Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1942. Heft I/III

Sitzungen Januar – Dezember

München 1942
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen

Die Änderung des Maßstabs in einem Dreiecksnetz.

Von **Sebastian Finsterwalder** in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 14. Februar 1942.

Bei einem ebenen Dreiecksnetz ist diese Änderung eine sehr einfache Sache. Man ändert die Seitenlängen im gleichen Verhältnis und behält die Winkel bei. Die Koordinaten der Dreieckspunkte erfahren dieselbe Änderung, soweit sie Längen sind; Winkelkoordinaten behalten ihren Wert. Eine Neuausgleichung ist für das geänderte Netz nicht erforderlich. Ganz anders ist es bei der Änderung des Maßstabes in einem Dreiecksnetz, dessen Ecken nicht auf einer in die Ebene abwickelbaren Bezugsfläche etwa auf einer Kugel oder einem Ellipsoid gelegen sind. Ein solches Netz ist einer ähnlichen Umformung ohne gleichzeitige Änderung der Bezugsfläche überhaupt nicht fähig und, wenn man die Vergrößerung irgendeiner Seite aus der vergrößerten Basis unter Beibehaltung der Bezugsfläche streng berechnen will, bleibt nichts übrig, als eine Neuausgleichung vorzunehmen, bei der die Dreiecksschlußbedingungen den veränderten Dreiecksflächen und den damit zusammenhängenden Winkelsummenüberschüssen angepaßt werden. Obwohl eine solche Neuausgleichung bei vorausgegangener Ausgleichung nach dem Boltzschen Verfahren eine grundsätzlich einfache Sache ist, macht doch die Neuberechnung der Koordinaten aus den geänderten Seiten und Winkeln noch viel Umstände, und es bleibt das Bedürfnis bestehen, bequem und übersichtlich von den alten zu den neuen Koordinaten überzugehen, namentlich dann, wenn der Betrag der Maßstabänderung noch unbestimmt ist und erst, wie bei der Feldermethode, durch Anpassung an Nachbargebiete bestimmt werden soll. Es ist auch noch eine zweite Form der Aufgabe der Maßstabänderung ins Auge zu fassen, die dann eintritt, wenn die Abmessungen des Dreiecksnetzes zwar möglichst ungeändert bleiben sollen, dieses aber einer neuen Bezugsfläche anzupassen ist, wie das z. B. beim Übergang vom Besselschen oder Clarkeschen Ellipsoid auf das internationale Hayfordsche Ellipsoid vorkommt. Da es dabei auf die Änderung des Gaußschen Krümmungsradius in entsprechenden Gebieten beider Bezugsflächen oder, genauer gesagt, auf das geänderte Verhältnis der Dreieckseiten zu diesem Krümmungsradius ankommt, liegt im Grunde die gleiche Aufgabe vor wie bei der Maßstabsänderung des Dreiecksnetzes, und auch dabei wird man sich eine Neuausgleichung des Netzes und eine Neurechnung der Koordinaten gern ersparen.

Das ist dadurch möglich, daß man im Falle der Maßstabsänderung das Gebiet der Bezugsfläche, das vom Dreiecksnetz eingenommen wird, einer Abbildung unterzieht, die zwar nicht streng ähnlich ist, aber der Ähnlichkeit doch möglichst nahe kommt, oder im Falle der Änderung der Bezugsfläche unter Beibehaltung des Maßstabes die Deckungsgleichheit auf der neuen Bezugsfläche nach Möglichkeit erreicht. Eine solche Abbildung ist mit dieser Forderung noch nicht eindeutig bestimmt; man kann ihr noch Bedingungen auferlegen, die sie außer der Fastähnlichkeit streng zu erfüllen hat. Denkt man sich das Dreiecksnetz mit einem Koordinatennetz überzogen, so kann man verlangen, daß eine Schar Koordinatenlinien streng ähnlich verändert wird (längentreue Abbildung) oder daß bei der Abbildung alle Flächen im gleichen Verhältnis verändert werden (flächentreue Abbildung) oder daß die Winkel, unter denen sich irgendwelche Linien treffen, bei der Abbildung ungeändert bleiben (winkeltreue Abbildung) oder daß die geodätischen Linien des Dreiecksnetzes wieder in geodätische übergehen (geodätische Abbildung). Alle diese Abbildungen können als Ersatz für die grundsätzlich unmögliche ähnliche (oder kongruente) Abbildung gelten.

