

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1909, 13. Abhandlung

Zur Kritik der flächentreuen Projektionen der ganzen Erde und einer Halbkugel

von

Dr. Walter Behrmann

Mit 3 Tafeln

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —.50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 *M.* —.60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —.50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
 Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 *M.* 1.—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —.40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
 Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —.40
 Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definierten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
 * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —.20
 Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2 . Sb. 1887, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —.20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —.40
 — u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —.40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 *M.* —.40
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 13. Abhandlung

Zur Kritik der flächentreuen Projektionen
der ganzen Erde und einer Halbkugel

von

Dr. Walter Behrmann

Mit 3 Tafeln

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Lehre von den Kartenprojektionen ist durch die berühmte Arbeit von Tissot¹⁾ in völlig neue Bahnen gelenkt worden. Stand man bis zum Erscheinen dieser Arbeit trotz der Ausführungen Lamberts²⁾ der Menge der Entwurfsarten ziemlich kritiklos gegenüber, so ermöglichte der von Tissot eingeschlagene Gedankengang eine exakte Untersuchung der Naturtreue einer Projektion und somit ein gegenseitiges Abwägen verschiedener Entwürfe.

Anstatt die Abbildungen der Meridiane und Parallelkreise, also schwierige Kurven, ihre Schnittwinkel und die von ihnen eingeschlossenen Flächen zu untersuchen und zu vergleichen, zeichnet Tissot einen kleinen Kreis (mit dem Radius 1) im Durchschnittspunkt der Gradnetzmaschen und studiert die Abbildung dieser „Indikatrix“, die im allgemeinen eine Ellipse (mit den Achsen a und b) wird. Die Verzerrungen dieses Kreises sind die Verzerrungen der Projektion an diesem Punkte überhaupt. Man ist somit in die Lage versetzt, die Längenverzerrungen und bei flächentreuen Projektionen die Winkelverzerrungen, bei winkeltreuen Projektionen die Flächenverzerrungen punktweise zu bestimmen. Diese Arbeit ist für die bis zum Erscheinen des Werkes bekannten Projektionen schon

¹⁾ M. A. Tissot: *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Paris 1881; auch in deutscher Übersetzung von E. Hammer: *Die Netzentwürfe geographischer Karten etc.* Dieses Werk wird nach der deutschen Ausgabe mit „Tissot“ zitiert werden.

²⁾ Lambert: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Erd- und Himmelskarten*. Berlin 1772. Ostwalds Klassiker LIV, vgl. auch Siegmund Günther: *Handbuch der Geophysik*. Stuttgart 1897, I, p. 293.

vom Autor selbst ausgeführt, die Resultate sind in einer Fülle von Tabellen niedergelegt. Um sich ein klares Bild von der Zunahme der Verzerrung zu verschaffen, also die in den Tabellen und Formeln enthaltenen Werte leicht zu überschauen, kann man die Punkte gleicher Verzerrung durch Kurven verbinden. Diese in die Karte eingetragenen „Äquideformaten“¹⁾ geben ein leicht erkennbares Bild von der Verlässlichkeit einer Karte.

Trotzdem nun die Naturtreue eine Grundforderung ist, die an jede Karte gestellt werden muß, man also bei jeder Karte die Abweichungen von diesem Erfordernis, das keine Karte ganz erfüllen kann, genau kennen müßte, wurde die Zeichnung von Linien gleicher Verzerrung bislang nur sehr wenig ausgeführt. In der neuen Projektionslehre von Zöppritz-Bludau²⁾ z. B. finden sich solche Kurven nur für die leicht auszurechnende Sanson-Flamsteedsche Projektion und für einen Spezialfall der Bonneschen Projektion. Die Untersuchungen Hammers geben für die azimutalen Projektionen, sowie die flächentreue Kegelprojektion die kreisförmigen Verzerrungskurven; auch zeichnet er die geraden Linien bei den Zylinderprojektionen.³⁾ Die Debatte über die beste Projektion des Afrikanischen Kontinents⁴⁾ hat mehrere Karten mit diesen

1) Die erste Verzeichnung rührt von dem Niederländer Schols, die Namengebung von Günther her.

2) Karl Zöppritz: Leitfaden der Kartenentwurfslehre für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. 2. Aufl. von Alois Bludau. Leipzig 1899, p. 148 und 121.

3) E. Hammer: Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen, insbesondere die zenitalen Entwürfe. Stuttgart 1889, Taf. I—IV; vgl. auch Bludau: Flächentreue Azimutalprojektion bei Karten von Asien und Europa. Ztschr. d. Ges. f. Erdk., Berlin XXV, Taf. IV.

4) Zöppritz: Die Wahl der Projektionen für Atlanten und Handatlanten. Ztschr. d. Ges. f. Erdk., Berlin XIX, p. 1 ff. E. Hammer: Über Projektion der Karte von Afrika. Ebenda XXIV, p. 222 ff. A. Bludau: Die flächentreue transversale Kegelprojektion für die Karte von Afrika. Ebenda XXVI, p. 145 ff., Taf. III. Hammer: Bemerkungen über die Projektion der Karte von Afrika. Ebenda XXVII, p. 69 ff. Bludau: Die flächentreue Azimutalprojektion Lamberts für die Karte von Afrika. Pet. Mitt. 1892, p. 214 ff.

Kurven ausgestattet. Aber trotz allem kann man sich, vielleicht wegen der Fülle der ausgerechneten Tabellen, von dem Verlaufe dieser Kurven bei den wichtigsten Projektionen nur schwer eine Vorstellung machen.

Im allgemeinen wird die Untersuchung der Verzerrungen vornehmlich von Seiten der Geodäten vorgenommen, um bei der Konstruktion topographischer Karten eine der Genauigkeit der Aufnahme entsprechende Abbildungsart zu ersinnen. Doch sind schon nach dem Urteil von H. Wagner¹⁾ „die Theoretiker mit einzelnen Anforderungen an eine Grenze gelangt, welche einerseits mit den topographischen Kenntnissen fremder Gebiete vielfach im grellen Widerspruch steht, andererseits von der heutigen Technik des Kartenzeichnens nicht überschritten werden kann, solange sie mit den unvermeidlichen und unberechenbaren Fehlern, die das je nach Feuchtigkeitsgehalt mehr oder weniger eingeschrumpfte Papier hervorruft, zu rechnen hat“.

Dieses Urteil dürfte wohl eine gewisse Sorte von Karten unberührt lassen. Handelt es sich nämlich darum, die ganze Erde, sei es in Planigloben oder in einem Planisphäre abzubilden, so sind die Winkel- oder Flächenverzerrungen teilweise so beträchtlich, daß gerade diese Bilder, die berufen sein sollten, uns in schwacher Weise den dreidimensionalen Globus zu ersetzen, die Schuld tragen an den merkwürdigsten Entstellungen in den Köpfen der Allgemeinheit. (Ich erinnere nur an die Unkenntnis der Lage des Meridians von New-York zu Südamerika, an die falschen Flächenvorstellungen, hervorgerufen durch die Mercator-Projektion.) Man müßte also hier wohl wirklich eine möglichst geringe Verzerrung anstreben. Eine Untersuchung gerade dieser Projektionen dürfte nicht verlorene Mühe sein, zumal da in letzter Zeit eine Reihe von neuen Entwürfen in Vorschlag gebracht ward. Eine Auswahl darf nur erfolgen nach dem Gesichtspunkt der größeren und kleineren Verzerrung; erst wenn diese fast gleich sein sollten, können andere Gesichtspunkte in Frage kommen.

¹⁾ Hermann Wagner: Lehrbuch der Geographie, 8. Aufl., 1908, p. 195.

Ich beschränke mich auf die flächentreuen Projektionen. Die winkeltreuen Abbildungen haben so entschiedene Vorteile in dieser oder jener Hinsicht aufzuweisen (das Kreisnetz bei der stereographischen, die geradlinige Loxodrome bei Mercators Projektion), daß man ein absolutes Werturteil über sie nicht zu fällen vermag. Der Zweck der Karte wird hier ihre Abbildungsart fordern. Die Unterschiede der flächentreuen Entwürfe aber sind nicht so einschneidend, als daß man die eine nicht bereitwillig gegen die andere eintauschen möchte. Außerdem tritt in neuerer Zeit die große Wichtigkeit gerade der flächentreuen Entwürfe für die ganze Erde in der Geographie mehr und mehr in den Vordergrund.

Wie nun gelangt man zu einem Werturteil über flächentreue Projektionen der ganzen Erde?

Da bei allen flächentreuen Projektionen die Längen der großen und kleinen Achse der Indikatrix (a und b), also die Längenverzerrungen mit der Maximalwinkelverzerrung 2ω , d. h. der größten Winkelverzerrung, die überhaupt an dem betreffenden Punkte stattfinden kann, durch die Formeln

$$a \cdot b = 1; \sin \omega = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \quad \text{also} \quad a = \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\omega}{2} \right),$$

$$b = \operatorname{cotg} \left(45 + \frac{\omega}{2} \right)$$

verbunden sind, so ist es möglich, aus der Winkelverzerrung sofort die Längenverzerrung zu berechnen.¹⁾ Es braucht also eine Untersuchung der Verzerrungsverhältnisse nur auf die Winkel Rücksicht zu nehmen; mit ihren Verzerrungen nehmen die der Längenverhältnisse ab und zu. „Auf flächentreuen Karten gibt es . . . nur einerlei Linien gleicher Verzerrung, indem die Linien gleicher Maximalwinkelverzerrung auch die Punkte gleicher extremer Längenverhältnisse verbinden. Ganz ähnlich gibt es auch auf winkeltreuen Karten nur einerlei Linien, welche zugleich die Äquideformaten für Flächen- und auch für Län-

¹⁾ Vgl. Hammer, l. c. XXIV, p. 238.

genverhältnisse sind; dagegen sind auf einer ganz beliebigen vermittelnden Abbildung vier Systeme von Äquideformaten zu ziehen.“¹⁾ Daher können uns geringere oder größere Winkelverzerrungen ein Maßstab für die Güte flächentreuer Projektionen sein.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man die durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung ($2\omega_d$) oder überhaupt den größtmöglichen Wert einer Winkelverzerrung ($2\omega_{\max}$) als Kriterium für den geringeren oder größeren Wert der Projektion anzusehen hat. Hammer hat a. a. O. eine Methode angegeben, die durchschnittliche Verzerrung einer Karte zu bestimmen; er vergleicht die Verzerrung der Karte Afrikas in Sansonscher und in seiner flächentreuen schiefachsigen konischen Projektion und benutzt $2\omega_d$. Bludau will in seiner Erwiderung als ausschlaggebenden Wert den maximalen Betrag der Verzerrung bevorzugt wissen, weil die Wahl der Abgrenzung die Lage des Hauptpunktes oder Mittelmeridians eine Veränderung des Mittelwertes wie des Maximalwertes hervorruft, ersterer also ebenfalls nur relativ sei. Hammer weist mit Recht darauf hin, daß die Abgrenzung und Lage des Gradnetzes nie willkürlich bei einer Karte sind, somit auch der Durchschnittswert in organischer Verbindung mit dem Kartenbilde steht. Aber für unsere Untersuchungen kommen eine Abgrenzung oder die Wahl eines Augenpunktes nicht einmal in Frage. Handelt es sich doch bei uns um die Darstellung der ganzen oder halben Erdkugel, eines eindeutig umrissenen Gebiets, dessen Hauptpunkt stets im Äquator liegt. Und für diese Art der Entwürfe sagt Bludau selbst:²⁾ „Dem Verfahren Hammers, die durchschnittlichen Verzerrungen zu ermitteln und zu vergleichen und nach ihnen den Wert der Projektionen festzulegen, so interessant es auch an und für sich ist, möchte ich nur in besonderen Fällen eine absolute Bedeutung beilegen. Es sind dies diejenigen Fälle, wo Projektionen zum Vergleiche stehen,

¹⁾ Hammer, l. c. XXIV, p. 233.

²⁾ l. c. XXVI, p. 148.

bei denen Haupt- (Mittel-) Punkt und Mittelmeridian dieselben sind.“ Dies trifft in unserem Falle der Darstellung der ganzen oder halben Erde zu. Ja, in seinem späteren Aufsatz¹⁾ benutzt Bludau selbst den von Hammer beschrittenen Weg zu einer Abwertung der Karten, stellt sich also völlig auf Hammers Standpunkt.²⁾ Daß nicht die extremen Werte der Verzerrung von ausschlaggebender Bedeutung bei der Abwertung der Projektionen sein können, ergibt sich schon daraus, daß anderenfalls alle Entwürfe, bei denen im Pol $2\omega_{\max} = 180^\circ$ also $a = \infty$, eintritt, also die flächentreuen Zylinder-, die Mollweidesche und die Eckertschen Projektionen, sowohl für die Darstellung der ganzen als wie der halben Erdkugel debattelos aus dem Vergleich ausscheiden müßten, was man wohl nicht zugeben wird. Es ergibt sich vielmehr:

Zur Abwertung der Güte der flächentreuen Projektionen kann einzig und allein der Wert der durchschnittlichen Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d$ maßgebend sein.³⁾ Erst wenn diese bei zwei Projektionen fast gleich gering sein sollte, können andere Fragen, als da sind bequeme Zeichnung, geradlinige Parallele oder Meridiane u. s. w. in Frage kommen.

¹⁾ Pet. Mitt. 1892, p. 217.

²⁾ Vgl. ferner Pet. Mitt. 1899, Literaturbericht 574 und die Erwiderung Hammers, Pet. Mitt. 1899, p. 246.

³⁾ In jedem Punkte der Abbildung wird der Maximalwert der Verzerrung nur von zwei bestimmten Winkeln erreicht, und zwar sind die beiden Winkel, die die maximale Verzerrung erleiden, Scheitelwinkel und werden durch die große Achse der Indikatrix halbiert. Zu jeder beliebig gezogenen Richtung läßt sich aber eine zweite angeben, deren Winkel in der Abbildung nicht verändert wird. (Vgl. Zöppritz-Bludau, p. 20). Die Verzerrung 0 wird also in jedem Punkte unendlich oft erreicht, das Maximum 2ω dagegen nur zweimal. Es ist also unmöglich, einen Mittelwert der Verzerrung für irgend einen Punkt anzugeben, und folglich hat auch die Projektion als ganze keine mittlere Winkelverzerrung. Man kann nur von einer mittleren Maximalwinkelverzerrung reden. Ich füge daher ständig das Wort „Maximal“ hinzu, damit dieser wichtige Punkt immer im Auge behalten wird.

Hammer bestimmt seine durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung,¹⁾ indem er die Flächen innerhalb zweier Äquideformaten planimetriert; die durchschnittliche Verzerrung dieser Fläche ist das Mittel der Randwerte. Aus der Summe dieser Werte ergibt sich die durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung als arithmetisches Mittel. Dieser Weg hat natürlich nur bei eng aneinanderliegenden Äquideformaten Berechtigung; nur dort kann man den Durchschnitt fast gleich dem Mittel der Randwerte setzen.²⁾

Ich möchte bei der Bestimmung einen etwas anderen Weg einschlagen, der im Grunde auf dasselbe Prinzip hinausläuft. Auch ich planimetriere die Flächen und zwar die völlig von einer Verzerrungskurve umschlossenen, also die ganze Fläche innerhalb der Verzerrungskurven $2\omega = 1^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ u. s. w. Ich zeichne dann, analog der hypsographischen Kurve, ein Diagramm, indem ich die gemessenen Flächen durch proportionale Teile in der Abszissenachse, die dazugehörigen Maximalwinkelverzerrungen in der Ordinatenachse auftrage und die erhaltenen Punkte durch einen Kurvenzug verbinde. Bestimme ich die mittlere Höhe der vom Diagramm eingeschlossenen Fläche, indem ich sie ausplanimetriere und die erhaltene Flächenzahl durch die Grundlinie des Diagramms dividiere, so kann ich durch die

¹⁾ l. c. XXIV, p. 235. Der hier vorgeschlagene Weg ist wohl dem Autor selbst günstiger erschienen, als das in seiner Schrift über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen p. 83 vorgeschlagene Verfahren, wo er als Maß hinstellt die Größe

$$V = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (a \cdot b - 1)^2 \right] \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

(hier bei flächentreuen Projektionen $a \cdot b = 1$), denn „ein zwingender Grund, gerade diesen Ausdruck zu nehmen, liegt nicht vor“.

