S mit Hilfe des oben geschilderten Verfahrens, indem man p (S), o p (S), . . . a b c . . p (S) bildet, allmälig die Reihe P ohne Trennungen herleiten.

Ist aber $\mu > 1$, so ist $w - 1 - 2\mu < w - 1$, daher können nicht alle $\delta_\varkappa$ gleich $+1$ sein. Es sei $\delta_{\alpha+1}$ das erste δ, welches $= -1$ ist, und es seien a b . . . l die ersten α der Buchstaben a b . . . p. Dann besteht l . . . . b a (P) aus $2 + \alpha - 1 = \alpha + 1$ Reihen, dagegen ist m l . . . · b a (P) nur α-reihig. Wenn nun in P zwischen den Buchstaben a b . . . l m keine Trennungen vorkämen, so wäre m l . . . . b a (P) aus $1 + \alpha + 1 = \alpha + 2$ Reihen zusammengesetzt, wie man sieht, wenn man den vorhin bei $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ (R) gemachten Schluss wiederholt. Also müssen in P mindestens zwei der Buchstaben a b . . . l m sich trennen. Seien dies die beiden a und b, so ist a b (P) einreihig, c b a (P) zweireihig und das Zufügen der Buchstaben d e . . p füge nun $\varepsilon_4, \varepsilon_5 \ldots \varepsilon_w$ Reihen hinzu (alle $\varepsilon = +1$ oder -1), so dass S aus $2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \ldots + \varepsilon_w$ Reihen besteht. Dann hat man die Gleichung

$$\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \ldots + \varepsilon_w = w - 3 - 2(\mu - 1).$$

Da $\mu = o$ schon erledigt ist, kann man annehmen, es sei $\mu \gtreqless 1$. Ist $\mu = 1$, so folgt $\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \ldots + \varepsilon_w = w - 3$, also $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \ldots = \varepsilon_w = 1$. Dann kommen also in b a (P) a und b getrennt vor, dagegen c in c b a (P) in zwei getrennten Reihen, ebenso d in d c b a (P) u. s. w., so dass man durch Bildung von p (S), o p (S) . . . d . . . o p (S), c d . . o p (S) und a b c d . . . o p (S) die Reihe P ohne Trennungen herleiten kann. Ist aber $m > 1$, so können nicht alle $\varepsilon = +1$ sein. Ist $\varepsilon_{\beta+1}$ das erste, das $= -1$ ist, so seien c d . . g h die ersten $\beta - 2$ der Buchstaben c d . . . p. Dann ist h g . . c d b a (P) $(\beta - 2)$ reihig, dagegen i h g . . c d b a (P) $(\beta - 3)$ reihig. Desswegen müssen sich unter den Buchstaben c d . . . g h i immer zwei finden, sie seien c und d, so dass in b a (P) c und d getrennt sind und d c b a (P) wieder einreihig wird. Man geht nun in der eben gezeigten Art fort, bis man 2μ Buchstaben a b, c d, ... k l gefunden hat, so dass b a (P), d c b a (P) ... l k ... d c b a (P) alle einreihig sind und in diesen Reihen a b, bez. c d, ... l k sich trennen. Wenn man nun die übrigen $w - 2\mu = \lambda$ Buchstaben m .. p allmählig activirt, so wird m l k ... b a (P) zweireihig, dagegen mögen bei den folgenden Buchstaben n ... p, resp. $\pi_2 \ldots \pi_\lambda$ Reihen hinzutreten, wo die π wieder $+1$ oder -1 sind. Dann muss sein

$$\pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_\lambda = w - 1 - 2\mu = \lambda - 1,$$

so dass alle π gleich $+1$ sind. Folglich enthält m l k .. b a (P) m in zwei getrennten Reihen, ... schliesslich p ... l k .. b a (P) = S p in zwei getrennten Reihen, so dass man nach der oben gegebenen Regel aus S durch Verschmelzen von je zwei Reihen allmälig p (S) o p (S) ... m ... o p (S) herleiten kann, wobei dies letzte aus einer einzigen Reihe besteht, in der k und l getrennt sind, so dass man weiter k l m .. o p (S) u. s. w. bis a b ... o p (S) abzuleiten im Stande ist.

Wendet man dies an auf unsere ω Cyklen und Umgänge $T_1 \ldots\ldots T_\omega$ als Reihen R, zu welchen die ν Zeilen der Verzweigungstafel als S gehören und für welche $q - r + 1 = 2\varrho + \nu - 1$, $r - 1 = \omega - 1$, $\lambda = \nu - 1$ ist, so folgt: wenn man $2\varrho + \nu - 1$ Uebergänge sucht, so dass in Bezug auf die übrigen $\omega - 1$ die $T_1 \ldots T_\omega$ noch eine irreducibele Gruppe bilden, so gibt es unter den $2\varrho + \nu - 1$ ersteren Uebergänge $\nu - 1$, welche dazu dienen können, um allmälig die ν Zeilen der Verzweigungstafel in eine Reihe R_0 zu vereinigen und die andern 2ϱ kommen dann in R_0 so vor, dass man die Regeln zur Ableitung der Reihen R_1, R_2 .. auf sie anwenden kann, d. h. sie liefern die kanonischen Perioden.

Dies ist die Begründung der Methode zur praktischen Herstellung der kanonischen Perioden, welche auf Seite 224 erwähnt wurde.