

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft I

Januar- bis März-sitzung

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Leitung des Schalles im Ohr.

Von **Otto Frank.**

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1923.¹⁾

Vor einigen Jahren habe ich in den Berichten der Akademie²⁾ den Inhalt einer Untersuchung veröffentlicht, nach der eine Reihe von physiologischen Problemen mit dem Prinzip der gekoppelten Schwingungen aussichtsreich angegriffen werden kann. Ich habe damals darauf aufmerksam gemacht, daß hierzu auch die Mechanik der Schalleitung im Ohr gehört. Mir war es klar, daß hier ebenso vorgegangen werden sollte, wie bei der Behandlung der Registrierinstrumente, deren Theorie, wie ich glaube, jetzt abgeschlossen ist. Man wird sich die Frage vorlegen: Wie kann ein Apparat beschaffen sein, wenn er die Schalleitung im Ohr übernehmen soll und wie entsprechen die tatsächlichen Verhältnisse des Ohrs der Aufgabe, die ein solcher Apparat zu erfüllen hat. Man hat zunächst die Grundidee des schalleitenden Apparates festzulegen. Dann ist die mathematisch-mechanische Analyse von einfachen Modellen zu versuchen. Es ist ferner der Geltungsbereich der vereinfachten Lösung, die man auf diese Weise erhält, festzustellen. Ferner ist die auf diesen mathematischen Modellen aufgebaute Theorie an wirklichen Modellen zu prüfen. Schließlich müssen selbstverständlich die Experimente an dem wirklichen Ohr den Entscheid über die Bedeutung der Schematisierung ergeben. Die durch die Analyse der Modelle gewonnenen Grundsätze ergeben einen vorzüglichen Leitfaden für die Experimentaluntersuchung.

Durch den schalleitenden Apparat werden die Druckschwankungen in den Schallwellen, die auf das Ohr treffen, in Be-

¹⁾ Erste Mitteilung Januar 1922.

²⁾ 1915 und 1918.

wegungen der Lymphe des Labyrinths umgesetzt. Diese Übertragung könnte durch eine Kolbeneinrichtung erfolgen, wie sie in der Fig. 1, I angegeben ist. Der mit einer Feder versehene Kolben, auf den die Schallwellen auftreffen, hat wie das Trommelfell, eine verhältnismäßig große Fläche, während der Eingang der Schnecke, das ovale Fenster, klein ist. Das Verhältnis der beiden Flächen beträgt $60 \text{ mm}^2/3 \text{ mm}^2$. Die Kraft, die auf den kleinen Kolben wirkt, wird dadurch um das 20fache gesteigert, und ebenso stark die Empfindlichkeit, d. h. die Verrückung der Steigbügelplatte dividiert durch den einwirkenden Druck. Die erste Hauptgröße, welche die Leistung des schalleitenden Apparates bestimmt, ist die Empfindlichkeit, die zweite ist die Schwingungszahl oder die Frequenz. Je höher die Schwingungszahl ist, um so getreuer werden verwickelte Schwingungsbilder wieder gegeben. Ich habe früher die Grundsätze eines derartigen Apparates verglichen mit der Leistung eines abbildenden optischen Apparates, und habe das Quadrat der Schwingungszahl als das Auflösungsvermögen bezeichnet, während die Empfindlichkeit mit der Vergrößerung zu vergleichen ist. Das Produkt aus beiden habe ich die Güte eines Registrierapparates genannt. Bei einem System von einem Freiheitsgrad, wie bei dem Kolbenmodell, ist es der reziproke Wert der Masse. Auch für den schalleitenden Apparat wird sich der Begriff der Güte als dienlich erweisen.

Zwischen dem Kolben und der Steigbügelplatte habe ich in dem Modell eine starre Verbindung angenommen. Die Koppelung ist eine absolut zwangsläufige. Der Organismus kann nicht derartige Kolben bilden, das Material ist nicht zu beschaffen. Die Dichtung ist unmöglich. Bei dem Ohr ist an der Stelle des ersten Kolbens eine Membran vorhanden. In diese Membran ist bei einigen Tieren, wie bei dem Frosch, ein scheibenartiges, bei anderen, wie bei dem Menschen, ein stabartiges Gebilde, der Hammer, eingefügt, das durch einen Stift oder eine Kette von elastisch miteinander verknüpften Knöchelchen, den Gehörknöchelchen, mit der Steigbügelplatte verbunden ist. Die Steigbügelplatte ist sehr enge durch eine Membran in die Labyrinthöffnung eingefügt. Die Koppelung des Schall aufnehmenden Teils mit der Steigbügelplatte ist nicht mehr so eng wie bei dem Kolbenmechanismus. Dadurch wird zunächst die Empfindlichkeit herabgesetzt. Es wird

zu erörtern sein, welche Veränderungen der mechanischen Verhältnisse gegenüber den des Kolbenmechanismus eintreten. Im Mittelpunkt der ganzen Abhandlung steht somit die Analyse der Modelle II und III, die in der Figur angegeben sind.

Bei dem Modell II findet eine fortschreitende Bewegung, bei dem Modell III eine drehende Bewegung des in die Membran eingefügten Körpers statt. Die Mechanik des Kolbenmechanismus behandle ich nicht im einzelnen, sie ist, wie ich schon oben angedeutet habe, so durchsichtig, daß eine besondere Untersuchung nicht notwendig ist. Aber es ist kein Zweifel, daß die richtige Beurteilung des schalleitenden Mechanismus nur durch einen Vergleich der verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten der Einrichtung erreicht wird. Ebenso wie bei meiner Analyse der Registrierinstrumente wird auch hier die Untersuchung des Kolbenmechanismus als des einfachsten eine wichtige Rolle spielen.

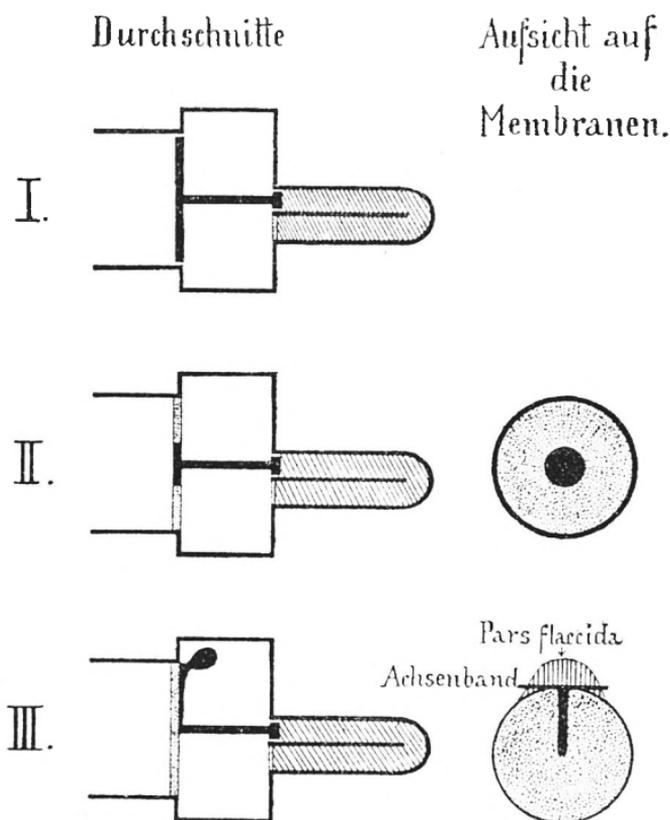


Fig. 1.

1. Statik des schalleitenden Apparates.

Bei der Statik handelt es sich um die Ermittlungen der Verrückungen der einzelnen Teile des Apparates, die unter der Einwirkung von Kräften erfolgen. In Betracht kommt bei der Einwirkung des Schalls schließlich nur ein allgemeiner Druck, der auf die Membran bzw. den Kolben einwirkt. Den Quotient aus der Verrückung (lineare Verrückung oder Winkeldrehung) dividiert durch den Druck bezeichne ich mit γ . Die wesentliche Verrückung ist diejenige der Steigbügelplatte. Ihre Größe, dividiert durch den einwirkenden Druck, ist die eigentliche Empfindlichkeit. Dies ist der Wert, der für die Leistung des Ganzen maßgebend ist, während bei den anderen Gehörknöchelchen diese Größen nur für die Analyse wichtig sind. Ähnlich verhält es sich mit einem anderen Quotienten. Er ist das Verhältnis einer auf die Scheibe oder den Stab (Hammer) einwirkenden Einzelkraft P (eines Drehmomentes) zu einer Verrückung. Ich habe diesen Koeffizienten bei den Registrierinstrumenten mit η bezeichnet. Weiter ist für die theoretische Analyse und die experimentelle Untersuchung die Feststellung des Koeffizienten E' wichtig. E' ist das Verhältnis des auf die Membran einwirkenden Drucks zu dem Volumen der Ausbauchung der Membran. Und schließlich wird sich als wertvoll erweisen die Kenntnis der Koppelungszahl K_{Tr} für die Membran. Sie ist $= E' \eta \gamma^2$. Die Koppelungszahl ist unabhängig von der Spannung der Membran und von dem Radius der kreisförmigen Begrenzung. Sie ist nur bedingt durch die Art der Einfügung des starren Körpers — Scheibe oder Stab usw. — in die Membran K_{Tr} wechselt zwischen 0 bei unendlich loser Koppelung und 1 bei zwangsläufiger Verbindung. Füllt das in die Membran eingefügte Gebilde die ganze Fläche der Membran aus, so wird die Koppelung $= 1$.

Die Analyse der Statik der Membransysteme beruht auf den beiden Differentialgleichungen 1) $\nabla w = 0$, 2) $\nabla w = -p/S$. (Hierin ist w die Verrückung des Membranpunktes senkrecht gegen die Kreisfläche, S die konstante Spannung.) Die erstere kommt dann in Betracht, wenn nur an bestimmten Punkten oder Linien Kräfte angreifen. Die letztere, wenn ein gleichmäßiger Druck p auf die Membran wirkt.

Statik der Modelle des schalleitenden Apparates.

Membran mit Scheibe in der Mitte.

Das System ist zentrosymmetrisch. Die beiden Differentialgleichungen lauten in der Polarkoordinate r ausgedrückt:

$$1) \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{und} \quad 2) \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{p}{S}.$$

Die erstere gilt für eine zentrische Kraft P , die letztere für einen gleichmäßigen Druck p auf Membran und Scheibe. Die Lösungen, die ich in verschiedenen Abhandlungen (Zeitschrift für Biologie) behandelt habe, führt zu:

$$1) w = \frac{P}{2S\pi} l\left(\frac{a}{r}\right), \quad 2) w = \frac{p}{4S} (a^2 - r^2).$$

Aus den beiden Lösungen ergibt sich, wenn f die Verrückung der Scheibe, δ das Verhältnis des Radius der Scheibe zu dem äußeren Radius a ist:

$$\gamma = \frac{f}{p} = \frac{a^2(1 - \delta^2)}{4S}, \quad \eta = \frac{P}{f} = \frac{2\pi S}{l\left(\frac{1}{\delta}\right)},$$

$$E' = \frac{p}{V} = \frac{8S}{a^4(1 - \delta^4)\pi}, \quad K = \frac{1 - \delta^2}{(1 + \delta^2)l\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Für den Anschluß der Gehörknöchelchenkette an die Membran mit der Scheibe verweise ich auf die Ausführungen in dem nächsten Kapitel: Membran mit Stab.

Membran mit radiär gestelltem Stab.

Die Grundkoeffizienten γ und η nehmen hier eine etwas andere Form an, weil die Verrückung nicht linear ist, sondern in dem Drehungswinkel α besteht. Die Empfindlichkeit des Systems γ ist das Verhältnis dieses Winkels α zu dem Druck, der die Deformation bewirkt. Also $\gamma = \alpha/p$. Ähnlich ist η das Verhältnis des Drehmomentes, das an dem Stab wirkt, zu α .