²⁾ Die Hammersche Methode zerlegt die Kurve des Verzerrungsdiagramms (s. u.) in eine gebrochene Linie, die Diagrammfläche in eine Summe von Trapezen, deren Höhen er gleich dem Mittel der Seitenlängen setzt; die mittlere Höhe ist das Mittel aus der Summe der Trapezhöhen; dies trifft um so eher zu, je kleiner die Grundlinie der Trapeze ist.

mittlere Höhe an der Ordinaten-Achse unmittelbar die gesuchte durchschnittliche Maximalwinkelverzerrung ablesen. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß die Verzerrungsdiagramme der verschiedensten Projektionen einen weiter gehenden Vergleich der Güte der einzelnen Entwurfsarten zulassen als ein einfacher Durchschnittswert, so daß der Wert der Diagramme selbst dann nicht verloren geht, sollte man sich auf den oben skizzierten Bludauschen Standpunkt stellen oder nach Hammers Vorschlag¹⁾ einzelne Flächen (Europa) bevorzugen und mit größerem Gewicht in die Durchschnittsrechnung einstellen wollen. Ein Studium des Diagramms und der Äquideformaten kann den Erfolg dieses Verfahrens ahnen lassen, bevor man die mühsame Arbeit des Planimetrierens beginnt.

Der Verlauf der Arbeit wird nach Obigem also folgender sein:

1. Aufstellen der Formeln der Winkelverzerrung.²⁾ Diese Arbeit ist für die älteren Projektionen von Tissot geleistet, wie er auch die Formel für den allgemeinsten Fall einer Abbildung der Erde angibt.³⁾

2. Berechnen der Zahlenwerte der Winkelverzerrungen. Auch diese Tabellen wurden vielfach von Tissot berechnet und von Bludau erweitert. Es erschien mir aber zum Zeichnen der Verzerrungskurven eine Kenntnis der Zahlenwerte für mindestens alle Gradnetzschnittpunkte von $\varphi = 0, 10, 20$ u. s. w. und $\lambda = 0, 20, 40$ u. s. w. erforderlich. Es müssen also, soweit die Tabellen sie nicht bringen, diese Werte nachgeholt werden. Selbst dann noch können bei weiten Maschen, also meist am Äquator, die Interpolationen Ungenauigkeiten mit sich führen. Ferner ist dort, wo die Verzerrung 0 nicht am Äquator sondern an zwei Punkten des Hauptmeridians eintrifft, eine genaue Zeichnung der Kurven $2\omega = 1^\circ, 5^\circ$ zuweilen auch $= 10^\circ$

¹⁾ l. c. XXIV.

²⁾ Ich sehe bei allen meinen Berechnungen ab von der Abplattung der Erde, da die hierdurch hervorgerufenen Abänderungen bei den anderen Fehlerquellen nicht ins Gewicht fallen.

³⁾ Tissot, p. 194—196.

nicht zu verbürgen. Je kleiner die eingeschlossene Fläche, um so ungenauer wird in diesem Falle die Kurve ausfallen. Beim Zeichnen der Diagramme aber spielen diese kleinen Flächen keine Rolle; ihre Ungenauigkeit kann also den durchschnittlichen Wert der Maximalwinkelverzerrung nicht beeinflussen.

3. Zeichnen der Äquideformaten. Dieses wurde einheitlich im Maßstab 1:66,66 mm ausgeführt.

4. Bestimmung des Inhalts der Flächen. Soweit dieses keine geometrisch einfachen Gebilde sind, muß die Bestimmung mit Hilfe des Planimeters geschehen. Naturgemäß haftet dem Planimetrieren eine Ungenauigkeit an, zumal eine absolut richtige Linienführung durch die Interpolation nicht gewährleistet wird. Alle Resultate sind daher Näherungswerte.

5. Zeichnen der Verzerrungsdiagramme.

6. Bestimmung der mittleren Höhe dieser Diagramme durch Ausplanimetrieren und somit der mittleren Maximalwinkelverzerrung der Projektion selbst, die auch sofort die mittlere Längenverzerrung uns berechnen läßt (s. o.).

Um die Abhängigkeit der letzteren Werte von der umgrenzenden Fläche hervorzuheben, gleichzeitig aber die Untersuchung über die Brauchbarkeit der Projektionen auf die Halbkugel auszudehnen, mußten bei jeder Projektion die Punkte 4, 5 und 6 wiederholt werden. Erst jetzt konnte an eine begründete Abwertung der verschiedenen Projektionen gedacht werden.

Im folgenden soll die Anwendung dieser sechs Punkte gegeben werden.

A. Die flächentreuen Zylinderprojektionen.

a) Mit längentreuem Äquator.

Die Meridiane sind eine Schar paralleler Geraden im Abstand $R = \text{arc } \lambda$ vom Mittelmeridian, die Parallelkreise sind eine Schar paralleler Geraden im Abstand $R \cdot \sin \varphi$ vom Äquator. Das Verzerrungsgesetz lautet¹⁾ $\text{tg } \omega = \frac{1}{2} \sin \varphi \text{ tg } \varphi$, wofür man bequemer schreiben kann

¹⁾ Tissot, p. 101.

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Die Verzerrungskurven sind parallele Geraden zum Äquator, deren Abstand gefunden wird, indem man für 2ω die Werte 0, 1, 5, 10, 20 etc. einsetzt und φ berechnet (Tabelle III), dann aus $h = R \cdot \sin \varphi$ den Abstand bestimmt. (Karte I.) Die von den Verzerrungskurven eingeschlossenen Flächen sind in unserem Falle Rechtecke, deren Basis der Äquator ($2R\pi$), deren Höhe das Doppelte von $h = R \sin \varphi$ also $F = 4 R^2 \pi \sin \varphi$ ist.

Es läßt sich somit für jedes 2ω die Fläche berechnen, innerhalb der es nur auftreten kann (Tabelle I 1), und das Verzerrungsdiagramm (Diagramm I) konstruieren. Es ist eine Kurve, die sich verhältnismäßig lange Zeit in der Nähe der Abszissenachse hält, dadurch anzeigend, daß die Flächen geringer Verzerrung ziemlich groß sind; dann steigt sie langsam und stetig, um endlich gegen Ende plötzlich emporzuklimmen, wodurch sich ergibt, daß die großen Verzerrungen nur in kleinen Flächenräumen stattfinden. Die mittlere Höhe des Diagramms ergibt eine mittlere Maximalverzerrung von $2\omega_d = 31^\circ 25'$.

Da

$$a = \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\omega}{2} \right), \quad b = \operatorname{cotg} \left(45 + \frac{\omega}{2} \right)$$

ist, so ist die durchschnittliche große und kleine Achse der Indikatrix $a_d = 1,320$, $b_d = 0,758$, demnach die mittlere Längenverzerrung in Prozenten $+32,0\%$ und $-24,2\%$.

Die Halbkugel wird bei dieser Projektion auch als Rechteck erscheinen, indem nur die geographische Länge halbiert wird. Der Wert der mittleren Verzerrung muß, da diese völlig unabhängig von der geographischen Länge ist, der gleiche geblieben sein, wenn auch das Verzerrungsdiagramm eine andere Gestalt erhält. Die nunmehr rasch sich erhebende Kurve gibt zu erkennen, daß die Projektion, für die Erdkugel zwar relativ günstig, jetzt für die Halbkugel, trotz des gleichen numerischen Betrages der mittleren Verzerrung, bei dem kleineren Gebiet wesentlich ungünstiger sich gestaltet.

b) Mit längentreuem Parallelkreis $\varphi = \alpha$.

Hatte die besprochene Projektion den Äquator längentreu dargestellt, die Flächentreue aber erlangt, indem die Gradfelder je näher dem Pol, desto mehr zusammengedrückt werden, so soll jetzt ein Parallelkreis ($\varphi = \alpha$) längentreu dargestellt werden und der Äquator die gleiche Länge dieses Breitenkreises $= 2 R \pi \cos \alpha$ erhalten. Um die Flächentreue zu erlangen, müssen die Gradfelder in der Richtung Nord-Süd von $\varphi = \alpha$ bis 90° zusammengedrückt werden, von $\varphi = 0^\circ$ bis α aber auseinandergezogen werden. Der Abstand des Parallelkreises φ ist

$$h_\varphi = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\cos \alpha}.$$

Die Verzerrungskurven sind wieder von λ unabhängig, also parallele Gerade zum Äquator. Auf dem längentreuen Parallelkreis α tritt die Verzerrung 0 ein. Die Verzerrung 2ω tritt zu beiden Seiten (φ_1, φ_2) dieses Breitenkreises auf und zwar wächst die Verzerrung polwärts bis 180° , äquatorwärts aber nur auf den Wert der Verzerrung des Äquators. Es ist für letzteren Fall 2ω zu berechnen aus

$$\cos \varphi_1 = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right),$$

für ersteren Fall

$$\cos \varphi_2 = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right)}. \quad 1)$$

Wir finden wieder die zu einer Winkelverzerrung gehörigen Breiten. Die Verzerrung des Äquators ist

1) Tissot, p. 100 $n = r_0 = \cos \alpha$. Die von Tissot angegebene „flächentreue Zylinderprojektion, welche für eine gegebene Zone kleinste Winkelverzerrungen verursacht“ kommt für uns nicht in Frage, da hier unter kleinster Winkelverzerrung $2\omega_{\max}$ verstanden ist, aber nicht $2\omega_\alpha$. Für alle flächentreuen Zylinderprojektionen der ganzen Erde aber ist $2\omega_{\max} = 180^\circ$, also für alle der gleiche konstante Wert.

$$2\omega = 4 \arctan \frac{1}{\cos \alpha} - \pi.$$

Die von einer Äquideformate eingeschlossene Fläche ist wieder ein Rechteck, resp. deren zwei, dessen eine Seite gleich dem Äquator $= 2 R \pi \cos \alpha$ ist. Die Höhe ist das Doppelte von h_{φ_2} , resp. von $(h_{\varphi_2} - h_{\varphi_1})$, wo

$$h_{\varphi} = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\cos \alpha}$$

ist, also

$$F = 4 R^2 \pi \sin \varphi_2, \text{ resp. } F = 4 R^2 \pi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

Die Größe der eingeschlossenen Fläche wird in Tabelle I 2—7 geboten.

Auf Grund dieser Tabelle ergibt sich die Zeichnung der Verzerrungsdiagramme II—VII. Diese halten sich bis zum Verzerrungswert des Äquators in der Nähe der Abszissen-Achse, um dann plötzlich emporzuschneiden. Gleichzeitig sieht man den Einfluß der Verzerrungen der großen Äquatorzone mit wachsendem α . Es ergeben sich aus den Diagrammen die Werte der mittleren Maximalwinkelverzerrungen, die für Halbkugel und Erdkugel identisch sind (siehe Tabelle I).

Da die mittlere Maximalwinkelverzerrung durch die mittlere Höhe des Verzerrungsdiagramms gemessen wird, aber Grundlinie und Höhe bei allen diesen Entwürfen gleich ist, so wird diejenige die günstigste sein, bei der das Diagramm eine möglichst kleine Fläche umschließt, sich möglichst dem rechten Winkel anschmiegt. Es tritt dies bei $\alpha = 30^\circ$ ein. Und dies ist verständlich. Es legt sich eine Zone kleiner Verzerrungen zu beiden Seiten des Parallelkreises $\alpha = 30^\circ$, sie wird also nördlich und südlich auf der Nord- und Südhalbkugel voll verwertet. Diese Zone tritt hier also zweimal auf, während sie bei der Projektion ($\alpha = 0$) mit längentreuem Äquator nur einmal ausgenutzt wird. Da die Projektionen im Pol $2\omega = 180^\circ$ haben, so werden in der Zone $\varphi = \alpha$ bis 90° die Verzerrungen rasch von 0 bis 180° zunehmen. Wird α also sehr groß, so wird die günstige Zone nördlich (Südhalbkugel südlich) von α

sehr zusammengepreßt. Einerseits also kann das doppelte Auftreten der Zone kleiner Verzerrungen den Mittelwert günstig beeinflussen, andererseits aber wird mit dem Wachsen von α über eine bestimmte Grenze die Zone zu schmal, die Breitenausdehnung der ganzen Projektion ($2R \cdot \cos \alpha$) zu gering, die Verzerrung der großen Gradfelder am Äquator zu groß, so daß dann wieder eine Verschlechterung des Mittelwertes eintritt. Gleichzeitig eignet sich die Projektion, je größer α , um so weniger zur Darstellung der ganzen Erde, weil die Projektion seitlich zu sehr zusammengedrückt erscheint.¹⁾

Um uns zu orientieren, welche flächentreue Zylinderprojektion die beste ist, tragen wir die Verzerrungswerte mit wachsendem α auf. (Diagramm XVI.) Wir sehen, daß das Minimum der Kurve unmittelbar bei $\alpha = 30^\circ$ liegen muß, man also mit ausreichender Genauigkeit den vollen 30. Grad zum Schnittparallel der besten Zylinderprojektion wählen wird.

Es ist von den flächentreuen Zylinderprojektionen der Erd- und Halbkugel die Projektion, deren Zylinder die Erde im 30. Parallel durchdringt, die beste. (Karte II.) Bei ihr ist der Äquator $= R \cdot 5,4414$, der Meridian $= R \cdot 2,3094$; ihre äußere Umrißform erhält die Gestalt eines Rechteckes mit dem Seitenverhältnis 1:2,35. Die mittlere Maximalwinkelverzerrung ist $2\omega_d = 27^\circ 6'$.

B. Die unechten Zylinderprojektionen.

a) Die geradlinigen Projektionen.

Die erste Klasse dieser geradlinigen Projektionen, die die Meridiane im Pol zusammenlaufen lassen, wurde von Tissot²⁾ behandelt. Diese Projektionen werden wegen der großen Winkelverzerrungen keine Bedeutung gewinnen können. Trotzdem aber schien mir eine Behandlung des bekannten Spezial-

¹⁾ Bei $\alpha = 55^\circ 39'$ ist die Umrißform der Erde ein Quadrat. Bei $\alpha = 60^\circ$ ist der Äquator schon auf die Hälfte reduziert $= R\pi$, der Meridian aber $= 4R$, also größer als der Äquator.

²⁾ p. 108–110.

falles von Collignon, wo die Halbkugel als Quadrat dargestellt wird, wertvoll, um den Übergang zu anderen Projektionen klar zu erfassen.

Die Formel der Winkelverzerrung dieser Projektion ist nach Tissot

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \sec^2 \frac{\delta}{2}\right)^2 + \lambda^2},$$

wo $\delta = 90^\circ - \varphi$ ist.

Die Zahlenwerte werden von Tissot nur für sehr wenige Punkte angegeben, sie mußten auf die ganze Erde ausgedehnt werden; Tabelle IV gibt diese Werte. Die nach ihr gezeichneten Verzerrungskurven (Karte III) zeigen deutlich das ungünstige Bild, das die Projektion bietet. Die Flächen innerhalb der Kurven sehr geringer Verzerrungen sind sehr klein; erst wenn man Verzerrungen bis 30° in den Kauf nehmen will, läßt sich ein etwas größeres Gebiet darstellen (113,7 Mill. qkm), die Lage des Gebietes aber längs des Meridians ist so ungünstig, daß die Karte zur Darstellung kaum eines Gebietes verwendbar ist. Erschwerend fällt noch die Knickung der Meridiane am Äquator ins Gewicht, die diesen zu einer Unstetigkeitslinie macht, in der die Verzerrungen größer sind, als sie die eingezeichneten Kurven angeben. Das gleiche Bild zeigt das auf Grund der Tabelle I 8 gezeichnete Diagramm VIII. Zwar ist der größtmögliche Wert der Verzerrung nur $103^\circ 44'$, die Kurve aber entfernt sich derartig von der Abszissen-Achse, daß die mittlere Höhe, also die mittlere Maximalverzerrung, den nicht unbeträchtlichen Wert von $2\omega_d = 55^\circ 23'$ erhält, wobei die Unstetigkeit des Äquators nicht berücksichtigt werden konnte, durch die der Wert noch merklich in die Höhe gedrückt würde.

