BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1971

MÜNCHEN 1972

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beispiel einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung, die in keine Liesche Gruppe biholomorpher Abbildungen einbettbar ist

Von **Ernst Peschl** in Bonn und **Ludwig Reich** in Würzburg

§ 1. Problemstellung

Die linearen Abbildungen der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ der Gestalt

$$(1) \qquad w = \varrho z,\ \varrho \neq 1,$$

besitzen Einbettungen in einparametrige Liesche Gruppen von ebensolchen Transformationen mit den gleichen Fixpunkten, die man auf folgendem Wege erhält: Sind die Bestimmungen von $\ln \varrho$ durch $\lambda_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$, gegeben, so erhalten wir diese Liesche Gruppe in der Form

$$(2) \qquad z \to w(t, z) = e^{(\lambda_0 + 2k\pi i)t} z.$$

Dabei gilt

$$(3) \qquad w(0, z) = z,\ w(1, z) = \varrho z.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß die zu den verschiedenen Werten $\lambda_0 + 2k\pi i$ gehörigen Gruppen (2) die einzigen einparametrigen Lieschen Gruppen lokal-biholomorpher Transformationen sind, die (3) erfüllen und den Fixpunkt $z = 0$ besitzen.

In Verallgemeinerung dieser Problemstellung kann man sich fragen, *wann sich eine lokal-biholomorphe Abbildung des* $\mathbf{C}^n$ *mit Fixpunkt* $x = 0$:

$$(4) \qquad x \to x^{(1)} = Fx^0 = Ax^0 + \mathfrak{P}(x^0)$$

mit einer nichtsingulären, konstanten, komplexen (n, n)*-Matrix* A *und einem konvergenten Potenzreihenvektor* $\mathfrak{P}(x)$ *einer Ordnung* ≥ 2, *so in eine lokale Liesche Gruppe, d. h. in einen Lieschen Gruppenkeim von Transformationen*

(5) $$x \to x(t, x^0) = A(t)\,x^0 + \mathfrak{P}(t, x^0)$$

einbetten läßt, daß für $t = 0$ *die Identität, für* $t = 1$ *die gegebene Abbildung entsteht:*

(6) $$x(0, x^0) = x^0,\ x(1, x^0) = F x^0.$$

Ferner kann man sich fragen, wie sämtliche Einbettungen (5), (6) gewonnen werden können. Insbesondere sind diese Fragen am ehesten zu lösen für Abbildungen, für die gegenüber der Gruppe der biholomorphen Koordinatentransformationen einfache Normalformen existieren, denn es genügt dann, die Frage für die Normalformen zu behandeln. Eine solche Klasse von Abbildungen (4) sind die kontrahierenden biholomorphen Abbildungen, die in den Arbeiten [4] und [5] der Verfasser untersucht worden sind.

Die Frage nach sämtlichen Einbettungen einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung (4) in eine lokale Liesche Gruppe gemäß (5) und (6) wird eingehend behandelt in der Arbeit [6].

Wir werden nun in der vorliegenden Note die beiden angeschnittenen Fragen nicht in voller Allgemeinheit behandeln, *sondern es ist unser Ziel, für* $n = 3$ *(in der niedrigsten Dimension, in der es möglich ist) Beispiele kontrahierender Abbildungen in ihrer halbkanonischen Form zu konstruieren, die keine Einbettung in eine einparametrige Liesche Gruppe gemäß* (5), (6) *besitzen.* (Für diese Normalformen handelt es sich um Liesche Gruppen und nicht nur um Gruppenkeime.) Diese Gegenbeispiele ergeben sich aus dem

