

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1942. Heft I/III

Sitzungen Januar – Dezember

München 1942

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Deutsche Akademie
der Wissenschaften
zu Berlin
Bibliothek

Dünnwandige Hohlzylinder gleicher Festigkeit gegen Innen- und Außendruck.

Von Ludwig Föppl in München.

Mit 2 Abbildungen.

Vorgelegt am 14. November 1942.

Als Hohlkörper, der einem gleichmäßigen Innen- oder Außendruck p ausgesetzt ist und der aus praktischen Bedürfnissen heraus möglichst leicht gebaut sein soll, kommt vor allen Dingen ein dünnwandiger Hohlzylinder von kreisförmigem Querschnitt in Betracht. Diese Form des Hohlkörpers liegt z. B. den meisten Flaschen, die unter einem inneren Überdruck stehen wie Sauerstoffflaschen usw. zugrunde, ferner dem U-Boot-Druckkörper, der bei großer Tauchtiefe des U-Bootes unter nahezu gleichmäßigem äußeren Überdruck steht. Wird der mittlere Halbmesser des Querschnittskreises mit r und die Wandstärke mit h bezeichnet, so gilt für dünnwandige Hohlzylinder, d. h. großes Verhältnis $\frac{r}{h}$, die folgende Spannungsverteilung in der Zylinderwand bei konstantem inneren Überdruck von $p \text{ kg/cm}^2$ bzw. äußerem Überdruck von $-p \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_t = p \frac{r}{h}; \quad (1a)$$

$$\sigma_l = p \frac{r}{2h}. \quad (1b)$$

Darin bedeuten σ_t die Tangentialspannungen, die in den Schnitten längs der Erzeugenden des Zylinders übertragen werden, und σ_l die Längsspannungen, die in den Querschnitten auftreten. Da wir dünnwandige Zylinder voraussetzen, darf man die Spannungen σ_t und σ_l gleichmäßig über die Wanddicke verteilt annehmen. Für die Festigkeit des Hohlzylinders sind die Tangentialspannungen σ_t , die man auch als Ringspannungen bezeichnet, maßgebend, da sie doppelt so groß sind wie die Längsspannungen.

Infolgedessen reißt bekanntlich eine derartige zylindrische Flasche bei hinreichender Steigerung ihres Innendruckes p in der Regel längs einer Erzeugenden auf, unter Überwindung der größten Ringspannungen σ_t .

Die beiden Enden des Hohlzylinders müssen natürlich irgendwie verschlossen sein, damit ein geschlossener Raum entsteht. Wie diese Endverschlüsse des Hohlzylinders zweckmäßig ausgebildet werden, damit durch den Innen- bzw. Außendruck keine zu großen Beanspruchungen auftreten, davon soll hier nicht weiter die Rede sein, da wir lange Hohlkörper voraussetzen wollen und sie nur hinsichtlich ihres zylindrischen Teiles miteinander vergleichen wollen, während die Endverschlüsse ungefähr gleich sein sollen.

Wir wollen uns nämlich die Frage vorlegen, ob es außer dem kreiszylindrischen Hohlkörper noch andere Formen zylindrischer Hohlkörper von geringer Wandstärke gibt, die sich bei Innen- oder Außendruck vom Standpunkt der Festigkeit, d. h. der Sicherheit gegen Bruch, aus gleich vorteilhaft verhalten. Dabei ist zu beachten, daß der durch die Gl. (1 a) und (1 b) charakterisierte Spannungszustand im kreisförmigen Hohlzylinder ein sogenannter reiner Längsspannungszustand ist ohne Biegungsspannungen. Hätte man als Querschnitt des Hohlzylinders keinen Kreis, sondern z. B. eine Ellipse, so würden in der Zylinderschale bei Innen- oder Außendruck p neben Längsspannungen auch Biegungsspannungen auftreten und die Folge davon wäre, daß die Festigkeit eines Hohlzylinders von solcher Gestalt wesentlich herabgedrückt wäre gegenüber einem Kreiszyylinder von gleicher Wandstärke und gleichem Inhalt. Wir müssen demnach untersuchen, ob es außer dem Kreis noch andere Querschnittsformen gibt, bei denen die zugehörige Zylinderschale unter Innen- oder Außendruck ausschließlich Längsspannungen und keine Biegungsspannungen aufnimmt. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Eigenschaft ausschließlich für zylindrische Schalen von kreisförmigem Querschnitt gilt; aber es ist zu überlegen, ob diese Eigenschaft nicht auch für zylindrische Hohlkörper gilt, deren Querschnitt sich aus zwei nicht vollständigen Kreisen geringer Wandstärke zusammensetzt nach Art der Abb. 1. Selbstverständlich muß dabei ein beiden Kreisen gemeinsamer Steg AB (s.