Würde man die Projektion zur Darstellung einer Halbkugel benutzen, so ergäbe sich die Gestalt eines Quadrats, das auf der Spitze steht. Die günstigsten Flächen der Projektion bis zur Kurve $2\omega = 50^\circ$ würden voll zur Darstellung kommen (vgl. Diagramm VIII und Tabelle II 8); trotzdem aber sinkt die

mittlere Maximalwinkelverzerrung nicht unter den Wert von $32^{\circ} 54'$, also einen Wert, der bei vielen Projektionen der ganzen Erde nicht einmal erreicht wird. Diese Projektion erweist sich also als völlig unbrauchbar.

Bei der allgemeinen flächentreuen Trapezprojektion tritt in der Formel für $\operatorname{tg} \omega$ an die Stelle von π der Ausdruck n^2 , wo n den halben Mittelmeridian bedeutet. Der Punkt $2\omega = 0$, der Punkt ohne Winkelverzerrung, ergibt sich für $\frac{n}{\sqrt{2}} = \sec \frac{\delta}{2}$. Je größer also n wird, um so kleiner wird φ , um so näher wird der Punkt ohne Verzerrung an den Äquator rücken. Er fällt in den Äquator- und Mittelmeridian-Schnittpunkt im Falle $n = \frac{\sqrt{2}}{\cos 45^{\circ}} = 2$, also für den Fall, daß der Meridian $4R$, der Äquator $2R\pi$, also der Äquator längentreu dargestellt wird.

Eine nähere Untersuchung der Veränderung der mittleren Verzerrungen mit variierendem n dürfte sich bei der mühsamen Berechnung nicht lohnen; wenn auch durch geeignete Wahl des n wohl eine bessere Projektion als die Collignonsche zu erzielen wäre,¹⁾ so wird doch eine Trapezprojektion, schon wegen der Knickung der Meridiane, nicht mit anderen Projektionen konkurrieren können.

Dasselbe wird auch von der Eckertschen flächentreuen Trapezprojektion gelten, die er in Pet. Mitt. 1906, p. 97 ff. vorgeschlagen hat, wenn sie auch wesentlich besser als die Collignonsche Projektion ist. Wir müssen für sie die Formel für 2ω entwickeln.

Eckert zieht bei allen seinen Projektionen den Pol auseinander zu einer Linie gleich der Hälfte des Äquators. $ABCD$ (Fig. 1) ist die Nordhälfte der Projektionsfläche, wo $AB = \frac{1}{2} CD = b$ ist; $\operatorname{tg} \sphericalangle EBD = \operatorname{tg} \vartheta_1 = 1$.

¹⁾ Die beste Projektion wird den Nullpunkt der Verzerrung um ein Geringes polwärts verschieben müssen zur besseren Ausnutzung der guten Flächen. Es werden hier ähnliche Gesichtspunkte gelten, wie oben bei den flächentreuen Zylinderprojektionen.

Bogen des Parallelkreises in der Projektion, $\partial \lambda$ auf der Erde bedeutet. In unserem Falle einer geradlinigen Projektion ist

$$\frac{\partial \tau}{\partial \lambda} = \frac{y}{\lambda}, \quad \text{also} \quad K = \frac{y}{\lambda \cdot \cos \varphi};$$

alles eingesetzt ergibt

$$K = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4}{3} - \sin \varphi \right)}.$$

Alle Meridiane schneiden sich verlängert in der Entfernung b vom Äquator unter dem Winkel ϑ , wo $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{ON}{b} = \frac{\lambda}{\pi}$ ist. Im Grenzmeridian ist $\vartheta_1 = 45^\circ$.

Somit können wir, da wir K und ϑ als Funktionen von φ und λ kennen, 2ω nach der Tissotschen Formel¹⁾ für die flächentreuen Projektionen

$$(1) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(K - \frac{1}{K} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{K} \right)^2}$$

ausrechnen. Tabelle V gibt die Zahlenwerte, Karte IV die Bilder der Verzerrungskurven, wie sie auf Grund dieser Werte gezeichnet wurden. Wieder müssen wir von der Unstetigkeitslinie des Äquators absehen. Die Verzerrungen nehmen längs der Parallelkreise zu, um im Pol 180° zu betragen. Nicht so auf den Meridianen. Vom Äquator polwärts wachsen die Werte zuerst, dann aber verkleinern sie sich, um endlich schnell auf 180° zu wachsen. Der Verlauf der Kurven zeigt deutlich die Zwischenstufe dieser Projektion zwischen den flächentreuen Zylinder- und den flächentreuen Trapezprojektionen. Wie bei letzteren, haben wir hier nur zwei Punkte mit verschwindenden Verzerrungen, im Mittelmeridian gelegen. Der Verlauf der Kurven wird in der Nähe des Äquators durch die schiefschnittigen Meridiane, wie bei den Trapezprojektionen,

¹⁾ p. 93.

in der Nähe des Poles durch die dessen Ausdehnung wie bei den flächentreuen Zylinderprojektionen bedingt. Da der Nullpunkt der Verzerrung sehr nördlich, also in der gemäßigten Zone liegt, die Flächen geringer Verzerrungen aber längs eines Meridians verlaufen, so kann diese Projektion höchstens zur Darstellung von Gebieten, wie etwa Amerika oder des Atlantischen Ozeans in Frage kommen, wenn schnell durch gerade Linien Flächentreue erstrebt wird. Für die Darstellung der Erde ist sie nicht geeignet, wie das Diagramm IX lehrt, das auf Grund der Tabelle I 9 gezeichnet wurde. Es ähnelt in seinem Verlauf dem der flächentreuen Zylinderprojektion für $\alpha = 50^\circ$. Die Fläche sehr kleiner und sehr großer Verzerrungen ist gering, dagegen ist die Fläche mittlerer Verzerrungen von 20° — 50° sehr groß, dementsprechend auch der Wert der mittleren Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d = 38^\circ 18'$.

Ebensowenig ist die Projektion zur Darstellung der Halbkugel zu verwenden, sollte nicht schnelle Zeichnung verlangt werden. Dann aber erreicht man dieselbe Genauigkeit mit einer flächentreuen Zylinderprojektion für $\alpha = 30^\circ$, denn bei beiden ist $2\omega_d$ etwa 27° (hier genauer $27^\circ 11'$, Tabelle II 9), bei ihr würde man außer der noch leichteren Zeichnung die Knickung der Meridiane vermeiden. Die Kurve $2\omega = 30^\circ$ fällt bei Eckert schon nicht völlig mehr in das Halbkugelbild, während andererseits auf der ganzen Pollinie $2\omega = 180^\circ$ ist, daher große Verzerrungen in der Nähe des Pols auftreten.

Der von Eckert herausgegriffene Fall ist natürlich nur ein Spezialfall aller denkbaren geradlinigen Projektionen, die dadurch entstehen, daß die Pollinie zwischen 0 und der Größe des Äquators variiert, also gleich $m \cdot 2b$ wird. Von dem Werte m hängt die Gestalt der Projektion ab; gleichzeitig müssen wir die Länge des Äquators $= 2b$ als gegeben betrachten. Die Wahl von b und m bestimmt die Projektion eindeutig. Wir wollen auch für diesen allgemeinsten Fall der geradlinigen Projektionen die Verzerrungsformel geben, die ganz analog derjenigen der Eckertschen Trapezprojektion entwickelt wird.

Es wird ($R = 1$) der Abstand des Pols vom Äquator:

$$h = \frac{2\pi}{b \cdot (1 + m)},$$

der Abstand eines Parallelkreises:

$$x = \frac{2\pi}{b \cdot (1 - m^2)} \cdot (1 - \sqrt{1 - \sin \varphi \cdot (1 - m^2)}),$$

der Abstand eines Meridians vom Mittelmeridian auf diesem Parallelkreis:

$$y = \frac{b \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{1 - \sin \varphi \cdot (1 - m^2)}.$$

Endlich die Formel der Winkelverzerrung 2ω wie oben (1),
wo jetzt

$$K = \frac{b}{\pi \cdot \cos \varphi} \cdot \sqrt{1 - \sin \varphi (1 - m^2)}$$

und

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b^2 \cdot (1 - m^2)}{\pi}$$

ist.

Aus dieser allgemeinen Formel der geradlinigen Projektionen ergeben sich die behandelten als Spezialfälle. Man erhält die Eckertsche Trapezprojektion für $m = \frac{1}{2}$; $b = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}$, die allgemeine Trapezprojektion für $m = 0$, $b = \frac{2\pi}{n}$, die wieder durch Wahl von $n = \sqrt{\pi}$, also $b = 2 \cdot \sqrt{\pi}$ in die Collignon-sche, durch Wahl von $n = 2$, $b = \pi$ in die Trapezprojektion mit längentreuem Äquator übergeht. Endlich resultiert für $m = 1$, $b = \pi \cdot \cos a$ die allgemeine flächentreue Zylinderprojektion und für $a = 0$ die Lambertsche flächentreue Zylinderprojektion mit längentreuem Äquator.

b) Die Projektionen mit Sinuslinien als Meridiane.

Von den unechten Zylinderprojektionen ist die Projektion, deren Meridiane im Pol sich schneidende Sinuslinien sind, also

der bekannte Spezialfall der Bonneschen Projektion, wo der Berührungskegel im Äquator zum Zylinder wird, der gewöhnlich unter dem Namen „Sanson-Flamsteedsche Projektion“ angeführt wird, genügend untersucht. Die Debatte um die beste Darstellung Afrikas hat die Unbrauchbarkeit dieser Projektion selbst in diesen ihr am besten entsprechenden Gebieten erwiesen. Die Verzerrungsformel¹⁾ für sie

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \lambda \sin \varphi$$

ist sehr einfach. Zöppritz-Bludau²⁾ gibt die Werte der Verzerrungen von 5° zu 5° für den ersten Quadranten. Da es uns aber auf die Darstellung der ganzen Erde ankommt, müssen wir die Werte für den zweiten Quadranten (Tabelle VI) entsprechend unseren anderen Tabellen nachliefern.

Das Bild der Verzerrungskurven (Karte V) ist bekannt. Die Flächen geringer Verzerrung, die wie Tabelle I 10. lehrt, ziemlich groß sind, leiden an der Kreuzform, durch welche die günstigsten Gebiete längs des Äquators und Mittelmeridian zu liegen kommen, also in Gebieten, die wohl niemals kartographisch aus dem Gesamtbild herausgeschnitten werden. Das Verzerrungsdiagramm X, welches das gleichmäßige Anwachsen der Verzerrungen durch seinen regelmäßigen Verlauf anzeigt, ergibt die mittlere Maximalverzerrung $2\omega_d = 38^\circ 40'$ für die Erdkugel, $21^\circ 25'$ für die Halbkugel.

Die Eckertsche Projektion mit Sinuslinien als Meridianen.

Eckert hat l. c. eine zweite Projektion angegeben, bei der ebenso, wie bei seiner Trapezprojektion und seiner Ellipsenprojektion, der Pol zur Hälfte der Äquatorlänge ausgedehnt wird, außerdem der Mittelmeridian gleich der halben Äquatorlänge wird. Der Grenzmeridian ist eine Sinuskurve, die anderen Meridiane sind ebenfalls Sinuskurven, die durch Teilung der Parallelkreise in gleiche Teile entstehen. Eckert weist nach,

¹⁾ Tissot, p. 113.

²⁾ l. c., p. 148.

daß diese Projektion die Abbildung eines halben Kreisinges¹⁾ ist. Er selbst hält sie für die beste seiner Projektionen, ohne allerdings scharf seine Anschauung begründen zu können, und führt sie daher in seinem neuen geographischen Praktikum besonders an.²⁾ Wir wollen ihren Wert an der Hand der Winkelverzerrungen prüfen. Die Formeln gewinnen wir aus den bei Eckert sich findenden Angaben ($R = 1$) für die Koordinaten der Gradnetzpunkte. Es ist:

$$x = r \cdot a$$

$$y = \lambda \cdot r \cdot \cos^2 \frac{a}{2}; \quad y_{180} = r \cdot \pi \cdot \cos^2 \frac{a}{2},$$

wo

$$r = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}}$$

ist.

a ist eine Funktion von φ und mit φ durch die Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{2}{\pi + 2} \cdot (a + \sin a)$$

verbunden und von Eckert tabuliert.

Wir suchen wieder K und ϑ (s. o.) zu bestimmen. Bei den geradlinigen parallelen Breitenkreisen ist wieder wie oben:

$$K = \frac{y}{\lambda \cdot \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos \varphi}.$$

¹⁾ Der Ausdruck „Kreisingprojektion“ dürfte sich mehr empfehlen als der, auch von ihm gebrauchte, „Polarogkoid“.

²⁾ Gegr. Prakt. für den Gebrauch in den geographischen Übungen an Hochschulen von O. Krümmel und M. Eckert. Leipzig 1908.

Wenn er sie mit der Sanson-Flamsteedschen Projektion vergleicht und behauptet (Pet. Mitt. 1906, p. 107): „Die Randkurve 180° Ö. u. W. hat noch nicht die Winkelverzerrung des 90° Ö. u. W. bei Sanson“, so meint er damit die Verzerrungen des Schnittwinkels der Meridiane und Parallelkreise. Diese sind aber durchaus nicht identisch mit 2ω , der größten Verzerrung an diesem Punkte. Vielmehr ist z. B. für $\varphi = 80^\circ$, bei Sanson $\lambda = 90^\circ$, $2\omega = 75^\circ 26'$, bei Eckert $\lambda = 180^\circ$, $2\omega = 98^\circ 41'$. Man sieht, daß der Satz in dieser Allgemeinheit unrichtig ist, wenn auch nicht gezweifelt werden kann, daß die Projektion die Sansonsche bei weitem übertagt; s. u.

Bei allen unechtzyklindrischen Abbildungen ist:¹⁾

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}},$$

also:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\varphi}} = \frac{\frac{1}{2} \lambda r \cdot \sin \alpha \frac{d\alpha}{d\varphi}}{r \cdot \frac{d\alpha}{d\varphi}},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin \alpha.$$

Da wir jetzt K und ϑ als Funktionen von φ , λ und α , α aber als Funktion von φ kennen, können wir 2ω ausrechnen nach der Formel (1):

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(K - \frac{1}{K}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{K}\right)^2}.$$

Hieraus ergibt sich Tabelle VII.

Nicht so deutlich wie bei den anderen Eckert'schen Projektionen zeigen die Äquideformaten (Karte VI) die Zwischenstufe dieser Projektion zwischen der flächentreuen Zylinder- und der Sansonschen Projektion. Die Zone kleinster Verzerrung ist zusammengeschrumpft in ein Oval, das in der Nähe des 50° auf dem Mittelmeridian liegt. Zum Pol nehmen die Verzerrungen rasch bis 180° , zum Äquator langsam bis $14^\circ 21'$ zu. Auf dem Äquator und der Pollinie haben wir konstante Werte von 2ω , auf den anderen Parallelkreisen wachsen sie vom Mittelmeridian mit zunehmenden λ . Man sieht, daß sich beträchtliche Flächen der Erde mit Verzerrungen unter 30° , ja schon unter 20° darstellen lassen, wenn auch die scharfe Knickung der Kurve $2\omega = 20^\circ$ störend das Bild einengt. Die Größe der eingeschlossenen Flächen gibt Tabelle I 11.

¹⁾ Tissot, p. 105. — Es ist hier das partielle Differential zu nehmen, weil $y = f(\varphi, \lambda)$, während x nur $= f(\varphi)$ ist.

Das Verzerrungsdiagramm XI hält sich in mäßiger Entfernung von der Abszissenachse, um erst bei Verzerrungen über 70° rasch emporzusteigen. Die mittlere Verzerrung ist $32^\circ 19'$. Die Eckertsche Behauptung trifft also voll zu. Diese neue Projektion übertrifft die Sanson-Flamsteedsche weit, trotzdem hier nur zwei Punkte, dort aber das Hauptachsenkreuz des Entwurfes ohne Verzerrungen sind.

Umgekehrt allerdings wird die Sachlage, wenn wir nicht die volle Erdkugel, sondern nur die Halbkugel zur Darstellung bringen. Bei Eckert wird hier $2\omega_{\max} = 180^\circ$, während bei Sanson nur $2\omega_{\max} = 76^\circ 18'$ vorkommt. Wenn auch die Flächen übertrieben großer Verzerrungen bei Eckert sehr klein sind, so beeinflussen sie jetzt doch derart den Mittelwert, daß für die Halbkugeldarstellung Sanson bessere Resultate bietet als Eckert ($2\omega = 21^\circ 25'$ resp. $24^\circ 23'$). Immerhin wird wegen der unschönen Umrißfigur wohl ernstlich keine der beiden in Frage kommen, zumal wir bessere Projektionen der Halbkugel besitzen (s. u.).

c) Die unechtzyklindrischen Projektionen mit Ellipsen als Meridianen.

