

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 6. Abhandlung

Geodätische Netze auf Rotationsflächen

von

M. Lagally

Vorgelegt am 1. Mai 1909

München 1909

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —.50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 *M.* —.60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —.50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
 Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 *M.* 1.—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —.40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
 Barmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —.40
 Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definierten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
 * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —.20
 Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F₂. Sb. 1897, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegunselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —.20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —.40
 — u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —.40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 *M.* —.40
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch - physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 6. Abhandlung

Geodätische Netze auf Rotationsflächen

von

M. Lagally

Vorgelegt am 1. Mai 1909



München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf Kurvennetze, die von zwei Scharen geodätischer Linien auf einer Rotationsfläche gebildet werden. Die sämtlichen Kurven einer Schar sollen durch Rotation auseinander hervorgehen, während die eine Schar durch Spiegelung an der Ebene eines Meridians in die andere übergeht.

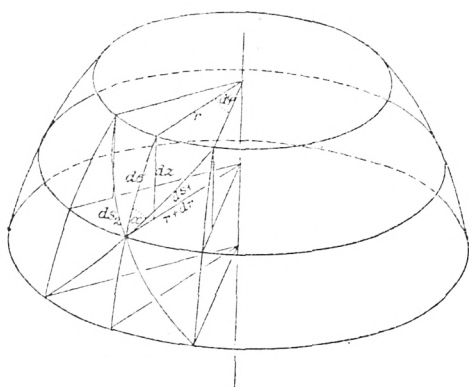


Fig. 1.

Als veränderlicher Parameter der Meridiane sei der Zentrwinkel φ eingeführt. Die Gleichung eines Meridians in Parameterform sei:

$$z = z(w), \quad r = r(w).$$

Bringt man es durch geeignete Wahl des Parameters w dahin, daß die geodätischen Linien Diagonalkurven in dem von den Meridianen und Parallelkreisen gebildeten orthogo-

nalen Kurvennetz sind, und bezeichnet man den Winkel einer geodätischen Linie mit einem Meridian mit α , während

$$d\sigma = \sqrt{dr^2 + dz^2}$$

sein Linienelement ist, so kann man das Linienelement beider geodätischer Kurvenscharen in doppelter Weise ausdrücken:

$$ds_1 = ds_2 = \frac{r d\varphi}{\sin \alpha} = \frac{d\sigma}{\cos \alpha}.$$

Anderseits gibt die Clairautsche Gleichung die Bedingung dafür, daß die Diagonalkurven geodätische Linien sind

$$(1) \quad r \sin \alpha = k,$$

wo die Konstante k bekanntlich den Radius des kleinsten Parallelkreises, im folgenden Endkreis genannt, bedeutet, den die geodätischen Linien noch erreichen können und in diesem Fall berühren.

Durch Elimination von α ergibt sich:

$$ds_1 = ds_2 = \frac{r^2 d\varphi^1}{k} = \frac{r \sqrt{r'^2 + z'^2} dw}{\sqrt{r^2 - k^2}}.$$

Wenn dieses Netz durch Verbiegung aus einem linien-
gleichen Ausgangsnetz

$$ds_1 = ds_2 = \frac{r_0^2 d\varphi_0}{k_0} = \frac{r_0 \sqrt{r_0'^2 + z_0'^2} dw}{\sqrt{r_0^2 - k_0^2}}$$

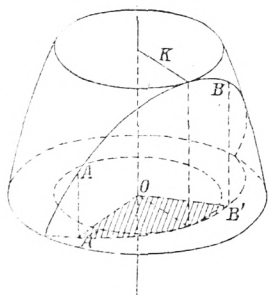


Fig. 2.