Satz: *Es sei* $0 < \vartheta < 1$; α_1, β_1 *seien natürliche Zahlen mit gr. g. T.* $(\alpha_1, \beta_1) = d > 1$, $\alpha_1 \geqslant \beta_1$; *es seien* α, β *natürliche Zahlen mit* $1 < \alpha < \alpha_1$, $1 \leqslant [\beta/\beta_1]$. *Es sei* $\eta = e^{2\pi i/\beta_1}$. *Ferner setzen wir* $\varrho_1 = \vartheta^{\beta_1}$, $\varrho_2 = \vartheta^{\alpha_1}\eta$, $\varrho_3 = \varrho_1^{\alpha}\varrho_2^{\beta}$. *Dann gilt: Die mit obigen* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ *gebildete kontrahierende biholomorphe Abbildung* F

(7) $$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \varrho_1 x_1 \\ x_2^{(1)} &= \varrho_2 x_2 \\ x_3^{(1)} &= \varrho_3 x_3 + \sum_{k=0}^{[\beta/\beta_1]} b_k\, x_1^{\alpha + k\alpha_1}\, x_2^{\beta - b\beta_1} \end{aligned}$$

liegt in halbkanonischer Form vor, und es ist F in keine Liesche Gruppe gemäß (5), (6) *einbettbar, wenn wenigstens zwei der* b_k *nicht Null sind.*

Wir werden abschließend ein einfaches Beispiel für eine solche Abbildung (7) ohne Einbettung angeben. Der Beweis des Satzes verläuft so: Zunächst werden wir notwendige Bedingungen für die Einbettbarkeit in Form einer Randwertaufgabe für ein rekursives Differentialgleichungssystem gewinnen (§ 3). Dann werden wir mit Hilfe elementarer zahlentheoretischer Überlegungen zeigen, daß die Abbildungen (7) des Satzes diese notwendigen Bedingungen nicht erfüllen.

Daß die notwendigen Bedingungen bei beliebiger Dimension und bei beliebigem „Relationensystem" für die Eigenwerte ϱ_i (vgl. [4]) auch hinreichend sind, wird in einer eigenen Untersuchung ausgeführt werden.

Für die benötigten Grundlagen der Theorie der Lieschen Gruppen verweisen wir auf [3], für die Matrizenexponentialfunktion auf [1], für die Einzelheiten über die Normalformen kontrahierender biholomorpher Abbildungen auf die Arbeiten [4] und [5] der Verfasser.

Für Ergebnisse über die Einbettung von biholomorphen Abbildungen mit Fixpunkt in einer Veränderlichen sei auf die Monographie [2] von Kuczma verwiesen.

§ 2. Eine Randwertaufgabe als notwendige Bedingung für die Einbettbarkeit

Im Lieschen Gruppenkeime (5), (6) sei bereits der additive Parameter t eingeführt. Die Koeffizienten des Potenzreihenvektors $\mathfrak{P}(t, x^0)$ sind in einer offenen zusammenhängenden Umgebung von $t = 0$ holomorphe Funktionen von t, o. B. d. A. sei $t = 1$ in dieser Umgebung enthalten. (Diese Umgebung ist im Falle der polynomialen Normalformen von (4) ganz $\mathbf{C}$.) Die Gruppeneigenschaft liefert:

$$x(t + t', x^{(0)}) = x(t, x(t', x^{(0)})) =$$
$$= \mathrm{A}(t)\, x(t', x^{(0)}) + \mathfrak{P}(t, x(t', x^{(0)})) =$$

$$= A(t)\,(A(t')\,x^{(0)}) + \mathfrak{P}(t',\, x^{(0)}) + \mathfrak{P}(t, A(t')\,x^{(0)} + \mathfrak{P}(t',\, x^{(0)})) =$$
$$= A(t)\,A(t')\,x^{(0)} + A(t)\,\mathfrak{P}(t',\, x^{(0)}) + \mathfrak{P}(t, A(t')\,x^{(0)} + \mathfrak{P}(t,\, x^{(0)})).$$