Unter den flächentreuen unechtzyklindrischen Projektionen genießt am meisten Ansehen die Projektion Mollweides.¹⁾ Wie bei einem unechtzyklindrischen Entwurf werden die Parallelkreise naturgemäß als parallele Geraden dargestellt, während die Meridiane Ellipsen sein sollen. Tissot behandelt sie als Spezialfall der unendlich vielen Projektionen dieser Art, der dadurch erzielt wird, daß die Halbkugel als Kreis abgebildet wird. Der Abstand der Geraden regelt sich durch die Bedingung der Flächentreue. Die von ihm entwickelten Verzerrungsgesetze geben für K (s. o.) den Ausdruck:

¹⁾ So sagt Emmanuel de Martonne in seiner soeben erschienenen *Traité de Géographie physique*, Paris 1909 auf p. 69, wo er nach einer nicht sehr tiefgehenden Behandlung der Projektionen von der *Choix des projections* spricht: „La meilleure projection pour la planisphère est celle de Mollweide“.

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sec \varphi \cdot \cos \varphi',$$

wo φ' der der Breite φ entsprechende Zentriwinkel in der Projektion und mit φ durch die Formel

$$2\varphi' + \sin 2\varphi' = \pi \sin \varphi$$

verbunden ist. φ' findet man in allen Projektionswerken tabuliert. Für den Winkel ϑ ergibt sich die Formel:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \varphi' \cdot \lambda.$$

Es sind φ' , K und ϑ als Funktionen von φ und λ bekannt, also kann wieder nach Formel (1)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(K - \frac{1}{K}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{K}\right)^2}$$

die Winkelverzerrung ermittelt werden. Die von Tissot ausgerechnete Tabelle¹⁾ genügt nicht zur Zeichnung der Kurven. Tabelle VIII muß an ihre Stelle treten. Das Kurvenbild (Karte VII) ähnelt dem der Eckertschen Sinuskurven-Projektion, ist aber insofern etwas günstiger, weil die Flächen kleiner Verzerrung (s. Tabelle I 12) ausgedehnter sind als dort. Dagegen macht sich das Zusammenrücken sämtlicher Meridiane zum Pol in großen Winkelverzerrungen in hohen Breiten und Längen bemerkbar, so daß der Wert der mittleren Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d = 32^\circ 7'$ (s. Diagramm XII) die Eckertsche Projektion nur wenig übertrifft.

Für die Halbkugel ist das gleiche wie bei Eckert zu sagen, denn auch hier werden alle Flächen, deren Verzerrungen größer sind als die des Äquators, seitlich kuppelt. Sanson übertrifft für die Halbkugel nicht nur Eckert, sondern auch Mollweide ($2\omega_d = 22^\circ 2'$), wenn man auch wegen der Kreisform des Randmeridians Mollweide vorziehen wird.

Eckertsche Ellipsenprojektion. Da bei Mollweide die Verzerrungswerte auf allen Meridianen im Grenzwert 180°

¹⁾ l. e., Tafel XIII.

erreichen, was bei Sanson, Collignon und Hammer (s. u.) nicht der Fall ist, — bilden doch hier die Meridiane völlig geschlossene Ellipsen — so ist vorauszusehen, daß, wenn wieder der Pol nach Eckerts Methode zur halben Äquatorlänge ausgedehnt wird, der Pol dadurch also keine größeren Verzerrungen erhält, die Projektion eine günstige Abänderung erfährt. Zwar sehen wir die Stellen geringer Verzerrung seitlich zusammengedrückt (Karte VIII), zwar erhöht sich der Wert der Verzerrung am Äquator von $12^{\circ} 1'$ bei Mollweide auf $19^{\circ} 16'$ bei Eckert, die Fläche aber mit mäßigen Verzerrungen unter 20° resp. unter 30° übertrifft durch die Änderung (Tabelle I 13) die bei Mollweide um 46 Mill., resp. um 60 Mill. qkm. So resultiert ein günstiger Mittelwert.

Die Formel für 2ω gewinnt man analog, wie bei den anderen Eckertschen Projektionen, indem man für Formel (1) die Ausdrücke K und ϑ berechnet. Eckert entwickelt die Werte der Gradnetzkoordinaten:

$$x = a \sin \sigma$$

$$y = \frac{\lambda \cdot a \cdot (1 + \cos \sigma)}{\pi},$$

wo

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{4 + \pi}}$$

ist, wo ferner σ als Funktion von φ bekannt und tabuliert ist nach der Gleichung:

$$(\pi + 4) \sin \varphi = 2 \sigma + 4 \sin \sigma + \sin 2 \sigma.$$

Aus dem allgemeinen Ausdruck $K = \frac{y}{\lambda \cdot \cos \varphi}$ folgt:

$$K = \frac{4}{\sqrt{\pi \cdot (4 + \pi)}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\sigma}{2}}{\cos \varphi}.$$

Es ließe sich ϑ durch die Differentiationsformel (s. oben) finden. Da aber alle im Schnittpunkt der Parallelkreise an die Meridiane gelegten Tangenten sich hier, wie bei Mollweide,

in einem Punkt des verlängerten Mittelmeridians und zwar unter dem Winkel ϑ schneiden, so ist einfach durch Proportion:

$$\operatorname{tg} \vartheta : \operatorname{tg} \vartheta_{180} = y : y_{180}; \quad \vartheta_{180} = \sigma; \quad y_{180} = a \cdot (1 + \cos \sigma),^1)$$

also:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \sigma \cdot \lambda}{\pi}.$$

Es ist mithin σ , ϑ und K als Funktion von φ und λ gegeben und somit 2ω zu berechnen. (Tabelle IX.) Das Verzerrungsdiagramm XIII schmiegt sich in günstiger Weise dem rechten Winkel der Abszissen- und Ordinatenachse an, die Fläche ist somit klein, die mittlere Verzerrung hat das überaus günstige Resultat $2\omega_d = 27^\circ 34'$. Es ist somit von den Eckertschen Projektionen die Ellipsenprojektion die beste und nicht, wie er annimmt, der Entwurf mit den Sinuskurven. Alle drei aber stellen sich wesentlich besser als die Projektionen, von denen sie abgeleitet sind.

Es läßt sich bei der Eckertschen Projektion der gleiche Gedankengang fortsetzen, den ich für die geradlinigen Projektionen durchführte. Durch Variation der Länge der Pollinie kann man wieder unendlich viele flächentreue Entwürfe ersinnen. Ja, es ist denkbar, daß sich durch geeignete Wahl ein noch günstigeres Endresultat ersinnen läßt. Das aber ist festzuhalten: Will man künftighin Projektionen in Vorschlag bringen, so hat man zu erweisen, daß bei ihnen der Mittelwert der Verzerrungen sich geringer darstellt als bei der besten bis jetzt bekannten Projektion. Nicht vermehren, nein vermindern muß man die Unzahl der Entwurfsarten.

C. Die flächentreue Azimutalprojektion und ihre Abwandlung.

Da es uns nur darauf ankommt, brauchbare Projektionen der ganzen Erdoberfläche zu untersuchen (wir fügen die Projektionen der Halbkugel nur hinzu, um sofort die Veränderung

¹⁾ Siehe die Figur bei Eckert.

von $2\omega_d$ mit Veränderung des Projektionsgebietes vor Augen zu führen), so werden wir sämtliche Kegelprojektionen, die echten, wie die unechten, ja auch den Grenzfall der Stab-Wernerschen Projektion aus unserer Betrachtung ausschließen. Denn bei sämtlichen Darstellungen der ganzen Erde wird als erstes Erfordernis gelten müssen, daß der Äquator und der Mittelmeridian oder jedenfalls zwei Großkreise als Symmetrielinien in der Projektion auftreten. Stellt man sich auf den Standpunkt, daß die Halbkugeln der Erde gleichwertig für die Darstellung sind, so können nur die behandelten und noch zu behandelnden Entwürfe, wo der Hauptpunkt der Projektion zusammenfällt mit dem Schnitt von Meridian und Äquator, in Frage kommen. Denkbar ist noch der Fall, daß ein Ort oder eine Gegend aus irgendwelchen Rücksichten (vgl. Handels- und Wirtschaftsgeographie) zum Zentrum der Erdoberfläche genommen würde. Nie wird ein ganzer Parallelkreis dies Interesse beanspruchen, nie wird eine Kegelprojektion mit ihrer asymmetrischen Randkurve für die Süd- und Nordhalbkugel, die den oder die Parallelkreise ohne Verzerrung noch dazu gekrümmt darstellen, ein befriedigendes Abbild der ganzen Erde geben.¹⁾ So lehrreich die Bilder der Verzerrungskurven für Einzelgebiete²⁾ sind, so werden wir doch bei unserem Gedankengang darauf verzichten können.

Ebensowenig können uns Spekulationen wie die ringförmigen flächentreuen Azimutalprojektionen, die von Tissot; p. 131, behandelt werden, aufhalten; sagt er doch selbst: „Der günstigste Fall ist die eigentliche flächentreue Azimutalprojektion.“

Diese ist eben die einzig mögliche Azimutalprojektion, die Flächentreue mit zusammenhängender Darstellung ver-

¹⁾ Nur für Untersuchungen, die einzelne Gebiete mit größerem Gewicht im Sinne Hammers (s. o.) in Rechnung bringen wollen, könnten die Darstellungen vielleicht in Frage kommen, die einem bestimmten Parallelkreis die Verzerrung 0 geben zu Ungunsten der Gebiete der entgegengesetzten Halbkugel.

²⁾ Vgl. Zöppritz-Bludau, p. 121 für die Bonnesehe Projektion.

bindet. Bei ihr sind die Äquideformaten naturgemäß Kreise, da die Verzerrungen nicht vom Azimut abhängen, sondern durch das Zusammenrücken der konzentrischen Kreise mit der Entfernung vom Hauptpunkt hervorgerufen werden. (Karte IX.) Der Radius der Verzerrungskurven ist ($R = 1$) $\varrho = 2 \sin \frac{\delta}{2}$, wo δ zu bestimmen ist aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}},$$

wenn wir für 2ω die Werte 10° , 20° u. s. w. einsetzen.¹⁾ Also der Inhalt $4\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Tabelle I 14.

Die Projektion hat bis $\delta = 90^\circ$ mäßige Verzerrungen, dann aber wachsen sie beträchtlich; werden doch die in Wahrheit wieder abnehmenden Kreise zu immer größeren Kreisen ausgedehnt, so daß dem Nadirpunkt der größte Kreis entspricht. Das gleiche Bild zeigt das Verzerrungsdiagramm XIV, ja die großen Verzerrungen wirken so ungünstig, daß der Mittelwert der Verzerrung $2\omega_d = 49^\circ 40'$ den Entwurf nicht mit anderen in Konkurrenz treten läßt. Dagegen ist der Mittelwert der Halbkugeldarstellung (Tabelle II 14) nur $2\omega_d = 18^\circ 0'$, da die Flächen geringerer Verzerrung groß sind und ein Maximalwert der Verzerrungen von nur $38^\circ 57'$ vorliegt. Für die Halbkugel ist die Lambertsche Azimutalprojektion die günstigste; sie ist sowohl die Projektion mit der geringsten durchschnittlichen Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d$ als auch mit dem geringsten Maximalwert der Verzerrung $2\omega_{\max}$. Beides trifft bei der Halbkugeldarstellung nur für eine einzige Projektion ein, während bei der Erddarstellung verschiedene Entwürfe diesen geringsten Werten entsprechen.

Gehen wir endlich zu der Abänderung der Azimutalprojektion über, die wohl den Namen Hammers verdient.²⁾

¹⁾ Tissot, p. 130.

²⁾ Pet. Mitt. 1892, p. 86.

Sie entsteht aus der soeben besprochenen Projektion, indem man diese unter einem Winkel von 45° dreht und durch Parallelstrahlen die Projektion wieder auf die Ebene projiziert, dann aber, zur Wahrung der Flächentreue, die Meridiane doppelt numeriert.

Wir suchen die Koordinaten des Punktes φ, λ als Funktionen dieser Größen. Der Punkt φ, λ der Erdkugel habe die Polarkoordinaten ψ, δ , so ist:

$$\begin{aligned}\cos \delta &= \cos \lambda \cdot \cos \varphi \\ \sin \psi &= \frac{\sin \lambda \cdot \cos \varphi}{\sin \delta} = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi}}.\end{aligned}$$

Bei der flächentreuen Azimutalprojektion ist die Entfernung des Punktes $x_1 y_1$ (Fig. 2) vom Mittelpunkt:

$$r_1 = 2 R \cdot \sin \frac{\delta}{2} = 2 R \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi \cos \lambda}{2}}.$$

Die Koordinaten der azimutalen Projektion sind

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= r_1 \cos \psi \\ y_1 &= r_1 \sin \psi\end{aligned} \right\}; \text{ eingesetzt und umgeformt ergibt:}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2 R \sin \varphi}{\sqrt{2 + 2 \cos \lambda \cos \varphi}} \\ y_1 &= \frac{2 R \cdot \sin \lambda \cos \varphi}{\sqrt{2 + 2 \cos \lambda \cos \varphi}}.\end{aligned}$$

Wir zerlegen die doppelte Verwandlung der Projektion in die beiden Einzelhandlungen. Die „doppelte Numerierung“ der geographischen Länge bedeutet, daß ein Projektionspunkt φ, λ bei Hammer dem Punkt $\varphi, \frac{\lambda}{2}$ bei Lambert entspricht. Es wird also für ihn:

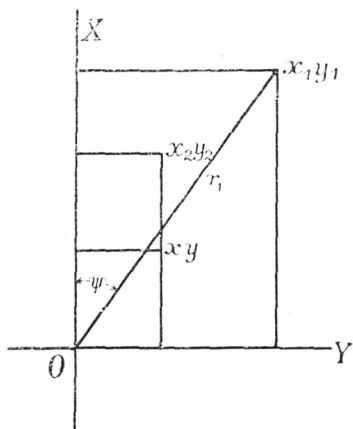


Fig. 2.

$$x_2 = \frac{2 R \sin \varphi}{\sqrt{2 + 2 \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}}; \quad y_2 = \frac{2 R \cdot \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}{\sqrt{2 + 2 \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}}.$$

Die Drehung der Projektion um 45° um den Äquator als Achse und erneutes Projizieren auf die Ebene bedeutet nur ein Halbieren der Ordinate. Es werden also die Koordinaten der Hammerschen Projektion:

$$x = \frac{x_2}{2}, \quad y = y_2,$$

somit:

$$x = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\sqrt{2 + 2 \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}}; \quad y = \frac{2 R \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}{\sqrt{2 + 2 \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi}}.$$

Wir setzen wieder $R = 1$ und entwickeln die Formel für 2ω nach der von Tissot, p. 196 angegebenen Formel für den allgemeinsten Fall einer Kartenprojektion:

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b},$$

wo:

$$a - b = \left[\frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{R} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2$$

$$a + b = \left[\frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{R} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2$$

(R , der Krümmungshalbmesser des Meridians, r , der des Parallelkreises werden in unserem Fall einer Kugel $R = 1$, $r = \cos \varphi$).

Differentieren wir unsere Werte von x und y partiell nach φ und λ , setzen die Werte ein und formen um, so erhalten wir die Formel für die Maximalwinkelverzerrung:

$$\sin \omega =$$

$$\sqrt{\frac{\left(\cos \varphi - \cos \frac{\lambda}{2} \right)^2 \cdot \left(1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)^2 + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\lambda}{2} \cdot \left(2 \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} + 3,5 \right)^2}{\left(\cos \varphi + \cos \frac{\lambda}{2} \right)^2 \cdot \left(3 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} \right)^2 + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\lambda}{2} \cdot \left(2 \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2} + 4,5 \right)^2}}.$$

Diese Formel wurde zur Berechnung der Verzerrungstabelle X benutzt, die dadurch wesentlich vereinfacht wird, daß der Wert von 2ω an der Stelle $\varphi = a$, $\lambda = b$ und $\varphi = \frac{b}{2}$, $\lambda = 2a$ identisch ist.

