Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 15. Abhandlung

Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

von

Walther von Dyck

Vorgetragen am 6. März 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11_2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11_3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14_3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14_2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17_1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1^{ter} O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 15. Abhandlung

Über die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

von

Walther von Dyck

Vorgetragen am 6. März 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Untersuchungen über die singulären Stellen der durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

definierten Kurvensysteme sind qualitativer Art, sofern sie sich mit der Analysis situs solcher Systeme beschäftigen, quantitativer mit Rücksicht auf die Darstellung der Integrale in der Umgebung der singulären Stellen durch konvergente Entwickelungen. Nach beiden Richtungen sind diese Fragen durch die bekannten Aufsätze von Poincaré, „Sur les courbes définies par les équations différentielles“ (im Journal de Mathématiques, 3e Série, tome VII und VIII, 4e Série, tome I und II, 1881—86) gefördert worden und neuerdings vor allem durch die Arbeiten von Bendixson (Acta mathematica, Bd. 24, 1901).

Bei Poincaré tritt dabei schon die Beziehung der Fragen der Analysis situs dieser Kurvensysteme zu den Kroneckerschen Untersuchungen über die Charakteristik eines Funktionensystems zutage, ohne daß indes die hiedurch ermöglichte Form der Darstellung weiter verfolgt würde. Bendixson andererseits hat neuerdings eine Abzählungsformel für den Charakter solcher singulärer Stellen gegeben (a. a. O., S. 39 u. f.), welche gleichfalls wieder auf die Kroneckerschen Sätze hinweist, ohne daß diese Beziehung hervorgehoben wäre. Ich selbst habe mich in früheren Studien („Beiträge zur Analysis situs“, Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss., Leipzig 1885 und 1886, Mathematische Annalen, Bd. 32 und 37; vergl. auch meine Untersuchungen „Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definierten Kurvensysteme“, Sitzber. d. K. Bayer. Akad. d. W. v. J. 1891 und 1892) zunächst für Gebiete von zwei und drei Dimensionen mit Beziehungen der Analysis situs zur

Kroneckerschen Charakteristikentheorie eingehend beschäftigt und dabei Relationen zwischen den singulären Stellen eines eine Fläche einfach überdeckenden Kurvensystems aufgestellt, welche jene von Poincaré gegebenen Beziehungen und die Bendixsonschen umfassen.

Legt man für die Darstellung dieser Relationen das obige System von Differentialgleichungen zu Grunde, für ein ebenes Gebiet zunächst also die Gleichung

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2}$$

und zieht dabei systematisch die Kroneckerschen Sätze heran, so gewinnen diese Untersuchungen eine sehr übersichtliche Form, welche insbesondere den Kern der von Bendixson zur Herleitung seines Satzes angewendeten Methoden klarer hervortreten läßt. Bei der Verallgemeinerung auf das System

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ergibt sich als neu ein Zusammenhang zwischen den singulären Stellen der im n dimensionalen Raume definierten Kurvensysteme und gewissen auf $(n-1)$ dimensionalen Begrenzungsmannigfaltigkeiten abzuzählenden besonderen Punkten.

Um die Darstellung übersichtlich zu gestalten, schicke ich jene früher von mir aufgestellte Beziehung aus der Analysis situs eines Kurvensystems sowie die zu verwendenden Abzählungsformeln der Kroneckerschen Charakteristikentheorie voraus, wobei ich mich bei den letzteren auf die Summenformeln beschränke.

§ 1. Analysis situs eines einfach unendlichen Kurvensystems.

Eine beliebige, ebene oder gekrümmte, einfach oder mehrfach berandete, aus einem oder aus mehreren Teilen bestehende Fläche sei einfach von einem Kurvensystem überdeckt, so zwar, daß von einem Punkte auf dem Rande im allgemeinen ein