¹⁾ Aus

$$ds = \frac{r^2 d\varphi}{k}; \quad k[s]_A^B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

folgt nebenbei folgender Satz: das von der Länge eines Bogenstücks einer geodätischen Linie und dem Endradius k gebildete Rechteck ist doppelt so groß als die von der Projektion dieses Bogenstücks in die Ebene eines Parallelkreises und den zu den Endpunkten gehörigen Radienvektoren begrenzte Fläche ($A'O B'$).

mit gleichem Parameter w hervorgegangen ist, so kann entweder jede längs eines Parallelkreises geschlossene Zone von Linienelementen als ganzes und unter Erhaltung aller Zentriwinkel verbogen worden sein; oder es kann das ursprüngliche, die ganze Fläche deckende Netz längs eines Meridians aufgeschnitten und so verbogen worden sein, daß es auf der neuen Rotationsfläche, auf der es nach der Verbiegung liegt, nur einen von zwei Meridianen begrenzten Streifen bedeckt. Dann ist $d\varphi = c d\varphi_0$, wo c wegen der Rotationssymmetrie konstant ist; insbesondere entspricht dem ersteren Fall der Wert $c = 1$.

Nun ergeben sich durch Gleichsetzung der Linienelemente vor und nach der Verbiegung folgende zwei Gleichungen, welche die Koordinaten r und φ aller Biegungsnetze eines Ausgangsnetzes r_0, φ_0 durch einfache Integration als Funktion eines Parameters w ergeben.

$$(2) \quad r = r_0 \sqrt{\frac{k}{k_0 c}}, \quad \frac{r \sqrt{r'^2 + z'^2}}{\sqrt{r^2 - k^2}} = \frac{r_0 \sqrt{r_0'^2 + z_0'^2}}{\sqrt{r_0^2 - k_0^2}}.$$

Dabei lassen sich nicht nur die Koordinaten r, z eines Punktes der Meridiankurve, sondern in einfacher Weise auch die Koordinaten eines Punktes einer geodätischen Linie, die aus einer gegebenen geodätischen Linie des Ausgangsnetzes hervorgeht, durch den Parameter w darstellen.

Eine Vereinfachung wird erzielt, wenn man r_0 selbst als unabhängige Veränderliche einführen kann; dann ist

$$(3) \quad \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 + \left(\frac{dz_0}{dr_0}\right)^2\right) \frac{r_0^2 - k k_0 c}{r_0^2 - k_0^2} - \frac{k}{k_0 c}$$

dabei kann

$$r_0 = r \sqrt{\frac{k_0 c}{k}}$$

in die Formel vor oder nach der Integration substituiert werden.

Noch eine Form verdient Erwähnung, die unter Verzicht auf die Parameterdarstellung der Meridiankurve das Linien-

element der geodätischen Linien eines vollständigen Systems von Biegungsnetzen als Funktion eines Parameters und zweier Konstanten darstellt.

Setzt man

$$\begin{aligned} ds &= \frac{r \sqrt{dr^2 + dz^2}}{\sqrt{r^2 - k^2}} = \frac{r_0 \sqrt{dr_0^2 + dz_0^2}}{\sqrt{r_0^2 - k_0^2}} = F(r_0) dr_0 \\ &= F\left(r \sqrt{\frac{k_0 c}{k}}\right) \sqrt{\frac{k_0 c}{k}} dr, \end{aligned}$$

so ist die Meridiankurve des ganzen in einander verbiegbaren Systems geodätischer Netze:

$$z = \int \sqrt{\frac{r^2 - k^2}{r^2} \frac{k_0 c}{k} F^2\left(\sqrt{\frac{k_0 c}{k}} r\right) - 1} dr.$$

Dabei kann die Funktion F entweder willkürlich angenommen oder aus einem Ausgangsnetz berechnet sein.

Als Beispiel sei erwähnt, daß die Funktion $F = a = \text{const}$ auf Netze mit den Meridiankurven

$$z = \int \sqrt{r^2 \left(a^2 c \cdot \frac{k_0}{k} - 1\right) - a^2 k k_0 c} \frac{dr}{r}$$

führt; bei ihnen ist die Bogenlänge der geodätischen Linien, von einem geeigneten Punkt aus gerechnet, dem Radiusvektor proportional; einfach wird ferner die Rechnung mit der Funktion

$$F = a \sqrt{\frac{k_0 c}{k}} r,$$

die auf die Meridiankurven

$$z = \frac{k_0 c}{k} a \int \sqrt{r^2 - k^2} dr$$

führt, die leicht diskutierbar sind.