Es ergibt sich, daß die Verzerrungen mit wachsenden λ und φ zunehmen, um für die Erdkugel den Höchstwert von $102^{\circ} 6'$, für die Halbkugel von $84^{\circ} 36'$ zu erreichen. Für die Erdkugel ist die Hammersche Projektion diejenige, die den kleinsten Wert $2\omega_{\max}$ aufweist. Die Verzerrung 0 tritt nur für den Mittelpunkt des Entwurfes ein; die günstigsten Flächen liegen in seiner Nähe. Die entworfenen Äquidformaten (Karte X) sind nicht mehr die Kreise der Azimutalprojektion, vielmehr werden sie in der Richtung der Symmetrieachse der Werte von 2ω (also $\varphi = \frac{\lambda}{2}$) zusammengedrückt.

Die Flächen innerhalb der günstigen Verzerrungskurven (Tabelle I 15) sind nicht sehr groß, vielmehr steigt das Verzerrungsdiagramm XV in fast regelmäßiger Weise bis zum Maximalwert. Daher ist die mittlere Maximalwinkelverzerrung $2\omega_d = 37^{\circ} 25'$ nicht die geringste. Man würde also falsch urteilen, wollte man aus der relativ guten Rechtschnittigkeit der Projektion auf einen spezifischen Wert der Abbildungsart schließen. Hammers Urteil: „Die Vergleichung mit dem Mollweideschen Entwurf zeigt, daß in der Tat in der neuen Abbildung eine etwas kleinere Gesamt- und Durchschnittswinkelverzerrung vorhanden ist als in jener“, ist in dem Punkt der mittleren Winkelverzerrung zu rektifizieren. (Mollweide $2\omega_d = 32^{\circ} 7'$.) Die Überlegenheit des Mollweideschen Entwurfes kommt wohl vornehmlich durch die geringen Verzerrungen des Äquators zustande, die bei Mollweide bis zum Rande den konstanten Wert 2ω von $12^{\circ} 1'$ haben, während bei Hammer 2ω von 0 bis $38^{\circ} 56'$ wächst; entsprechend verhalten sich die Nachbargebiete.

Für das Halbkugelbild, das aber bei Hammer nicht wie bei Mollweide von einem Kreis umschlossen wird, resultiert ein besserer Wert (Hammer $2\omega_d = 19^{\circ} 37'$, Mollweide $2\omega_d$

$= 22^{\circ} 2'$), weil hier die Partien geringster Verzerrung um den Projektionsmittelpunkt günstig einwirken; ist doch die Verzerrung im Äquator am Rande des Halbkreises ($\varphi = 0$, $\lambda = 90$) erst $2\omega = 9^{\circ} 4'$.

Zusammenfassung.

I. Die beste flächentreue Projektion der ganzen Erdkugel.

Überblicken wir kurz die gewonnenen Resultate, so ist es erforderlich, noch einmal darauf hinzuweisen, daß durch die Untersuchungsmethoden eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Fehlern den Ergebnissen anhaften muß. Hoffen wir, daß die Tabellen möglichst fehlerfrei berechnet sind, was der stetige Verlauf der Kurven in etwas verbürgt, so liegt in dem Ziehen der Kurven durch Interpolation zwischen den berechneten Werten schon eine geringe Willkürlichkeit, die sich wiederholt beim Zeichnen der Verzerrungsdiagramme. Durch das Planimetrieren der Kurven und Diagramme stellen sich neue Fehler ein. Ein Abschätzen der Größe dieser Fehler ist unmöglich.¹⁾ Es wurden die Resultate der mittleren Maximalwinkelverzerrung bis auf Minuten genau gegeben in der Annahme, daß die negativen Fehler die positiven aufheben.

Wir hatten postuliert, daß bei den flächentreuen Projektionen nur die Größe der mittleren Maximalwinkelverzerrung

¹⁾ Um die Fehler einzuschränken, wurde die Zeichnung der Kurven sowohl, wie der Diagramme in sehr großem Maßstab 1 : 66,666 Mill. ausgeführt. Da die Kurven stetige Linienzüge sind, so ist die Größe des Planimeterfehlers sehr gering; sowohl der der Planimeterkonstante, die stets von neuem aus der ganzen Erdoberfläche bestimmt wurde, als der Beobachtungsfehler beim Umfahren der Flächen. Die größten Fehler werden durch die Zeichnung der Diagramme entstehen; hier ist erstlich das Millimeterpapier nicht absolut zuverlässig, zweitens ist der Kurvenzug nicht immer eine stetige Linie, daher die Interpolation erschwert und drittens wird gerade durch diese Unstetigkeit beim Umfahren der Fläche die größere Ungenauigkeit eintreten.

über den Wert oder Unwert der Projektion entscheiden kann. Erst in zweiter Linie kommen andere Gesichtspunkte in Frage. Betrachten wir zuerst die Darstellungen der ganzen Erde und schreiben also die Projektionen in der Reihenfolge ihrer Güte, so folgt:

	$2 \omega_d$
1. Flächentreue Zylinderprojektion für $\alpha = 30^\circ$	$27^\circ 6'$
2. Eckerts Ellipsenprojektion	$27^\circ 34'$
3. Flächentreue Zylinderprojektion für $\alpha = 20^\circ$	$28^\circ 5'$
4. " " " " $\alpha = 40^\circ$	$29^\circ 46'$
5. " " " " $\alpha = 10^\circ$	$29^\circ 51'$
6. " " " " $\alpha = 0^\circ$	$31^\circ 25'$
7. Mollweides Projektion	$32^\circ 7'$
8. Eckerts Sinuslinienprojektion.	$32^\circ 19'$
9. Hammers Projektion	$37^\circ 34'$
10. Eckerts Trapezprojektion	$38^\circ 18'$
11. Sanson-Flamsteeds Projektion	$38^\circ 40'$
12. Flächentreue Zylinderprojektion für $\alpha = 50^\circ$	$38^\circ 40'$
13. Lamberts Azimutalprojektion	$49^\circ 40'$
14. Flächentreue Zylinderprojektion für $\alpha = 60^\circ$	$55^\circ 1'$
15. Collignons Trapezprojektion	$55^\circ 23'$

Wie stellen sich nun diese Projektionen im praktischen Gebrauche?

1. Die beste Projektion, die flächentreue Zylinderprojektion für $\alpha = 30^\circ$, also auf dem Zylinder, der die Erde im dreißigsten Parallelkreis durchdringt, hat eine gute äußere Form, ein Rechteck. Sie hat den großen Vorteil, nur durch gerade Linien in kürzester Zeit hergestellt werden zu können. Ein Nachteil des Entwurfes ist, daß der Pol zu der Länge des dreißigsten Parallels ausgedehnt wird, daß ferner die Äquatormaschen keine völligen Quadrate sind, trotzdem der Unterschied der Seitenlängen nicht sehr ins Gewicht fallen dürfte. Ohne Verzerrungen werden die Gebiete um den dreißigsten Grad geogr. Breite, also die Gebiete, die in der Südhalbkugel etwa mit den Kulturzentren zusammenfallen, in der Nordhalbkugel Gebiete wie die Jang-tsze-kiang-Ebene, den Himalaja, das Nil- und

Mississippi-Delta umfassen. Die Gebiete Mitteleuropas erhalten Verzerrungen von 30° bis 40° im Maximum. Die doch entschieden wertlosesten Gebiete der Erde, die Pole, erhalten die größten Verzerrungen. Ferner ist ein großer Vorteil der Projektion, daß kein Mittelmeridian vorhanden ist, also kein Meridian bevorzugt werden muß, daß ganz ähnlich wie bei der Merkatorprojektion ein Gebiet, das östlich vom Nachbargebiet durch den Kartenrand getrennt ist, westlich wiederholt werden kann. Es erscheint nach allem als die beste flächentreue Projektion der ganzen Erde die flächentreue Projektion auf den Schnittzylinder im dreißigsten Parallelkreis, berufen als leicht zu zeichnen und als Projektion mit den geringsten Verzerrungen an die Stelle vieler alter Erdbilder zu treten. Es seien daher kurz die Abstände der Parallelkreise in Tabelle XI gegeben.

2. Will man den Nachteil, daß bei dieser Darstellung die Rundung der Erde verschwiegen wird, als ausschlaggebend empfinden, so kann Eckerts Projektion mit Ellipsen als Meridianen empfohlen werden, trotzdem der Entwurf den Pol auch zur Hälfte des Äquators ausdehnt und die Erde künstlich durch den Randmeridian seziert.

Den Vorteil der geraden Parallelen, den Eckert an seinen Entwürfen rühmt, hat in gleicher Weise jede Zylinderprojektion.

3. Will man im Hammerschen Sinne einige Gebiete der Erde wertvoller einschätzen als andere und ihnen größeres Gewicht bei der Darstellung geben, so kämen wohl nur die Gebiete um den 40. Grad nördlicher Breite in Frage. Die Projektion auf dem Schnittzylinder in diesem Parallel erweist sich als keine schlechte Darstellung.

4. Von den Projektionen, die den Pol als Punkt darstellen ist die Mollweidesche die beste.

5. Will man endlich, was wohl selten der Fall sein dürfte, einen Punkt der Erde als Zentrum des Interesses ansehen und die ganze Erde von ihm aus gesehen darstellen, so kann eine Hammersche Darstellung der Forderung Genüge leisten, die allerdings nicht den Äquator, sondern einen Großkreis durch

jenen Punkt als Achse ihrer Ellipse zeichnet, die also nicht von der flächentreuen azimutalen Äquatorialprojektion, sondern der Horizontalprojektion ausgehend, die einzelnen Gradnetz-schnitte berechnet. Die Verzerrungskurven bleiben natürlich die gleichen wie bei Hammers Darstellung. Sie zeigen, daß das Gebiet um den Hauptpunkt verzerrungsfrei ist.

Die übrigen Projektionen dürften zur Darstellung der Gesamterde ungeeignet sein, weil durch bessere zu ersetzen.

II. Der Wert der Verzerrungskurven.

Der Wert der gezeichneten Kurven und Karten dürfte aber noch in einem anderen Punkte liegen. Gilt es für irgend ein größeres Gebiet der Erde, sich eine flächentreue Projektion auszuwählen, so wird man diese Kurven zu Rate ziehen müssen. Man sucht sich unter den vorliegenden Zeichnungen diejenige aus, auf der das darzustellende Gebiet möglichst innerhalb einer Kurve mit geringen Verzerrungen fällt. Einen genauen Wert der mittleren Verzerrung kann wieder ein Planimetrieren des Gebietes ergeben. Denn, wie schon oft hervorgehoben, die mittlere Maximalwinkelverzerrung ist abhängig von der Randkurve des darzustellenden Gebietes. Bei Benutzung dieser Tafeln vergesse man aber nicht, daß häufig transversale Azimutalprojektionen, wo es sich um runde Gebiete, transversale Zylinderprojektionen, wo es sich um einseitig ausgedehnte Gebiete, transversale flächentreue Kegelprojektionen, wo es sich um Gebiete mit gekrümmter Längsachse (Afrika) handelt, bessere Resultate, wenn auch kompliziertere Liniensysteme liefern können.

Um die Abhängigkeit der Werte $2\omega_d$ von der Randkurve klar vor Augen zu führen, sei die beste flächentreue Projektion der Halbkugel kurz bestimmt.

III. Der beste flächentreue Entwurf der Halbkugel.

Wir stellen die Werte der mittleren Maximalwinkelverzerrungen zusammen. (Die Zahlen in Klammern bedeuten die Wertreihenfolge bei der Darstellung der ganzen Erdkugel, sie

zeigen, wie beträchtlich die Verschiebungen sind.) (Vergleiche Tabelle II.)

	$2\omega_d$
1. Lamberts Azimutalprojektion (13)	$18^0 8'$
2. Hammers Projektion (9)	$19^0 37'$
3. Sanson-Flamsteeds Projektion (11)	$21^0 25'$
4. Mollweides Projektion (7)	$22^0 2'$
5. Eckerts Ellipsenprojektion (2)	$22^0 40'$
6. Eckerts Sinuslinienprojektion (8)	$24^0 23'$
7. Flächentreue Zylinderprojektion für $\alpha = 30^0$ (1) .	$27^0 6'$
8. Eckerts Trapezprojektion (10)	$27^0 11'$

Es folgen die übrigen Zylinder- und Trapezprojektionen.

Hier ist die Entscheidung klar zu fällen. Die beste flächentreue Projektion für die Halbkugel ist die Lambertsche Azimutalprojektion. Eine Halbkugel soll von einem Kreis begrenzt sein; das trifft hier zu. Der Mittelpunkt der Projektion kann in jeden Punkt der Erde gelegt werden, mit der Entfernung vom Mittelpunkt wachsen die Verzerrungen.

Die Projektionen von Hammer und Sanson liefern kaum Vorteile dem Lambertschen Entwurfe gegenüber.

Dagegen können Fälle denkbar sein, wo gleichzeitig ein Punkt auf dem 40. Grad sowohl für uns, wie bei unseren Antoecken in den Vordergrund gerückt werden soll. Nur in diesem Fall ist es berechtigt, Mollweides Entwurf für die Halbkugel anzuwenden.

IV. Bemerkung.

Zum Abschluß sei noch auf einen Punkt aufmerksam gemacht. Es ist dies die Maßstabsbezeichnung bei flächentreuen Projektionen. Meistens findet man die Bezeichnung „Mittelpunktsmaßstab“. Da aber nur bei der Azimutalprojektion Lamberts, bei den Abbildungen Hammers und Flamsteeds und endlich bei der flächentreuen Zylinderprojektion mit längentreuem Äquator die Verzerrung im Mittelpunkt gleich Null ist, bei allen anderen aber von 0 verschieden, so sind auch die

Längen bei diesen Projektionen im Mittelpunkt nach den verschiedenen Richtungen hin infolge der Verzerrungen in verschiedenem Längenmaßstab dargestellt. Es ist also unrichtig, in diesen Fällen von einem Mittelpunktmaßstab zu sprechen. Man sollte sich daher daran gewöhnen, den Maßstab bei flächentreuen Projektionen als Flächenmaßstab zu bezeichnen und zu definieren:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{\text{Bildfläche in der Projektion}}}{\sqrt{\text{Bildfläche auf der Erdoberfläche}}}.^{1)}$$

¹⁾ Die Anregung zu obigen Untersuchungen erhielt ich in Übungen, die ich im geographischen Seminar der Universität Leipzig im Auftrage des Herrn Geheimrats Prof. Dr. J. Partsch abhalten durfte. Möge es mir erlaubt sein, ihm auch öffentlich meinen Dank zu sagen.

Nicht minder fühle ich mich Herrn Professor Dr. Siegmund Günther zu Dank verpflichtet für das Interesse an vorstehender Arbeit, das er sogar bis über die Drucklegung hinaus bekundete.

Tabelle I.