Also $\eta = \frac{Mom}{\alpha}$. Die frühere Definition für E' und für K bleibt bestehen.

Zur Auswertung dieser Größen muß man die Deformation der Membran bestimmen, die 1. durch ein Drehmoment, das auf den Stab wirkt, und 2. durch einen Druck p hervorgerufen wird. Die Differentialgleichungen für diese Deformationen lauten:

$$1) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

$$2) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = -\frac{p}{S},$$

worin r bzw. $r/a = \varrho$ und ϑ die Polarkoordinaten sind, vgl. Fig. 2. (In der Figur steht φ statt ϑ .) Die Lösung der Differentialgleichungen kann nach der Dissertation von Schaetz in Fourierschen Reihen erfolgen. (Titel der Dissertation: Über die Druckempfindlichkeit einer kreisförmigen Membran, II. Sektion der philos. Fakultät, München 1921). Für die Lösung der Differentialgleichung wird w in zwei Teile, w_1 und w_2 , zerlegt. w_1 ist die Lösung für die Differentialgleichung 1, die bei dem Problem 2 als „verkürzte“ Differentialgleichung anzusehen ist, unter den Randbedingungen 1) $w = 0$ für $\varrho = 1$, 2) $w = \alpha a(1 - \varrho)$ für $\vartheta = \pm \pi$. α ist hierin der Erhebungswinkel des Stabes. w_2 ist die Lösung der Differentialgleichung 2 unter den vereinfachten Randbedingungen $w = 0$ für $\vartheta = \pm \pi$ und für $\varrho = 1$, d. h. für den festliegenden Stab. Die Randbedingungen für w_2 stören die Bedingungen für w_1 nicht. Also ist $w = w_1 + w_2$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2 für den frei sich bewegenden Stab. Die beiden Verrückungen superponieren sich. Hierzu kommt noch eine Bedingung, die durch die Unstetigkeit der Differentialquotienten an der Stelle des Stabs notwendig wird.

Die Lösungen für w_1 und w_2 in Fouriersche Reihen lauten:

$$w_1 = \alpha a \left[1 + \varrho \cos \vartheta + \frac{16}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \varrho^{n+\frac{1}{2}} \cos(n+\frac{1}{2})\vartheta \right] \quad (3)$$

$$w_2 = \frac{16 \alpha^2 p}{\pi S} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (\varrho^2 - \varrho^{n+\frac{1}{2}}) \cos(n+\frac{1}{2})\vartheta}{(2n-3)(2n+1)(2n+5)} \quad (4)$$

$$w = w_1 + w_2.$$

Man sieht, daß noch eine Beziehung zwischen w_1 und w_2 hergestellt werden muß, damit der Drehungswinkel α herausfällt.

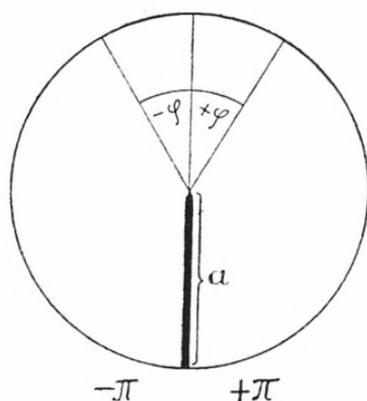


Fig. 2.

Sie wird durch die Berücksichtigung des Drehmoments ermittelt, das durch die Spannung S an dem Stab erzeugt wird. Wird der Stab ohne Einwirkung eines Drucks um den Winkel α aus der Kreisebene herausgedreht, so erzeugt die Spannung S das Moment M_1 , Es läßt sich aus der Lösung w_1 nach der Formel berechnen:

$$Mom_1 = 2 a S \int_0^1 \frac{1-\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \vartheta} \right)_{\pi} d\varrho. \quad (5)$$

Es wird zu: $1.9514 a a^2 S$. Das Moment durch den Winkel α dividiert, gibt

$$\eta = 1.9514 a^2 S. \quad (6)$$

Wirkt ein Druck auf die Membran bei feststehendem Stab, so übt die Spannung ein Moment an dem Stab

$$= 2 a S \int_0^1 \frac{1-\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial w_2}{\partial \vartheta} \right)_{\pi} \cdot d\varrho = -0.5658 a^3 p,$$

dem durch die Reaktionskraft das Gleichgewicht gehalten wird. Bei der Superposition der beiden Einwirkungen ergibt sich das Gesamtmoment $= M_1 + M_2$. Es muß, da keine äußeren Kräfte bei der alleinigen Druckwirkung p in Betracht kommen $= 0$ sein. Also $M_1 + M_2 = 0$. Diese Gleichung ergibt die gesuchte Beziehung zwischen a und p , d. h. die Größe γ . Sie wird zu

$$\gamma = \frac{a}{p} = 0.2899 \frac{a}{S}. \quad (7)$$

In der Dissertation von Schaetz sind ferner noch die Fälle behandelt, bei denen der Stab kürzer oder länger als der Radius des Kreises ist. Eine prinzipielle Lösung läßt sich mit Green'schen Funktionen ausführen. Aber die numerische Auswertung ist sehr schwierig. Das Hauptergebnis ist die Bestimmung des Differentialquotienten der Funktion $\gamma = f(\delta)$, worin δ die Länge des Stabs dividiert durch a ist, für den Mittelpunkt des Kreises. Er ist gleich $\frac{128}{9\pi} \alpha a^2 S$ (Schaetz, Gl. 63). Für die Stablänge 0 ist nach einfachen Überlegungen die Empfindlichkeit $\gamma = \frac{a}{2S}$ zu ermitteln. Für die Stablänge $2a$ ist $\gamma = 0$, vgl. S. 19. Der analytische Beweis für das Letztere ist in einem Zusatz zu der Dissertation gegeben. Berücksichtigt man diese vier Größen, so kann man eine Parabel dritten Grades konstruieren, welche die Abhängigkeit der Empfindlichkeit γ von der Länge des Stabs angibt.

$$\gamma = (-0.04123 \delta^3 + 0.08376 \delta^2 - 0.2526 \delta + 0.5000) \frac{a}{S}. \quad (8)$$

Die Ermittlung von E' ist nicht in der Abhandlung von Schaetz enthalten. Hierzu muß das Volumen der durch den Druck p ausgebauchten Membran ausgewertet werden. Es ist

$$V = a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^1 w_1 \varrho d\varrho d\vartheta + a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^1 w_2 \varrho d\varrho d\vartheta.$$

Das erste Integral V_1 zerfällt in drei Terme, vgl. S. 16. Sie werden

$$\begin{aligned} V_{\text{I}} &= \alpha a^3 \pi, \quad V_{\text{II}} = 0, \quad V_{\text{III}} = \frac{128 \alpha a^3}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)} \\ &= -2.576 \alpha a^3; \quad V_1 \text{ wird dann gleich } 0.566 \alpha a^3. \end{aligned} \quad (9)$$

V_1 ist das Volumen der Ausbauchung einer Membran, bei welcher der Stab um den Winkel α aus der Kreisebene herausgedreht wird.

$$\begin{aligned} V_2 \text{ ist} &= \frac{16 p a^4}{\pi S} \sum \frac{1}{(2n+1)^2 (2n+5)^2} \\ &= 0.2195 \frac{\alpha^4 p}{S}. \end{aligned} \quad (10)$$

V_2 ist das Volumen der durch den Druck p ausgebauchten Membran bei festliegendem Stab.

$V = V_1 + V_2$ wird $= 0.566 a a^3 + 0.2195 \frac{a^4 p}{S}$. Durch die Beziehung $\gamma = \frac{a}{p} = \frac{0.2899 a}{S}$ ergibt sich:

$$V = (0.1641 + 0.2195) \frac{a^4 p}{S} = \frac{0.3836 a^4 p}{S}. \quad (11)$$

Es ist das Volumen der durch den Druck p ausgebauchten Membran, wenn der Stab frei beweglich ist.

$E' = p/V$ ergibt sich hiernach für den frei beweglichen Stab zu:

$$E' = \frac{1}{0.3836} \frac{S}{a^4} = \frac{2.607 S}{a^4} \quad (12)$$

und für den festliegenden Stab zu: $\frac{4.556 S}{a^4}$. (13)

Damit sind die drei Grundkoeffizienten η , γ und E' ermittelt.

Wie schon S. 14 auseinandergesetzt wurde, ist die Berechnung der Koppelungszahl K für die Beurteilung der Mechanik des Modells sehr wichtig.

$$K \text{ ist } = E' \eta \gamma^2.$$

Es setzt sich zusammen aus zwei Faktoren, welche die Spannung nicht enthalten und deshalb für die experimentelle Bestimmung der Konstanten bequem sind. Sie sind

$E' \gamma = a/V = \frac{0.7556}{a^3}$, für unendlich kleinen Stab gleich $\frac{1.273}{a^3}$ und der zweite Faktor $= \eta \gamma = 0.5658 a^3$; das dimensionslose K wird hiernach $= 0.7556 \cdot 0.5658 = 0.4275$. (14)

Über die Abhängigkeit der Koppelungszahl K von der Länge des Stabs läßt sich eine wichtige allgemeine Bemerkung machen. Wenn die Länge des Stabs 0 ist, wird $K = 0$, weil hierbei die Empfindlichkeit γ , und ebenso E' endlich ist, während $\eta = 0$ wird. Ist andererseits die Länge des Stabs gleich dem Durchmesser des Kreises, so wird $\gamma = 0$ $\eta = \infty$, E' bleibt endlich. Da die Koppelungszahl γ^2 enthält und η zweifellos nicht von der Größenordnung ∞^2 wird, ist K für die Stablänge $2a$ wiederum 0. Die Koppelung muß also für eine mittlere Länge des Stabs ein

Maximum haben. Experimentelle Untersuchungen zeigen, daß diese Annahme berechtigt ist. Bei dem wirklichen Trommelfell hat der Stab eine derartige mittlere Länge.

Membran mit angeschlossenen Gehörknöchelchen.

In der Fig. 3 ist die Membran und die Scheibe durch kreisförmige (in Projektion elliptische) Umrahmung angegeben. Die Scheibe stellt zugleich den Hammer dar, wie m_1 und m_2 den Ambos und den Steigbügel. Die Koeffizienten der elastischen Verbindungen sind mit E_1, E_2, E_3, E_{12} und E_{23} bezeichnet. Die Koeffizienten E_1, E_2 und E_3 gelten für die elastischen Verbindungen mit den starren Wänden des Raums der Paukenhöhle. Die Wände sind durch Strichelung angegeben. Für den Hammer ist E_1 das Achsenband. Ebenso hat der Ambos eine elastische Aufhängung E_2 . E_3 gibt die elastische Wirkung der Membran des ovalen Fensters. Die elastischen Verbindungen sind im allgemeinen durch Spiralfedern, für E_2 zur Vereinfachung der Figur durch einen biegsamen Stab angedeutet. E_{12} und E_{23} bestimmen die Verbindungen der Scheibe (Hammer), der Körper m_1 (Ambos) und m_2 (Steigbügel) untereinander. Die Verrückungen des Hammers und des Ambos bestehen in Drehungen um eine Achse, diejenige des Steigbügels ist wesentlich fortschreitend. (Die etwaigen Drehungen des Steigbügels sind im folgenden noch nicht berücksichtigt, vgl. unten S. 26.) Sie müssen ebenso wie die Elastizitätskoeffizienten einheitlich ausgedrückt werden. Man kann entweder alle Verrückungen in Winkeldrehungen und die Elastizitätskoeffizienten in Torsionsmomente oder umgekehrt alle Winkel-

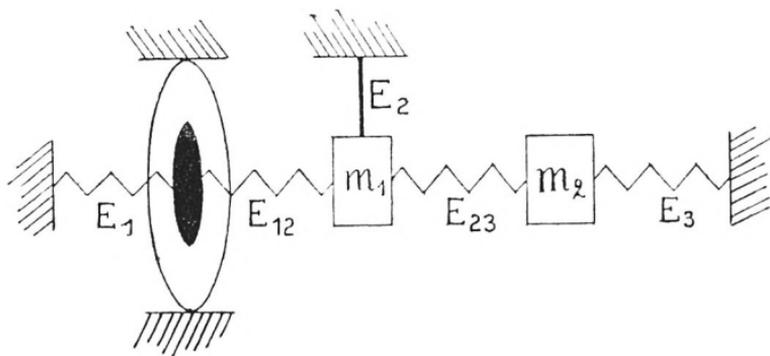


Fig. 3.

drehungen in lineare Verrückungen usw. umwandeln. Hierzu dient die folgende Überlegung.