Zwei wichtige Spezialfälle der Verbiegung. Wie schon erwähnt, verläuft nach dem Clairautschen Satz jede geodätische Linie unseres Rotationsnetzes in einem Gebiet der

Fläche, in welchem die Radien der Parallelkreise eine gewisse Größe, eben die Konstante der Clairautschen Gleichung, nicht unterschreiten. Ist k_0 der Radius dieses Endkreises auf dem Ausgangsnetz, so wird er bei der Verbiegung in einen Radius

$$\bar{r} = k_0 \sqrt{\frac{k}{k_0 c}} = \sqrt{\frac{k k_0}{c}}$$

übergehen, also nur dann in den Endradius k des Biegunetzes, wenn

$$\sqrt{\frac{k k_0}{c}} = k, \quad \text{also} \quad k c = k_0$$

ist.

Für $c = 1$ folgt $k = k_0$; d. h. ein bis an den Endkreis reichendes geodätisches Rotationsnetz ist starr, wenn man nicht unter Verzicht auf einfache Überdeckung einen etwa längs eines Meridians verlaufenden Schnitt führt; jeder zwischen zwei Meridianen mit dem Zentriwinkel φ_0 liegende Streifen des Netzes kann in einen anderen mit dem Zentriwinkel $\varphi = c \varphi_0$ verbogen werden; hierbei ist

$$c \geq 1 \text{ (nicht } = 1); \quad k = \frac{k_0}{c}; \quad \bar{r} = k.$$

Es läßt sich zeigen, daß in diesem 1. Fall der Verbiegung des Netzes auch die Fläche, auf der es liegt, unter Konstantenerhaltung des Krümmungsmaßes mitverbogen wird.

Das Krümmungsmaß der Rotationsfläche, auf der das geodätische Netz liegt, ist:

$$K = \frac{z' z''}{r (1 + z'^2)^2};$$

das der Ausgangsfläche:

$$K_0 = \frac{z'_0 z''_0}{r_0 (1 + z_0'^2)^2}.$$

Dabei bedeuten die Striche (') bei z Differentiationen nach r , bei z_0 nach r_0 . Drückt man z und r mittels der Formeln (3) durch z_0 und r_0 aus, und setzt man zur Abkürzung:

$$M = \frac{r_0^2 - k k_0 c}{r_0^2 - k_0^2}, \quad M' = \frac{dM}{dr_0},$$

so ist:
$$K = \frac{1}{M} K_0 + \frac{M'}{2 M^2 r_0 (1 + z_0'^2)}.$$

Dieser Ausdruck für das Krümmungsmaß der Flächen, auf denen die Biegungsnetze aufgelegt werden können, vereinfacht sich bei besonderer Wahl von M . Setzt man nämlich die Wurzeln des Zählers und Nenners von M einander gleich, also

$$k c = k_0$$

so folgt:

$$M = 1, \quad M' = 0, \quad K = K_0,$$

d. h. die Verbiegung des Netzes ist verbunden mit flächentreuer Abwicklung der Fläche, wenn der Endkreis des Ausgangsnetzes in den Endkreis des neuen Netzes verbogen wird.

Als zweiter Fall sei die Verbiegung eines geodätischen Rotationsnetzes ohne Änderung der Zentriwinkel betrachtet, die der Bedingung $c = 1$ entspricht. Der dem Endradius k_0 des Ausgangsnetzes entsprechende Radius wird nach (2)

$$\bar{r} = k_0 \sqrt{\frac{k}{k_0}} = \sqrt{k k_0}$$

der Winkel $\bar{a}$, unter dem das neue Netz mit dem Endradius k diesen Kreis mit dem Radius $\bar{r} = \sqrt{k k_0}$ schneidet, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \bar{r} \sin \bar{a} &= k \\ \sin \bar{a} &= \frac{k}{\bar{r}} = \frac{k}{\sqrt{k k_0}} = \sqrt{\frac{k}{k_0}}; \end{aligned}$$

der neue Endradius k geht aus einem Radius $\sqrt{k k_0}$ des Ausgangsnetzes hervor.