Andererseits ist

$$x(t+t',\, x^{(0)}) = A(t+t')\,x^{(0)} + \mathfrak{P}(t+t',\, x^{(0)}).$$

Aus diesen beiden Relationen ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$A(t+t') = A(t)\,A(t')\;[= A(t')\,A(t)] \tag{8}$$

$$\mathfrak{P}(t+t', x^{(0)}) = A(t)\,\mathfrak{P}(t', x^{(0)}) + \mathfrak{P}(t, A(t')x^{(0)} + \mathfrak{P}(t', x^{(0)})), \tag{9}$$

dazu kommen die Randbedingungen

$$\begin{aligned} A(0) &= E \quad (E \text{ die Einheitsmatrix}) \\ A(1) &= A \quad (A \text{ die Matrix der Abbildung } (4)) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\mathfrak{P}(0, x^{(0)}) = 0,\; \mathfrak{P}(1, x^{(0)}) = \mathfrak{P}(x). \tag{11}$$

Wir leiten aus (8), (9), (10) und (11) differentielle Relationen ab. Zunächst für $A(t)$:

$$\lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}\,(A(t+t') - A(t)) = A(t)\,\lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}\,(A(t') - E),$$

somit:

$$\frac{d}{dt}\,A(t)\;(= \dot{A}(t)) = \dot{A}(0)\,A(t); \tag{12}$$

analog für $\mathfrak{P}(t, x^{(0)})$:

(13)

$$\lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}\,(\mathfrak{P}(t+t', x^{(0)}) - \mathfrak{P}(t, x^{(0)})) = A(t)\,\lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}\,(\mathfrak{P}(t', x^{(0)}) - 0) +$$
$$+ \lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}\,\{\mathfrak{P}(t, A(t')x^{(0)} + \mathfrak{P}(t', x^{(0)})) - \mathfrak{P}(t, x^{(0)})\}.$$

Wegen $\mathfrak{P}(0, x^{(0)}) = 0$ folgt für den ersten Summanden von (13):

$$A(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathfrak{P}(0, x^{(0)}). \tag{14}$$

Um den zweiten Summanden von (13) weiter umzuformen, beachten wir, daß wegen (11) gilt:

$$(15) \qquad A(t')x^{(0)} + \mathfrak{P}(t', x^{(0)}) =$$
$$= E x^{(0)} + \left(\dot{A}(0)\, x^{(0)} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}(0, x^{(0)}) \right) t' + \mathfrak{r}(t', x^{(0)})\, t'^2$$

mit einem holomorphen Vektor $\mathfrak{r}\,(t', x^{(0)})$,

(16)
$$\mathfrak{P}(t, x^{(0)} + z) - \mathfrak{P}(t, x^{(0)}) = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x^{(0)}}(t, x^{(0)})\, z + o(\| z \|^2)\, \mathfrak{d}\,(t, x^{(0)}, z),$$

wobei $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x^{(0)}}(t, x^{(0)})$ die Matrix $\left\| \frac{\partial \mathfrak{P}_i(t, x^{(0)})}{\partial x_k^{(0)}} \right\|$ bedeutet und

$\mathfrak{d}\,(t, x^{(0)}, z)$ einen Vektor mit für $t \to 0$ beschränkter Norm. Also folgt für den zweiten Teil der Summe (13)

$$(17) \qquad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x^{(0)}}(t, x^{(0)}) \left(\dot{A}(0) x^{(0)} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}(0, x^{(0)}) \right).$$

Aus (15), (16), (17) ergibt sich für (13)

(18)
$$\frac{\partial}{\partial t}\, \mathfrak{P}(t, z) = A(t)\, \frac{\partial}{\partial t}\, \mathfrak{P}(0, z) + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}(t, z) \left(\dot{A}(0)\, z + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}(0, z) \right),$$

wobei $z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$ ein variabler Vektor ist.