Übersicht über die Verzerrungen bei der

		Inhalt der von der Verzerrungskurve											
$2\omega =$		1°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
Flächen- treue Zylinder- projektion mit längen- treuem Parallel- kreis α	1. $\alpha = 0^\circ$	67,2	147,5	204,2	277,4	327,0	364,1	392,5	416,3	436,4	451,1	464,1	474,9
	2. $\alpha = 10^\circ$	52,2	170,1	219,6	287,2	334,0	369,3	397,1	419,5	437,8	453,0	465,6	476,0
	3. $\alpha = 20^\circ$	27,4	125,4	259,3	313,6	353,3	384,0	408,4	429,1	444,7	458,3	469,3	479,2
	4. $\alpha = 30^\circ$	13,4	67,9	143,7	350,3	381,0	405,4	425,3	441,6	455,1	466,5	475,8	483,9
	5. $\alpha = 40^\circ$	8,0	32,5	83,4	182,5	383,0	430,4	444,0	457,3	467,6	476,3	483,6	489,7
	6. $\alpha = 50^\circ$	4,8	24,1	48,6	105,3	165,1	253,1	464,1	473,5	480,5	486,5	491,5	495,8
	7. $\alpha = 60^\circ$	2,5	12,9	25,9	53,4	84,1	120,7	167,4	233,2	361,9	495,9	498,7	501,0
8. Collignons flächen- treue Trapezprojek- tion		—	1,7	21,4	59,2	113,7	165,9	214,1	268,1	319,7	395,0	464,7	506,1
9. Eckerts flächentreue Trapezprojektion		—	1,1	6,8	74,5	198,9	299,9	390,3	476,8	491,0	498,8	501,4	—
10. Sanson-Flamsteeds Projektion		18,6	63,7	113,0	185,2	244,6	294,4	336,8	377,8	415,9	446,6	476,3	494,2
11. Eckerts Sinuslinien- projektion		—	3,2	13,2	193,0	285,3	352,7	415,3	461,3	492,2	496,6	500,9	—
12. Mollweides Projek- tion		0,5	6,7	31,8	234,4	308,6	362,5	405,0	434,4	459,4	477,5	489,9	499,1
13. Eckerts Ellipsen- projektion		—	6,1	25,0 ¹	280,5	367,5	414,1	442,9	464,2	477,9	490,9	498,6	504,5
14. Lamberts Azimutal- projektion		8,8	42,6	81,8	150,9	209,7	259,9	302,1	339,9	371,7	399,0	422,4	442,4
15. HammersProjektion		8,2	47,4	93,6	176,5	248,4	317,0	367,9	410,0	444,9	472,8	496,5	508,3

¹ $2\omega = 15^\circ$ Inhalt der Kurve 72,5 Mill. qkm.

flächentreuen Darstellung der ganzen Erdkugel.

eingeschlossenen Fläche in Millionen qkm								Mittlere Verzerrungen			Winkelverzerrungen im	
110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	Winkel 2 ω_H	Längen in ‰ a b		Pol	Äquator
484,4	491,3	497,2	501,8	505,5	508,0	509,4	509,9	31° 25'	+32,0	-24,2	180°	0°
484,7	491,8	497,6	502,2	505,6	508,0	509,4	509,9	29° 51'	+30,2	-23,2	180°	1° 45'
487,0	493,5	498,7	502,9	506,0	508,2	509,5	509,9	28° 5'	+28,1	-21,9	180°	7° 7'
490,5	496,0	500,5	503,9	506,6	508,4	509,5	509,9	27° 6'	+27,0	-21,2	180°	16° 26'
494,8	499,0	502,5	505,2	507,3	508,8	509,6	509,9	29° 46'	+30,1	-23,1	180°	30° 11'
499,3	502,3	504,7	506,6	508,1	509,1	509,7	509,9	38° 40'	+42,4	-29,8	180°	49° 4'
503,5	505,3	506,8	507,8	508,8	509,4	509,7	509,9	55° 1'	+64,8	-39,3	180°	73° 24'
—	—	—	—	—	—	—	—	55° 23'	+65,4	-39,5	103° 44'	unbestimmt
—	—	—	—	—	—	—	509,9 ²	38° 18'	+40,6	-28,9	180°	unbestimmt
506,6	—	—	—	—	—	—	—	38° 40'	+42,4	-29,8	0° -116° 15'	0°
—	—	—	—	—	—	—	509,9 ²	32° 19'	+33,1	-24,9	180°	14° 21'
505,4	507,5	—	—	—	—	—	509,9 ²	32° 7'	+32,8	-24,7	180°	12° 1'
—	—	—	—	—	—	—	509,9 ²	27° 34'	+27,4	-21,6	180°	19° 16'
460,1	473,3	484,9	494,1	501,1	504,7	508,9	509,9	49° 40'	+56,5	-36,1	38° 37'	0°-180°
—	—	—	—	—	—	—	—	37° 34'	+39,6	-28,4	38° 56'-102° 6'	0°-38° 56'

² Das Planimetrieren wurde nur so weit fortgesetzt, als zur Zeichnung des Verzerrungsdiagramms notwendig erschien. Der Verlauf der Verzerrungskurven ist bei höheren Breiten ungenau. Die Interpolation kann daher genauer am Diagramm als an der Karte ausgeführt werden.

Tabelle II.

Übersicht über die Verzerrungen bei der

		Inhalt der von der Verzerrungskurve											
		1 ⁰	5 ⁰	10 ⁰	20 ⁰	30 ⁰	40 ⁰	50 ⁰	60 ⁰	70 ⁰	80 ⁰	90 ⁰	100 ⁰
2 ω =													
Flächen- treue Zylinder- projektion mit längen- treuem Parallel- kreis α	1. $\alpha = 0^0$	33,6	73,7	102,1	138,7	163,5	182,0	196,2	204,2	218,2	225,5	232,1	237,5
	2. $\alpha = 10^0$	26,1	85,1	109,8	143,6	167,0	184,7	198,6	209,7	218,9	226,5	232,8	238,0
	3. $\alpha = 20^0$	13,7	62,7	129,7	156,8	176,7	192,0	204,2	214,6	222,4	229,2	234,7	239,6
	4. $\alpha = 30^0$	6,7	34,0	71,9	175,2	190,5	202,7	212,7	220,8	227,6	233,3	237,9	242,0
	5. $\alpha = 40^0$	4,0	16,3	41,7	91,3	191,5	215,2	222,0	228,6	233,8	238,2	241,8	244,9
	6. $\alpha = 50^0$	2,4	12,1	24,3	52,7	82,6	126,6	232,1	236,8	240,3	243,3	245,8	247,9
	7. $\alpha = 60^0$	1,3	6,5	13,0	26,7	42,1	60,4	83,7	116,6	181,0	248,0	249,4	250,5
8. Collignons flächen- treue Trapezprojek- tion		—	1,7	21,4	59,2	113,7	165,9	214,1	246,3	—	—	—	—
9. Eckerts flächentreue Trapezprojektion		—	1,1	6,8	74,5	196,3	236,3	241,8	—	—	—	—	—
10. Sanson-Flamsteeds projektion		18,6	59,4	93,7	145,1	182,8	211,1	230,2	245,6	253,6	—	—	—
11. Eckerts Sinuslinien- projektion		—	3,2	13,2	138,4	208,5	233,0	241,4	244,1	—	—	—	—
12. Mollweides Projek- tion		0,5	6,7	31,8	165,9	204,7	223,7	236,7	243,4	247,5	—	—	—
13. Eckerts Ellipsen- projektion		—	6,1	25,0 ¹	193,5	210,9	224,1	230,9	237,9	242,2	246,1	250,4	—
14. Lamberts Azimutal- projektion		8,8	42,6	81,8	150,9	209,7	—	—	—	—	—	—	—
15. Hammers Projektion		8,2	47,4	90,8	152,0	192,4	219,8	234,5	242,1	245,9	—	—	—

¹ 2 ω = 15⁰ Inhalt der Kurve 72,5 Mill. qkm.

flächentreuen Darstellung einer Halbkugel.

eingeschlossenen Fläche in Millionen qkm								Mittlere Verzerrungen			Winkelverzerrungen im	
110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	Winkel 2 ω_d	Längen in $\frac{0}{0}$ a b		Pol	Äquator
212,2	245,6	248,6	250,9	252,7	254,0	254,7	255,0	31° 25'	+32,0	-24,2	180°	0°
212,4	245,9	248,8	251,1	252,8	254,0	254,7	255,0	29° 51'	+30,2	-23,2	180°	1° 45'
243,5	246,8	249,4	251,5	253,0	254,1	254,8	255,0	28° 5'	+28,1	-21,9	180°	7° 7'
245,3	248,0	250,3	252,0	253,3	254,2	254,7	255,0	27° 6'	+27,6	-21,2	180°	16° 26'
247,4	249,5	251,3	252,6	253,7	254,4	254,8	255,0	29° 46'	+30,1	-23,1	180°	30° 11'
249,7	251,2	252,4	253,3	254,1	254,6	254,9	255,0	38° 40'	+42,4	-29,8	180°	49° 4'
251,8	252,7	253,4	253,9	254,4	254,7	254,9	255,0	55° 1'	+64,8	-39,3	180°	73° 24'
—	—	—	—	—	—	—	—	32° 54'	+32,8	-25,3	67° 33'	unbestimmt
—	—	—	—	—	—	—	255,0 ²	27° 11'	+27,1	-21,3	180°	unbestimmt
—	—	—	—	—	—	—	—	21° 25'	+20,7	-17,1	0—76° 18'	0°
—	—	—	—	—	—	—	255,0 ²	24° 23'	+23,9	-19,3	180°	14° 21'
—	—	—	—	—	—	—	255,0 ²	22° 2'	+21,4	-17,6	180°	12° 1'
—	—	—	—	—	—	—	255,0 ²	22° 40'	+22,0	-18,0	180°	19° 16'
—	—	—	—	—	—	—	—	18° 8'	+17,1	-14,6	38° 37'	0—38° 37'
—	—	—	—	—	—	—	—	19° 37'	+18,8	-15,8	38° 56'—84° 36'	0—9° 9'

² Das Planimetrieren wurde nur so weit fortgesetzt, als zur Zeichnung des Verzerrungsdiagramms notwendig erschien. Der Verlauf der Verzerrungskurven ist in höheren Breiten ungenau. Die Interpolation kann daher genauer am Diagramm als an der Karte ausgeführt werden.

Tabelle X.

Hammers Projektion.

Tafel der Maximalwinkelverzerrung.

φ	λ									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
0	0	0° 28'	1° 45'	3° 58'	6° 58'	11° 16'	16° 26'	22° 42'	30° 12'	38° 56'
10	0° 28'	2° 14'	5° 00'	8° 4'	11° 51'	16° 18'	21° 43'	28° 10'	35° 44'	44° 30'
20	1° 45'	5° 00'	9° 38'	16° 22'	20° 2'	25° 55'	32° 25'	39° 38'	47° 35'	57° 26'
30	3° 58'	8° 4'	16° 22'	21° 40'	29° 30'	36° 2'	44° 2'	52° 4'	60° 28'	69° 14'
40	6° 58'	11° 51'	20° 2'	29° 30'	37° 22'	46° 25'	55° 10'	63° 40'	71° 57'	80° 4'
50	11° 16'	16° 18'	25° 55'	36° 2'	46° 25'	56° 14'	65° 20'	73° 46'	81° 30'	88° 32'
60	16° 26'	21° 43'	32° 25'	44° 2'	55° 10'	65° 20'	74° 24'	80° 56'	89° 4'	94° 44'
70	22° 42'	28° 10'	39° 38'	52° 4'	63° 40'	73° 46'	80° 56'	89° 16'	94° 56'	98° 48'
80	30° 12'	35° 44'	47° 35'	60° 28'	71° 57'	81° 30'	89° 4'	94° 56'	98° 50'	101° 20'
90	38° 56'	44° 30'	57° 26'	69° 14'	80° 4'	88° 32'	94° 44'	98° 48'	101° 20'	102° 6'

Tabelle XI.

Entfernung der Parallelkreise bei der flächentreuen Zylinderprojektion auf dem Schnitzzylinder im dreissigsten Parallel.

$$h = R \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos 30^\circ}.$$

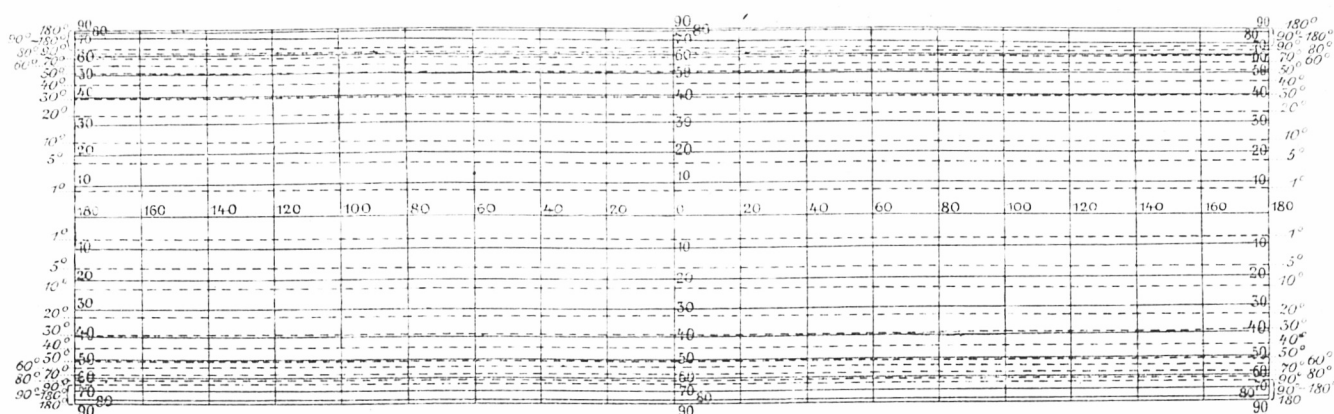
φ	km	φ	km
0°	0	50°	5634,9
5°	641,1	55°	6025,4
10°	1277,3	60°	6370,3
15°	1903,8	65°	6666,6
20°	2515,8	70°	6912,3
25°	3108,7	75°	7105,1
30°	3677,9	80°	7244,0
35°	4219,1	85°	7327,7
40°	4728,2	90°	7355,8
45°	5201,4		

Breite der Projektion 2×17332 km.

FlächentreueCylinder-Projektion für $\alpha=0^\circ$
 $2\omega_d=31^\circ 25'$

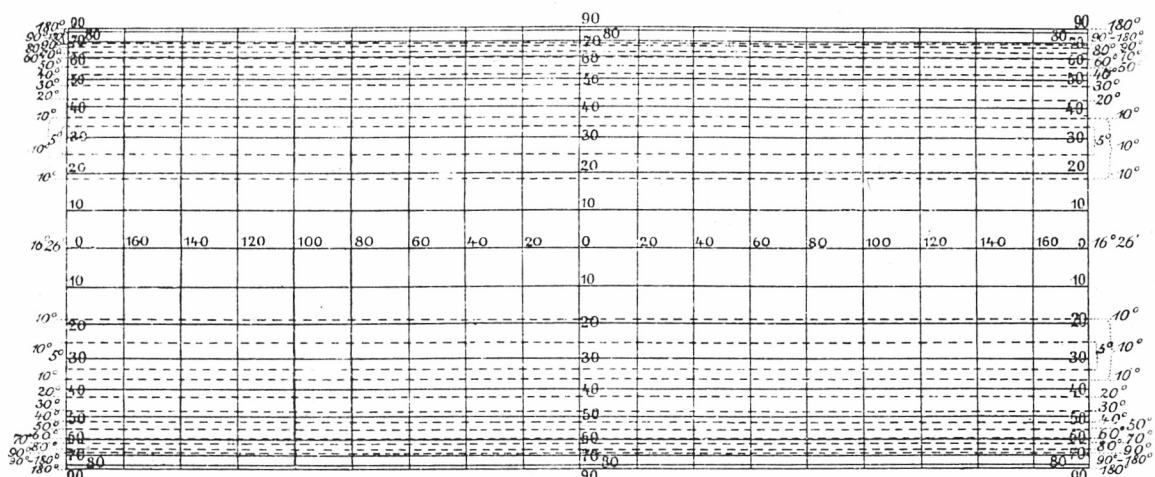
D^r W. Behrmann, Flächentreue Darstellungen der ganzen Erde
 mit eingezeichneten Liniengleicher Verzerrung.