Nun ergeben sich zwei Möglichkeiten:

- a) $k > k_0$, also auch $k > \sqrt{k k_0} > k_0$, $\sin a > 1$, a imaginär.
- b) $k < k_0$, also auch $k < \sqrt{k k_0} < k_0$, $\sin a < 1$, a reell.

Im Fall (a) wird das ganze Netz gedehnt; jeder Parallelkreis geht in einem $\sqrt{\frac{k}{k_0}}$ mal größeren über. Die zwischen den Kreisen k_0 und $\sqrt{k k_0}$

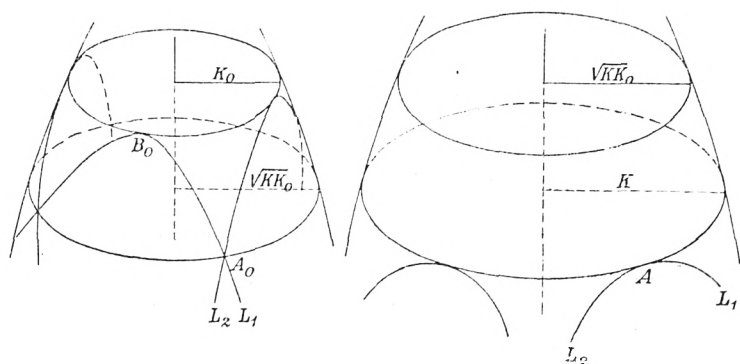


Fig. 3. 1)

liegende Zone geht in eine Zone mit den Begrenzungskreisen $\sqrt{k k_0}$ und k über, in der es bloß imaginäre geodätische Linien des betrachteten Netzes gibt. Am neuen Endkreis fügen sich je zwei geodätische Linien L_1 und L_2 , die sich vorher bei A_0 unter dem Winkel 2α geschnitten hatten, zu einer einzigen zusammen, welche in dem gemeinsamen Punkt A den neuen Endkreis berührt. Das ermöglicht, das Verschwinden der in der Zone zwischen k_0 und $\sqrt{k k_0}$ liegenden geodätischen Linienstücke, welche die Rechnung bei der Dehnung des Netzes imaginär werden läßt, geometrisch anders zu deuten. Denkt man sich in der fraglichen Zone alle Knotenpunkte des Netzes gelöst und faßt die geodätischen Linien als Streifen von Flächenelementen auf, so kann man das verschwindende Stück $A_0 B_0$ der Linie L_1 auf dem gedehnten Netz von A aus auf die Linie L_2 auflegen, welche dort die Fortsetzung von L_1 bildet. Es wird also dann eine Zone des Dehnungsnetzes noch von einem zweiten Netz geodätischer Linien überdeckt, welches nicht durch eine punktweise Transformation aus dem Ausgangsnetz entstanden ist.

Der Fall (b), ($k < k_0$) ist nichts anderes als die Umkehrung von (a). Das ganze Netz wird zusammengedrückt; jeder Radius

1) In Fig. 3 und 2 sind die Buchstaben K und K_0 durch k und k_0 zu ersetzen.

nimmt ab im Verhältnis $\sqrt{\frac{k}{k_0}}$. Aus dem Endkreis k_0 geht ein Kreis mit dem Radius $\sqrt{k k_0}$ hervor, der von den geodätischen Linien unter reellen Winkel

$$\left(\sin \alpha = \sqrt{\frac{k}{k_0}} < 1 \right)$$

geschnitten wird. Jede geodätische Linie des Ausgangsnetzes zerfällt hiebei in zwei, die sich an der früheren Berührungsstelle mit dem Endkreis unter dem Winkel 2α schneiden. Der neue Endkreis $k < \sqrt{k k_0}$ geht aus einem Kreis $\sqrt{k k_0} < k_0$ hervor. In der zwischen k und $\sqrt{k k_0}$ liegenden Zone existiert eine reelle Fortsetzung des Biegungsnetzes, der auf der Ausgangsfläche nur imaginäre geodätische Liniestücke entsprechen.