Fragen wir uns, mit welchen Maßstabsänderungen bei der Anwendung zu rechnen ist, so gibt die Erfahrung, daß solche, soweit sie von unsicherer Basismessung oder von der Anhäufung von Winkelmessungsfehlern herrühren, unter 1 : 20000 bleiben werden, während Krümmungsänderungen beim Übergang von einer Bezugsfläche zur andern wohl auf 1 : 5000 ansteigen können. Immerhin wird es fürs erste genügen, bei der Berechnung Glieder, die das Quadrat dieser Veränderungen enthalten, zu vernachlässigen. Alle Abbildungen, die im folgenden in Betracht gezogen werden, entspringen folgenden Grundgedanken. Man bildet das Gebiet des Dreiecksnetzes mit möglichst geringer Verzerrung auf einer Ebene ab, verändert diese Abbildung streng ähnlich, und zwar so, daß die ähnlich veränderte Abbildung mit der ursprünglichen möglichst zusammenfällt, worauf man diese ähnliche Abbildung nach dem gleichen Gesetz, nach dem die Abbildung in der Ebene erfolgte, auf die gekrümmte Bezugsfläche zurückbildet. Damit die ähnliche Abbildung der Verebnung des Netzes mit dieser selbst möglichst zusammenfällt, muß diese vom Schwerpunkt jener Verebnung aus ohne zusätzliche Verdrehung vorgenommen werden, da bei der Wahl eines anderen Ähnlichkeitspunktes oder bei einer Verdrehung die Summe der Quadrate entsprechender Punkte der beiden ähnlichen ebenen Figuren zunimmt, wie sich leicht erweisen läßt.

Wenn es sich nicht um eine Änderung des Maßstabes des Dreiecksnetzes handelt, sondern um eine möglichst kongruente Anpassung an eine neue Bezugsfläche, so führt folgender Gedankengang unter der Voraussetzung, daß es sich um ein Dreiecksnetz von mäßiger Ausdehnung handelt, zum Ziele. Man denkt sich das kleine Gebiet der Bezugsfläche, auf der das Dreiecksnetz ursprünglich enthalten war, sowie jenes der neuen Bezugsfläche, auf die es aufgepaßt werden soll, ohne Dehnung so verbogen, daß es kugelförmig wird, wobei die entstehende Kugel den Gaußschen Krümmungshalbmesser erhält und die geodätischen Linien des Gebietes in Großkreise dieser Kugel übergehen, die Längen und Winkel aber alle erhalten bleiben. Auf diesem Wege kann man dann (freilich nur genähert) eine die Neurechnung des Dreiecksnetzes ersetzende Abbildung auf eine solche zweier Kugeln von wenig verschiedenem Halbmesser zurückführen. Es kann von vornherein als feststehend gelten, daß es sich bei der Maßstabsänderung eines Dreiecksnetzes auf der gleichen kugelförmigen Bezugsfläche einerseits und bei der Überführung eines Dreiecksnetzes ohne Maßstabsänderung auf eine kugelförmige Bezugsfläche von geändertem Halbmesser andrerseits um dieselbe geometrische Aufgabe handelt und aus der Lösung der einen die der andern herleitbar ist, wobei das Maßstabsverhältnis bei der einen durch den Kehrwert des Verhältnisses der beiden Kugelradien bei der andern zu ersetzen ist.

Abbildungen in Polarkoordinaten.

Das Dreiecksnetz sei auf der kugelförmig verbogenen Bezugsfläche durch Polarkoordinaten mit dem Schwerpunkt als Anfangspunkt gegeben. Die Polarradien ρ seien nicht größer als 300 km, so daß das Verhältnis $\rho : r$ den Betrag von $1 : 20$ nicht übersteigt. Dabei ist r der Gaußsche Krümmungshalbmesser im Ursprung der Polarkoordinaten. Das Netz wird nun auf verschiedene Art auf die Berührebene im Ursprung abgebildet, diese Abbildung im Verhältnis $1+k$, wobei $k < 0{,}0002$ bleiben soll, vergrößert (für negative k verkleinert) und dann auf die gleiche Art auf die Bezugskugel zurückgebildet. Der Polarradius der ebenen Abbildung sei ρ', jener der Rückabbildung auf die Kugel P. Die Polarwinkel bleiben ungeändert.