Abb. 1) vorhanden sein; denn ohne ihn würde die Zylinderschale, deren Querschnitt lediglich aus den beiden unvollständigen Kreisen der Abb. 1 besteht, bei Innen- oder Außendruck auf Biegung beansprucht und die Festigkeit einer solchen Schale wäre im Vergleich zur Schale mit einfachem Vollkreis sehr viel geringer. Wir

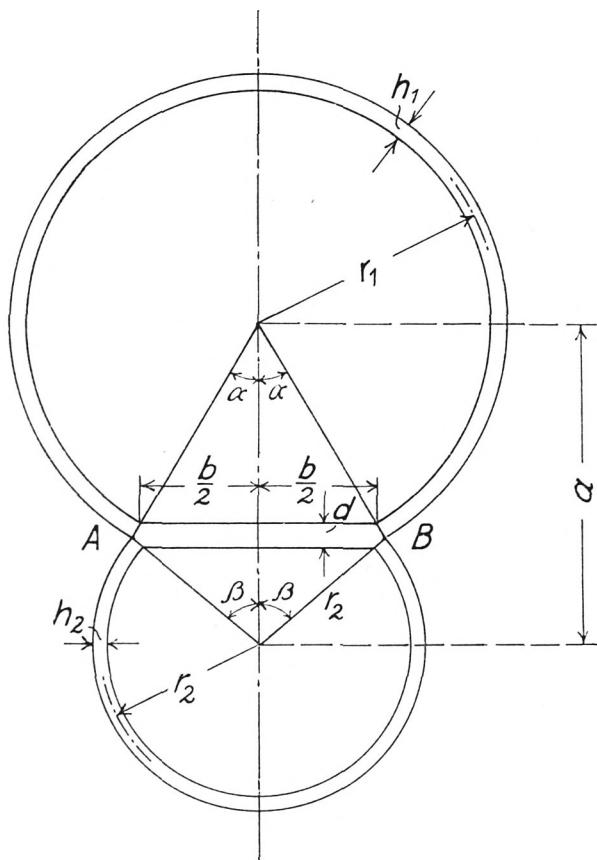


Abb. 1

nehmen zunächst an, daß der Steg AB von der Dicke d ohne Unterbrechung durch die ganze Zylinderschale hindurchläuft, so daß er sie in zwei Kammern teilt, die vollständig voneinander getrennt sind. Nachträglich kann man sich dann überlegen, wie man durch Löcher in der Stegplatte AB eine Verbindung zwischen den beiden Kammern herstellen kann, so daß durch Ver-

dickung der Lochränder bei gleichem Materialaufwand wie bei der ungelochten Stegplatte auch die gleiche Festigkeit beibehalten wird.

Wir nehmen an, daß die beiden Kammern der Zylinderschale nach Abb. 1 in Verbindung miteinander stehen und daß in ihnen ein Überdruck von p kg/cm² herrscht. Bei Außendruck würden die Spannungsverhältnisse dieselben sein bis aufs Vorzeichen aller Spannungen.