Kurvenzweig, von einem Punkte im Innern im allgemeinen zwei Kurvenzweige auslaufen. Im Innern seien singuläre Punkte P_n^i vorhanden, von denen n Kurvenzweige ausgehen; dabei kann $n = 0, 1, 3 \ldots n$ sein; die Anzahl dieser Punkte sei p_n^i. Weiter bezeichnen wir als Punkte P_∞^i (ihre Anzahl sei p_∞^i) Punkte, von denen unendlich viele Zweige ausgehen; wir begreifen hier auch solche Punkte mit ein, denen sich unendlich viele Kurvenzweige asymptotisch nähern (Wirbelpunkte). Ebenso seien auf dem Rande, in der Zahl p_n^r Punkte P_n^r vorhanden, von denen aus je n $(n = 0, 2, 3 \ldots n)$ Zweige in das Innere der Fläche laufen. Sei endlich K_F die den Zusammenhang der Fläche bestimmende Zahl (für welche ich wieder die Annalen 32 gegebene, dort mit K^{II} bezeichnete Zahl benütze, deren Beziehung zu den Riemann-Neumannschen Zusammenhangszahlen ebendort § 4 erörtert ist), dann besteht zwischen jenen singulären Punkten und der Zahl K_F die Beziehung

$$2 p_\infty^i - \sum (n-2)\, p_n^i = \sum (n-1)\, p_n^r + 2 K_F \tag{1}$$

(Annalen 32, S. 501). Die Formel gibt also eine Beziehung zwischen den „Punktcharakteristiken“ der singulären Punkte im Innern und den „Punktcharakteristiken“ der Randpunkte, so zwar, daß jeder Punkt im Innern:

$$\begin{array}{ll} P_\infty^i & \text{mit } +2 \\ P_n^i & \text{mit } -(n-2), \end{array} \tag{2}$$

jeder Punkt auf dem Rande

$$P_n^r \text{ mit } (n-1) \tag{3}$$

zu zählen ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß unser Kurvensystem auf dem Rande keine anderen singulären Stellen besitzt als Berührungen einzelner Kurven des Systems mit der Randkurve — eventuell lassen sich solche durch geeignete Verschiebung der Randkurve herstellen. Wir unterscheiden diese Berührungen als „innere Berührungen“,

d. h. Punkte P^r_2 und als „äußere Berührungen", d. h. Punkte P^r_0; es kommt ihnen der Punktcharakter $+1$ bzw. -1 zu, so daß wir die Formel (1) in vereinfachter Gestalt

$$(1^a) \qquad 2p^i_\infty - \sum(n-2)p^i_n = p^r_2 - p^r_0 + 2K_F$$

schreiben können. In dieser Form wollen wir die Gleichung benützen als Definitionsgleichung für den Gesamtcharakter aller im **Innern** unseres Gebietes gelegenen singulären Punkte, bestimmt aus der Anzahl der inneren und äußeren Berührungsstellen unseres Kurvensystems mit dem Rande.

Beschränken wir uns auf einen einzigen singulären Punkt (der etwa durch das Zusammenrücken einer Anzahl einfacher singulärer Punkte P^i_n bzw. P^i_∞ entstanden sein mag, und grenzen um ihn (etwa durch eine Kreislinie, falls es sich um ein ebenes Gebiet handelt) ein einfach zusammenhängendes, einfach berandetes Elementargebiet, $K_F = 1$, ab, so ist der Charakter i dieses Punktes definiert durch die auf der Begrenzungskurve abzuzählende Zahl:

$$(4) \qquad 2i = p^r_2 - p^r_0 + 2.$$

Poincaré bezeichnet diese Zahl i als den „Index" jenes Punktes.

§ 2. Die Kroneckersche Charakteristik K eines Funktionensystems.[1])

Es seien $F_0, F_1, \ldots F_n$ eindeutige reelle Funktionen der reellen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$, die für endliche Werte der Variabeln endliche Werte annehmen und für welche innerhalb des zu betrachtenden Gebietes die $n+1$ aus je n dieser Funktionen zu bildenden Funktionaldeterminanten niemals gleichzeitig mit den betreffenden Funktionen für ein Wertsystem der x verschwinden. Wir setzen dabei diese Funktionen F so normiert voraus, daß das Gebiet $F < 0$ ganz im

[1]) Monatsberichte der Berliner Akademie vom März 1869, Werke Band I.