1) Wir beginnen mit einer längentreuen Abbildung der Polarradien Es ist dann $\rho' = \rho$ und $\mathrm{P} = \rho'(1+k) = \rho(1+k)$. Das Abbildungsverhältnis im Kleinen längs des Polarradius ist dabei $\frac{d\mathrm{P}}{d\rho} = 1 + \mathrm{k}$ also konstant. Dagegen ist das Abbildungsverhältnis in der Querrichtung: $\frac{dS}{ds} = \frac{\sin\frac{\mathrm{P}}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}$ veränderlich mit ρ. Wegen der Kleinheit von $\frac{\rho}{r}$ kann man die Sinus durch die beiden ersten Glieder der Reihe ersetzen. Demnach wird: $\frac{dS}{ds} = \frac{\mathrm{P}}{\rho}\,\frac{1-\frac{\mathrm{P}^2}{6r^2}}{1-\frac{\rho^2}{6r^2}} =$

$$= (1+k)\,\frac{1-\frac{\rho^2(1+2k)}{6r^2}}{1-\frac{\rho^2}{6r^2}} = (1+k)\left(1-\frac{\rho^2}{6r^2}(1+2k)\right)\left(1+\frac{\rho^2}{6r^2}\right),$$

wobei k^2 vernachlässigt und $\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{6r^2}}$ durch $1+\frac{\rho^2}{6r^2}$ ersetzt wird.

Nach Ausmultiplikation und Vernachlässigung des vierten Potenzen von $\frac{\rho}{r}$ erhält man: $\frac{dS}{ds} = 1 + k\left(1 - \frac{\rho^2}{3r^2}\right)$. Zwischen $\frac{dP}{d\rho} = 1 + k$ und $\frac{dS}{ds} = 1 + k\left(1 - \frac{\rho^2}{3r^2}\right)$ ändert sich demnach das Abbildungsverhältnis eines Linienelementes mit der Richtung, da aus Symmetriegründen die äußersten Werte dieses Verhältnisses in die Richtung längs des Polarradius und quer dazu fallen müssen. Die größte Winkeländerung erfährt der rechte Winkel, dessen Schenkel die Hauptrichtungen halbieren. Diese ist der Spanne zwischen den äussersten Abbildungsverhältnissen, in unserem Fall also $k\frac{\rho^2}{3r^2}$ gleich.

2) Eine zweite längentreue Abbildung der kugelförmig verbogenen Bezugsfläche erhalten wir im Lotriß des Netzgebietes auf die Berührebene im Schwerpunkt. Bei dieser Abbildung bleiben die konzentrischen Kreise um den Schwerpunkt erhalten, nicht aber die Radien. Es besteht die Beziehung $\rho' = r \sin \frac{\rho}{r}$ und nach Vergrößerung der Abbildung mit $1 + k$ $\rho'(1 + k) = r \sin \frac{P}{\rho}$ Hieraus folgt: $(1 + k) \sin \frac{\rho}{r} = \sin \frac{P}{r}$. Durch Reihenentwickelung erhält man:

$$(1 + k)\, \rho \left(1 - \frac{\rho^2}{6r^2}\right) = P \left(1 - \frac{P^2}{6r^2}\right).$$

Im Korrektionsglied $\frac{P^2}{6r^2}$ kann man ohne Schaden P durch den Näherungswert $\rho(1 + k)$ und P^2 durch $\rho^2(1 + 2k)$ ersetzen, woraus die Abbildungsbeziehung mit ähnlichen Vernachlässigungen wie vorhin folgt: $P = \rho(1 + k)\left(1 + \frac{\rho^2}{3r^2}\right)$. Das Abbildungsverhältnis längs der Radius wird hier $\frac{dP}{d\rho} = 1 + k\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)$. In der Querrichtung wird das Abbildungsverhältnis

$$\frac{dS}{ds} = \frac{r \sin \frac{P}{r}}{r \sin \frac{\rho}{r}} = \frac{P}{\rho} \frac{1 - \frac{P^2}{6r^2}}{1 - \frac{\rho^2}{6r^2}}.$$

Im Nebenglied $1 - \frac{P^2}{6r^2}$ kann man P durch den Näherungswert $\rho\,(1+k)$ ersetzen und erhält schließlich nach den gleichen Umformungen wie vorhin $\frac{dS}{ds} = 1 + k$ wie es den Voraussetzungen der Ableitung entspricht. Die Spanne zwischen den äußersten Abbildungsverhältnissen und damit die größte Winkeländerung wird hier $k\frac{\rho^2}{r^2}$ und ist dreimal so groß wie bei der vorigen Abbildung.