Greift eine Feder mit dem Elastizitätskoeffizienten E an einem Hebel von der Länge l an, so ist das Moment des Federzugs $= Exl$, wenn x die Verrückung des Hebelendes ist. $Exl = \alpha El^2 = aT$. El^2 ist das Torsionsmoment T . So ist in den vorhergehenden Gleichungen an Stelle der Größen $E_1, E_{12}, E_2, E_{23}, E_3$ zu setzen: $T_1, T_{12}, T_2, T_{23}, T_3$. Wenn l die Entfernung der Amboßspitze von seiner Drehachse ist, so ist $T_{23} = l^2 \cdot E_{23}$ und $T_3 = l^2 \cdot E_3$.

Man kann andererseits auch alle Momente auf die Spitze des langen Amboßfortsatzes reduzieren.

Mit η_M bezeichne ich unterschiedslos entweder das Verhältnis des Drehmoments, das auf den Hammer wirkt, zu dem Drehungswinkel oder das Verhältnis der einwirkenden Kraft zu der fortschreitenden Verrückung des Reduktionspunktes. Ebenso halte ich es mit γ . In dem folgenden sind im allgemeinen die Verrückungen als fortschreitend angesehen und die Elastizitätskoeffizienten sind $= P/x$.

γ sei allgemein der Ausschlag eines Gehörknöchelchens für die Druckwirkung $p = 1$, η sei das Verhältnis einer am Hammer angreifenden Kraft (bzw. eines Drehmoments) zu dem Ausschlag eines Knöchelchens. Man kann die Verbindung zwischen Steigbügel und Amboß durchschneiden. Man kann ferner die Verbindung zwischen Amboß und Hammer durchtrennen. Ich bezeichne im letzteren Fall mit γ_M den Ausschlag des Hammers auf Einwirkung eines Drucks, wenn außerdem E_1 , die Elastizität des Achsenbandes, nicht wirkt. Man kann das Achsenband ohne Verletzung der Membran nicht von dem Hammer ablösen, aber es gelingt, wie ich jetzt zeigen werde, dieses γ_M aus anderen Größen zu bestimmen. Mit γ_H bezeichne ich dieselbe Größe, wenn das Achsenband mit der Membran zusammenwirkt. Mit $\gamma_{(H+A)H}$ bezeichne ich die entsprechende Größe für ein System, bei dem noch der Amboß angeschlossen ist, also außerdem die Koeffizienten E_{12} und E_2 wirken. Im Index bezeichnet der Klammerausdruck das System. Hinter ihm ist der Körper angegeben, um dessen Verrückung es sich handelt. Mit $\gamma_{(H+A+S)H}$ bezeichne ich dieselbe Größe für das volle System. Ähnliches gilt für die ent-

sprechenden η -Größen. Die Elastizitätskoeffizienten sind die vorher angegebenen. Die durch Zusammenwirken dieser Koeffizienten entstehende elastische Wirkung bezeichne ich durch Angabe der Grenzen für die Wirkung dieser Koeffizienten. So umschließt z. B. der Elastizitätskoeffizient, der mit $E_{Amb. - fenest. oval}$ bezeichnet wird, die elastische Kraft, die durch E_{23} und E_3 auf den Amboß ausgeübt wird. Ihre Größe folgt aus den weiteren Entwicklungen, vgl. S. 25.

Für die Membran beruhen die nachfolgenden Berechnungen auf der Annahme einer Superposition der Ausschläge, die durch den Druck und eine Einzelkraft hervorgerufen werden. Der Ausschlag der Hammerspitze sei mit ζ bezeichnet. Dann ist, wenn bei dem System: Membran mit Hammer ohne Achsenband eine Kraft P auf den Hammer wirkt, $\zeta = \frac{P}{\eta_M}$. Für einen Druck p auf die Membran wird $\zeta = p \cdot \gamma_M$. Wenn P und p zu gleicher Zeit wirken, so wird der Ausschlag $\zeta = p \gamma_M \pm \frac{P}{\eta_M}$. Wenn die Kraft P durch Federdruck $E_1 \zeta$ (Achsenband) erzeugt wird, so resultiert $\zeta = p \gamma_M - \frac{E_1 \zeta}{\eta_M}$ oder $\frac{\zeta}{p} = \gamma_H = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_1}$. (15)

Wenn die Kraft P und der Federdruck von E_1 wirkt, dann erhalten wir

$$\zeta = \frac{P}{\eta_M} - \frac{E_1 \zeta}{\eta_M}. \text{ Daraus } \eta_H = \eta_M + E_1. \quad (16)$$

Bei Anschluß des Amboßes ergeben sich, in ähnlicher Weise abgeleitet, folgende Beziehungen:

$$\gamma_{(H+A)H} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_1 + E_{(H-A)}}; \quad \eta_{(H+A)H} = \eta_M + E_1 + E_{(H-A)}. \quad (17)$$

Wird noch der Steigbügel angeschlossen, so ergibt sich wieder

$$\gamma_{(H+A+S)H} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_1 + E_{(H-ov.F.)}}; \quad \eta_{(H+A+S)H} = \eta_M + E_1 + E_{(H-ov.F.)}. \quad (18)$$

Auf diese Weise kann man die verschiedenen γ auseinander berechnen. Vor allen Dingen kann man für das System Membran mit Hammer und Achsenband die Empfindlichkeit für die Membran allein bestimmen nach der Formel $\gamma_M = \frac{\gamma_H (\eta_M + E_1)}{\eta_M}$.

Dazu ist notwendig die Kenntnis der Empfindlichkeit für die Membran mit dem Achsenband γ_H und ebenso des entsprechenden η_H . Dann muß noch der Elastizitätskoeffizient E_1 des Achsenbandes bestimmt werden. E_1 wird nach dem Abschneiden der Membran von dem Hammer wie gewöhnlich durch Belastung der Hammer Spitze mit Gewichten und Bestimmung der Winkeldrehung erhalten

$$\eta_M \text{ ist dann } = \eta_H - E_1.$$

Die Empfindlichkeiten γ können entweder Winkelempfindlichkeiten $\gamma_a = \frac{\alpha}{p}$ oder Empfindlichkeiten $\gamma_f = \frac{f}{p}$ für lineare Verrückungen f eines bestimmten Gehörknöchelchens sein. Die lineäre Empfindlichkeit γ_f geht aus der Winkelempfindlichkeit γ_a hervor, wenn γ_a mit l d. i. die Entfernung des betreffenden Punktes eines Gehörknöchelchens von der Drehachse multipliziert wird, also $\gamma_f = l\gamma_a$. So ist z. B. $\gamma_{f(H+A)H} = \frac{l\gamma_{aM}\eta_M}{\eta_{(H+A)H}}$. Für die η gilt Ähnliches. Die η der Formeln für γ müssen im Zähler und Nenner homogen sein, d. h. entweder gewöhnliche Elastizitätskoeffizienten oder Torsionsmomente sein.

Die Empfindlichkeiten für andere Gehörknöchelchen werden aus der Hammer-Empfindlichkeit, für das System $(H + A)$ durch Multiplikation mit D_2/D_1 und für das System $(H + A + S)$ mit D_2/D_1 und D_3/D_1 erhalten. Also z. B.

$$\gamma_{(H+A+S)S} = \frac{D_3}{D_1} \gamma_{(H+A+S)H}.$$

Die Größen D sind unten angegeben.

Zur Bestimmung von E' bei der Wirkung eines Federzuges an dem Hammer ist zunächst die Kenntnis des Volumens der Ausbauchung notwendig, die durch die Ausübung eines Drehmomentes an dem Hammer erzeugt wird. Nach der Formel (9) ist dieses

Volumen $V_1 = \frac{0.566 a^3 Mom}{\eta_M}$. Wenn T_{tot} das gesamte Torsions-

moment ist, das durch die Spannungen des Achsenbandes, der Verbindung Hammer-Amboß etc. bis zur Membran des ovalen Fensters hervorgerufen wird, dann ist das Drehmoment dieser Spannungen $= a T_{tot}$. Da ferner $\alpha = \gamma_{tot} p$ ist, wird

$$V_1 = \frac{0.566 a^3 p T_{tot} \gamma_{tot}}{\eta_M}$$

Da ferner $\gamma_{tot} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + T_{tot}}$ ist, wird $V_1 = \frac{0.566 a^3 p \cdot \gamma_M \cdot T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}}$.

Im besonderen Fall $T_{tot} = \infty$ d. h. bei festliegendem Hammer wird $V_1 = 0.566 a a^3$, vgl. Formel (9).

Das Volumen der Ausbauchung, die erzeugt wird, wenn außer dem elastischen Zug ein Druck auf die Membran wirkt, setzt sich additiv zusammen aus dem Volumen, das sich durch die Einwirkung eines Drucks allein — ohne Federzug — auf die Membran ergibt, und dem Volumen V_1 , das der elastische Zug hervorruft. Das erstere ist $= \frac{0.3836 a^4 p}{S}$, vgl. (10). Also

$$V = \frac{0.3836 a^4 p}{S} - \frac{0.566 a^3 p \gamma_M \cdot T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}}$$

Da $0.566 \gamma_M = 0.566 \times 0.2899 a/S = 0.1641 a/S$ ist, so wird

$$V = \left(0.3836 - \frac{0.1641 T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}} \right) \frac{a^4 p}{S} = \frac{0.3836 \eta_M + 0.2195 T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}} \cdot \frac{a^4 p}{S} \quad (19)$$

$$\text{oder } E' = \frac{\eta_M + T_{tot}}{0.3836 \eta_M + 0.2195 T_{tot}} \cdot \frac{S}{a^4} \quad (20)$$

Im besonderen Fall $T_{tot} = \infty$ wird $E' = 4.556 S/a^4$, vgl. oben (13). Bemerkenswert ist die Größe der allgemeinen Koppelungszahl K für den ganzen Schalleitungsapparat. Die Entwicklung ergibt folgendes:

$$\begin{aligned} K = E' \eta \gamma^2 &= \frac{(\eta_M + T_{tot}) S}{(0.3836 \eta_M + 0.2195 T_{tot}) a^4} \cdot (\eta_M + T_{tot}) \left(\frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + T_{tot}} \right)^2 \\ &= \frac{\gamma_M^2 \eta_M^2 S}{(0.3836 \eta_M + 0.2195 T_{tot}) a^4}, \end{aligned} \quad (21)$$

d. h. K nimmt mit wachsendem T_{tot} von $\frac{\gamma_M^2 \eta_M S}{0.3836 a^4} = 0.4275$, wobei keinerlei elastischer Zug auf die Membran wirkt, bis 0 für $T_{tot} = \infty$ ab. Wenn nun die bei dem wirklichen Ohr gefundene Koppelungszahl K größer ist als 0.4275, wie dies tatsächlich der Fall ist, so ist das K für das Trommelfell ohne Federzug sicher größer bzw. das Trommelfell ist enger gekoppelt mit der Gehör-

knöchelchenkette als bei der ebenen Membran. Dies ist zweifellos durch die trichterförmige Form und das längere Hineinragen des Hammergriffs in die Mitte des Trommelfells als bis zur Mitte bedingt.