Endlichen liegt, als von $F = 0$ umschlossener „Innenraum". Dann gilt zunächst die Formel:

$$\Sigma \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix} \right] = 0, \tag{5}$$

wenn die Summe ausgedehnt wird über alle Punkte $(x_1, x_2, \dots x_n)$, für welche gleichzeitig die Gleichungen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots \quad F_n = 0$$

bestehen und wenn wir dabei diese Punkte mit $+1$ bzw. mit -1 in der Summe zählen, je nachdem die obige Funktionaldeterminante positiv oder negativ ist. Wir bedienen uns dabei auch in der Folge des Zeichens [ ] um die Zahl $+1$ bzw. -1 dem positiven bzw. negativen Zahlenwerte des in der eckigen Klammer stehenden Ausdruckes gemäß zu charakterisieren. Erstrecken wir aber diese Summation nur auf den Innenraum der Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$, dann gelangen wir zu einer charakteristischen Zahl:

$$K = \Sigma \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix} \right], \tag{6}$$

die Summation erstreckt über die Punkte:

$$F_0 < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \dots, \quad F_n = 0.$$

Alle $(n + 1)$ Summen, welche wir mit Hilfe der $(n + 1)$ Funktionen unter Auszeichnung jedesmal einer derselben bilden können, ergeben stets dieselbe Zahl K, welche Kronecker deshalb als Charakteristik des Funktionensystems bezeichnet. Das Vorzeichen von K hängt noch von der Reihenfolge der Funktionen ab.

Aus Gleichung (5) folgt sofort noch eine zweite Reihe von Formeln zur Bestimmung der Zahl K in der Gestalt:

$$K = \tfrac{1}{2}\sum\left[F_0 \cdot \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}\right], \tag{7}$$

die Summe erstreckt über alle Punkte:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots \quad F_n = 0.$$

Solange es sich nur um Betrachtungen handelt, bei welchen die $(n+1)$ Funktionen nicht gegeneinander ausgezeichnet sind, bietet die Betrachtung der verschiedenen Darstellungsformen der Charakteristik kein neues Interesse. Aber diese verschiedenen Formen führen sofort zu weiteren Sätzen der Geometrie der Lage, wenn es sich um Betrachtungen handelt, bei denen die einzelnen Funktionen des Systems eine verschiedene Rolle spielen. So habe ich seinerzeit die verschiedenen Möglichkeiten, die „Zusammenhangszahl" einer Fläche mit Hilfe verschiedener Summenformeln abzuzählen, betrachtet. So ergeben sich auch hier unsere Sätze über die singulären Stellen der durch Differentialgleichungen definierten Kurvensysteme eben aus jenen verschiedenen Darstellungsformen der Charakteristik.

§ 3. Abzählung im Gebiete von zwei Dimensionen.

Für das durch eine Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \tag{8}$$

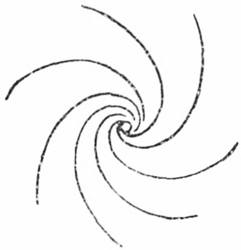
(in welcher X_1 und X_2 eindeutige Funktionen von x_1 und x_2 bedeuten mögen) gegebene Kurvensystem werden die singulären Stellen:

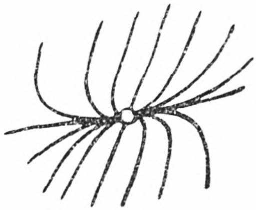
$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

wenn wir von höheren Singularitäten zunächst absehen, bekanntlich nach dem Vorzeichen der Determinante

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} \tag{9}$$

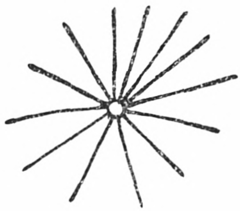
unterschieden in Punkte P_∞^i für $\Delta_X > 0$ und P_4^i für $\Delta_X < 0$. Dabei umfassen die Punkte P_∞^i





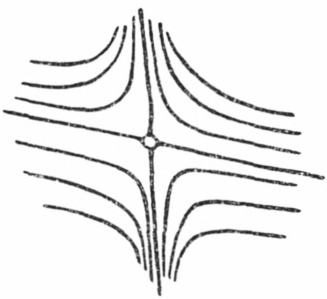
die Wirbelpunkte (foyers) und die Knotenpunkte (noeuds)

und reihen sich in diese



die isolierten Punkte (P_0^i) (centres) und die Büschelpunkte

als spezielle Fälle ein. Die Punkte P_4^i sind die



Doppelpunkte (cols) des Kurvensystems.