3) Wir wenden uns jetzt der flächentreuen Abbildung zu und leiten die Beziehung zwischen ρ und ρ' aus der Tatsache her, daß die Oberfläche einer Kugelhaube gleich dem Inhalt eines Kreises ist, dessen Halbmesser der Sehne des kreisförmigen Halbmessers der Kugelhaube gleich ist. Die zum Halbmesser ρ gehörige Sehne ist aber $2r \sin \frac{\rho}{2r}$, woraus $\rho' = 2r \sin \frac{\rho}{2r}$ folgt. Dem mit $1+k$ vergrößerten Halbmesser des ebenen Kreises entspricht dann bei der Rückabbildung auf die Kugel ein sphärischer Halbmesser P, der folgender Gleichung genügt:

$$(1+k)\, 2r \sin \frac{\rho}{2r} = 2r \sin \frac{P}{2r}.$$

Durch Reihenentwickelung ergibt sich zunächst wieder: $(1+k)\,\rho\left(1 - \frac{\rho^2}{24r^2}\right) = P\left(1 - \frac{P^2}{24r^2}\right)$ und nach Ersatz von P im Klammerausdruck auf der rechten Seite durch den Näherungswert $\rho(1+k)$ mit den üblichen Vernachlässigungen: $P = \rho(1+k)\left(1 + \frac{\rho^2}{12r^2}\right)$, woraus das Abbildungsverhältnis längs des Polarradius zu $\frac{dP}{d\rho} = 1 + k\left(1 + \frac{\rho^2}{4r^2}\right)$ hervorgeht. Das Abbildungsverhältnis in der darauf senkrechten Richtung wird wieder: $\frac{dS}{ds} = \frac{\mathrm{P}}{\rho} \frac{\sin \frac{\mathrm{P}}{r}}{\sin \frac{\rho}{r}}$, woraus durch Entwickelung $\frac{dS}{ds} = 1 + k \left(1 - \frac{\rho^2}{4r^2}\right)$ folgt. Die Spanne zwischen beiden Abbildungsverhältnissen und damit die größte Winkelverzerrung wird: $k \frac{\rho^2}{2r^2}$. Bemerkenswert ist noch, daß das Mittel der äußersten Abbildungsverhältnisse genau $1 + k$ wird, während es in den vorangegangenen Fällen teils größer, teils kleiner als dieser Wert ist.

4) Für die winkeltreue Abbildung wird zunächst die Kugelhaube vom sphärischen Halbmesser ρ durch Inversion in die Berührebene im Mittelpunkt der Haube abgebildet, woraus die Beziehung $\rho' = 2r \operatorname{tg} \frac{\rho}{2r}$ hervorgeht. Durch Vergrößerung von ρ' mit $1 + k$ und Rückinversion folgt für P die Gleichung: $(1 + k) \operatorname{tg} \frac{\rho}{2r} = \operatorname{tg} \frac{\mathrm{P}}{2r}$, aus der nach ähnlichen Reihenentwickelungen und Vereinfachungen wie früher $\mathrm{P} = \rho\left(1 + k\left(1 - \frac{\rho^2}{6r^2}\right)\right)$ folgt. Das Abbildungsverhältnis ist hier in beiden Richtungen das gleiche, nämlich $\frac{d\mathrm{P}}{d\rho} = 1 + k\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right)$. Eine Winkelverzerrung im kleinen Bereich findet nicht statt, aber das Vergrößerungsverhältnis nimmt nach außen ab.

5) Bei der nun zu betrachtenden geodätischen Abbildung wird die Kugelhaube vom Kugelmittelpunkt aus auf die Berührebene im Scheitel projiziert, wobei alle Großkreise in gerade Linien übergehen. Dabei besteht folgender Zusammenhang zwischen dem sphärischen Polarradius ρ auf der Kugel und dem Polarradius ρ' in der Berührebene $\rho' = r \operatorname{tg} \rho$. Nun wird ρ' im Verhältnis $1 + k$ vergrößert und dann auf die Kugel zurückprojiziert.

Daraus folgt:

$$(1+k)\,\mathrm{tg}\,\frac{\rho}{r} = \mathrm{tg}\,\frac{P}{r}.$$

Die nun anschließende Reihenentwicklung ergibt als Zusammenhang zwischen P und ρ

$$P = \rho\left(1 + k\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\rho^2}{r^2}\right)\right).$$

Das Abbildungsverhältnis längs des Polarradius wird $\frac{dP}{d\rho} = 1 + k\left(1 - 2\frac{\rho^2}{r^2}\right)$, während es quer dazu durch

$$\frac{dS}{ds} = \frac{P}{\rho}\left(1 - k\frac{\rho^2}{3r^2}\right) = 1 + k\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)$$

ausgedrückt wird. Die Spanne zwischen beiden und damit die größte Winkelverzerrung wird $\frac{3}{2}k\frac{\rho^2}{r^2}$ und ist damit erheblich größer als bei den vorausgegangenen Abbildungen. Dabei nimmt das mittlere Abbildungsverhältnis nach außen noch erheblich stärker ab als bei der winkeltreuen Abbildung.