Experimentelle Bestimmung und Berechnung der einzelnen Elastizitätskoeffizienten der Gehörknöchelchenkette.

Die einzelnen Elastizitätskoeffizienten η_H , E_{12} , E_2 , E_{23} und E_3 der Gehörknöchelchenkette lassen sich berechnen, wenn man die Verrückungen der einzelnen Gehörknöchelchen feststellt, die durch eine auf den Hammer wirkende Kraft (Drehmoment) hervorgerufen werden. Sie können aber nur dann insgesamt ermittelt werden, wenn man eine Zerlegung der Kette vornimmt. Und zwar sind zur Berechnung notwendig: Die Verrückungen von Amboß und Steigbügel für das ganze System, nach Abtrennung des Steigbügels die Verrückungen von Hammer und Amboß und nach weiterem Abtrennen des Amboß die Verrückung des Hammers. 1. Ich behandle zunächst das einfachste System: Membran mit Hammer allein. Durch das Experiment kann ohne weiteres das η_H (Membran mit Achsenband) bestimmt werden. 2. System nur aus Membran, Hammer und Amboß bestehend, Steigbügel abgeschnitten. Die Gleichungen für die Statik lauten (vgl. zweite Akademieabhandlung S. 117):

$$C_1 x_1 + C_{12} x_2 = P, \quad C_{12} x_1 + C_2 x_2 = 0,$$

worin $C_1 = \eta_H + E_{12}$, $C_2 = E_{12} + E_2$, $C_{12} = -E_{12}$.

Die Lösung für die Verrückungen ergeben: $x_1 = P D_1 / D$, $x_2 = P D_2 / D$, worin $D = \eta_H E_{12} + \eta_H E_2 + E_{12} E_2$, $D_1 = E_{12} + E_2$, $D_2 = E_{12}$. Das Verhältnis der Verrückungen $\frac{x_2}{x_1}$ ist $= D_2 / D_1$.

Bezeichnet man $P/x_1 = D/D_1$ mit η_1 und $P/x_2 = D/D_2$ mit η_2 und löst nach den unbekanntenen Größen E_{12} und E_2 auf, so erhält man:

$$E_{12} = \frac{\eta_2 (\eta_1 - \eta_H)}{\eta_2 - \eta_1}, \quad E_2 = \frac{\eta_2 (\eta_1 - \eta_H)}{\eta_1}. \quad (22)$$

3. Vollständiges System. Man kann die Verrückungen x_1 des Hammers, x_2 des Ambosses und x_3 des Steigbügels durch eine am

Hammer angreifende Kraft P bzw. ein Drehmoment nach den Grundsätzen der Statik eines Systems von 3 Freiheitsgraden bestimmen, vgl. die zweite Akademieabhandlung S. 145.

Die Gleichungen für die Verrückungen lauten:

$$C_1 x_1 + C_{12} x_2 = P, \quad C_{12} x_1 + C_2 x_2 + C_{23} x_3 = 0, \quad C_{23} x_2 + C_3 x_3 = 0,$$

worin $C_1 = \eta_H + E_{12}$, $C_2 = E_{12} + E_2 + E_{23}$, $C_3 = E_{23} + E_3$,

$$C_{12} = -E_{12}, \quad C_{23} = -E_{23}.$$

Die Auflösung nach x_1 , x_2 und x_3 führt man am besten in Determinantenform durch. Sie ergibt: $x_1 = PD_1/D$, $x_2 = PD_2/D$, $x_3 = PD_3/D$, worin die Determinanten

$$D = (\eta_H E_{12} + \eta_H E_2 + E_{12} E_2) (E_{23} + E_3) + (\eta_H + E_{12}) E_{23} E_3$$

$$D_1 = (E_{12} + E_2)(E_{23} + E_3) + E_{23} E_3, \quad D_2 = E_{12}(E_{23} + E_3), \quad D_3 = E_{12} E_{23}.$$

Die Verhältnisse der Verrückungen zueinander sind stets:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{D_2}{D_1}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{D_3}{D_1}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{D_3}{D_2}.$$

Wenn P/x_1 mit η_1 etc. bezeichnet wird, dann ist

$$\eta_1 = D/D_1, \quad \eta_2 = D/D_2, \quad \eta_3 = D/D_3.$$

Bei Kenntnis von η_H , E_{12} und E_2 lassen sich aus η_1 und η_3 oder η_2 und η_3 , wie schon oben bemerkt, die Größen E_{23} und E_3 durch diese Beziehungen berechnen. Es wird:

$$E_{23} = \frac{(E_{12} \eta_2 - \eta_H E_{12} - \eta_H E_2 - E_{12} E_2) \eta_3}{(\eta_H + E_{12})(\eta_3 - \eta_2)}$$

$$E_3 = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_2} E_{23}. \quad (23)$$

Aus diesen Größen kann man weiterhin die Koppelungszahlen K_{12} und K_{23} für die Verbindung von Hammer und Amboß und Amboß und Steigbügel ermitteln.

Wenn auch die Drehung der Steigbügelplatte berücksichtigt werden soll, muß noch eine Verrückung x_4 aufgenommen und der entsprechende Elastizitätskoeffizient berechnet werden.

2. Dynamik des schalleitenden Apparates.

Das allgemeine Schwingungsproblem.

Ein elastisches System führe Schwingungen aus und zwar freie und erzwungene Schwingungen. Die Analyse dieser Schwingungen wird außerordentlich vereinfacht, wenn man die „Normal-Koordinaten“ φ (W. Thomson, Rayleigh) einführt. Sie gehen aus den Verrückungen x durch eine lineare Transformation hervor. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß in den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie ihre Produkte $\varphi_r \varphi_s$ nicht auftreten. Man kann also die beiden Ausdrücke folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum a_s \dot{\varphi}_s^2 \\ V &= \frac{1}{2} \sum c_s \varphi_s^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen werden dadurch sehr einfach. Sie nehmen (nach Lagrange) die Form an:

$$a_s \ddot{\varphi}_s + c_s \varphi_s = 0.$$

Die Lösungen sind: $\varphi_s = A_s \cos(n_s t - \alpha)$. (25)

Dabei sind die Frequenzen n_s bestimmt durch $n_s^2 = \frac{c_s}{a_s}$.

Die Schwingungen, die durch die verschiedenen Normalkoordinaten ausgedrückt werden, sind vollständig selbständig und unabhängig von einander. Im Allgemeinen können sie wie Schwingungen eines Systems von einem Freiheitsgrad behandelt werden.

Für die erzwungenen Schwingungen gilt die entsprechende Beziehung:

$$a_s \ddot{\varphi}_s + c_s \varphi_s = \Phi_s \quad (26)$$

$\Phi_s \delta \varphi_s$ ist die Arbeit, die auf das System von den eingepägten (äußeren) Kräften P_1, P_2 , etc. während der diesen Kräften entsprechenden virtuellen Verrückungen $\delta x_1, \delta x_2$ etc. geleistet wird.

Vielleicht ist die Bedeutung der Normalkoordinaten für kontinuierliche Systeme noch größer als für Systeme mit diskreten Massen. Für die kontinuierlichen Systeme werden die Bewegungsgleichungen zu partiellen Differentialgleichungen. Für eine Reihe

von Systemen, nämlich die Saite, die Membran, die Platte, den Stab, die Luft in begrenzten Räumen und, ich füge hier hinzu, für elastische Schläuche, die mit Flüssigkeit gefüllt sind, lassen sich die Lösungen dieser Differentialgleichungen in folgender Form anschreiben: Die Verrückung eines Punktes ζ des Systems wird:

$$\zeta = \sum \zeta_s, \quad \zeta_s = \varphi_s u_s \quad \text{oder} \quad \zeta = \sum \varphi_s u_s. \quad (27)$$

In der Formel sind die Größen u_s die „Normalfunktionen“. Ihre Form ist verschieden je nach der Art des Systems. Z. B. bei der Saite eine trigonometrische Funktion der Länge, bei der kreisförmigen Membran eine Besselfunktion des Radius r , verknüpft mit trigonometrischen Funktionen des Winkels ϑ etc. Sie enthalten die Zeit nicht. Am bequemsten wird man sie dimensionslos lassen. Ihre Form wird durch die räumlichen Grenzbedingungen bestimmt, während die Normalkoordinaten die zeitlichen Bedingungen zu erfüllen haben.

Die Summenzeichen in den Formeln (27) geben unendliche Reihen an, während sich die Summen bei den Systemen mit diskreten Maßen auf eine durch die Zahl der Freiheitsgrade beschränkte Zahl von Gliedern erstreckt.

Die kinetische Energie wird nach der Einführung der Normalfunktionen: $T = \frac{1}{2} \sum \dot{\varphi}_s^2 \int \rho u_s^2 dx$, worin dx das Element einer Strecke oder Fläche oder des Raums je nach der Dimensionalität des Systems ist. ρdx ist die Masse eines Elements. Wenn man dieses T mit dem obigen vergleicht, so entspricht $a_s: \int \rho u_s^2 dx$ und $e_s: n_s^2 \int \rho u_s^2 dx$. Also

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum \dot{\varphi}_s^2 \int \rho u_s^2 dx, \\ V &= \frac{1}{2} \sum \varphi_s^2 n_s^2 \int \rho u_s^2 dx \end{aligned} \quad (28)$$

und es resultiert die allgemeine Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_s \int \rho u_s^2 dx + n_s^2 \varphi_s \int \rho u_s^2 dx &= \Phi_s. \\ \text{Oder:} \quad \ddot{\varphi}_s + n_s^2 \varphi_s &= \frac{\Phi_s}{\int \rho u_s^2 dx}. \end{aligned} \quad (29)$$

Sie umfaßt 1. das Gleichgewicht, 2. die freien Schwingungen und deren Auslösung, 3. die erzwungenen Schwingungen. Ich behandle jetzt die verschiedenen Formeln für diese Fälle.

1. Gleichgewicht: $\ddot{\varphi}_s = 0$.

$$\text{Oder: } \varphi_s = \frac{\Phi_s}{n_s^2 \int \rho u_s^2 dx} \quad \text{und} \quad \zeta = \sum \frac{\Phi_s u_s(N)}{n_s^2 \int \rho u_s^2 dx}. \quad (30)$$

$u_s(N)$ bedeutet u_s für den Punkt N , zu dem ζ durch die Formel angegeben wird.

2. Freie Schwingungen: Wird das System durch Kräfte aus der ungestörten Lage gebracht, wodurch die Verrückung für den Gleichgewichtsfall 1 erzeugt wird, und dann losgelassen, so geben die folgenden Ausdrücke den Bewegungsvorgang wieder.

$$\varphi_s = (\varphi_s)_{t=0} \cos n_s t = \frac{\Phi_s \cos n_s t}{n_s^2 \int \rho u_s^2 dx}; \quad \zeta = \sum \frac{\Phi_s u_s(N) \cos n_s t}{n_s^2 \int \rho u_s^2 dx}. \quad (31)$$

Die Auslösung durch einen Impuls behandle ich hier nicht.