Für die Abzählung der im Innern eines Gebietes $F(x_1, x_2) < 0$ enthaltenen Punkte P^i_∞, P^i_0 und P^i_4 hat man also zunächst:

$$p^i_\infty + p^i_0 - p^i_4 = \sum \left[\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} \right] = K_X, \tag{10}$$

die Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0.$$

Diese Zahl K_X ist demnach (nach Definition (6)) die Kroneckersche Charakteristik des Funktionensystems F, X_1, X_2.

Andererseits sind die Berührungspunkte der Kurven des Systems (8) mit der Randkurve $F = 0$ gegeben durch

$$F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0$$

und eine einfache Rechnung zeigt, daß der Unterschied der „inneren“ und „äußeren“ Berührung einer Integralkurve mit $F = 0$ bestimmt wird durch das Vorzeichen von:

$$(X_1 F_2 - X_2 F_1) \cdot \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ (X_1 F_1 + X_2 F_2)_1 & (X_1 F_1 + X_2 F_2)_2 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

so zwar, daß man hat:

$$\begin{aligned} p^r_2 - p^r_0 = \sum [(X_1 F_2 - X_2 F_1) \times \\ \times \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ (X_1 F_1 + X_2 F_2)_1 & (X_1 F_1 + X_2 F_2)_2 \end{vmatrix}] = 2\, K_{XF}, \end{aligned} \tag{12}$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte:

$$F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0.$$

Diese Formel ergibt also nach Definition (7) die Zahl $K_{XF} = \frac{1}{2}(p^r_2 - p^r_0)$ als Kroneckersche Charakteristik des Funktionensystems:

$$F = 0, \quad (X_1 F_1 + X_2 F_2) = 0, \quad (X_1 F_2 - X_2 F_1) = 0.$$

Endlich läßt sich die Zusammenhangszahl K_F des Gebietes $F < 0$ nach meinen früheren Untersuchungen darstellen durch die Formel:

$$K_F = \sum \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \right], \tag{13}$$

die Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

Die Relation 1ª

$$p^i_x + p^i_0 - p^i_4 = \tfrac{1}{2}(p^r_2 - p^r_0) + K_F \tag{1ª}$$

stellt sich also dar als eine lineare Beziehung zwischen den drei Charakteristiken

K_X des Funktionensystems $F = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$

K_F des Funktionensystems $F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$

$K_{X,F}$ des Funktionensystems $F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0,$
$$X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0$$

in der Form:

$$K_{X,F} = K_X + K_F. \tag{14}$$

§ 4. Umkehrung: Analytischer Beweis der Formel 1.

Die Gleichung (14) zwischen diesen drei Charakteristiken folgt nun aber auf die einfachste Weise direkt aus den Sätzen des § 2 über die verschiedenen Darstellungsformen einer Charakteristik und es ergibt sich damit ein unmittelbarer analytischer Beweis der Formel 1, die ich früher aus Betrachtungen der Analysis situs hergeleitet habe.

In der Tat, betrachten wir das Funktionensystem

$$F = 0, \quad X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0, \quad X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0 \tag{15}$$

und zeichnen in demselben, wie dies in Formel (12) geschehen, die Funktion $(X_1 F_2 - X_2 F_1)$ vor den beiden anderen aus, so ergibt sich die obige Bedeutung von K_{XF} als:

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2}(p_2^r - p_0^r).$$

Heben wir aber andererseits $F = 0$ vor den beiden anderen Gleichungen des Systems hervor, so handelt es sich um die Schnittpunkte von

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0 \quad \text{und} \quad X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0$$

im Innern von $F = 0$. Diese beiden Gleichungen sind aber nur verträglich, wenn entweder

$$X_1 = 0 \quad \text{und} \quad X_2 = 0$$

oder

$$F_1 = 0 \quad \text{und} \quad F_2 = 0$$

ist; d. h. geometrisch für die singulären Punkte der Differentialgleichung einerseits und für die Doppelpunkte des Kurvensystems $F = \text{const.}$ andererseits.