Abbildungen in rechtwinkligen Koordinaten.

Bisher waren die Punkte des Dreiecksnetzes auf Polarkoordinaten mit dem Schwerpunkt als Anfangspunkt bezogen und die Hilfsabbildung in die Ebene, die dann einer Vergrößerung unterzogen wird, geschah auf die Berührebene im Anfangspunkt. Nun soll ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt werden, dessen Achsen wieder durch den Schwerpunkt gehen, aber die Hilfsabbildung soll nun auf den Berührzylinder an die Bezugskugel längs der Abszissenachse erfolgen. Dieser Zylinder wird dann in die Ebene abgewickelt und das damit verebnete Netzbild ähnlich vergrößert. Das vergrößerte Netzbild wird hierauf wieder zylindrisch verbogen und längs der Abszissenachse mit der Bezugsfläche in Berührung gebracht. Hierauf erfolgt die Rückabbildung auf die Bezugsfläche, und diese soll als Ersatz für das zu vergrößernde Dreiecksnetz dienen. Dabei können die

Hilfsabbildungen der Bezugskugel auf den Berührzylinder nach verschiedenen Gesetzen erfolgen. In nachstehenden Ableitungen sollen die Soldnerschen Koordinaten des ursprünglichen Netzes mit x (Abszisse) und y (Ordinate) bezeichnet werden, jene der zylindrischen Abbildung mit x' y' und die Soldnerschen Koordinaten des durch Rückabbildung vergrößerten Netzes mit X und Y.

6) Wir beginnen mit der längentreuen Hilfsabbildung, die durch $x' = x$ und $y' = y$ gekennzeichnet ist. Nach Vergrößerung mit $1 + k$ und Rückabbildung auf die Bezugskugel erhält man $X = x(1 + k)$ $Y = y(1 + k)$. Die Umformung des Dreiecksnetzes besteht also darin, daß die Soldnerschen Koordinaten der Eckpunkte in vergrößertem Maßstab auf der gleichen Bezugskugel aufgetragen werden. Das größte und kleinste Abbildungsverhältnis liegt jetzt in der Ordinatenrichtung und quer dazu. In der Ordinatenrichtung ist es $1 + k$ und quer dazu $\frac{dS}{ds} = \frac{dX}{dx} \frac{\cos\frac{Y}{r}}{\cos\frac{x}{r}}$.

Durch Reihenentwickelung gelangt man zu $\frac{dS}{ds} = 1 + k\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)$. Die Spanne im Abbildungsverhältnis und damit die größte Winkelverzerrung ist $k\frac{y^2}{r^2}$. Das Abbildungsverhältnis nimmt im Mittel mit wachsender Ordinate ab.

7) Es folgt nun die flächentreue Hilfsabbildung der Bezugskugel auf den Berührzylinder, bei der die senkrechten Abstände der Dreieckspunkte von der Ebene des Abszissenkreises als Ordinaten in die Zylinderabbildung übernommen, die dann durch die Gleichungen $x' = x'$ $y' = r \sin\frac{y}{r}$ ausgedrückt werden. Aus der im Verhältnis $1 + k$ vergrößerten Hilfsabbildung gehen dann durch Rückabbildung die folgenden Koordinatenbeziehungen für das veränderte Dreiecksnetz hervor: $X = x(1 + k)$, $\sin\frac{Y}{r} = (1 + k)\sin\frac{y}{r}$, welch letztere durch Reihenentwicklung auf

$Y = y(1+k)\left(1+\frac{y^2}{3r^2}\right)$ führt. Das Abbildungsverhältnis längs der Ordinate wird $\frac{dY}{dy} = 1 + k\left(1+\frac{y^2}{r^2}\right)$. Quer dazu errechnet sich das Abbildungsverhältnis zu:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\cos\frac{Y}{r}}{\cos\frac{y}{r}} \frac{dX}{dx} = (1+k)\frac{1-\frac{Y^2}{2r^2}}{1-\frac{y^2}{2r^2}} = 1 + k\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right).$$

Die Spanne zwischen beiden und damit die größte Winkelverzerrung wird $2k\frac{y^2}{r^2}$, also doppelt so groß wie im Falle 6, aber das mittlere Abbildungsverhältnis bleibt $1+k$ und ist längs der Ordinate fest.