3. Erzwungene Schwingungen: Die einwirkende Kraft sei wie eine harmonische Funktion zeitlich veränderlich. Die Beziehungen lauten:

$$\ddot{\varphi}_s + n_s^2 \varphi_s = \frac{\Phi_s \cos vt}{\int \rho u_s^2 dx}. \quad (32)$$

$$\text{Lösung: } \varphi_s = \frac{\Phi_s \cos vt}{(n_s^2 - v^2) \int \rho u_s^2 dx}; \quad \zeta = \cos vt \sum \frac{\Phi_s u_s(N)}{\left(1 - \frac{v^2}{n_s^2}\right) n_s^2 \int \rho u_s^2 dx}.$$

Die Ausdrücke für Φ lassen sich aus den eingepprägten Kräften Z nach dem obigen Satz ableiten. Die Kräfte sollen an den Punkten Q wirken. $\Phi_s \delta \varphi_s$ ist die Arbeit, die von den eingepprägten Kräften Z während der virtuellen Verrückung $\delta \zeta = \delta \varphi_s u_s$ geleistet wird. Dann besteht die Beziehung $\Phi_s \delta \varphi_s = \delta \varphi_s \sum \int u_s Q_m Z_m dx$ oder $\Phi_s = \sum \int u_s d_m Z_m dx$. Der Ausdruck nimmt verschiedene Form an, je nachdem es sich um eine einzelne Kraft P handelt, die in einem beschränkten Bezirk bzw. an einem Punkt angreift, der die Größe von $u_s(Q)$ bestimmt, oder sich über die Elemente des Systems mit der Größe p gleichmäßig verteilt. Ich gebe die Werte an:

1. Die Kraft P greift an einem bestimmten Bezirk Q an

$$\Phi_s = u_s(Q) \int Z dx. \quad (33)$$

In vielen Fällen kann auch dafür gesetzt werden $\Phi_s = u_s(Q) Z$.

2. Die Kraft ist über die Raumelemente des Systems mit dem Wert p verteilt.

$$\Phi_s = \int p u_s dx = p \int u_s dx. \quad (34)$$

Bei kreisförmigen Membranen nehmen diese Gleichungen eine besondere Form an. Sie ist einmal dadurch bedingt, daß sich aus dem Ausdruck $\int \rho u_s^2 d\sigma$ ($d\sigma =$ Flächenelement) der Wert $a^2 \pi \rho$ oder die gesamte Masse der Membran ausscheiden läßt, wenn die Dichte konstant ist. a ist hier der Radius der Membran. Es bleibt dann ein dimensionsloser Faktor übrig, den ich mit T_s bezeichne. Wir erhalten also:

$$\int u_s^2 d\sigma = a^2 \pi T_s. \quad (35)$$

Die Integration erstreckt sich hierbei zunächst über den deformierten Teil der Membranfläche. Wie weit Massen von einem in die Membran eingelassenen starren Körper einbezogen werden müssen, ergibt das einzelne Problem.

Die „charakteristische Gleichung“ oder „Wurzelgleichung“ für die Membranschwingungen besteht aus Besselfunktionen. Ihre Lösung sei μa . Für diese Wurzel besteht die Beziehung

$$a^2 n^2 \rho = S(\mu a)^2, \quad (36)$$

worin S die Spannung der Membran ist. Hierdurch ergibt sich für den allgemeinen Nenner der obigen Gleichungen: $n_s^2 \int \rho u_s^2 d\sigma = \pi S(\mu a)^2 T_s$ und die Formeln lauten schließlich:

1. Gleichgewicht:

$$\zeta = \frac{1}{\pi S} \sum \frac{\Phi_s \mu_s(N)}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (37)$$

2. Freie Schwingungen:

$$\zeta = \frac{1}{\pi S} \sum \frac{\Phi_s \mu_s(N) \cos n_s t}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (38)$$

3. Erzwungene Schwingungen:

$$\zeta = \frac{\cos \nu T}{\pi S} \sum \frac{\Phi_s \mu_s(N)}{\left(1 - \frac{n_s^2}{\nu_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}. \quad (39)$$

Die kontinuierlichen Systeme können an bestimmten Punkten mit diskreten Massen verbunden werden. Oder es können auch an bestimmten Punkten elastische Kräfte, z. B. Federzüge, angreifen. Oder es kann sich auch an das System ein anderes gekoppeltes System von einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden oder auch ein kontinuierliches System anschließen. Es sind jetzt die Lösungsmöglichkeiten für diese verschiedenen kombinierten Systeme anzugeben.

Für die Aufstellung der charakteristischen Gleichung stehen zwei Methoden zur Verfügung. Die eine ist nur anwendbar für eine Verbindung der Membran mit Massen, Federzügen oder auch elastisch gekoppelten Systemen, die an bestimmten Punkten der Membran erfolgt. Die zweite ist allgemein anwendbar. Sie entspringt aus den oben entwickelten Prinzipien, vgl. (24) bis (35). Die erste Methode habe ich schon früher, erste Akademieabhandlung 1915, benutzt. Ich habe sie als eine Anwendung des d'Alembertschen Prinzips bezeichnet. Man kann sie aber auch die Methode der Normalschwingungen oder einfachen harmonischen Schwingungen des Systems nennen. Die zweite Methode will ich als die Methode der inneren erzwungenen Schwingung bezeichnen. Die erste Methode versagt, wenn das mit der Membran verbundene System an den Elementen der Membran angreift. Sie würde zu einer neuen Differentialgleichung führen. Ich lasse vorläufig die Frage offen, in welcher Beziehung die beiden Methoden zueinander stehen und ob sie nicht einem gemeinsamen Prinzip unterzuordnen sind.

1. An einer endlichen Zahl von Punkten des Systems greifen die Trägheitskräfte von diskreten Massen oder diskrete elastische Kräfte an. Diese Fälle habe ich früher (vgl. oben) mit dem d'Alembert-Prinzip⁴ behandelt. Man kann aber auch hier die Normalkoordinaten und Normalfunktionen dazu benutzen, um einen glatten Ausdruck für die Analyse zu erhalten.

Wenn es sich um diskrete Massen handelt, müssen an den Punkten, wo sie sich befinden, ihre Trägheitskräfte mit der elastischen Kraft des Systems an diesen Punkten im Gleichgewicht stehen. Es handelt sich z. B. um den Rand einer auf einer Membran befestigten starren Scheibe usw. Die freien Schwingungen seien, wie oben ausgedrückt, durch $\zeta = \sum \zeta_s = \sum q_s \mu_s$.

Die elastischen Kräfte des Systems an den betreffenden Punkten werden bestimmt durch Differentialquotienten nach den Dimensionen des Systems. Z. B. am Ende einer Luftsäule durch den partiellen Differentialquotienten nach der Längsausdehnung der Luftsäule. Außerdem durch bestimmte elastische Koeffizienten K . Den Ausdruck für die elastische Kraft gebe ich darnach mit $K \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] \zeta$ an. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks werde so gewählt, daß die Elastizitätskraft die positive Richtung von ζ erhält. Die Trägheitskraft ist dann $-M\ddot{\zeta}$. Es ergibt sich:

$$K \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] \zeta - M\ddot{\zeta} = 0.$$

Nun ist $\zeta = \sum u_s \varphi_s$. Da diese Beziehung für jedes Glied der Summe wegen der willkürlichen Konstanten, die in $u_s \varphi_s$ enthalten sind, gilt, so folgt:

$$K \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] u_s \varphi_s - M u_s \ddot{\varphi} = 0.$$

Nach der Bewegungsgleichung für φ_s ist $\ddot{\varphi}_s + n_s^2 \varphi = 0$ oder $\ddot{\varphi}_s = -n_s^2 \varphi_s$, und die obige Gleichung wird nach Elimination von φ_s :

$$K \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] u_s + M n^2 u_s = 0. \quad (40)$$

Eine diskrete elastische Kraft sei $e\zeta = e \sum u_s \varphi_s$. Da sie die Richtung von $-\zeta$ hat, muß das negative Zeichen für $e\zeta$ gewählt werden und man erhält, wofern die Masse an demselben Punkt vorhanden ist, an dem die elastische Kraft angreift, ähnlich wie vorher

$$K \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] u_s + (M n^2 - e) u_s = 0. \quad (41)$$

In derselben Weise kann an einen Punkt des Hauptsystems ein weiteres gekoppeltes System angeschlossen werden. Z. B. an die Membran mit einer Scheibe in der Mitte oder mit dem Hammer die Kette der Gehörknöchelchen. Man muß hier nur die Kraft, die an der Verbindungsstelle von diesem angekoppelten System ausgeht, mit den elastischen Kräften $K \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] u_s$ in das

Gleichgewicht setzen. Auch hierbei stehen noch mehrere Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung. Man kann die Trägheitskraft der mit der Membran verbundenen Masse wie in dem vorher behandelten Beispiel zusammen mit dem elastischen Zug auf die Membran, deren Scheibe keine Masse hat, wirken lassen. Oder man kann den elastischen Zug an der Membran mit der trägen Masse angreifen lassen, wobei natürlich die besonderen Wurzeln für dieses letztere System eingeführt werden müssen. Alle diese Möglichkeiten führen zu verschiedenen Typen von Formeln. Aber zu demselben rechnerischen Ergebnis, trotzdem die Typen so verschieden sind, daß man ihre Identität nur schwer feststellen kann. Ich habe diese Identität an besonderen Beispielen erwiesen, die ich der Einfachheit der Berechnung halber, aus dem Gebiet der Saitenschwingung genommen habe.

2. Methode der inneren erzwungenen Schwingungen. Mit dem kontinuierlichen System ist ein anderes gekoppeltes System von einer endlichen oder unendlichen Zahl von Freiheitsgraden verbunden. Es handelt sich z. B. um die Verbindung einer trägen Membran mit einer Luftsäule, die sich in einer Röhre befindet. Oder um die Verbindung einer trägen Membran mit einer Kette von Massen u. dgl. Für die Behandlung dieser heterogenen Systemkomplexe habe ich ein Verfahren gefunden, das ich als das Prinzip der inneren erzwungenen Schwingung bezeichne. Man gibt hierzu dem einen System eine Frequenz, sagen wir q . Und erzeugt mit dieser Frequenz eine erzwungene Schwingung des zweiten Systems. Man kann an einem einfachen Beispiel, das aus zwei Massen m_1 und m_2 besteht, die zwischen Federn an zwei festen Punkten aufgehängt sind, das Prinzip veranschaulichen. Das System 1 besteht aus E_1 , m_1 und E_2 . Dann gilt:

$$m_1 x_1 + E_1 x_1 + E_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (1).$$

Ferner existieren die Beziehungen

$$x_1 = A \cos qt \quad (2), \quad x_2 = B \cos qt \quad (3).$$

Durch Einsetzen von 2 und 3 in 1 ergibt sich:

$$-m_1 A q^2 + A E_1 + A E_2 - B E_2.$$

Daraus: $B = A (E_1 + E_2 - m_1 q^2) / E_2$.

Die das System 2 — bestehend aus m_2 und E_3 — erzeugende Kraft ist

$$P = (x_1 - x_2) E_2 = A (m_1 q^2 - E_1) \cos q t.$$

Nach der Formel für erzwungene Schwingungen gilt:

$$x_2 = \frac{P n^2}{E_3 (n^2 - q^2)} = \frac{A (m_1 q^2 - E_1) n^2 \cos q t}{E_3 (n^2 - q^2)}, \text{ worin } n^2 = \frac{E_3}{m_2}.$$

Durch eine Reihe von Umformungen erhält man

$$q^4 - (n_1^2 + n_2^2) q^2 + (1 - K) n_1^2 n_2^2 = 0,$$

d. h. die charakteristische Gleichung für das durch die Kopplungszahl K gekoppelte System von 2 Freiheitsgraden, dessen Einzelfrequenzen n_1 und n_2 sind.