Wir vergleichen die Zylinderschale vom Querschnitt nach Abb. 1 mit einer Kreiszyinderschale von den Abmessungen r und h für Halbmesser und Wandstärke und nehmen an, daß durch geeignete, gegenseitige Versteifung der beiden Kanten A und B nach Abb. 1, d. h. durch richtige Wahl der Dicke d der Stegplatte AB dafür gesorgt worden ist, daß sich in den beiden einzelnen Kreiszyinderschalen der Abb. 1 ein reiner Membranspannungszustand ausbildet, für den sich die Ringspannungen nach Gl. (1a) zu

$$\sigma_t = p \frac{r_1}{h_1} = p \frac{r_2}{h_2} \quad (2)$$

berechnen. Da diese Ringspannungen ebenso groß sein sollen wie in der Vergleichsschale, muß folgende Beziehung bestehen:

$$\frac{r}{h} = \frac{r_1}{h_1} = \frac{r_2}{h_2} \quad (3)$$

Damit neben diesen Membranspannungen σ_t keine Biegungsspannungen auftreten, muß die Formänderung in den beiden Kreisschalen der Abb. 1 dieselbe sein wie bei entsprechenden vollen Kreisschalen unter innerem Überdruck von p kg/cm². Denken wir uns also eine volle Kreisschale von den charakteristischen Abmessungen r_1 und h_1 unter einem inneren Überdruck p stehen, so treten in den radialen Schnitten senkrecht zur Ringebene die Ringspannungen $\sigma_t = p \frac{r_1}{h_1}$ und in allen Querschnitten die gleich-

mäßig über den Querschnitt verteilten Längsspannungen $\sigma_l = p \frac{r_1}{2 h_1}$ auf und es herrscht ein reiner Membranspannungszustand. Was die Formänderung betrifft, so tritt in allen Querschnittsabmessungen der so beanspruchten Schale die Dehnung

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_l \right) = \frac{p}{E} \frac{r_1}{h_1} \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \quad (4)$$

auf. Für ε_t kann man z. B. $\varepsilon_t = \frac{\Delta r_1}{r_1}$ oder $\varepsilon_t = \frac{\Delta b}{b}$ setzen, wenn mit b die Länge der Sehne AB bezeichnet wird (s. Abb. 2) und mit Δb deren Längenänderung infolge der Belastung durch den inneren Überdruck p . Wenn wir uns nun aus der vollen Zylinderschale den zum Bogen AB gehörigen Teil herausgeschnitten denken, so verlangt das Gleichgewicht des übrigbleibenden Teiles (s. Abb. 2), daß in den Querschnitten A und B die Normalkräfte $N_1 = h_1 \sigma_t$ angebracht werden. Dann können wir sicher sein, daß in dem übrigbleibenden Teil der Zylinderschale der Spannungs- und Formänderungszustand unverändert geblieben ist.

Entsprechendes gilt für den 2. Ring der Abb. 1 vom Halbmesser r_2 und der Wandstärke h_2 , an dem auch der zum Kreisbogen vom Öffnungswinkel 2β gehörige Teil der vollen Kreiszyinderschale herausgeschnitten zu denken ist. Damit im übrigbleibenden Teil der Schale die Spannungen und Formänderungen unverändert bleiben, sind in den Querschnitten A und B die Normalkräfte $N_2 = h_2 \sigma_t$ anzubringen.

Wie in Abb. 2 angegeben, denken wir uns die Normalkräfte N_1 in ihre Vertikal- und Horizontalkomponenten V_1 bzw. H_1 zerlegt:

$$\begin{aligned} V_1 &= N_1 \sin \alpha = \sigma_t h_1 \sin \alpha \\ H_1 &= N_1 \cos \alpha = \sigma_t h_1 \cos \alpha \end{aligned}$$

und entsprechend verfahren wir mit den Normalkräften N_2 der zweiten Kreisschale:

$$\begin{aligned} V_2 &= N_2 \sin \beta = \sigma_t h_2 \sin \beta \\ H_2 &= N_2 \cos \beta = \sigma_t h_2 \cos \beta. \end{aligned}$$