Es bezeichne im Folgenden z^ν das Monom $z^\nu = z_1^{\nu_1} \ldots z_n^{\nu_n}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$. Der Vektor $\mathfrak{P}(t, z)$ hat die Darstellung

$$(19) \qquad \mathfrak{P}(t, z) = \sum_{|\nu| \geq 2} \mathfrak{p}_\nu(t)\, z^\nu$$

mit in einem $t = 0$, $t = 1$ enthaltenden Gebiet holomorphen Vektoren $\mathfrak{p}_\nu(t)$. Für diese $\mathfrak{p}_\nu(t)$ wollen wir nun ein rekursives lineares Differentialsystem ableiten. Dazu spezialisieren wir uns ab jetzt auf den Fall einer Abbildung vom Typus (7), d. h. es liege A in Jordanscher Normalform

$$J = \operatorname{diag}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$$

vor, und es sei $\varrho_i \neq \varrho_k$ für $i \neq k$. Wir lösen das Differentialsystem (12), indem wir zunächst $\dot{A}(O) = C$ setzen, unter der Nebenbedingung (10). Bekanntlich (vgl. [1]) lautet die Lösung von (12)

$$A(t) = e^{Ct},$$

wobei dann eo ipso $C = \dot{A}(0)$ ausfällt. (10) ergibt die Bedingung:

$$A(1) = e^C = J. \tag{20}$$

Die allgemeine Lösung von (20) ist gegeben durch

$$\operatorname{diag}(\lambda_1 + 2k_1\pi i, \lambda_2 + 2k_2\pi i, \lambda_3 + 2k_3\pi i)$$

mit $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ und beliebigen, aber festen Bestimmungen $\lambda_i = \ln \varrho$ (vgl. [1]). Demgemäß erhalten wir für e^{Ct}:

$$A(t) = e^{Ct} = \operatorname{diag}(e^{(\lambda_1 + 2k_1\pi i)t}, e^{(\lambda_2 + 2k_2\pi i)t}, e^{(\lambda_3 + 2k_3\pi i)t}). \tag{21}$$

Berücksichtigen wir nun (19) und (21) in (18), so finden wir durch Koeffizientenvergleich bezüglich der Monome z^ν:

$$\frac{d\mathfrak{p}_\nu}{dt} = A(t)\,\dot{\mathfrak{p}}_\nu(0) + \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j \lambda_j\right) \mathfrak{p}_\nu(t) + \mathfrak{q}_\nu(\dot{\mathfrak{p}}_\xi(0), \mathfrak{p}_\eta(t)), \tag{22}$$

wobei die Komponenten von $\mathfrak{q}_\nu$ Bilinearformen in den Komponenten der Vektoren $\dot{\mathfrak{p}}_\xi(0)$ und $\mathfrak{p}_\eta(t)$ sind mit $|\xi| < |\nu|$, $|\eta| < |\nu|$, und zwar tritt das Produkt $\dot{p}_{\xi_1}(0) p_{\eta k}(t)$ höchstens dann auf, wenn $\xi + \eta - \nu$ ein Einheitsvektor ist (vgl. Hilfssatz 1).

Zu diesem rekursiven linearen Differentialsystem treten die Randbedingungen:

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{p}_\nu(0) &= 0 & \text{für alle } \nu; \\ \mathfrak{p}_{\nu,1}(1) &= 0, & \text{falls } z^\nu \text{ kein Zusatzmonom zum Eigenwert} \\ && \text{der } l\text{-ten Zeile ist;} \\ \mathfrak{p}_{\nu,1}(1) &= & \text{Koeffizient des Zusatzmonoms } z^\nu \text{ in der } l\text{-ten} \\ && \text{Zeile in (4) sonst.} \end{array} \tag{23}$$

Die Existenz von Lösungen des Systems (22) unter den Bedingungen (23) untersuchen wir in

Hilfssatz 1: (i) *Es mögen die Lösungsvektoren*

$$\mathfrak{p}^\nu(t) = {}^t(p_{\nu 1}(t), p_{\nu 2}(t), p_{\nu 3}(t))$$

von (22) *und* (23) *für* ν *mit* $|\nu| = 2, \ldots, L$, *existieren. Dann gilt:*

1.) $p_{\nu 1}(t) = p_{\nu 2}(t) = 0$ *für alle diese* ν;

