Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft II

Mai- bis Dezembersitzung

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt.[1])

Von Georg Faber.

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1923.

G sei ein einfach zusammenhängender abgeschlossener Bereich mit der Randkurve C und dem Flächenelement dw. U sei unter den in G stetig differenzierbaren und den zwei Nebenbedingungen:

1) $$U = 0 \text{ auf } C,$$

2) $$\iint_G U^2\, dw = 1$$

genügenden Funktionen diejenige, für die der Integralwert

3) $$\iint_G (\operatorname{grad} U)^2\, dw \text{ möglichst klein wird.}$$

Der Maximalwert von U in G sei $c\ (> 0)$. Ferner sei, falls $0 < \gamma \leq c$, G_γ sei das Teilgebiet von G, für das $U \leq \gamma$ gilt; G ist also mit G_c identisch. F_γ sei der Flächeninhalt von G_γ, C_γ bilde zusammen mit C den Rand von G_γ, C_0 und G_0 bedeuten das nämliche wie C, s_γ sei (im Falle $\gamma < c$) die Bogenlänge von C_γ.

---

[1]) Es ist das meines Wissens der erste Beweis für diesen vermutungsweise häufig ausgesprochenen Satz (vgl. Lord Rayleigh, The Theory of Sound, London 1894, Bd. I, S. 339—340). Ein ähnlich lautender, von Herrn Courant (Math. Zeitschrift, Bd. I (1918), S. 321) bewiesener Satz, bei dem die Membrane vom nämlichen Umfang statt, wie oben, die vom nämlichen Flächeninhalt in Vergleich gezogen werden, folgt leicht aus dem obigen, während das Umgekehrte nicht gilt.

Endlich sei

4) $$J_\gamma = \iint\limits_{G_\gamma} (\mathrm{grad}\; U)^2\, dw,$$

sodaß also das Integral (3) soviel ist wie J_c.

Ich betrachte weiter für $0 < \gamma < c$ ein System konzentrischer Kreisringflächen K_γ mit den inneren Radien r_γ und dem gemeinsamen äußeren Radius r_0. Diese Radien werden bestimmt durch die Bedingung:

5) Flächeninhalt $(r_0^2 - r_\gamma^2)\,\pi$ von K_γ = Flächeninhalt F_γ von G_γ,

6) Flächeninhalt $r_0^2\,\pi$ des äußeren Kreises K_c (vom Radius r_0) = Flächeninhalt F_c von G.

Die Kreislinie vom Radius r_γ heiße k_γ; K_0 ist soviel wie k_0. k_c ist der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise. In K_c werde eine Funktion V definiert durch die Gleichung:

7) $$V = \gamma \text{ auf } k_\gamma \quad (0 \leqq \gamma \leqq c).$$

Dann wird

8) $$\iint\limits_{K_c} V^2\, dw = \iint\limits_{G_c} U^2\, dw = 1.$$

Ich setze noch

9) $$i_\gamma = \iint\limits_{K_\gamma} (\mathrm{grad}\; V)^2\, dw \qquad (0 < \gamma \leqq c;\; i_0 = 0).$$

Der mathematische Nachweis des in der Überschrift behaupteten Satzes besteht nun darin, daß gezeigt wird: es ist

10) $$J_c \geqq i_c,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn G mit K_c kongruent ist. Den Beitrag ΔJ_γ des zwischen C_γ und $C_{\gamma+\Delta\gamma}$ gelegenen Gebietes $G_{\gamma+\Delta\gamma} - G_\gamma$ zu dem Integrale J_c vergleiche ich mit dem Beitrage Δi_γ des zwischen k_γ und $k_{\gamma+\Delta\gamma}$ gelegenen gleich großen Kreisringgebiets $K_{\gamma+\Delta\gamma} - K_\gamma$ zu dem Integrale i_c $(0 \leqq \gamma < \gamma + \Delta\gamma < c)$.

Zu diesem Zweck teile ich den Umfang s_γ von C_γ durch n Punkte: $P_1, P_2, \ldots P_n$ in n Teile, die entweder alle einander gleich sind oder doch wenigstens die Bedingung erfüllen, daß der Quotient irgend zweier Teilbögen für $n \to \infty$ gegen 1 strebt.