Denken wir uns nun die beiden aufgeschnittenen Ringe aneinandergefügt, so daß der Körperquerschnitt nach Abb. 1 entsteht, so heben sich die vertikalen Komponenten V_1 und V_2 gegenseitig auf, da aus Abb. 1 folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{r_2}{r_1}$$

und wegen Gl. (3) $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1},$

also ist $h_1 \sin \alpha = h_2 \sin \beta$

und damit $V_1 = V_2.$

Dagegen addieren sich die horizontalen Komponenten H_1 und H_2 und ergeben

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 = \sigma_t (h_1 \cos \alpha + h_2 \cos \beta) = \\ &= p \frac{r}{h} (h_1 \cos \alpha + h_2 \cos \beta). \end{aligned} \quad (5)$$

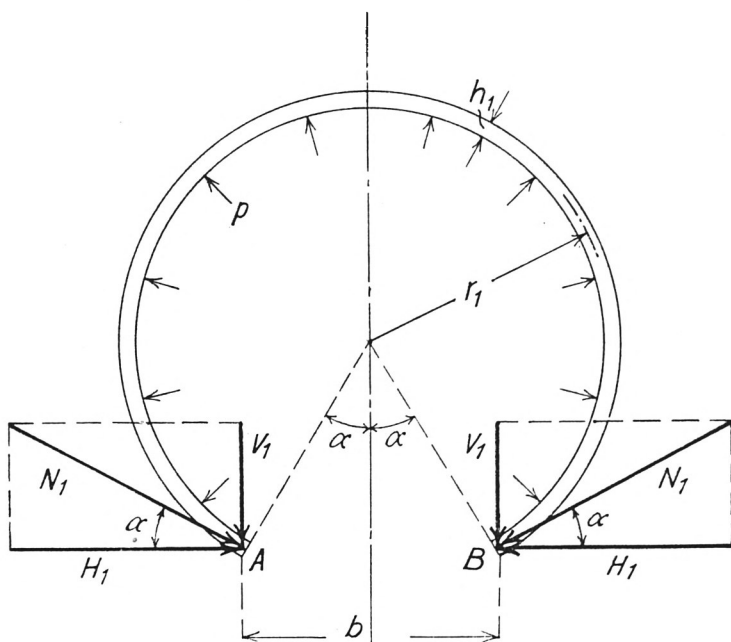


Abb. 2

Damit diese resultierende Horizontalkraft H vom Steg AB allein aufgenommen wird und nicht die beiden Teilzylinderschalen auf Biegung beansprucht werden, muß die Dehnung ε_b des Steges AB gleich sein der Dehnung ε_t nach Gl. (4). Nun ist aber

$$\varepsilon_b = \frac{1}{E} \left(\sigma_b - \frac{1}{m} \sigma_t \right) \quad (6)$$

worin

$$\sigma_b = \frac{H}{d} \quad (7)$$

die Spannung im Steg von der Dicke d bedeutet und σ_l die Längsspannung in der Zylinderschale. Diese letztere kann man sich wieder gleichmäßig über den ganzen Querschnitt nach Abb. 1 verteilt denken.

Ihre Größe erhält man zu

$$\sigma_l = p \frac{J}{i}, \quad (8)$$

wenn mit J die gesamte von der Begrenzung des Querschnittes umschlossene Fläche und mit i der von Werkstoff erfüllte Anteil des ganzen Querschnittes bezeichnet wird. Wir wollen nun voraussetzen, was wir nachträglich noch beweisen werden, daß dieses Verhältnis $\frac{J}{i}$ beim Zylinder nach Abb. 1 dasselbe ist wie beim Vollkreis-Hohlzylinder, den wir zum Vergleich heranziehen wollten; d. h.

$$\frac{J}{i} = \frac{r^2 \pi}{2 r h \pi} = \frac{r}{2 h}.$$

Damit wird σ_l für den Hohlzylinder nach Abb. 1

$$\sigma_l = p \frac{r}{2 h}, \quad (8a)$$

also ebenso groß wie nach Gl. (1 b) für den Kreiszylinder.