Ein aus Lamellen modelliertes Netz ist folglich starr; durchschneidet man jedoch jede geodätische Linie im Berührungspunkt mit dem Endkreis, so kann man das Netz beliebig zusammendrücken. Schneidet man anderseits eine Zone bis zu einem Parallelkreis ab oder löst bis dahin alle Knoten, so kann man das Netz auch soweit dehnen, bis dieser Parallelkreis Endkreis wird.

Ein auf einer hyperbolisch gekrümmten Fläche liegendes Netz, dessen sämtliche Linien den Kehlkreis schneiden, das also keinen reellen Endkreis hat, kann ohne Zerschneidung verbogen werden; und zwar kann es beliebig zusammengedrückt, aber auch soweit gedehnt werden, bis der Kehlkreis Endkreis wird.

Ein auf einem Kreiszylinder liegendes Netz kann auf jeden Kreiszylinder als ganzes aufgelegt werden.

Die allgemeinste Verbiegung eines Netzes kann man nun in zwei Schritte zerlegen: Hat man es unter Konstanterhaltung des Krümmungsmaßes so weit verbogen, daß c den gewünschten Wert hat, so ist nur noch eine Verbiegung unter Konstanterhaltung des Zentriwinkels notwendig, um auch k auf den Endwert zu bringen.

Beispiel.

Es sollen alle geodätischen Rotationsnetze aufgesucht werden, die aus dem von sämtlichen Tangenten eines Kreises gebildeten ebenen Netze durch Verbiegung hervorgehen.

Die Ebene des Kreises sei $z_0 = 0$; sein Radius k_0 ist Endradius des Ausgangsnetzes.

Die Gleichung aller Biegungsnetze ergibt sich aus:

$$\left(\frac{dz}{dr_0}\right)^2 = \frac{r_0^2 - k k_0 c}{r_0^2 - k_0^2} - \frac{k}{k_0 c}.$$

Da

$$r_0 = \sqrt{\frac{k_0 c}{k}} r, \quad dr_0 = \sqrt{\frac{k_0 c}{k}} dr$$

ist, ist die Meridiankurve des allgemeinsten Biegungsnetzes:

$$(4) \quad z = \int \sqrt{\frac{r^2(c^2 k_0 - c k) - (k_0 k^2 c^2 - k_0 k^2)}{r^2 c k - k_0 k^2}} dr.$$

Zwei spezielle Fälle verdienen Erwähnung, obwohl sie auf bekannte, zum Teil triviale Tatsachen führen: Bei Verbiegungen des ganzen geschlossenen Netzes ist $c = 1$; das Integral z läßt sich dann durch gewöhnliche Funktionen ausdrücken. Man erhält:

$$\frac{r^2}{k k_0} - \frac{z^2}{(k_0 - k) k_0} - 1 = 0,$$

also ∞^1 einschalige Hyperboloide, deren Kehlkreise $\sqrt{k k_0}$ zum Radius haben und folglich aus dem Endkreis des Ausgangsnetzes hervorgehen. Der Winkel λ , unter welchem die Erzeugenden den Kehlkreis schneiden, ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \lambda &= \frac{k_0 - k}{k} \\ \cos \lambda &= \sqrt{\frac{k}{k_0}}. \end{aligned}$$

Also hat das von den beiden Scharen von Erzeugenden

gebildete geodätische Netz dieselbe Konstante der Clairautschen Gleichung

$$\bar{r} \sin a = \bar{r} \cos \lambda = \sqrt{k k_0} \sqrt{\frac{k}{k_0}} = k$$

wie unser Biegungsnetz und ist folglich mit ihm identisch.

Weiter seien die Verbiegungen betrachtet, bei denen der Endkreis der Länge nach erhalten bleibt, also, wie oben gezeigt, das Krümmungsmaß der Fläche erhalten bleibt. Die Bedingung $kc = k_0$ führt auf die Gleichung:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = c^2 - 1.$$

Es ergeben sich die Kegel:

$$z = r\sqrt{c^2 - 1},$$

deren Öffnungswinkel durch

$$\cotg \varepsilon = \sqrt{c^2 - 1}, \quad \cos \varepsilon = \frac{1}{c}$$

bestimmt ist, also in einfacher Weise mit der Änderung des Zentriwinkels zusammenhängt. Da sich zu jedem Konstantenpaar c und k eine Konstante $k_0 = ck$ angeben läßt, kann man jedes geodätische Rotationsnetz eines Kreiskegels als Biegungsnetz eines ebenen Netzes auffassen.