8) Bei der winkeltreuen Hilfsabbildung der Bezugskugel auf den Zylinder gelten die aus der Merkatorprojektion abgeleiteten Formeln $x' = x \quad y' = y\left(1+\frac{y^2}{6r^2}\right)$ und für die Rückabbildung der mit $1+k$ vergrößerten Hilfsabbildung folgende: $X = x\,(1+k)$, $Y\left(1+\frac{Y^2}{6r^2}\right) = (1+k)\,y\left(1+\frac{y^2}{6r^2}\right)$, wobei letztere durch Einführung des Näherungswertes $1+\frac{y^2(1+2k)}{6r^2}$ für $1+\frac{Y^2}{6r^2}$ schließlich $Y = y\left(1+k\left(1-\frac{y^2}{3r^2}\right)\right)$ ergibt. Das Abbildungsverhältnis längs der Ordinate wird $\frac{dY}{dy} = (1+k)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)$. Auf den gleichen Wert führt wie zu erwarten das Querabbildungsverhältnis:

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dX}{dx}\frac{\cos\frac{Y}{r}}{\cos\frac{y}{r}} = (1+k)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right).$$

Das Abbildungsverhältnis ist hier unabhängig von der Richtung, eine Winkelverzerrung findet nicht statt, es nimmt das Abbildungsverhältnis mit der Länge der Ordinate ab. Eine geodätische Abbildung der Kugel auf den Hilfszylinder kommt nicht in Frage, wohl aber kann man die durch Vermittelung der Hilfsebene gefundene, durch Polarkoordinaten dargestellte geodätische Abbildung auf Soldnersche Koordinaten umrechnen und erhält dann die Formel

$$X = x\left(1 + k\left(1 - \frac{2}{3}\frac{x^2}{r^2}\right)\right), \quad Y = y\left(1 + k\left(1 - \frac{3x^2 + 2y^2}{3r^2}\right)\right).$$

Da aber die Koordinatenrichtungen hier nicht mit den Richtungen größter und kleinster Längenverzerrung zusammenfallen, hält man sich bei der Erörterung der Verzerrungsverhältnisse besser an das früher Gesagte.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf die Aufgabe, ein Dreiecksnetz auf der gleichen Bezugsfläche möglichst genau ähnlich zu verändern. Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, ein Dreiecksnetz möglichst kongruent auf eine neue Bezugsfläche zu übertragen, deren Gaußscher Krümmungsradius aus dem früheren durch Vergrößerung mit $1 + k'$ hervorgeht. Die Ableitung der Formeln zur Berechnung der neuen Koordinaten aus den alten beruht auf folgendem Gedankengang. Man bildet die Kugelhaube, auf die das Dreiecksnetz bezogen war, auf eine Hilfsebene oder einen Hilfszylinder möglichst verzerrungsfrei ab und legt diese Abbildung an die vergrößerte Kugelhaube, worauf die Rückabbildung auf diese erfolgt. Die Formeln der Rückabbildung gehen aus jenen der direkten Abbildung durch Ersatz von r durch $r(1 + k')$ hervor. Es genügt, das Ergebnis dieses Gedankenganges in einer Formeltafel unter Verzicht auf die Wiedergabe der Einzelrechnungen niederzulegen. In dieser Tafel sollen die Formeln zusammengestellt werden, die für eine Verbindung beider Aufgaben gelten, wobei sowohl eine Veränderung des Maßstabes eines Dreiecksnetzes wie eine solche des Krümmungsradius der Gaußschen Kugel erfolgt. Wird in diesen Formeln $k' = 0$ gesetzt, so gehen sie in die abgeleiteten Formeln für die Netzveränderung über, setzt man $k = 0$, so hat man die Formeln für eine neue Bezugsfläche.

Formeltafel für die Umrechnung eines Dreiecksnetzes auf den Maßstab $1+k$ und den Krümmungsradius $r\,(1+k')$