2.) $p_{\nu 3}(t) \neq 0$ *höchstens dann, falls* z^ν *Zusatzmonom ist.*

(ii) *Unter den Voraussetzungen von* (i) *sei nun* z^ν *mit* $|\nu| = L + 1$ *Zusatzmonom. Dann gilt: Die Gleichungen* (22), (23) *für* $\mathfrak{p}_\nu(t)$ *sind, falls* $\sum \nu_j \lambda_j \neq \lambda_3$, *genau dann lösbar, wenn der Koeffizient des Zusatzmonoms* z^ν *in* (4), $b_\nu = 0$. *Falls* $\sum \nu_j \lambda_j = \lambda_3$, *besteht keine Einschränkung für die Lösbarkeit. Im ersten Falle lautet die Lösung*

$$p_{\nu 3}(t) = D(e^{\lambda_3 t} - e^{\sum \nu_j \lambda_j t}),\ D \in \mathbb{C}\ \textit{beliebig}, \tag{24}$$

im zweiten Falle lautet die Lösung

$$p_{\nu 3}(t) = e^{\cdot\lambda_3} b_\nu e^{\lambda_3 t}. \tag{25}$$

Beweis: Wir beschreiben die rechte Seite der Gleichung (22) näher: Der Vektor $\mathfrak{q}_\nu$ in (22) ist ja der Vektor, mit dem das Monom z^ν im Potenzreihenvektor $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}(t, z) \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}(0, z)$ multipliziert ist. Das allgemeine Glied R_{ik} der Matrix $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}(t, z)$ lautet

$$R^{ik} = \sum_{|\xi| \geq 2} \xi_k p_{\xi i}(t) z^{\xi - \varepsilon_k},\ \varepsilon_k = (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{kk}, \ldots),$$

die k-te Komponente des Vektors $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}(0, z)$:

$$\sum_{|\eta| \geq 2} \dot{p}_{\eta, k}(0) z^\eta,$$

somit

$$R_{ik} = \sum_{|\mu| \geq 2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\xi + \eta - \varepsilon_k = \mu} \xi_k p_{\xi 1}(t) \dot{p}_{\eta k}(0) z^\mu.$$

Die i-te Komponente von $\mathfrak{q}_\nu$ lautet daher

$$q_{\nu i} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{\substack{|\xi|, |\eta| \geq L \\ \xi + \eta - \varepsilon_k = \nu}} \xi_k \dot{p}_{\eta k}(0) p_{\xi i}(t). \tag{26}$$

Wenn nun für die Vektoren $\mathfrak{p}_\mu(t)$ mit $|\mu| < |\nu|$ die Annahmen des Hilfssatzes richtig sind, und wenn sie existieren, so ist

$$q_{\mu i}(t) = 0 \text{ für alle } i = 1, 2, 3 \text{ und alle } \mu, |\mu| < |\nu|.$$

Aus $|\xi|$, $|\eta| \geq 2$, $\xi + \eta - \varepsilon_k = \nu$, $|\nu| \geq 2$ folgt: $|\xi| < |\nu|$, $|\eta| < |\nu|$.

Also ist für $i = 1, 2$: $p_{\xi i}(t) = 0$. Bei (26) ist also nur mehr der Fall $i = 3$ zu untersuchen. Wenn z^{η} kein Zusatzmonom ist, so ist für alle $k = 1, 2, 3$, $\dot{p}_{\eta k} = 0$. Sind z^{η} und z^{ξ} Zusatzmonome, so ergibt sich ja, wegen $\varrho_3 = \varrho_1^{\xi_1}\varrho_2^{\xi_2}$, $\xi_3 = 0$. Also ist auch in diesem Fall der Beitrag zur Summe (26) Null. Somit $q_{\nu i}(t) = 0$, sofern für μ mit $|\mu| < |\nu|$ alle $\mathfrak{p}_{\mu}(t)$ existieren und die vorausgesetzten Eigenschaften haben. Wir beweisen nun die Behauptungen des Hilfssatzes durch vollständige Induktion nach $|\nu|$. Wir betrachten zuerst die ν mit $|\nu| = 2$. Da es keine $\mathfrak{p}_{\nu}(t)$ mit $|\nu| < 2$ gibt, so lauten die Gleichungen (22) hier:

$$\frac{d\mathfrak{p}_{\nu}}{dt} = A(t)\,\dot{\mathfrak{p}}_{\nu}(0) + \left(\sum_{j=1}^{3} \nu_j \lambda_j\right)\mathfrak{p}_{\nu}(t).$$