Nach den vorausgehenden allgemeinen Entwicklungen ergeben sich nun durch Verbiegung dieser Kegelnetze bei konstantem Zentriwinkel wieder die allgemeinsten Biegungsnetze des ebenen Netzes. Es sei

$$z_0 = r_0 \sqrt{c^2 - 1}$$

die Gleichung des Kegels; $k'_0 = \frac{k_0}{c}$ die Clairautsche Konstante des auf ihm betrachteten Netzes. Dann ist die Differentialgleichung aller Biegungsnetze bei Konstanterhaltung des Zentriwinkels:

$$\left(\frac{dz}{dr_0}\right)^2 = (1 + c^2 - 1) \frac{r_0^2 - k k'_0}{r_0^2 - k_0'^2} - \frac{k}{k'_0},$$

oder wenn man r_0 und k'_0 durch ihre Werte ersetzt:

$$(4a) \quad \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r^2(k_0 c^2 - k c) - k^2 k_0 (c^2 - 1)}{r^2 k c - k^2 k_0},$$

woraus sich durch Integration in der Tat wieder die Gleichung (4) ergibt.

Die Gleichung (4a) hat drei wesentliche Konstante; dividiert man Zähler und Nenner mit $k c$ und ändert die Bezeichnung, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r^2 \left(\frac{c k_0}{k} - 1\right) - \left(k k_0 c - \frac{k k_0}{c}\right)}{r^2 - \frac{k k_0}{c}} = \frac{r^2 (A - 1) - (C - B)}{r^2 - B}.$$

Die Gleichungen

$$A = \frac{c k_0}{k}, \quad B = \frac{k k_0}{c}, \quad C = k k_0 c$$

lassen sich nach k, k_0, c auflösen und zwar (bis auf das Vorzeichen) eindeutig:

$$k = \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad k_0 = \sqrt{AB}, \quad c = \sqrt{\frac{C}{B}}.$$

Daraus folgt, daß unter den ∞^1 geodätischen Rotationsnetzen, die auf einer Fläche F liegen, ein einziges aus einem Kegel- oder ebenen Netz durch Verbiegung hervorgeht, und zwar, da nicht nur k , sondern auch k_0 und c eindeutig bestimmt sind, aus einem ganz bestimmten ebenen Netz.

Bevor ich die Gestalt der Flächen F diskutiere, will ich erwähnen, daß eine kurze Rechnung ihr Krümmungsmaß in der einfachen Form

$$K = \frac{C - AB}{(r^2 A - C)^2}$$

ergibt. Es hat dasselbe Vorzeichen wie der Zähler, und zwar,

da r nur im Nenner vorkommt, auf der ganzen Fläche, auch wenn diese aus getrennten Teilen besteht, das gleiche.

Die Flächen F sind transzendent; sie sind aus Schalen und Spindeln zusammengesetzt, die sich längs der Z -Achse periodisch wiederholen. Um die Realitätsverhältnisse zu untersuchen, bringe ich die Gleichung (4a) in folgende Form:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(\frac{ck_0}{k} - 1\right) \frac{\frac{ck_0}{k} - 1}{r^2 - \frac{kk_0}{c}}.$$

Wenn r von 0 bis ∞ wächst und dabei einen Wurzelwert des Zählers oder Nenners durchwandert, ändert die rechte Seite ihr Vorzeichen; mithin trennt jeder solche Wurzelwert ein reelles und ein imaginäres Gebiet der Meridiankurve. Da die Wurzeln des Nenners immer reell sind (k , k_0 und c sind positiv), die des Zählers aber auch imaginär sein können, können zwei oder drei solche Gebiete zwischen 0 und $+\infty$ liegen. Für die Realität der Zählerwurzeln und das Vorzeichen der rechten Seite sind also nur die Vorzeichen von $c - \frac{1}{c}$ und $\frac{ck_0}{k} - 1$ maßgebend.