Das letztere Prinzip wende ich hier allgemein für eine Kombination eines trägen Membransystems und einer im Anfang offenen Luftsäule von der Länge L an. Es ist hierzu notwendig die Kenntnis der Volumverrückungen am Ende der Luftsäule, wo sie an das Membransystem anstößt. Ihre Amplitude sei $V q t$. Ebenso ist die Kenntnis des Drucks an dieser Stelle notwendig, der die Schwingung des Membransystems erregen soll. Er beträgt:

$$p = \frac{x k \tan k L}{Q} V \text{ (vgl. 1. Akademieabhandl. S. 297)}. \quad (42)$$

In der Konstante k ist die gesuchte Schwingungszahl q in folgender Beziehung enthalten: $\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}$ (ρ die Dichte, κ der Volum-Elastizitätskoeffizient der Luft). Mit diesem Druck wird die Membran in Schwingungen versetzt. Sie bewegt sich nach der Formel:

$$\zeta = \frac{p \cos q t}{\pi \zeta} \sum \frac{\int u_s d\sigma \cdot u_s(N)}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}.$$

Das Volum der Membranausbauchung wird durch Integration über die Fläche erhalten. Es beläuft sich zu:

$$V \cos q t = \frac{p \cos q t}{\pi S} \sum \frac{(\int u_s d\sigma)^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}.$$

Man erhält so die Gleichung:

$$V \cos qt = \frac{\kappa k \tan kL}{\pi QS} \cdot V \cos qt \sum \frac{(\int u_s d\sigma)^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}$$

oder:
$$\cot Lq \sqrt{\frac{QL}{\kappa}} = \frac{q V \sqrt{\kappa Q}}{\pi QS} \sum \frac{(\int u_s d\sigma)^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s} \quad (43)$$

Ebenso läßt sich ein System behandeln, bei dem an die träge Membran eine im Anfang durch eine Membran oder starre Platte verschlossene Luftsäule angeschlossen ist.

Weiterhin lassen sich nach dieser Methode beliebige heterogene Systeme miteinander verknüpfen, soweit die Normalkoordinaten und Normalfunktionen anwendbar sind.

Dadurch, daß die letztere Methode auch für kombinierte Systeme anwendbar ist, bei denen das angekoppelte System an einem oder wenigen Punkten des Hauptsystems angreift, entstehen für diese Systeme neue Möglichkeiten, die Wurzelgleichung aufzustellen. Auch hierfür werden sich unten Beispiele finden. Ich habe ebenfalls die Identitäten dieser Gleichung an bestimmten rechnerischen Beispielen aufgewiesen (vgl. S. 33).

Ob die charakteristische Gleichung für ein kombiniertes System nach der ersten oder der zweiten Methode aufgestellt wird, stets lassen sich für die Bestimmung des Gleichgewichts oder der Auslösung der freien Schwingung oder der erzwungenen Schwingung des kombinierten Systems die entsprechenden allgemeinen Formeln S. 29 anwenden. Charakterisiert ist das System durch seine Schwingungszahlen. Dabei ist hervorzuheben, daß in das Φ_s der eingepreßten Kräfte nicht etwa innere Kräfte des kombinierten Systems, z. B. der elastische Zug einer Massenkette eingeht. Ich habe das letztere wiederum an dem Fall des Gleichgewichts einer Saite mit Masse und Feder in der Mitte, die durch eine Kraft aus der ungestörten Lage herausgezogen wird, aufgewiesen. Für dieses Gleichgewicht existiert ja eine äußerst einfache Formel.

Für T_s müssen stets die Massen, die unmittelbar mit dem Hauptsystem verbunden sind, berücksichtigt werden, z. B. bei dem Trommelfell die Trägheitskraft des Hammers usw.

Dynamik der Modelle des schalleitenden Apparates.

Membran kreisförmig ohne Belastung.

a = Radius der Membran, ρ = Masse der Membran für die Flächeneinheit.

1. Die Normalfunktion. Wenn man nur zentrosymmetrische Bewegungen betrachtet, wie dies bei zentrischen Auslösungen allein notwendig ist, führt die Behandlung der Bewegungsgleichung, die für ein Element der Membran gilt, zu der Besselschen (Fourierschen) Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu^2 w = 0, \quad \text{worin } n^2 = \frac{(\mu a)^2 S}{a^2 \rho}.$$

Ihre Lösung wird gegeben durch die Besselfunktion 0^{ter} Ordnung:

$$J_0(\mu a).$$

Die Normalfunktion ist hier $u_s = J_0(\mu a)$. (44)

2. Die charakteristische Gleichung, welche die Wurzeln liefert, lautet:

$$J_0(\mu a) = 0. \quad (45)$$

3. Die Grundgrößen für die Behandlung nach dem Prinzip der Normalkoordinaten.

$$T_s = \frac{\int u_s^2 dx}{a^2 \pi} = \frac{2\pi}{a^2 \pi} \int_0^a [J_0(\mu r)]^2 r dr = [J_1(\mu_s a)]^2. \quad (46)$$

Für die Einwirkung eines gleichmäßigen Drucks p auf die Membran ist:

$$\Phi_s = \frac{2\pi a^2 p}{(\mu_s a)^2} \int_0^{\mu_s a} J_0(x) x dx = \frac{2\pi a^2 p J_1(\mu_s a)}{\mu_s a}. \quad (47)$$

4. Statik der Membran mit Besselfunktionen ausgedrückt. Nach den allgemeinen Gleichungen wird für die Einwirkung eines über die Membran verteilten gleichmäßigen Drucks

$$w = \frac{2a^2 p}{S} \sum \frac{J_s(\mu_s r)}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}. \quad (48)$$

Für den Punkt $r = 0$ ist

$$w = \frac{2a^2 p}{S} \sum \frac{1}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}.$$

Die oben S. 15 gegebene einfache Lösung $w = \frac{p}{4S} (a^2 - r^2)$, welche die Form der ausgebauchten Membran als ein Rotationsparaboloid ergibt, muß mit dieser übereinstimmen. Entwickelt man $a^2 - r^2$ in Besselfunktionen so erhält man in der Tat

$$a^2 - r^2 = 8a^2 \sum \frac{J_0 \mu_s r}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}.$$

Als Kuriosum findet man hierbei:

$$\sum \frac{1}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)} = \frac{1}{8}.$$

5. Die freie Schwingung, die von der durch Druck ausgebauchten und dann losgelassenen Membran ausgeführt wird ist:

$$w = \frac{2a^2 p}{S} \sum \frac{J_0(\mu_s r) \cos n_s t}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}. \quad (48)$$

6. Ein durch einen mit der Frequenz ν harmonisch veränderlichen Druck erzwungene Schwingung wird durch die folgende Formel wiedergegeben:

$$w = \frac{2a^2 p}{S} \cos \nu t \sum \frac{J_0(\mu_s r)}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}. \quad (49)$$

Auch für eine im Zentrum angreifende Einzelkraft läßt sich die erzwungene Schwingung ermitteln. Sie ergibt sich ohne weiteres als Grenzfall aus den Formeln für die Membran mit zentrischer Scheibe (vgl. unten S. 46).

7. An die träge Membran ist eine Luftsäule angeschlossen. Dieses Problem läßt sich mit der früher entwickelten Formel leicht behandeln, vgl. (43). Die Formel wird hier:

$$\frac{4\sqrt{\kappa} \rho_L a^4 \pi q}{Q S} \sum \frac{\left[\int_0^{\mu a} J_0(x) x dx\right]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^6 T_s} = \cot Lq \sqrt{\frac{\rho L}{\kappa}}.$$

Da $T_s = J_1^2(\mu_s a)$ und $\int_0^{\mu a} J_0(x) x dx = \mu a J_1(\mu a)$ ist, ergibt sich:

$$\frac{4\sqrt{\kappa} \varrho_L a^4 \pi q}{QS} \sum \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^4} = \cot Lq \sqrt{\frac{\varrho_L}{\kappa}}. \quad (50)$$

Wenn die Dichte der Membran = 0 ist, so muß sich die in der Akademieabhandlung 1915, S. 298 für ein System, bestehend aus Luftsäule, die am Ende mit einer Membran verschlossen ist, entwickelte Formel ergeben, nämlich:

$$\tan KL = \frac{QE'}{k\kappa}$$

(E' der Volumelastizitäts-Koeffizient der Membranausbauchung).

In der Tat reduziert sich die Beziehung, wenn man bedenkt, daß die Eigenfrequenz der Membran unendlich ist und dadurch $\frac{q^2}{n_s^2}$ verschwindet, auf: $\frac{4\sqrt{\kappa} \varrho_L a^4 \pi q}{QS} \sum \frac{1}{(\mu_s a)^4}$.

Da nun $\sum \frac{1}{(\mu_s a)^4} = 1/32$ und $E' = \frac{8S}{a^4 \pi}$ ist, vgl. (S. 15),

erhält man $\frac{q\sqrt{\kappa} \varrho_L}{QE'} = \cot Lq \sqrt{\frac{\varrho_L}{\kappa}}$, d. h. die frühere Formel.

Man kann aber auch eine Korrektur für eine kleine Masse der Membran in folgender Weise einführen: Die korrigierte Schwingungszahl sei $q - \delta$. Da für kleines ε : $\cot(x + \varepsilon) = \cot x + (1 + \cot^2 x) \varepsilon$ und ferner $\frac{1}{1 - \frac{q^2}{n_s^2}} = 1 + \frac{q^2}{n_s^2}$ ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{q\sqrt{\kappa} \varrho_L}{QE'} + \frac{32q^3\sqrt{\kappa} \varrho}{QE'} \sum \frac{1}{n_s^2 (\mu_s a)^4} &= \cot Lq \sqrt{\frac{\varrho_L}{\kappa}} \\ &+ \delta \left(1 + \frac{q^2 k \varrho}{Q^2 E'^2}\right) L \sqrt{\frac{\varrho_L}{\kappa}}. \end{aligned}$$

Für q besteht die obige Gleichung, so daß die ersten Terme der linken und rechten Seite wegfallen. Wandelt man n_s^2 um und beachtet, daß $\sum \frac{1}{(\mu_s a)^6} = \frac{1}{192}$ ist, so ergibt sich:

$$\frac{32 a^2 q^3 \sqrt{\kappa} \varrho_L \cdot \varrho_M}{192 S Q E'} = \delta \left(1 + \frac{q^2 k \varrho}{Q^2 E'^2}\right) L \sqrt{\frac{\varrho_L}{\kappa}}.$$

Die Korrektur ist dann:

$$\delta = \frac{a^2 q^3 \kappa_{QM}}{6 S E' Q L} \left(1 + \frac{q^2 \kappa_{QL}}{Q^2 E'^2} \right). \quad (51)$$

Auf der anderen Seite kann man die Trägheit der Membran überwiegen lassen, bzw. die Trägheit der Luft klein annehmen. Eine Wurzel der Gleichung q_s weicht dann nur wenig von der betreffenden Frequenz der Membran ab. Also $q_s = n_s - \delta_s$. Das Glied der Reihe, das diese Schwingungszahl enthält, wird

$$= \frac{n_s}{2 \delta_s (\mu_s a)^4} (\delta_s^2 \text{ vernachlässigt}).$$

Man sieht also, daß jeweilig für ein q_s der zugehörige Term der Reihe überwiegt, und man kann sich auf ihn beschränken. Dann kommt nach Reihenentwicklung von tangens:

$$\delta_s = \frac{2 \pi L_{QL} S}{n_s Q_{QM}^3}. \quad (52)$$

Kreisförmige Membran mit einer zentrischen starren Scheibe.

Äußerer Radius der Membran a , Radius der Scheibe b , Verhältnis zwischen Radius der Scheibe und Radius der Membran $= \delta$, ρ = Masse der Membran für die Flächeneinheit.