	Art der Abbildung	Koordinatenneuformung	Abbildungsverhältnis im Radius	Abbildungsverhältnis quer dazu	Abbildungsverhältnis Mittel	Winkelverzerrung
Polarkoordinaten (Polarwinkel ungeändert)	1) längentreu längs des Radius	$P=\rho\,(1+k)$	$1+k$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{3r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{6r^2}$	$-(k-k')\frac{\rho^2}{3r^2}$
	2) längentreu quer zum Radius	$P=\rho\left(1+k+(k-k')\frac{\rho^2}{3r^2}\right)$	$1+k+(k-k')\frac{\rho^2}{r^2}$	$1+k$	$1+k+(k-k')\frac{\rho^2}{2r^2}$	$(k-k')\frac{\rho^2}{r^2}$
	3) flächentreu	$P=\rho\left(1+k+(k-k')\frac{\rho^2}{12r^2}\right)$	$1+k+(k-k')\frac{\rho^2}{4r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{4r^2}$	$1+k$	$(k-k')\frac{\rho^2}{2r^2}$
	4) winkeltreu	$P=\rho\left(1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{6r^2}\right)$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{2r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{2r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{2r^2}$	0
	5) geodätisch	$P=\rho\left(1+k-(k-k')\frac{2\rho^2}{3r^2}\right)$	$1+k-(k-k')\frac{2\rho^2}{r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{\rho^2}{2r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{3\rho^2}{4r^2}$	$-(k-k')\frac{3\rho^2}{2r^2}$
Rechtw. Koordinaten ($X=x\,(1+k)$)	6) längentreu längs der Ordinate	$Y=y\,(1+k)$	$1+k$	$1+k-(k-k')\frac{y^2}{r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{y^2}{2r^2}$	$(k-k')\frac{y^2}{r^2}$
	7) flächentreu	$Y=y\left(1+k+(k-k')\frac{y^2}{3r^2}\right)$	$1+k+(k-k')\frac{y^2}{r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{y^2}{r^2}$	$1+k$	$(k-k')\frac{2y^2}{r^2}$
	8) winkeltreu	$Y=y\left(1+k-(k-k')\frac{y^2}{3r^2}\right)$	$1+k-(k-k')\frac{y^2}{r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{y^2}{r^2}$	$1+k-(k-k')\frac{y^2}{r^2}$	0

Bei der Auswahl der anzuwendenden Formeln ist zunächst die allgemeine Gestalt des Dreiecksnetzes zu berücksichtigen. Ist es nach allen Richtungen ungefähr gleich ausgedehnt, so kommen die Formeln für Polarkoordinaten in Betracht; überwiegt die Ausdehnung in einer Richtung, so sind jene für rechtwinklige Koordinaten mit der Abszissenachse in dieser Richtung angezeigt. Sodann ist es das mittlere Abbildungsverhältnis, das möglichst geschont werden soll, was durch Bevorzugung der flächentreuen Abbildungen geschieht, bei denen es dem angestrebten Vergrößerungswert $1 + k$ gleichkommt. Der Gesichtspunkt mangelnder Verzerrung im Kleinen wird dabei meist zurücktreten müssen, weil diese mit durchschnittlicher Verzerrung im Großen verknüpft ist. Die längentreuen Abbildungen kommen dem Bedürfnis nach Erhaltung der ursprünglichen Koordinatenwerte entgegen und können gewählt werden, wenn die eintretenden Winkelverzerrungen zu vernachlässigen sind. Um eine Vorstellung von den zu erwartenden Zahlengrößen zu geben, sei ein Beispiel gerechnet, das an der Grenze der zulässigen Anwendung steht.

Zahlenbeispiel

Ein abgerundetes Dreiecksnetz von 600 km Durchmesser, das auf dem Besselschen Erdellipsoid mit 45^0 mittlerer Breite gerechnet war, soll um $^1/_{25\,000}$ verkleinert auf das internationale Ellipsoid übertragen werden. Das Verhältnis der Gaußschen Krümmungsradien beider Bezugsflächen ist bei der Breite von 45^0 1,0001553. Hiernach ist $k = -0{,}000040$ und $k' = 0{,}0001553$ anzusetzen. Es wird $k - k' = -0{,}0001953$. Das Verhältnis $\rho : r$ ergibt am Rande des Dreiecksnetzes $300 : 6377{,}36 = 0{,}0470414$. Wählen wir die flächentreue Abbildung in Polarkoordinaten, so gelten folgende Formeln: $P - r = k\rho + (k - k')\,\frac{\rho^3}{12\,r^2} =$

$$= \left(k + \frac{k-k'}{12}\,\frac{\rho^2}{r^2}\right),\quad P - \rho = \rho\left(-0{,}0000400 - 0{,}0000163\,\frac{\rho^2}{r}\right) =$$

$$= -12{,}000 - 0{,}011 = -12{,}011 \text{ m}.$$

Das Abbildungsverhältnis schwankt zwischen $1 - 0{,}00004013$ und $1 - 0{,}00003987$ und ist im Mittel $1 - 0{,}0000400$. Die größte

Verzerrung eines Winkels zwischen zwei Kurven am Rande des Triangulationsgebietes ist 0,0223 Bogensekunden.

Bei Wahl der geodätischen Abbildung wäre die Formel $P - \rho = \rho\left(-0{,}0000400 - 0{,}0001302\,\frac{\rho^2}{r^2}\right)$ anzuwenden gewesen, die am Rande des Gebiets $P - \rho = -12{,}000 - 0{,}086 = -12{,}086$ m als Radiusveränderung ergibt. Das Abbildungsverhältnis schwankt zwischen 1 — 0,00003957 und 1 — 0,00003978 und beträgt im Mittel 1 — 0,00003968. Die größte Winkelverzerrung am Rande beläuft sich bei der geodätischen Abbildung auf 0,067 Bogensekunden.