In den Teilpunkten errichte ich die Normalen auf C_γ und nenne deren zwischen C_γ und $C_{\gamma+\Delta\gamma}$ gelegenen Stücke: $\Delta\nu_1, \Delta\nu_2, \ldots \Delta\nu_n$. $\Delta\gamma$ sei gleich $s_\gamma : n$ (was zur Voraussetzung hat, daß n auf Werte $> s_\gamma : (c - \gamma)$ beschränkt wird), ε_n sei eine Zahl, die für $n \longrightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, nicht jedesmal die nämliche, und Δr werde zur Abkürzung für $r_\gamma - r_{\gamma+\Delta\gamma}$ geschrieben.

Dann ist

$$11) \qquad \Delta J_\gamma = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta\nu_i}\right)^2 \frac{s_\gamma}{n} \Delta\nu_i (1+\varepsilon_n),$$

$$12) \qquad \Delta i_\gamma = \left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta r}\right)^2 2\pi r_\gamma \Delta r (1+\varepsilon_n),$$

$$13) \qquad \frac{\Delta J_\gamma}{\Delta i_\gamma} = \frac{s_\gamma \Delta r (1+\varepsilon_n)}{n\, 2\pi r_\gamma} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\Delta\nu_i}.$$

Nun gilt bekanntlich folgender Satz (den man noch einfacher als mittels Differentialrechnung durch den Schluß von n auf $n+1$ beweist): Falls die Summe s der positiven Veränderlichen x_1, x_2, ... x_n gegeben ist, nimmt für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = s : n$ die Summe

$$14) \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \text{ ihren Minimalwert } \frac{n^2}{s} \text{ an.}$$

Da aber nach Voraussetzung

$$15) \qquad \frac{s_\gamma}{n} \sum_1^n{}_i \Delta\nu_i = 2\pi r_\gamma \Delta r (1+\varepsilon_n)$$

ist, folgt aus (14):

$$16) \qquad \sum_1^n{}_i \frac{1}{\Delta\nu_i} > \frac{n s_\gamma}{2\pi r_\gamma \Delta r}(1+\varepsilon_n).$$

Setzt man diesen Wert in (13) ein, so findet man:

$$17) \qquad \frac{\Delta J_\gamma}{\Delta i_\gamma} > \left(\frac{s_\gamma}{2\pi r_\gamma}\right)^2 (1+\varepsilon_n).$$

Nun umschließt aber die Kurve C_γ ein ebenso großes Gebiet wie die Kreislinie k_γ; es ist daher $s_\gamma \geqq 2\pi r_\gamma$, also nach (17), wenn man n über alle Grenzen wachsen läßt:

18) $$\frac{d J_\gamma}{d\gamma} \geqq \frac{d i_\gamma}{d\gamma},$$

und daher, weil ja

19) $$J_c = \int_0^c \frac{d J_\gamma}{d\gamma}\, d\gamma \quad \text{und} \quad i_c = \int_0^c \frac{d i_\gamma}{d\gamma}\, d\gamma \text{ ist,}$$

20) $$J_c \geqq i_c;$$

hier aber kann das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn stets $s_\gamma = 2\pi r_\gamma$ ist, d. h. wenn alle Kurven C_γ Kreise sind.

Zusatz bei der Korrektur: Das im Vorstehenden benutzte Verfahren läßt sich auch bei anderen Aufgaben verwerten, z. B. beim Beweise des Satzes, daß von allen Körpern gleichen Volumens die Kugel die kleinste elektrostatische Kapazität besitzt. Auch hier handelt es sich mathematisch darum, eine Funktion U so zu bestimmen, daß ein Integral wie (3) möglichst klein ausfällt. Doch ist es jetzt ein dreifaches Integral, das über den Raum außerhalb des Körpers zu erstrecken ist; statt (1) und (2) hat man folgende Nebenbedingungen zu beachten: Auf der Oberfläche des Körpers soll U überall den nämlichen Wert annehmen, und es soll

$$\lim_{r \to \infty} r\, U(x, y, z) = 1$$

sein, wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$