1. Die Normalfunktion u_s der Bewegungsgleichung ist die gleiche wie bei der freien Membran. Die Behandlung führt auf dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung (Fouriersche Gleichung) wie bei der freien Membran, nämlich:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu^2 w = 0; \quad n^2 = \frac{(\mu a)^2 S}{a^2 \rho}.$$

Die Lösung erfolgt in Besselfunktionen und zwar bei zentrosymmetrischen Einwirkungen in Funktionen 0ter Ordnung. Wegen der inneren Begrenzung müssen aber hier Besselfunktionen zweiter Art eingeführt werden. Die Lösung hat dann die Form:

$$w = \Sigma u_s = \Sigma [A_s J_0(\mu_s r) + B_s K_0(\mu_s r)].$$

Die erste Randbedingung lautet: $w = 0$ für $r = a$ und damit ist für jedes einzelne Glied der Summe:

$$u_s = A_s J_0(\mu_s a) + B_s K_0(\mu_s a) = 0.$$

$$\text{Oder: } B_s = -A_s \frac{J_0(\mu_s a)}{K_s(\mu_s a)}.$$

Ich bezeichne $\frac{J_0(\mu_s a)}{K_0(\mu_s a)}$ mit R .

$$u_s \text{ wird} = J_0(\mu_s r) - R K_0(\mu_s r). \quad (53)$$

Die Struktur von μ_s ist damit festgelegt. Noch nicht sind die Größen μ_s bestimmt. Sie werden aus den Wurzeln $\mu_s a$ der charakteristischen Gleichung ermittelt, die aus den inneren Randbedingungen hervorgeht (vgl. unter 3 ff.).

2. Die Grundgrößen T_s und Φ_s .

Zunächst ist wieder die Größe T_s zu berechnen.

$$T_s = \frac{\int u_s^2 dx}{a^2 \pi} \text{ vgl. (35)} = \frac{2\pi}{a^2 \pi} \int_b^a u_s^2(u_s r) r dr = \frac{2}{(\mu_s a)^2} \int_{\mu_s b}^{\mu_s a} u_s^2(x) x dx.$$

Das Integral läßt sich, da u_s als eine Lösung der einfachen Besselschen (Fourierschen) Differentialgleichung betrachtet werden kann, bekanntlich berechnen. Es wird zu:

$$\frac{(\mu_s a)^2}{2} [u_s'^2(a) + u_s^2(a)] - \frac{(\mu_s b)^2}{2} [u_s'^2(b) + u_s^2(b)].$$

Und da $u_s(a) = 0$ ist, vgl. oben, so wird:

$$T_s = [J_1(\mu_s a) - R K_1(\mu_s a)]^2 - \delta^2 \{ [J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)]^2 + [J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)]^2 \}. \quad (54)$$

Hat die Scheibe Masse $= M$, so ist dann, wenn die äußeren Kräfte auf dieses System Membran mit träger Scheibe wirken, in das T_s noch ein Betrag zuzufügen, der durch die Masse M bedingt ist. Der Zusatz zu $\varrho \int u_s^2$ wird $= \frac{M}{b^2 \pi} u_s^2(b)$. Der Anteil von T_s beträgt hiernach $\frac{\delta^2 M u_s^2(b)}{\varrho b^2 \pi}$. Dadurch wird insgesamt

$$T_s = [J_1(\mu_s a) - R K_1(\mu_s a)]^2 - \delta^2 \{ [J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)]^2 + \left(1 - \frac{M}{\varrho b^2 \pi}\right) [J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)]^2 \}. \quad (55)$$

Ferner kommt wie früher die Größe Φ_s in Betracht.

a) Eine Kraft P greift an der Scheibe an, dann ist

$$\Phi_s = [J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)] P. \quad (56)$$

b) Der Druck p wirkt auf Membran und Scheibe. Dann besteht $\Phi_s = p \int u_s dx$ aus je einem Teil für Scheibe und Membran. Es wird:

$$\begin{aligned} \Phi_s &= p [u_s(\mu_s b) b^2 \pi + \int_b^a u_s(\mu_s r) 2 r \pi dr] \\ &= a^2 \pi p [\delta^2 u_s(\mu_s b) + \frac{2}{(\mu_s a)^2} \int_{\mu_b}^{\mu_a} u_s(x) x dx] \\ &= a^2 \pi p \{ \delta^2 [J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)] + \frac{2}{\mu_s a} \{ [J_1(\mu_s a) \\ &\quad - R K_0(\mu_s a)] - \delta [J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)] \} \}. \quad (57) \end{aligned}$$

Die Funktion in der Klammer $\{ \}$ bezeichne ich mit Π . Dann ist $\Phi_s = a^2 \pi p \Pi$. Die Beziehung gilt auch für die zusammengesetzten Systeme, die unten behandelt werden, vorausgesetzt, daß die Wurzeln $\mu_s a$ bzw. $\mu_s b$ für diese Systeme eingesetzt werden.

3. Die Scheibe ist mit Masse belegt. Die innere Randbedingung fordert, daß bei $r = b$ die obige Gleichung für das Gleichgewicht zwischen der Trägheitskraft der Scheibe und der am Rand durch die Spannung der geneigten Membran bedingten elastischen Kräfte besteht. Die Randbedingung lautet:

$$2 b \pi S \frac{d u_s}{d r} + M n^2 u_s(b) = 0.$$

Daraus folgt die schon in der ersten Akademieabhandlung gegebene charakteristische Gleichung:

$$\frac{J_1(\mu b) K_0(\mu a) - J_0(\mu a) K_1(\mu b)}{J_0(\mu b) K_0(\mu a) - J_0(\mu a) K_0(\mu b)} = \frac{(\mu b) M}{2 b^2 \pi \varrho}. \quad (58)$$

Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Wurzeln μa dieser transzendenten Gleichung durch die obige Beziehung $n^2 = \frac{(\mu a)^2 S}{a^2 \varrho}$. Das Problem kann auch nach dem Prinzip der inneren erzwungenen Schwingungen behandelt werden, vgl. (62).

Von besonderem Interesse sind die Grenzfälle:

a) Die Scheibe ist masselos. Dann wird der Zähler der linken Seite der Gleichung $= 0$, oder:

$$J_1(\mu b) K_0(\mu a) - J_0(\mu a) K_1(\mu b) = 0. \quad (59)$$

Man kann aus der Lehre vom Zwang voraussagen, daß die Schwingungszahlen dieses Systems größer sind als die Schwingungszahlen der freien Membran ohne die Scheibe, deren Einfügung einen Zwang bedeutet.

b) Die Masse der Scheibe ist unendlich. Die Gleichung kann nur bestehen, wenn der Nenner der linken Seite $= 0$ wird. Oder die charakteristische Gleichung lautet jetzt:

$$J_0(\mu b) K_0(\mu a) - J_0(\mu a) K_0(\mu b) = 0. \quad (60)$$

Die Verhältnisse liegen hier genau so, wie wenn die Scheibe durch die unendlich große Trägheit in der 0 Lage festgehalten wird, d. h. die Gleichung gilt auch für eine ringförmige Membran (vgl. unter c). Die Schwingungszahlen liegen mit Ausnahme der Grundfrequenz, die unendlich klein ist, höher als bei der freien Membran, weil die unendlich große Masse ebenfalls wie ein Zwang wirkt (vgl. Rayleigh Sound).

c) Die Schwingungen einer zwischen zwei konzentrischen Kreisringen ausgespannten Membran. Die charakteristische Gleichung ist unter b) schon gegeben.

4. An der Scheibe greift eine Feder mit dem Elastizitätskoeffizienten $\Delta P / \Delta l = E$ an. Wenn die Scheibe Trägheit besitzt, so ergibt sich nach den allgemeinen Formeln:

$$2\pi b S \left(\frac{du_s}{dr} \right)_{r=b} = (E - Mn^2) (u_s)_{r=b}. \quad (61)$$

Das weitere ist aus der obigen Entwicklung unter 3 zu entnehmen.

Man kann das Problem aber auch noch anders behandeln, nach dem Prinzip der inneren erzwungenen Schwingung. Auf die Scheibe wirkt hierbei die periodische Kraft $P \cos qt$. Diese periodische Kraft wird erzeugt durch die elastische Kraft der Feder. Wenn w die Amplitude der Verrückung der Scheibe ist, dann ist $w \cdot E$ die Kraftamplitude. Und man erhält:

$$w \cos qt = \frac{w(Mn^2 - E) \cos qt}{\pi S} \sum \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}$$

$$\text{Oder: } \frac{\pi S}{Mn^2 - E} = \sum \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s} \quad (62)$$

5. Mit der Scheibe von der Masse M ist eine an Federn schwebende Masse m verbunden. Die Scheibe würde bei dem schalleitenden Apparat dem Hammer, die Masse m dem Amboß entsprechen.

Die Federn besitzen die Elastizitätskoeffizienten E_1 und E_2 . Die Verrückung der Masse sei $= x$. Die Verrückung der Scheibe $= w_s$. Die Gleichungen, die nach dem Prinzip der Analyse der einfachen harmonischen Schwingungen aufgestellt werden können, sind, wenn die unbekannte Frequenz $= q$ gesetzt wird:

$$1. w_s = A u_s \cos qt,$$

$$2. x = B \cos qt,$$

$$3. (x - w_s) E_1 + w_s M q^2 = -2\pi b S \frac{dw_s}{dr}, \quad (w_s \text{ und } \frac{dw_s}{dr} \text{ für } r = b \text{ berechnet}).$$

$$4. m\ddot{x} + E_2 x + E_1(x - w_s) = 0.$$

Die Gleichung 3 gibt das Gleichgewicht zwischen dem Zug der Feder 1 und dem Zug der Membran an der Scheibe an. Die Gleichung 4 ist die Bewegungsgleichung für die Masse m . Durch Einsetzen von 1 und 2 in 4 ergibt sich:

$$-m q^2 B + E_2 B + E_1(B - u_s A) = 0.$$

Daraus findet man die Beziehung zwischen den willkürlichen Konstanten:

$$B - u_s A = \frac{B(m q^2 - E_2)}{E_1} \quad \text{und} \quad A = \frac{B(E_1 + E_2 - m q^2)}{u_s E_1}.$$

Die Gleichung 3 wird zunächst zu:

$$(B - u_s A) E_1 + u_s A M q^2 = -2\pi b S \left(\frac{du_s}{dr}\right) A.$$

Durch Einsetzen der Größen der Konstanten A und B erhält man schließlich:

$$-\left(\frac{1}{u_s} \cdot \frac{d u_s}{d r}\right)_{r=b} = \frac{E_1 m q^2 - E_1 E_2}{2 b \pi S (E_1 + E_2 - m q^2)} + \frac{M q^2}{2 b \pi S}.$$

Oder ausgeschrieben:

$$(\mu_s b) \cdot \frac{J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)}{J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)} = \frac{1}{2 \pi S} \left\{ \frac{E_1 m q_s^2 - E_1 E_2}{E_1 + E_2 - m q_s^2} + M q_s^2 \right\}, \quad (63)$$

worin wie sonst $q^2 = \frac{\mu_s^2 S}{\rho}$ ist.

Die vorher behandelten Systeme, wie eine Membran mit träger Scheibe oder eine Membran mit Scheibe und Feder usw. ergeben sich ohne weiteres als Grenzfälle dieser Entwicklung.

Auch nach der Methode der inneren erzwungenen Schwingung lassen sich die Schwingungszahlen berechnen. Ich schreibe hier kurz die Formeln an: Wenn $w = P \cdot G(q^2)$ ist, worin $G(q^2)$ den Ausdruck bezeichnet:

$$\frac{1}{\pi S} \sum \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s},$$

dann ergeben sich die Schwingungszahlen aus der folgenden Gleichung:

$$m E_1 q^2 G(q^2) + m q^2 - E_1 E_2 G(q^2) = E_1 + E_2. \quad (64)$$

Die Berechnung ist zweifellos durch die Reihenentwicklung verwickelter als die Berechnung nach der ersten Methode.