Angesichts der Zahlen dieses Beispiels liegt der Gedanke nahe, daß es überhaupt gleichgültig sei, auf welche Art man den winzigen Verzerrungen, die bei Änderung des Maßstabes oder der Bezugsfläche eintreten, Rechnung trage und somit dieser Arbeit der Boden entzogen sei. Das ist aber durchaus nicht der Fall. Die hier vorgetragenen Abbildungen haben das gemeinsame Kennzeichen, daß in den Reihenentwickelungen für $(P - \rho) : \rho$ das Glied erster Ordnung in $\frac{\rho}{r}$ fehlt. Daß das nicht bei jeder geometrisch einfach ableitbaren Abbildung der Fall ist, möge folgendes Beispiel zeigen. Ein zu vergrößerndes Dreiecksnetz sei durch die geographischen Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben. Was liegt da näher, als daß man bei der Vergrößerung die Koordinaten des Mittelpunktes festhält und die Koordinatenunterschiede der Eckpunkte gegenüber denen des Mittelpunktes im gewünschten Verhältnis vergrößert, um zu den Koordinaten des vergrößerten Netzes zu gelangen? Die rechnerische Verfolgung dieses Gedankens zeigt aber alsbald, daß dann Abweichungen vom gewünschten Ähnlichkeitsverhältnis auftreten, die Lagenänderungen von mehreren Dezimetern bewirken bei Verhältnissen, die mit den vorstehend entwickelten Formeln einige Zentimeter betragen. Es liegt daran, daß in den Reihenentwickelungen Glieder erster Ordnung auftreten, die die Ähnlichkeit stören.

Es liegt im Zuge der Zeit, Dreiecksmessungen über möglichst weite Räume auszudehnen und einheitlich auszugleichen. Hier-durch werden sie ein für allemal auf einer bestimmten Bezugsfläche festgelegt, deren Abänderung aufs äußerste erschwert wird. So würden die vorhin entwickelten Formeln für eine einheitliche Übertragung des deutschen Netzes auf das internationale Ellipsoid nicht ausreichen. Es bliebe da kaum etwas anderes übrig, als das große Netz in mindestens 4 Stücke zu zerlegen und jedes Stück von seinem Schwerpunkt aus auf den neuen Gaußschen Krümmungsradius umzurechnen und die umgerechneten Stücke auf der neuen Bezugsfläche nach dem Felderverfahren wieder zusammenzusetzen. Von diesem Gesichtspunkt aus wäre es vernünftiger, den einheitlich auszugleichenden Dreiecksnetzen von vornherein keine größere Ausdehnung zu geben, als es ein einheitlicher Gaußscher Krümmungsradius noch zuläßt. Die Umformung solcher kleinerer Dreiecksnetze nicht nur auf einen neuen Maßstab und eine neue Bezugfläche, sondern auch auf ein neues Azimut und eine Verschiebung des Ausgangspunktes längs des Meridians unterliegt dann keinen Schwierigkeiten. Die Zusammenfügung der umgeformten Dreiecksnetze zu einem einheitlichen Ganzen ist nach dem Felderverfahren immer noch möglich. Auf diesem Wege kann auch den Schwierigkeiten, die der Einbeziehung zahlreicher astronomischer Ortsbestimmungen im Wege stehen, am leichtesten begegnet werden. Man darf nicht aus dem Auge lassen, daß z. B. im deutschen Netz infolge der Mängel des alten Besselschen Basisapparates der Maßstab um 1 : 100000 schwankt, daß der Krümmungsradius der Bezugsfläche infolge der unsicheren Kenntnis der Erdabmessungen und der örtlichen Geoidabweichungen um etwa 1 : 10000 unsicher ist und Meridianverschiebungen des Ausgangspunktes um 50 m sowie Drehungen des Ausgangsazimuts um 1–2″ durchaus möglich sind. Daher ist eine allzu starre Bindung der Messungen an eine bestimmte Bezugsfläche nicht ratsam, vielmehr ist eine gelenkige Aneinanderreihung von gut ausgeglichenen Dreiecksnetzen mäßigen Umfangs vorzuziehen. Die Einzelglieder solcher Reihen können dann nach Bedarf neuen Erkenntnissen entsprechend einfach abgeändert und neu zu einem Ganzen verbunden werden.