Es sei ν kein Zusatzmonom. Verwendet man die explizite Gestalt von $A(t)$:

$$A(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}\right)$$

mit beliebigen, aber fest gewählten Bestimmungen $\lambda_i = \ln \varrho_i$, so ergibt die explizite Integration und die Verwendung der Randbedingungen:

$$p_{\nu l}(t) = 0, \qquad l = 1, 2, 3.$$

Es sei nun z^{ν} Zusatzmonom ($|\nu| = 2$). Dann ist wie eben für $l = 1, 2$: $p_{\nu 1}(t) = 0$. Die Differentialgleichung für $p_{\nu 3}(t)$ lautet

$$\frac{dp_{\nu 3}}{dt} = \dot{p}_{\nu 3}(0)e^{\lambda_3 t} + \left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \nu_j\right) p_{\nu 3}(t). \tag{27}$$

Es sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden:

$$\lambda_3 \neq \sum_{j=1}^{3} \nu_j \lambda_j \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sum_{j=1}^{3} \nu_j \lambda_j.$$

Im ersten Falle lautet das allgemeine Integral von (27)

$$p_{\nu 3}(t) = \frac{\dot{p}_{\nu 3}(0)}{\lambda_3 - \sum \nu_j \lambda_j}\, e^{\lambda_3 t} + D e^{\sum \nu_j \lambda_j t}.$$

Dabei sind $\dot{p}_{\nu 3}(0)$ und D noch willkürlich. Hinzu treten die Randbedingungen

$$p_{\nu 3}(0) = 0, p_{\nu 3}(1) = b_{\nu}.$$

Das ergibt ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für C und D (mit $C = \dot{p}_{\nu 3}(0)/(\lambda_3 - \sum \nu_j \lambda_j)$):

$$C + D = 0$$
$$\varrho_3(C + D) = b_\nu.$$

Also ist notwendigerweise $b_\nu = 0$; dann ist aber $C = -D$ willkürlich, und es ergibt sich die Lösung (24). Im zweiten Fall ergibt sich ebenso die Lösung (25). Wir nehmen nun an, die Behauptungen seien für alle μ, $|\mu| < |\nu|$ gezeigt, und es mögen jeweils die Lösungen der Randwertaufgaben existieren. Dann zeigt uns die Überlegung am Anfang des Beweises, daß $q_{\nu_i}(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$, daß also auch für dieses ν die Gleichung (27) gilt. Die Überlegungen zur Lösung der zugehörigen Randwertaufgabe lauten aber in allen Fällen wie bei $|\nu| = 2$, und damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

§ 3. Konstruktion des Beispiels

Wenn man nun komplexe Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mit $0 < |\varrho_3| \leqslant |\varrho_2| \leqslant |\varrho_1| < 1$, $\varrho_i \neq \varrho_k$, $i \neq k$, so konstruieren kann, daß für sie das Relationensystem die im Satz verlangte Gestalt aufweist, und daß für eine geeignete Wahl der b_ν die notwendigen Bedingungen aus Hilfssatz 1 nicht erfüllt sind, so ist damit ein Beispiel einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung gewonnen, das nicht in eine Gruppe biholomorpher Abbildungen gemäß (5) und (6) einbettbar ist.