Karte 1



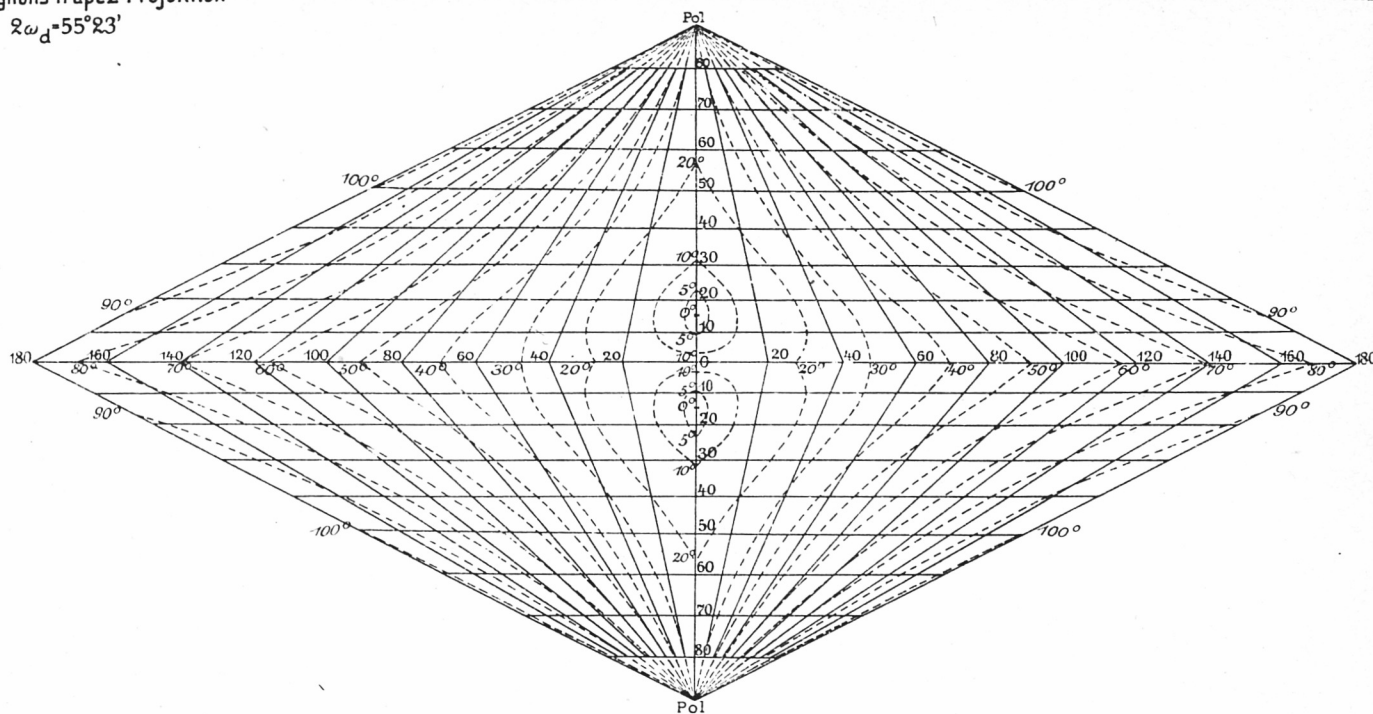
FlächentreueCylinder-Projektion für $\alpha=30^\circ$
 $2\omega_d=27^\circ 6'$

Karte 2



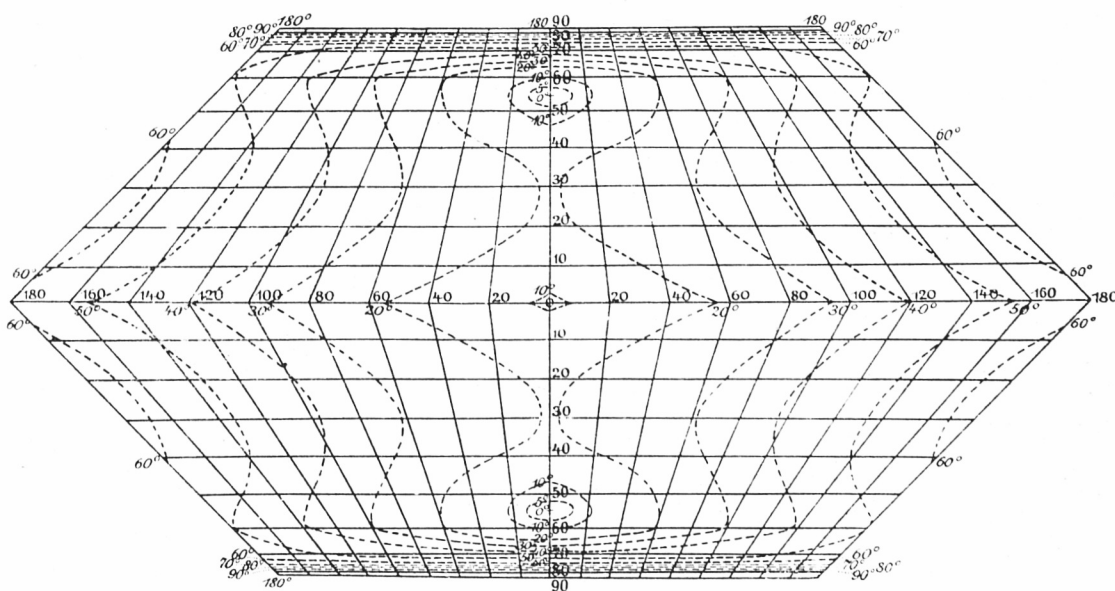
Collignon's Trapez-Projektion
 $2\omega_d=55^\circ 23'$

Karte 3



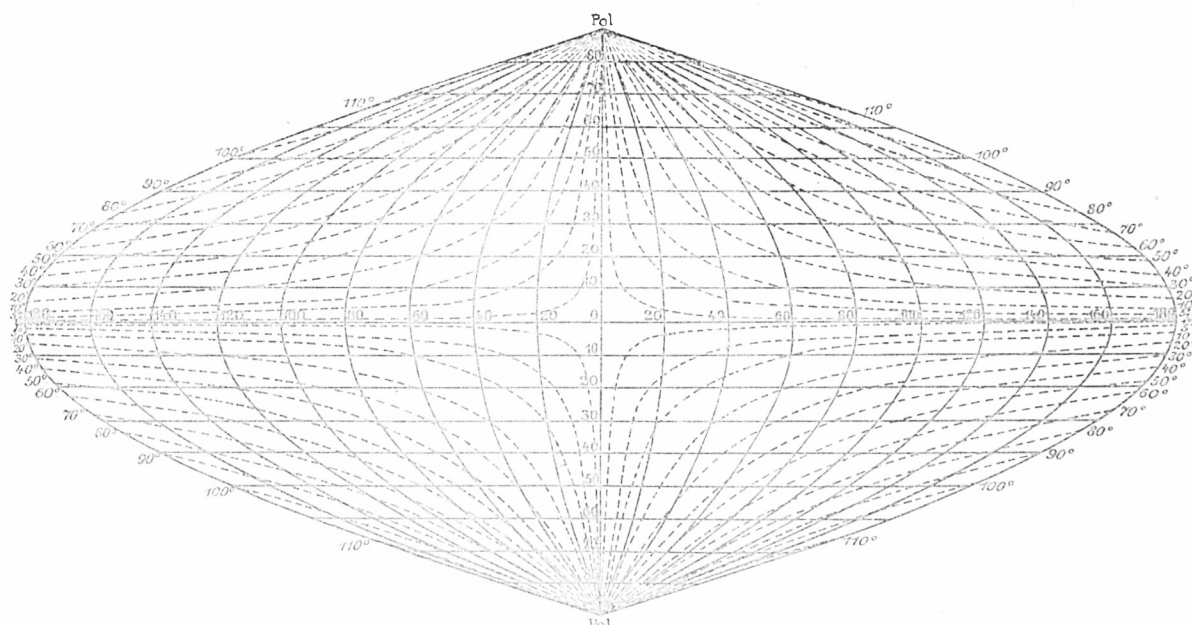
Eckert's Trapez-Projektion
 $2\omega_d=38^\circ 13'$

Karte 4



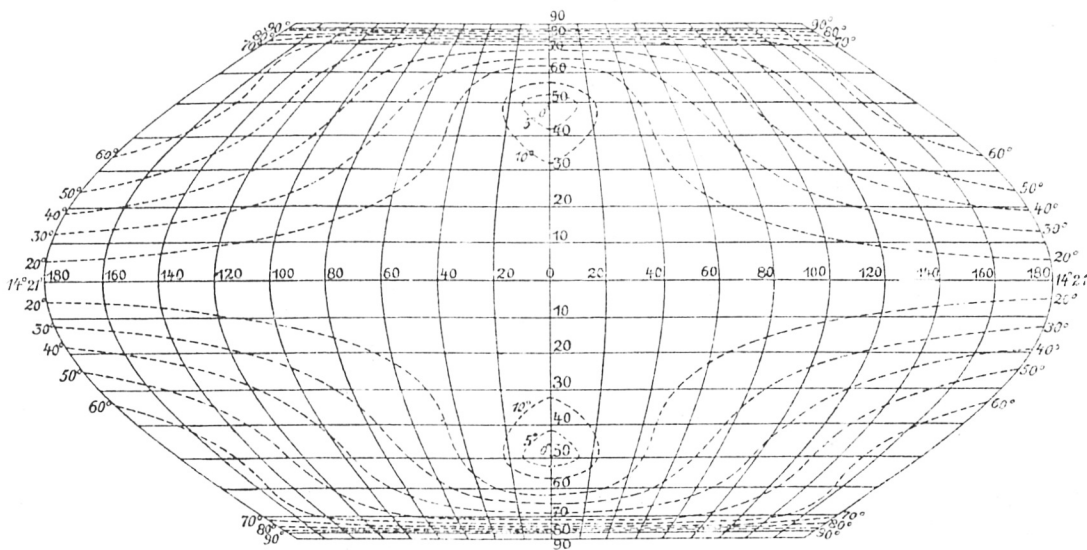
Sanson-Flamsteed'sche Projektion.
 $2\omega_d=38^\circ 40'$

Karte 5



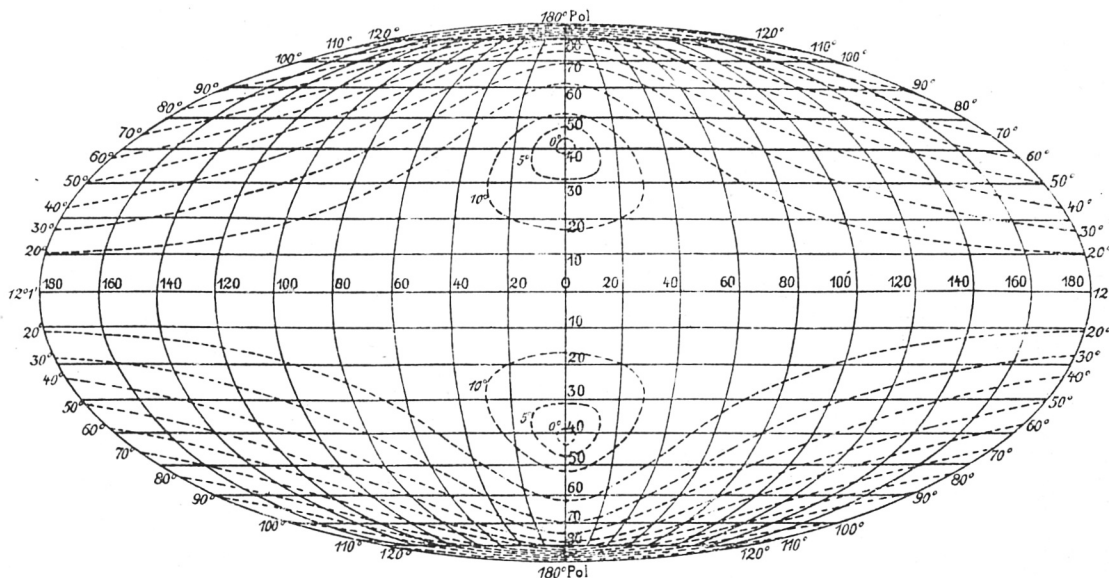
Eckert's Sinuslinien-Projektion
 $\lambda\omega_d = 32^\circ 19'$

Karte 6



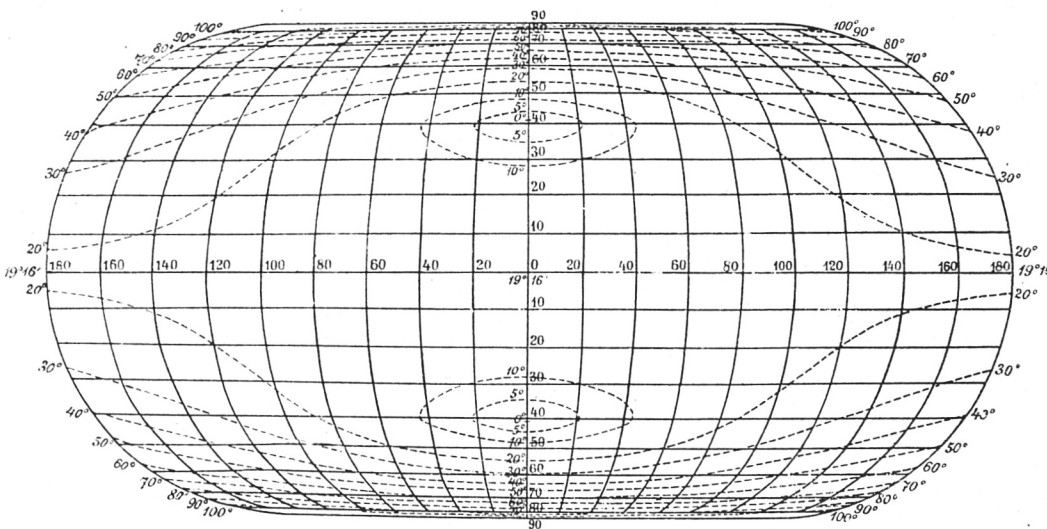
Mollweide'sche-Projektion
 $\lambda\omega_d = 32^\circ 19'$

Karte 7



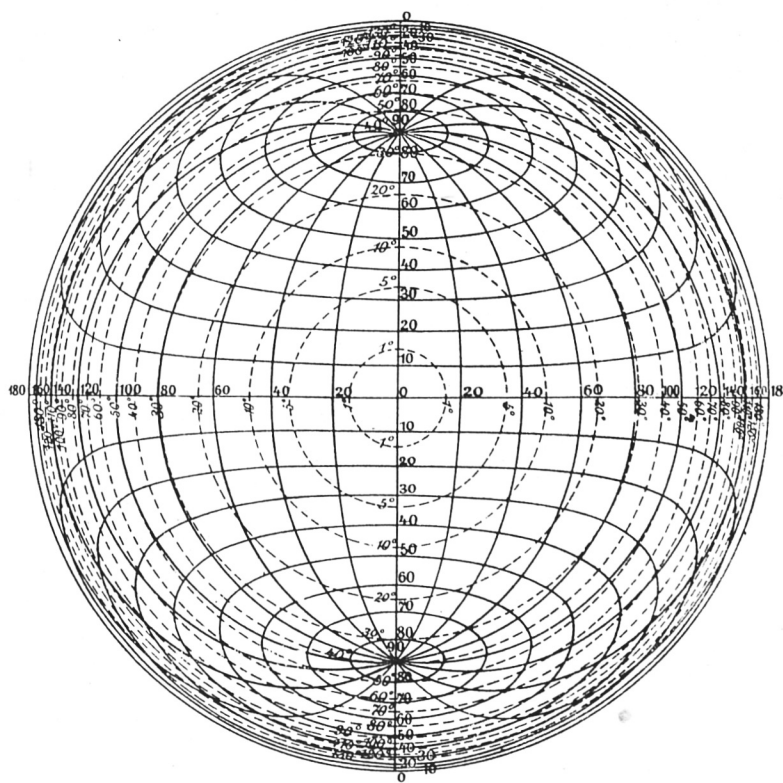
Eckert's Ellipsen-Projektion
 $\lambda\omega_d = 27^\circ 34'$

Karte 8



Lambert'sche flächentreue
Azimutal-Projektion
 $\lambda\omega_d = 49^\circ 40'$

Karte 9



Hammer'sche Projektion
 $\lambda\omega_d = 37^\circ 34'$

Karte 10

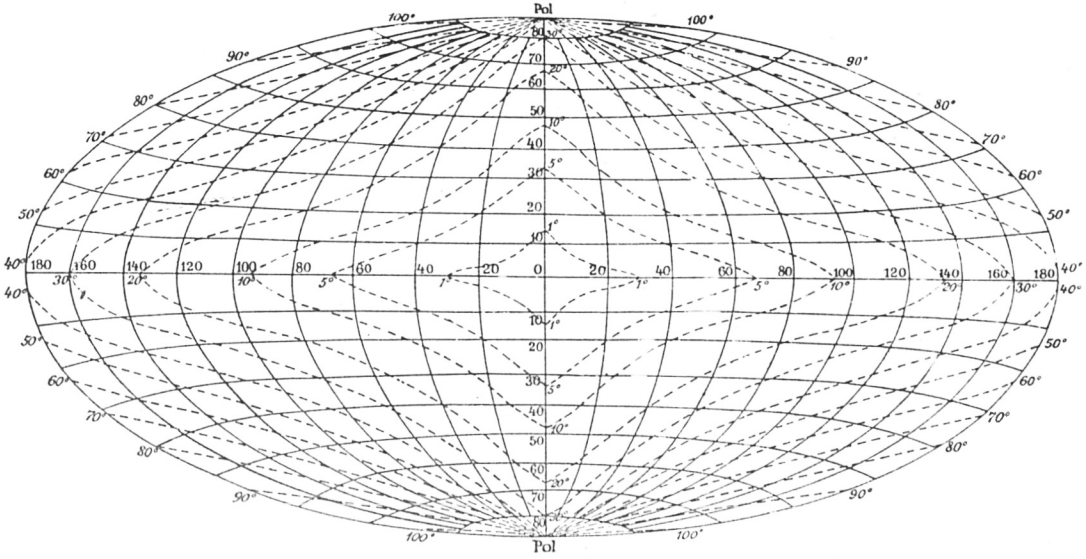


Fig. 1.