Die Charakteristik

$$K_{X,F} = \Sigma \left[\begin{vmatrix} (X_1 F_1 + X_2 F_2)_1 & (X_1 F_1 + X_2 F_2)_2 \\ (X_1 F_2 - X_2 F_1)_1 & (X_1 F_2 - X_2 F_1)_2 \end{vmatrix} \right]$$

spaltet sich also in zwei Summen, die nach Weglassung je des positiven Faktors $(X_1^2 + X_2^2)$ bzw. $(F_1^2 + F_2^2)$ geschrieben werden können:

$$K_{X,F} = \Sigma \left[\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} \right] + \Sigma \left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \right],$$

die erstere Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

die zweite Summe ausgedehnt über die Punkte:

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

Das ist aber nach obigem unmittelbar:

$$K_{XF} = K_X + K_F \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zeichnen wir endlich von den drei Gleichungen (15) die dritte

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 = 0$$

für die Berechnung der Charakteristik aus, so handelt es sich um die Abzählung der Punkte $F = 0$, $X_1 F_2 - X_2 F_1 = 0$ analog der Formel (12). Dabei entsteht die neue Formel, wenn wir dort X_1 und X_2 mit X_2 und $-X_1$ vertauschen. Geht man also von der Differentialgleichung:

$$\frac{d x_1}{X_2} = \frac{d x_2}{-X_1},$$

d. h. von dem Orthogonalsystem des ursprünglichen Kurvensystems aus, so handelt es sich jetzt für die Abzählung längs der Kurve $F = 0$ um die Berührungspunkte des Orthogonalsystems. Der Punktcharakter der singulären Stellen $X_2 = 0$, $-X_1 = 0$ dieses Orthogonalsystems aber, gegeben durch das Vorzeichen der Determinante:

$$\begin{vmatrix} X_{21} & X_{22} \\ -X_{11} & X_{12} \end{vmatrix},$$

stimmt überein mit demjenigen des ursprünglichen Systems, ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich auch geometrisch sofort überzeugt.

Allgemeiner gilt dieser Satz bekanntlich, wenn man die Differentialgleichung ersetzt durch die andere:

$$\frac{d x_1}{a_{11} X_1 + a_{12} X_2} = \frac{d x_2}{a_{21} X_1 + a_{22} X_2}.$$

Der Punktcharakter der singulären Stellen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ bleibt hier erhalten bzw. verwandelt sich in den entgegengesetzten, je nachdem die Substitutionsdeterminante $|a_{ik}|$ positiv oder negativ ist.

§ 5. Formulierung für das Gebiet von n Variabeln.

Gehen wir nunmehr zu dem System von Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln

$$\frac{d x_1}{X_1} = \frac{d x_2}{X_2} = \cdots = \frac{d x_n}{X_n} \tag{16}$$

über, so ergeben sich die analogen Formulierungen folgendermaßen:

Es bezeichne wieder:

$$K_X = \Sigma \left[\begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ X_{n1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix} \right], \tag{17}$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte:

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \ \ldots \quad X_n = 0,$$

die Charakteristik der singulären Punkte der Differentialgleichung im Innern der $(n-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $F = 0$; ebenso sei:

$$K_F = \Sigma \left[\begin{vmatrix} F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{n1} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} \right], \tag{18}$$

die Summe genommen über alle Punkte:

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \ \ldots \quad F_n = 0,$$

die „Zusammenhangszahl" des Raumes $F < 0$; endlich bilden wir die Charakteristik $K_{X,F}$ des Funktionensystems der folgenden $n + 2$ Funktionen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und des Parameters λ:

$$\begin{gathered} F = 0, \\ X_1 F_1 + X_2 F_2 + \cdot - X_n F_n = 0, \\ X_1 - \lambda F_1 = 0, \\ X_2 - \lambda F_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_n - \lambda F_n = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Stellen wir dabei zunächst $K_{X,F}$ unter Auszeichnung der Funktion F dar in der Form:

$$(20)\ K_{X,F} = \sum\left[\begin{vmatrix} (\sum X_i F_i)_1 & (\sum X_i F_i)_2 & \dots & (\sum X_i F_i)_n & 0 \\ X_{11} - \lambda F_{11} & X_{12} - \lambda F_{12} & \dots & X_{1n} - \lambda F_{1n} & -F_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ X_{n1} - \lambda F_{n1} & X_{n2} - \lambda F_{n2} & \dots & X_{nn} - \lambda F_{nn} & -F_n \end{vmatrix}\right],$$