Setzen wir in Gl. (6) die Werte für σ_b nach Gl. (7) und für σ_l nach Gl. (8a) ein, so erhält man für die Dehnung des Steges AB in der Querschnittsebene

$$\epsilon_b = \frac{1}{E} \left(\frac{H}{d} - \frac{1}{m} p \frac{r}{2 h} \right)$$

oder nach Einsetzen des Wertes von H nach Gl. (5)

$$\epsilon_b = \frac{p r}{E h} \left(\frac{h_1 \cos \alpha + h_2 \cos \beta}{d} - \frac{1}{2 m} \right). \quad (9)$$

Da diese Dehnung des Steges gleich sein soll der Dehnung ε_t nach Gl. (4) als Bedingung dafür, daß in den beiden Teilzylinderschalen nach Abb. 1 keine Biegungsspannungen auftreten, so folgt für die Dicke d des Steges

$$d = h_1 \cos \alpha + h_2 \cos \beta. \quad (10)$$

Führt man den Abstand a der beiden Kreismittelpunkte ein (s. Abb. 1), so kann man dafür auch unter Berücksichtigung von Gl. (3) schreiben:

$$d = \frac{h_1}{r_1} (r_1 \cos \alpha + r_2 \cos \beta) = \frac{h}{r} \cdot a. \quad (10a)$$

Bei dieser Stegdicke d nimmt die Zylinderschale vom Querschnitt nach Abb. 1 bei innerem oder äußerem Überdruck nur Längsspannungen und keine Biegungsspannungen auf, ebenso wie die volle Hohlkreiszylinderschale. Um beide Zylinderschalen, deren Festigkeit auf Grund unserer Berechnungen unter Zugrundelegung der durch Gl. (3) gegebenen Abmessungsverhältnisse als gleichwertig erkannt worden ist, auch hinsichtlich des Werkstoffaufwandes miteinander zu vergleichen, bilden wir das schon oben in Gl. (8) verwendete Verhältnis $\frac{J}{i}$. Wenn dieses Verhältnis für beide Vergleichszylinderschalen dasselbe ist, so ist dies ein Beweis dafür, daß beide Zylinderschalen auch den gleichen Werkstoffaufwand bei gleichem Innenraum und gleicher Festigkeit benötigen. Nun hatten wir oben im Anschluß an Gl. (8) schon vorausgesetzt, daß dieses Verhältnis $\frac{J}{i}$ für beide Zylinderschalen dasselbe sein soll. Es fehlte nur noch der Beweis, den wir jetzt nachtragen.

Der vom Querschnitt nach Abb. 1 begrenzte Flächeninhalt beträgt

$$J = (\pi - \alpha) r_1^2 + (\pi - \beta) r_2^2 + \frac{r_1^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{r_2^2}{2} \sin 2\beta \quad (11)$$

und der im Querschnitt geschnittene Werkstoff besitzt eine Fläche von

$$i = 2 r_1 h_1 (\pi - \alpha) + 2 r_2 h_2 (\pi - \beta) + b \cdot d. \quad (12)$$

Das Produkt $b \cdot d$ läßt sich umformen in

$b \cdot d = 2 r_1 \sin \alpha (h_1 \cos \alpha + h_2 \cos \beta) = r_1 h_1 \sin 2\alpha + r_2 h_2 \sin 2\beta$,
wobei von der Beziehung $r_1 \sin \alpha = r_2 \sin \beta$ Gebrauch gemacht worden ist.