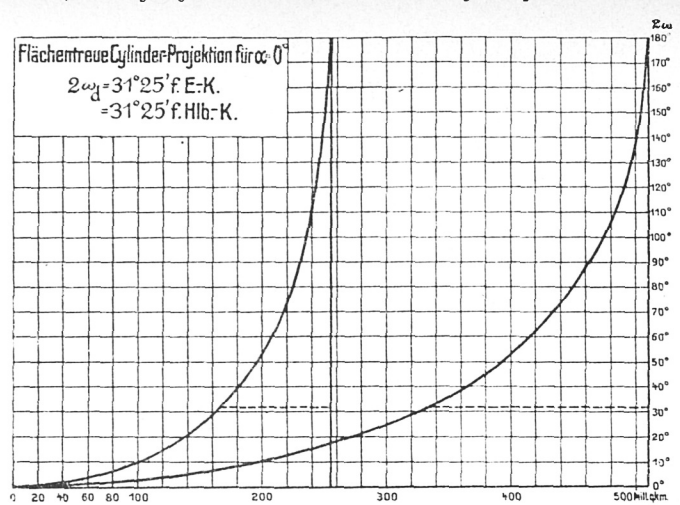


Fig. 2.

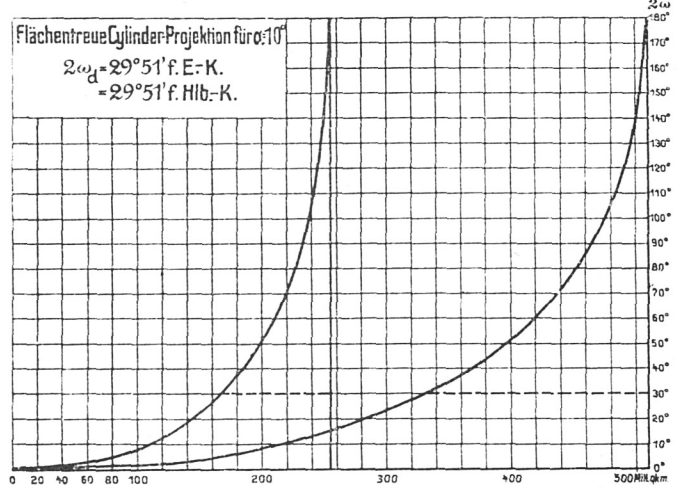


Fig. 3.

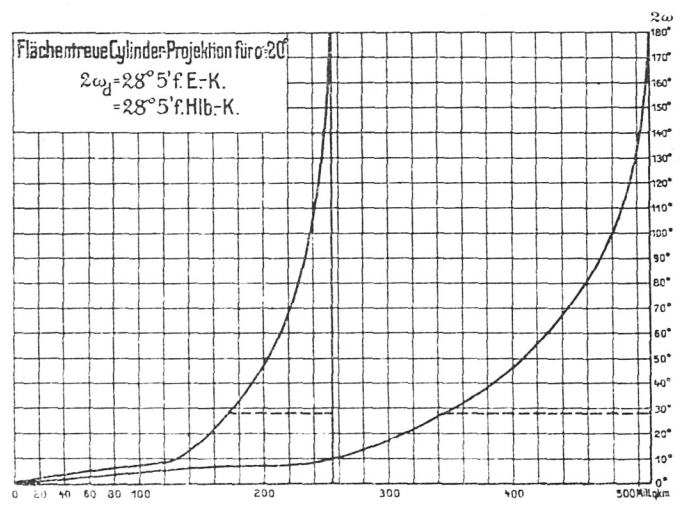


Fig. 4.

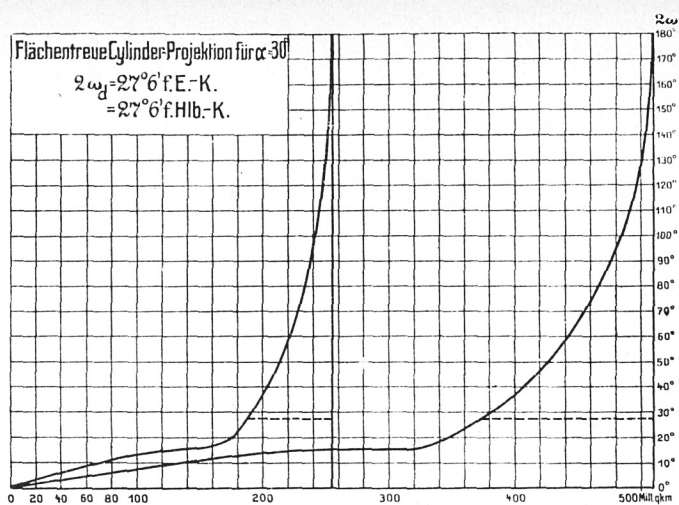


Fig. 5.

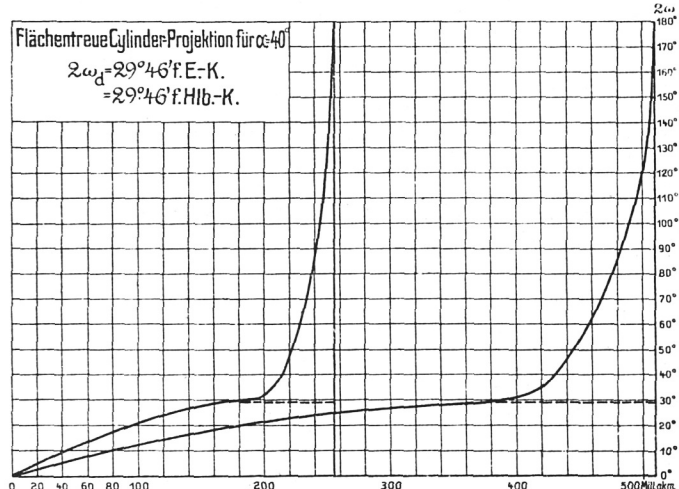


Fig. 6.

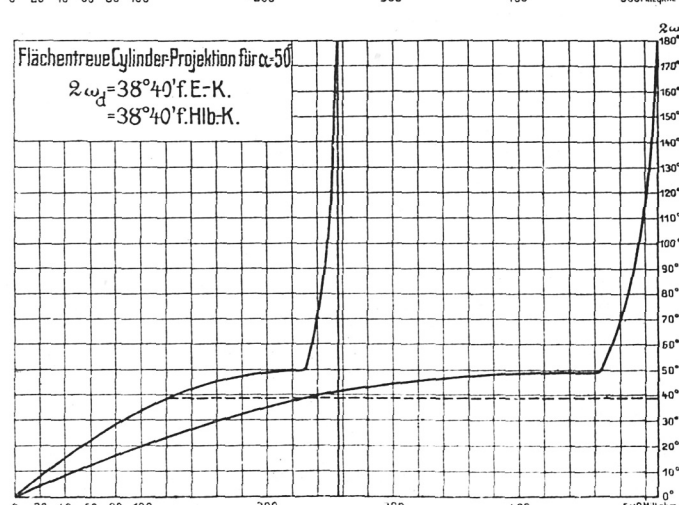


Fig. 7.

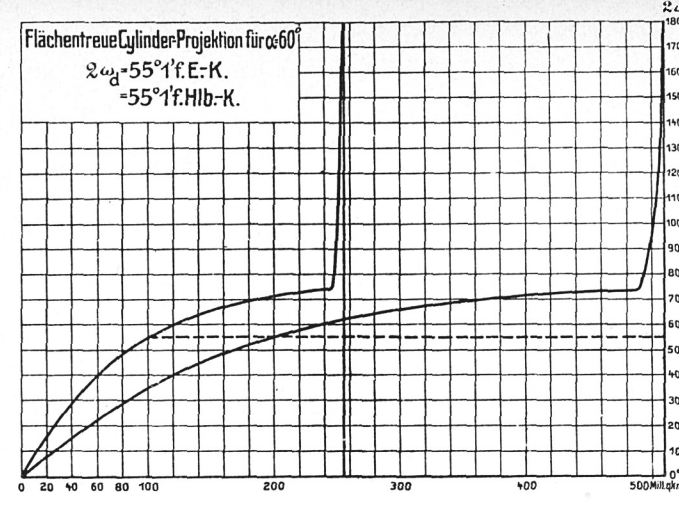


Fig. 8.

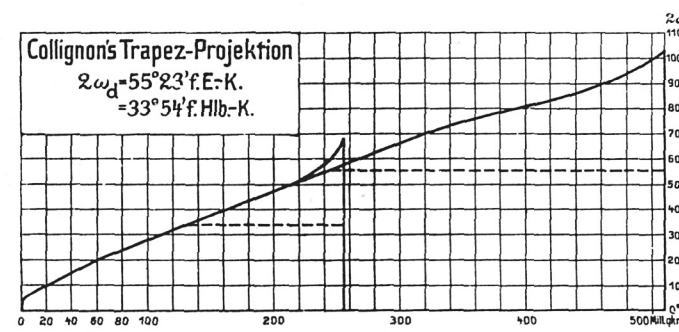


Fig. 9.

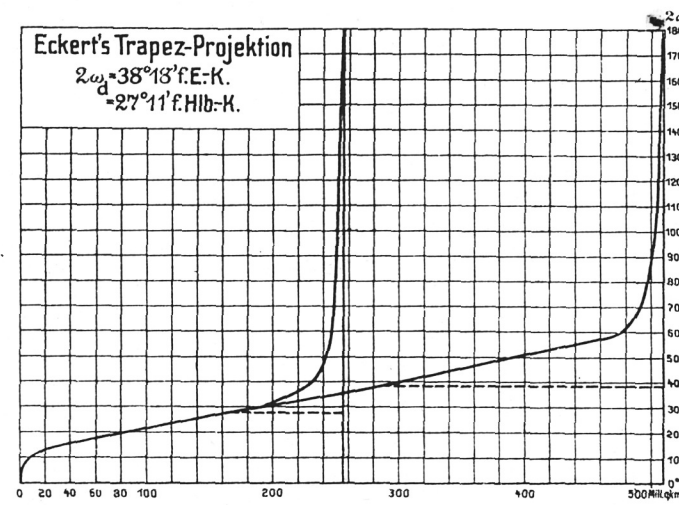


Fig. 10.

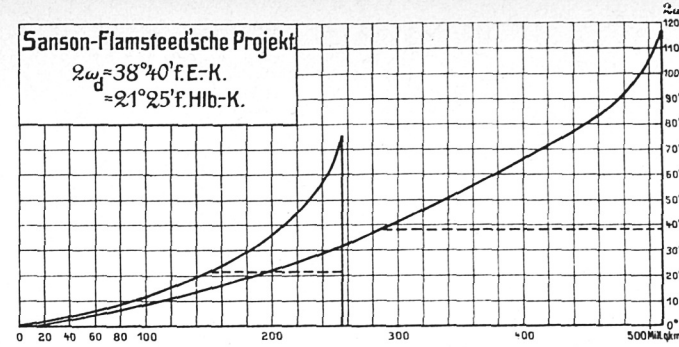


Fig. 11.

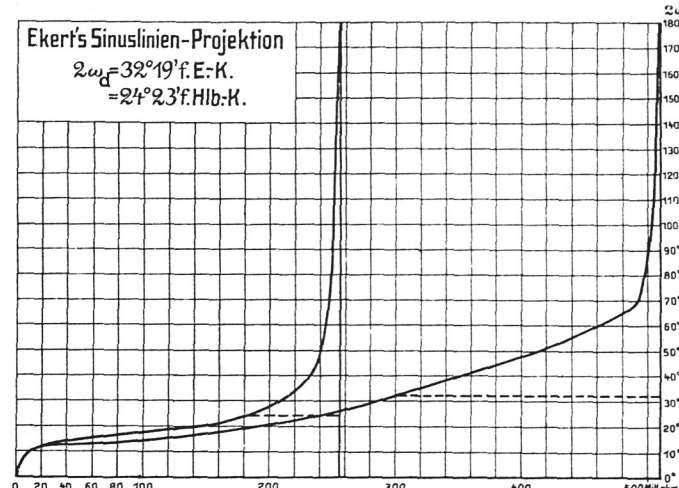


Fig. 12.

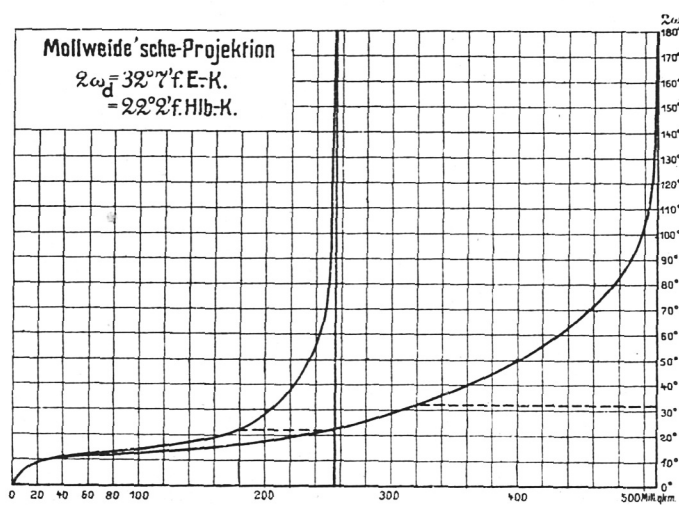


Fig. 13.

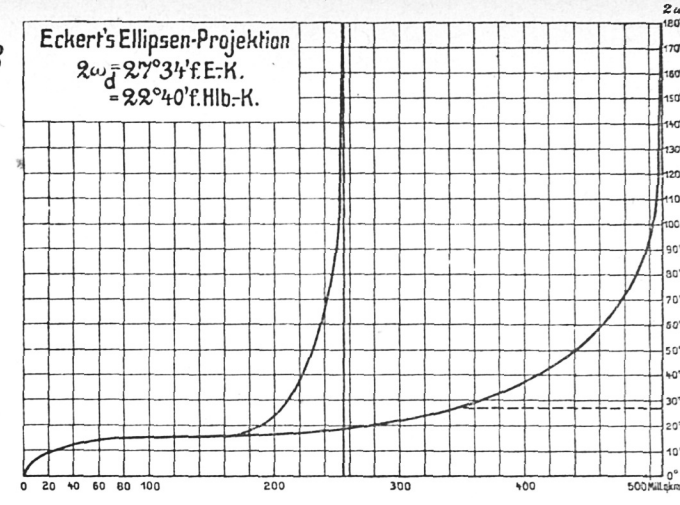


Fig. 14.

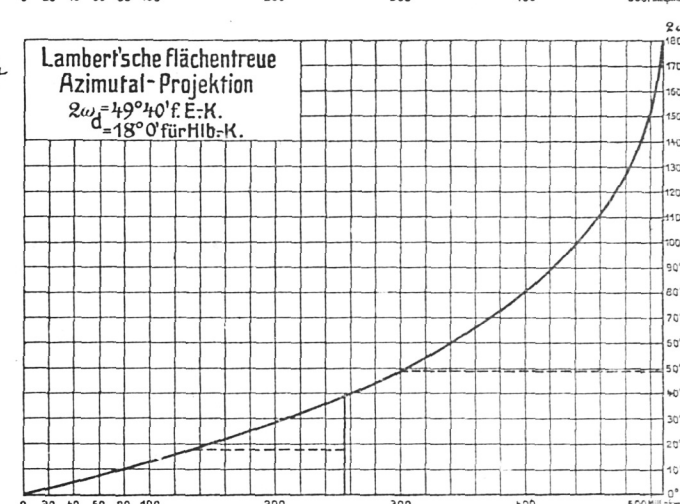


Fig. 15.