die Summation ausgedehnt über die gemeinsamen Lösungen von

$$\sum X_i F_i = 0, \quad X_1 - \lambda F_1 = 0, \dots \quad X_n - \lambda F_n = 0$$

im Gebiete $F < 0$. Dann läßt sich die hier verlangte Summation zerlegen in die Summationen über die Punkte

$$F < 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \dots \quad X_n = 0$$

und

$$F < 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots \quad F_n = 0$$

und man erhält für die einzelnen Summationen gemäß der obigen Formeln (17) und (18) sofort die Zahlen K_X und K_F. Wie in § 3 folgt also die Relation:

$$(21) \qquad K_{X,F} = K_X + K_F.$$

Diese Relation führt nun wieder zu einer Beziehung zwischen den singulären Stellen im Innern des Gebietes $F < 0$ und gewissen Stellen auf der Begrenzung $F = 0$, wenn wir nunmehr, analog wie in § 4, die Zahl $K_{X,F}$ durch eine Abzählung auf der Mannigfaltigkeit $F = 0$ bestimmen.

Stellen wir zu dem Ende die Charakteristik $K_{X,F}$ dar durch eine zweite Summenformel, in welcher wir die Funktion

$$X_1 F_1 + \cdots + X_n F_n$$

auszeichnen. Dann erstreckt sich (gemäß Formel 7) die Summation über alle Punkte:

$$(22) \qquad F = 0, \quad X_i - \lambda F_i = 0,$$

d. i. über die Punkte der Begrenzungsmannigfaltigkeit $F = 0$, welche von den Integralkurven unseres Systems senkrecht durchsetzt werden. Es ist

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \Big[(X_1 F_1 + \cdots + X_n F_n) \times$$

$$(23) \quad \times \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n & 0 \\ X_{11} - \lambda F_{11} & X_{12} - \lambda F_{12} & \ldots & X_{1n} - \lambda F_{1n} & -F_1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ X_{n1} - \lambda F_{n1} & X_{n2} - \lambda F_{n2} & \ldots & X_{nn} - \lambda F_{nn} & -F_n \end{vmatrix} \Big]$$

eine Formel, die wir abkürzend

$$(23^a) \qquad K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[(X_1 F_1 + \cdots + X_n F_n) \cdot \Delta(\lambda) \right]$$

schreiben wollen, oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (22) und nach Unterdrückung des stets positiven Faktors $(F_1^2 + \cdots F_n^2)$ in der Form:

$$(23^b) \qquad K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[\lambda \cdot \Delta(\lambda) \right].$$

Gemäß dieser Formel zerfallen diese Punkte auf $F = 0$ in zwei Klassen, die wir etwa folgendermaßen geometrisch unterscheiden können:

Es sei unser Raum $x_1, x_2, \ldots x_n$ abgebildet in einen Raum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ durch die Formeln:

$$(24) \qquad \xi_i = X_i - \mu F_i \qquad i = 1, \ldots n;$$

es entspricht dann jedem Punkte (x_i) zunächst eine Gerade im Raum der (ξ_i), mit dem Parameter μ.

Jedem Nachbarpunkte $(x_i + dx_i)$ entspricht eine Nachbargerade:

$$\xi_i + d\xi_i = X_i - \mu F_i + dX_i - \mu\, dF_i - F_i\, d\mu.$$

Liegen nun die Punkte x_i und $x_i + dx_i$ auf $F = 0$ und stellen wir die Bedingung auf, daß die beiden zugehörigen Geraden im Raum der ξ_i sich schneiden, so folgt in bekannter Weise aus:

$$F_1\,dx_1 + \cdots + F_n\,dx_n = 0 \qquad \text{und}$$

(25)
$$\sum_{k=1}^{n} (X_{ik} - \mu F_{ik})\,dx_k - F_i\,d\mu = 0,$$

daß die Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in μ

(26)
$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n & 0 \\ X_{11} - \mu F_{11} & X_{12} - \mu F_{12} & \ldots & X_{1n} - \mu F_{1n} & -F_1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ X_{n1} - \mu F_{n1} & X_{n2} - \mu F_{n2} & \ldots & X_{nn} - \mu F_{nn} & -F_n \end{vmatrix}$$

verschwinden muß. Den reellen Lösungen μ dieser Gleichung entsprechend gibt es also auf jeder Geraden eine gewisse Anzahl reeller Punkte, in welchen sie von einer Nachbargeraden des Systems geschnitten wird. Nun wählen wir speziell auf $F = 0$ die Punkte aus, in welchen die Integralkurven die Mannigfaltigkeit F senkrecht durchschneiden, das sind also die Punkte