$$c - \frac{1}{c} \gtrless 0 \text{ führt auf } c \gtrless 1$$

$$\frac{ck_0}{k} - 1 \gtrless 0 \text{ führt auf } k \lesseqgtr ck_0.$$

Die vier möglichen Fälle sind nun in folgender Tabelle zusammengestellt, in der das Vorzeichen des konstanten Faktors $\frac{ck_0}{k} - 1$ und die Realität der Zählerwurzeln angegeben ist:

- | | | | | |
|----------|---------|-----------------------------|--------------|------------------------|
| I. | $c > 1$ | $k > ck_0 > k_0$ | Faktor < 0 | Zählerwurzeln imaginär |
| II. | $c > 1$ | $k < ck_0 [k \gtrless k_0]$ | Faktor > 0 | „ reell |
| (5) III. | $c < 1$ | $k > ck_0 [k \gtrless k_0]$ | Faktor < 0 | „ reell |
| IV. | $c < 1$ | $k < ck_0 < k_0$ | Faktor > 0 | „ imaginär. |

Die Fälle II und III zerfallen noch in je zwei Unterfälle a und b, je nach dem die Zähler- oder Nennerwurzeln den größeren Wert haben.

Da $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2$ an den Nullstellen des Zählers 0, an denen des Nenners ∞ wird, endet die Meridiankurve an letzterer Stelle mit einer vertikalen Tangente, an ersterer mit einer horizontalen, welche für die Fläche eine Singularität zur Folge hat. Durch Bildung von $\frac{d^2z}{dr^2}$ erkennt man, daß Wendepunkte fehlen außer an der Stelle $r=0$, wo sich ein (reeller oder imaginärer) konischer Punkt der Fläche einstellt. Asymptoten in der Richtung $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{ck_0}{k} - 1$ sind in Fall II. und IV. reell.

Demnach ergeben sich für die Gestalt der Meridiankurve folgende sechs Typen. (Z bedeutet die Nullstellen des Zählers, N die des Nenners.)

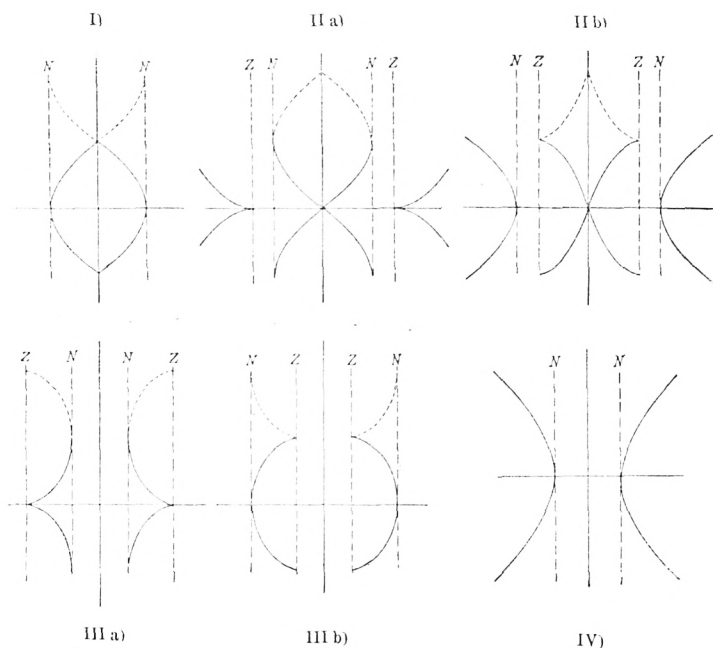


Fig. 4.

Die Frage, ob der absolute Wert der Nennerwurzel $\lesseqgtr$ ist als der der Zählerwurzel, ist durch folgende Ungleichung ausgedrückt:

$$\frac{k k_0 \left(c - \frac{1}{c} \right)}{\frac{c k_0}{k} - 1} \gtrless \frac{k k_0}{c}.$$

Daraus folgt:

$$(6a) \quad \begin{cases} c k \gtrless k_0, & \text{wenn } c > 1 \text{ ist,} \\ c k \lesseqgtr k_0, & \text{wenn } c < 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Dem Übergangsfall $ck = k_0$ entsprechen die Rotationskegel.