Es sei $\vartheta \in \mathbf{R}$, $0 < \vartheta < 1$, α_1, β_1 seien natürliche Zahlen mit $1 < \beta_1 \leqslant \alpha_1$, gr. g. T. $(\alpha_1, \beta_1) = \delta > 1$. Es sei $\zeta = e^{2\pi i/\beta_1}$. Dann werde gesetzt

$$\varrho_1 = \vartheta^{\beta_1}, \ \varrho_2 = \vartheta^{\alpha_1}\zeta. \tag{28}$$

Hilfssatz 2: *Falls für zwei natürliche Zahlen e, f $\varrho_1^e = \varrho_2^f$ gilt, so hat man $e = \sigma\alpha_1$, $f = \sigma\beta_1$ mit $\sigma \in \mathbf{N}$.*

Beweis: Mit $\varrho_1^e = \varrho_2^f$ folgt aus (28): $\vartheta^{e\beta_1 - f\alpha_1} = \zeta^f$. Da nun $0 < \vartheta < 1$, $|\zeta| = 1$, so muß gelten: $e\beta_1 - f\alpha_1 = 0$, $\zeta^f = 1$, d. h. $\beta_1 | f$, $e = \tau\alpha_1/d$, $f = \tau\beta_1/d$, mit $\tau \in \mathbf{N}$. Da $\beta_1 | f$, ist $\tau/d = \sigma \in \mathbf{N}$.

W. z. b. w.

Es werde ferner

$$\varrho_3 = \varrho_1^{\alpha} \varrho_2^{\beta} \tag{29}$$

gesetzt, mit $0 \leqslant \alpha < \alpha_1, \beta_1 < \beta, \alpha + \beta \geqslant 2, \alpha, \beta \in \mathbf{Z}$. Dann ist auch

$$\varrho_3 = \varrho_1^{\alpha + k\alpha_1} \varrho_2^{\beta - k\beta_1}, \quad k = 0, 1, \ldots, [\beta/\beta_1],$$

und nur für diese k gilt

$$\alpha + k\alpha_1 \geqslant 0, \; \beta - k\beta_1 \geqslant 0, \; \alpha + \beta + k(\alpha_1 - \beta_1) \geqslant 2.$$

Es sind, wie wir hervorheben, mindestens zwei solche Werte von k vorhanden.

Aus dem Hilfssatz 2 und den Hilfssätzen 1–3 in [3] folgt, daß $1 = \varrho_1^{\alpha_1} \varrho_2^{-\beta_1}$, $1 = \varrho_3^{-1} \varrho_1^{\alpha} \varrho_2^{\beta}$ eine Basis des Relationensystems der von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ erzeugten multiplikativen Gruppe ist. Es seien nun $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ beliebige, aber feste Bestimmungen von $\ln \varrho_1$, $\ln \varrho_2$, $\ln \varrho_3$. Es ergibt sich

$$2u\pi i = \alpha_1 \lambda_1^{(0)} - \beta_1 \lambda_2^{(0)}, \; u \in \mathbf{Z}. \tag{30}$$

$$2v_k \pi i + \lambda_3^{(0)} = (\alpha + k\alpha_1)\lambda_1^{(0)} + (\beta - k\beta_1)\lambda_2^{(0)}, \; v_k \in \mathbf{Z}. \tag{31}$$

Hilfssatz 3: *Werden* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ *gemäß* (28) *und* (29) *bestimmt, so gibt es keine Bestimmungen der Logarithmen* $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$, *so daß in* (31) *für alle* $k = 0, 1, \ldots, [\beta/\beta_1]$ $v_k = 0$ *ist, genauer, bei jeder Bestimmung von* $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$ *ist*

$$\lambda_3^{(0)} = (\alpha + k\alpha_1)\lambda_1^{(0)} + (\beta - k\beta_1)\lambda_2^{(0)}$$

höchstens für ein $k \in \{0, 1, \ldots, [\beta/\beta_1]\}$ *erfüllt.*

Beweis: Für keine Bestimmung von $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}$ gilt: $\alpha_1 \lambda_1^{(0)} - \beta_1 \lambda_2^{(0)} = 0$. Denn es ist wegen (28) und (29):