Das Verhältnis $\frac{J}{i}$ wird demnach gleich

$$\frac{J}{i} = \frac{r_1^2}{2 r_1 h_1} \cdot \frac{\pi - \alpha + \frac{r_2^2}{r_1^2}(\pi - \beta) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{r_2^2}{2 r_1^2} \sin 2\beta}{\pi - \alpha + \frac{r_2 h_2}{r_1 h_1}(\pi - \beta) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{r_2 h_2}{2 r_1 h_1} \sin 2\beta}.$$

Der zweite Faktor ist aber gleich 1, da wegen Gl. (3) Zähler und Nenner in diesem Bruch einander gleich sind. Es bleibt demnach

$$\frac{J}{i} = \frac{r_1}{2 h_1} = \frac{r}{2 h}, \quad (13)$$

also ebenso groß wie beim Hohlzylinder von den Abmessungen r und h , mit dem wir die Zylinderschale vom Querschnitt nach Abb. 1 verglichen haben.

Demnach ist der Nachweis erbracht, daß die Zylinderschale mit dem Querschnitt von Abb. 1 für Innen- und Außendruck p hinsichtlich Rauminhalt, Werkstoffverbrauch und Festigkeit dem gewöhnlichen Hohlzylinder vollkommen gleichwertig ist. Es muß nur dafür gesorgt werden, daß die Stegdicke d nach Gl. (10) bzw. (10a) bestimmt wird.

Da bei dem Endergebnis die Winkel α und β herausgefallen sind, gibt es eine unendliche Schar von Hohlzylinderschalen nach Abb. 1, die alle einem gegebenen Hohlkreiszyylinder von den charakteristischen Abmessungen r und h vollkommen gleichwertig sind. Da dieses Ergebnis unabhängig von der Größe der Überschneidung der beiden Kreise von Abb. 1 gilt, so gilt es in gleicher Weise auch für zwei vollkommen getrennte Hohlkreiszyylinder von den Abmessungen $r_1 h_1$ bzw. $r_2 h_2$.

In der Tat gilt für die beiden Einzelkreise wegen Raungleichheit mit dem Vergleichskreis von den Abmessungen r , h die Beziehung

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2$$

80 Ludwig Föppl, Dünnwandige Hohlzylinder gegen Innen- und Außendruck
und daraus folgt wegen

$$i = 2 \pi (r_1 h_1 + r_2 h_2)$$

und unter Verwendung von Gl. (3)

$$\frac{J}{i} = \frac{\pi (r_1^2 + r_2^2)}{2 \pi (r_1 h_1 + r_2 h_2)} = \frac{r}{2 h} \cdot \frac{r}{\frac{r_1^2}{r} + \frac{r_2^2}{r}} = \frac{r}{2 h},$$

d. h. ebenso wie für den Vergleichshohlzylinder.

Schließlich soll auch noch die Knickgefahr der Zylinderschale nach Abb. 1 mit der des gewöhnlichen Hohlkreiszylinders bei Außendruck p verglichen werden. Da in der Formel für den kritischen Außendruck p die Abmessungen r und h des Hohlzylinders nur in der Verbindung $\frac{r}{h}$ vorkommen, so ist wegen Gl. (3) der

Knickdruck für die beiden Vergleichsschalen derselbe; d. h. beide Schalen sind auch hinsichtlich ihrer Knickfestigkeit gleichwertig. Daran kann sich auch nichts Wesentliches ändern, wenn man, wie bei U-Booten, in gewissen Abständen Versteifungsringe in die Zylinderschalen einbaut. Wie schon früher erwähnt, sollen die Verschlüsse an den Enden der beiden Hohlzylinder ungefähr gleichmäßig ausgebildet werden, so daß auch hier bei etwa gleichem Werkstoffaufwand gleiche Festigkeit, d. h. gleiche Sicherheit gegen Bruch oder Zerstörung besteht.

Wir können demnach als Ergebnis dieser Untersuchung feststellen, daß die Hohlzylinder nach Abb. 1 bei geeigneter Stärke d des Steges dem gewöhnlichen Hohlzylinder bei Beanspruchung durch gleichmäßigen Innen- oder Außendruck hinsichtlich Rauminhalt, Werkstoffverbrauch und damit Gewicht sowie Bruch-sicherheit vollkommen gleichwertig sind.