Um nun Aufschluß über die Lage des Endkreises zu erhalten, vergleiche ich seinen Radius k mit den Wurzelwerten des Zählers und Nenners; die Bedingung:

$$(6b) \quad \begin{aligned} 1) \quad k \gtrless \sqrt{\frac{k k_0 \left(c - \frac{1}{c} \right)}{\frac{c k_0}{k} - 1}} & \text{ führt auf } \begin{cases} c k \lesseqgtr k_0, & \text{wenn } c > 1 \text{ ist,} \\ c k \gtrless k_0, & \text{wenn } c < 1 \text{ ist.} \end{cases} \\ 2) \quad k \gtrless \sqrt{\frac{k k_0}{c}} & \text{ führt auf } c k \gtrless k_0. \end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen und aus den Ungleichungen (5) ist die Lage des Endkreises auf allen sechs Flächentypen ersichtlich. Bezeichnet man, wie auch in den Figuren, die Zählerwurzel mit Z , die Nennerwurzel mit N , so gibt die folgende Tabelle die sämtlichen Lagebeziehungen.

I)	$N < k$, Z imaginär.
II a)	$N < k < Z$
II b)	$Z < k < N$
III a)	$k < N < Z$
III b)	$Z < N < k$
IV)	$k < N$, Z imaginär.

Die allgemeine Gleichung aller geodätischen Netze auf der durch (4) dargestellten Fläche ergibt sich durch Integration der Clairautschen Gleichung

$$r \sin \alpha = p,$$

wo p eine willkürliche Konstante ist. Führt man

$$\sin \alpha = \frac{r \, d\varphi}{\sqrt{r^2 \, d\varphi^2 + dr^2 + dz^2}},$$

ein, so erhält man die Differentialgleichung aller geodätischen Netze der Fläche:

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{p^2 k_0 c^2 (r^2 - k^2)}{r^2 (r^2 - p^2) (r^2 k c - k^2 k_0)}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich für $p = k$, also für den Fall des einen, bisher betrachteten Netzes, welches in die Ebene ausbreitbar ist:

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = \frac{k k_0 c}{r^2 \left(r^2 - \frac{k k_0}{c}\right)},$$

daraus folgt durch Integration bei geeigneter Wahl der additiven Konstanten die Gleichung einer Kurve des Netzes und zugleich ihre Projektion in die Ebene $z = 0$ in folgender Form:

$$r \cos \frac{\varphi}{c} = \sqrt{\frac{k k_0}{c}}.$$

Für $c = 1$ bedeutet diese Kurve die geradlinigen Erzeugenden des Hyperboloids. Ist $c = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so schließt sie sich nach m Umläufen. In allen Fällen erstreckt sie sich, in symmetrischer Wiederholung, ins Unendliche. Ihr kleinster Radiusvektor, mithin der Radius der Enveloppe aller Netzkurven, ist $\sqrt{\frac{k k_0}{c}}$, also der Wert der Nennerwurzel in der Differentialgleichung der Fläche.

Es sind also die Spindeln der Flächen I, IIa, IIb, IIIb von reellen Kurven des Netzes vollständig frei; vollständig

bedeckt sind die Schalen von IIa, IIb, IIIa, IV. Alle diese Netze schneiden den Kehlkreis der Schale unter reellem, von 0 verschiedenem Winkel, keines reicht an den Endkreis heran mit Ausnahme des ebenen Ausgangsnetzes und der durch den Übergangsfall $k_0 = ck$ charakterisierten Kegelnetze.

Noch ein bemerkenswerter Satz sei erwähnt. Die ∞^1 Hyperboloide und die auf ihnen liegenden Netze von Erzeugenden, die aus demselben ebenen Netz hervorgehen, sind bekanntlich affin. Ebenso kann auch jedes der allgemeineren Netze in ∞^1 affine Netze verbogen werden. Dabei sind, wie sich leicht zeigen läßt, die Biegungsnetze der ebenen Netze die einzigen geodätischen Rotationsnetze, bei denen die Möglichkeit einer solchen punktweisen affinen Deformation vorhanden ist.