(27)
$$F = 0, \quad X_i - \lambda F_i = 0$$

oder anders ausgedrückt, die Punkte auf $F = 0$, deren Bildgerade im Raum der ξ_i durch den Koordinatenanfangspunkt $\xi_i = 0$ hindurchgehen. Jede dieser Geraden wird durch die der Gleichung

$$\Delta(\mu) = 0$$

entsprechenden reellen Punkte in eine Anzahl Stücke zerlegt, in deren einem der Koordinatenanfangspunkt liegt. Der Ausdruck in der Summenformel (23^b)

$$[\lambda \cdot \Delta(\lambda)]$$

entscheidet also, ob der Koordinatenanfangspunkt in einem „positiven" oder „negativen" Stück jener Geraden liegt, er teilt, wie man sich auch ausdrücken mag, die „Berührungen", welche die durch die X_i gegebenen ebenen Elemente des Systems (16) mit der Mannigfaltigkeit F_i eingehen, in positive und negative Berührungen.

Die Unterscheidung ist, wie schon bei Formel (17) ersichtlich, eine definite nur für gerades n. Nur in diesem Falle bildet also (wie schon Poincaré am obengenannten Orte bemerkt) die Zahl $K_{X,F}$ ein absolutes Kriterium für den Punktcharakter der im Bereich $F<0$ liegenden singulären Punkte des Systems.

§ 6. Die Formeln für einen singulären Punkt.

Beschränken wir uns auf einen einzigen singulären Punkt der Differentialgleichung, den wir in den Koordinatenanfangspunkt legen, und für welchen wir die Entwickelung annehmen

$$(29)\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

und setzen weiter noch $F=0$ als Kugel vom Radius ϱ um den Punkt gelegt voraus:

$$(30)\qquad F = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 - \varrho^2) = 0,$$

so folgt für die Abzählung auf der Kugel, den Formeln (22) und (23) entsprechend:

$$(31)\qquad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

$$(32)\qquad K_{X,F} = \tfrac{1}{2}\sum\left[\lambda\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 0 \\ a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -x_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} & -x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda & -x_n \end{vmatrix}\right],$$

die Summe ausgedehnt über die durch die obige Gleichung (31) gegebenen Wertsysteme der x_i und des λ ausgedehnt.

Die Formel läßt sich noch einfacher schreiben, wenn man die Variablen x_i eliminiert. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = V(\lambda),$$

so erhält man, nach Unterdrückung stets positiv bleibender Faktoren:

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[\lambda \cdot \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \lambda}\right],$$

die Summe ausgedehnt über die reellen Wurzeln der Gleichung:

$$V(\lambda) = 0.$$

Normieren wir schließlich in der bekannten Weise das System (16, 29) in der Form:

$$\frac{d\xi_1}{g_1 \xi_1} = \frac{d\xi_n}{g_2 \xi_2} = \cdots \frac{d\xi_n}{g_n \xi_n},$$

wo die g_i reelle oder komplex konjugierte Zahlen bezeichnen, so haben wir für die Bestimmung von $K_{X,F}$ das Funktionensystem

$$\begin{aligned} (g_i - \lambda)\, \xi_i &= 0 \\ g_1 \xi_1^2 + \cdots g_n \xi_n^n &= 0 \\ \xi_1^2 + \cdots \xi_n^2 - \varrho^2 &= 0 \end{aligned}$$

und also für die Abzählung auf der Kugel

$$K_{X,F} = \tfrac{1}{2} \sum \left[\lambda \cdot \frac{\partial\, \Pi (g_i - \lambda)}{\partial \lambda}\right]$$

die Summe über alle reellen $\lambda = g_i$ erstreckt.