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0)} &= \beta_1 \log \vartheta + 2\sigma_1 \pi i, \\ \lambda_2^{(0)} &= \alpha_1 \log \vartheta + 2\sigma_2 \pi i + 2\pi i/\beta_1. \end{aligned}$$

Wäre $\alpha_1 \lambda_1^{(0)} - \beta_1 \lambda_2^{(0)} = 0$, so hieße dies also

$$\alpha_1(\beta_1 \log \vartheta + 2\sigma_1 \pi i) - \beta_1(\alpha_1 \log \vartheta + 2\sigma_2 \pi i) - 2\pi i = 0$$

oder

$$2\pi i(\alpha_1 \sigma_1 - \beta_1 \sigma_2 - 1) = 0.$$

Die diophantische Gleichung $\alpha_1\sigma_1 - \beta_1\sigma_2 = 1$ hat aber wegen $(\alpha_1, \beta_1) = d > 1$ keine Lösung.

Wenn nun für ein k, etwa k_0, $0 \leqslant k_0 \leqslant [\beta/\beta_1]$, $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$, $\lambda_3^{(0)}$ so bestimmt sind, daß $\lambda_3^{(0)} = (\alpha + k_0\alpha_1)\lambda_1^{(0)} + (\beta - k_0\beta_1)\lambda_2^{(0)}$, so folgt für jedes andere $k \neq k_0$ (– und mindestens ein weiteres zulässiges existiert ja –):

$$(\alpha + k\alpha_1)\lambda_1^{(0)} + (\beta - k\beta_1)\lambda_2^{(0)} =$$
$$= (\alpha + k_0\alpha_1)\lambda_1^{(0)} + (\beta - k_0\beta_1)\lambda_2^{(0)} + (k - k_0)\alpha_1\lambda_2^{(0)} - (k - k_0)\beta_1\lambda_2^{(0)} =$$
$$= \lambda_3^{(0)} + (k - k_0)\,(\alpha_1\lambda_1^{(0)} - \beta_1\lambda_2^{(0)}) \neq \lambda_3^{(0)},$$

wegen $\alpha_1\lambda_1^{(0)} - \beta_1\lambda_2^{(0)} \neq 0$, $k - k_0 \neq 0$.

Werden daher $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ wie im Satz angegeben konstruiert, und werden mindestens zwei $b_k \neq 0$ gewählt, so sind für die kontrahierende biholomorphe Abbildung die Bedingungen des Hilfssatzes 1 nicht erfüllt, und damit ist der Satz bewiesen.

Wir geben noch ein einfaches Beispiel einer solchen Abbildung (7). Es sei $\vartheta = 1/2$, $\alpha_1 = \beta_1 = 3$, $\alpha = 0$, $\beta = 4$. Es ergibt sich gemäß (28), (29) $\varrho_1 = 1/2$, $\varrho_2 = e^{2\pi i/3}/2$, $\varrho_3 = e^{2\pi i/3}/16$. Dann ist

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}\,x_1 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}\,e^{2\pi i/3}\,x_2 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{16}\,e^{2\pi i/3}\,x_3 + x_1^3 x_2 + x_2^4
\end{aligned}$$

eine Abbildung, die nach dem Satz keine Einbettung in eine Liesche Transformationsgruppe gemäß (5), (6) besitzt.

Literatur

[1] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung I, Kap. V. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

[2] Kuczma, M.: Functional Equations in a Single Variable. Ch. IX. Warschau 1968.

[3] Pontrjagin, L. S.: Topologische Gruppen, Bd. II. B. G. Teubner, Leipzig 1962.

[4] Reich, L.: Das Typenproblem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. Math. Ann. *179*, 227–250 (1969).

[5] Reich, L.: Normalformen biholomorpher Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. Math. Ann. *180*, 233–255 (1969).

[6] Reich, L.: Zur analytischen Iteration linearer und kontrahierender biholomorpher Abbildungen des $\mathbb{C}^n$. Erscheint in der Schriftenreihe der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Institut für Reine Mathematik, Bonn-Birlinghoven (1971).