6. An der Scheibe sind mit Federn zwei Massen aufgehängt. Sie würde dem Amboß und dem Steigbügel entsprechen, während die Scheibe dem Hammer entspricht. Die den vorigen Gleichungen entsprechenden Formeln lauten:

1. $w_s = A u_s \cos q t,$ 2. $x_1 = B \cos q t,$ 3. $x_2 = C \cos q t,$
4. $(x_1 - w_s) E_{12} + w_s M q^2 = -2 \pi b S \frac{d w_s}{d r},$
5. $m_1 \ddot{x}_1 + E_{23} (x_1 - x_2) + E_{12} (x_1 - w_s) = 0,$
6. $m_2 \ddot{x}_2 + E_3 x_2 + (x_2 - x_1) E_{23} = 0.$

Aus Gleichung 1, 2, 3, 5 und 6 ergeben sich die willkürlichen Konstanten, wie folgt:

$$B - A u_s = C \frac{(E_{23} + E_3 - m_2 q^2) m_1 q^2 - E_{23} E_3 + E_{23} m_2 q^2}{E_{12} E_{23}},$$

$$A u_s = C \times \frac{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4}{E_{12} E_{23}}.$$

Die Gleichung 4 hat dieselbe Form wie die Gleichung 3 des vorhergehenden Problems, nämlich:

$$\left[\frac{(B - A u_s) E_1}{A u_s} + M q^2 \right] \frac{1}{2 \pi b S} = - \frac{1}{u_s} \frac{d u_s}{d r}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann:

$$(\mu_s b) \frac{J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)}{J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)} = \frac{1}{2 \pi S} \times$$

$$\left\{ \frac{[-E_{23} E_3 + (E_{23} + E_3) m_1 q^2 + E_{23} m_2 q^2 - m_1 m_2 q^4] E_{12}}{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4} + M q^2 \right\}. \quad (65)$$

Die vorher behandelten Systeme erscheinen als besondere Fälle des allgemeinen jetzt untersuchten Systems. So ergibt sich z. B. das System Membran mit Hammer und Amboß, wenn $E_{23} = 0$ ist usw.

7. Die Statik des Systems: Membran mit Scheibe durch Besselfunktionen dargestellt.

Die statische Verrückung der Membran ergibt sich dann ohne weiteres aus den allgemeinen Formeln.

a) Für eine zentrische Kraft P ist

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{u_s(b) (u_s(r))}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (66)$$

Die Verrückung der Scheibe, d. h. der Membranpunkte $r = b$, wird wiedergegeben durch:

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{[u_s(b)]^2}{(\mu_s a)^2 T_s}.$$

Auf anderem Wege kann man ähnlich wie S. 15 zeigen, daß die Verrückung der Scheibe bei dieser Krafteinwirkung

$$= \frac{P}{2 S \pi} \operatorname{Inat} \left(\frac{1}{\delta} \right)$$

ist. Dann ist zu erwarten, daß die Reihe $\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Inat} \left(\frac{1}{\delta} \right)$ wird.

b) Für eine Druckwirkung p ist w der Scheibe

$$= \frac{a^2 p}{S} \Sigma \frac{\Pi u_s(b)}{(\mu_s a)^2 T_s} \quad (67)$$

in der Klammer (vgl. oben (57)).

Die Reihe Σ müßte nach ähnlichen Überlegungen wie vorher $= \frac{1 - \delta^2}{4}$ sein. Wenn keine Scheibe vorhanden ist, also $\delta = 0$ ist, geht der letzte Ausdruck in den entsprechenden für die freie Membran über vgl. (48).

8. Auslösung der Schwingungen. Es genügt, die allgemeine Gleichung nochmals hier anzuschreiben.

a) Auslösung durch eine zentrische Kraft:

$$w = \frac{P}{\pi S} \Sigma \frac{[u_s(b)]^2 \cos n_s t}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (68)$$

b) Auslösung durch einen Druck:

$$w = \frac{a^2 p}{S} \Sigma \frac{\Pi u_s(b) \cos n_s T_s}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (69)$$

9. Erzwungene Schwingungen.

Ich gebe wiederum nur die Formeln an:

a) Erregung durch eine Kraft $P \cos \nu t$ an der Scheibe:

$$w = \frac{P \cos \nu t}{\pi S} \Sigma \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}. \quad (70)$$

b) Erregung durch einen allgemeinen Druck $p \cos \nu t$:

$$w = \frac{a^2 p}{S} \Sigma \frac{\Pi u_s(b)}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}. \quad (71)$$

10. Mit dem System ist eine Luftsäule verbunden.

Die obige allgemeine Formel für die Verbindung eines Membransystems mit einer Luftsäule gibt unmittelbar die charakteristische Gleichung für das kombinierte System.

Die Beziehung lautet:

$$\cot Lq \sqrt{\frac{Q_L}{\varkappa}} = \frac{\pi a^4 q \sqrt{\varkappa Q}}{QS} \Sigma \frac{II^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}, \quad (72)$$

wenn man berücksichtigt, daß das Integral $\int u_s dx$ nach (57) $= a^2 \pi II$ ist.

Diese Gleichung umfaßt die Lösung für alle vorher behandelten Systeme mit angehängter Luftsäule. Also z. B. für das System Membran mit träger Scheibe oder Membran mit Scheibe und Gehörknöchelchen. Man muß nur hierzu die Wurzeln für die entsprechenden charakteristischen Gleichungen $\mu_s a$ ermitteln und in die Ausdrücke unter dem Summenzeichen eintragen. T_s ist unter Einbeziehung der Masse der Scheibe zu berechnen (vgl. S. 30).

Kreisförmige Membran mit bis zur Mitte reichendem starrem Stab (Hammer).

1. Die Normalfunktion u_s .

Das System ist nicht zentrosymmetrisch. Deshalb muß in die Differentialgleichung ebenso wie bei dem statischen Problem noch die Abhängigkeit von der zweiten räumlichen Koordinate, dem Winkel ϑ eingefügt werden. Die Behandlung der Bewegungsgleichung führt schließlich auf die Besselsche Differentialgleichung p ter Ordnung.

$$\frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_p}{dr} + \left(\mu^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) w_p = 0.$$

Die Lösung ergibt Besselsche Funktionen p ter Ordnung. p kann auch eine gebrochene Zahl usw. sein. Die Einführung von Bessel-Funktionen gebrochener Ordnung wird bei dem vorliegenden Problem notwendig. Die Grenzbedingungen lauten:

1. Für die Lage des Stabs oder $\vartheta = \pm \pi$ müssen die Verrückungen der Membran in einer geraden Linie erfolgen. Oder $w = a(a - r)$. a ist der Erhebungswinkel des Stabs. Diese erste Bedingung kann nur durch Reihen von Bessel-Funktionen erfüllt werden.

2. Für $r = a$ ist $w = 0$.

Da durch die Reihe, welche die Bedingung 1 erfüllt, nicht zugleich die Bedingung 2 erfüllt werden kann, muß die Lösung

noch eine zweite Reihenentwicklung enthalten, welche die Bedingung 1 nicht stört. Dies ist nur durch eine Reihe von Bessel-Funktionen gebrochener Ordnung möglich. Dann schreibt sich die Lösung an:

$$w = \sum a_p [J_p(\mu r)] \cos p \vartheta + \sum b_m [J_{m+\frac{1}{2}}(\mu r)] \cos (m + \frac{1}{2}) \vartheta.$$

Schließlich muß noch eine dritte analytische Festsetzung getroffen werden (vgl. oben S. 16). An der Stelle des Hammers hat nämlich die Differentialgleichung keine Geltung mehr, weil hier der Differentialquotient $\frac{\partial w}{\partial \vartheta}$ unstetig wird. Die notwendige analytische Beziehung wird hier gegeben durch das Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment, das die Membranspannung, und dem Drehmoment, das die äußeren Kräfte auf den Hammer ausüben.

Die Bedingung 1 lautet jetzt: $\sum (-1)^p a_p J_p(\mu r) = a a - a r$ in $a a$ und $a r$ müssen in Reihen von Bessel-Funktionen entwickelt werden und zwar nach verschiedener Ordnung. Die Entwicklung erfolgt nach dem Schema:

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \quad \text{und} \quad x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{2n+1}(x).$$

Daraus folgt für $\vartheta = \pm \pi$:

$$a(a-r) = a \left\{ a \left[J_0(\mu r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu r) \right] - \frac{2r}{\mu r} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\mu r) \right\}.$$

Es ergibt sich:

$$w_I = a \left\{ a \left[J_0(\mu r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu r) \cos 2k \vartheta \right] + \frac{2r}{\mu r} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\mu r) \cos (2k+1) \vartheta \right\}.$$

Zu beachten das + Zeichen vor der zweiten Reihe. Es wird notwendig durch die Beziehung $\cos (2k+1) \pi = -1$.

Die Bedingung 2 verlangt: Für $r = a$ ist $w_I + w_{II} = 0$.

Sie lautet:

$$\begin{aligned} & a \left\{ a \left[J_0(\mu a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu a) \cos 2k\vartheta \right] \right. \\ & \left. + \frac{2a}{\mu a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\mu a) \cos(2k+1)\vartheta \right\} \\ & = - \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a) \cos(m+\frac{1}{2})\vartheta. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von b_m wird nach dem Vorgang von Fourier beiderseits mit $\cos(m+\frac{1}{2})\vartheta$ multipliziert und von $-\pi$ bis $+\pi$ integriert. Die rechte Seite der Gleichung ergibt: $-\pi b_m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)$. Wenn man die auf der linken Seite vorkommenden Integrale auswertet, so folgt:

$$b_m = - \frac{4(-1)^m \alpha a}{(2m+1)\pi J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)} K_m(\mu a),$$

worin ist:

$$\begin{aligned} K_m = & J_0(\mu a) + (2m+1)^2 \left\{ -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(\mu a)}{(4k-1-2m)(4k+1+2m)} \right. \\ & \left. + \frac{2}{\mu a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1) J_{2k+1}(\mu a)}{(4k+1-2m)(4k+3+2m)} \right\}. \end{aligned} \quad (73)$$

Damit ist die Struktur der Normalfunktion festgelegt. Sie wird:

$$\begin{aligned} u_s = & J_0(\mu_s r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu_s r) \cos 2k\vartheta \\ & + \frac{2}{\mu_s a} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\mu_s r) \cos(2k+1)\vartheta \\ & - 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m K_m(\mu_s a) J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s r)}{(2m+1)\pi J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s a)} \cos(m+\frac{1}{2})\vartheta. \end{aligned} \quad (74)$$

2. Die Grundgrößen T_s und Φ_s .

$$T_s \text{ wird hier } = \frac{1}{a^2 \pi} \int_0^a \int_{-\pi}^{+\pi} u_s^2 r dr d\vartheta. \quad (75)$$

Die Berechnung des Integrals ist nicht einfach. Man kann hierzu den Greenschen Satz, den Rayl Sound I, S. 322 angewendet hat, umformen und erhält:

$$\iint_{0-\pi}^{a+\pi} u^2 r dr d\vartheta = \frac{2\mu}{a} \oint \left(\frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial r} \right) ds. \quad (76)$$

Die rechts stehende Integration ist über den ganzen Rand zu erstrecken, nämlich den Kreis entlang von $-\pi$ bis $+\pi$, dann den Stab hinauf und hinab. Beide Teile des Randintegrals führen wegen des verwickelten Aufbaues von u zu umständlichen Rechnungen, wenn auch eine Anzahl von Gliedern durch 0 werden ausfallen. Ich versage mir, hier die Rechnungen vor dem endgültigen Abschluß wieder zu geben. Die unmittelbare Integration, die zuerst wohl nach dem Winkel, dann nach r durchgeführt werden kann, dürfte vielleicht einfacher sein. Da es sich nicht um eine Integration in allgemeinen Ausdrücken zu handeln braucht, so erscheint auch eine graphische Integration nicht aussichtslos. Die Hauptanwendung findet die Entwicklung nach Normalkoordinaten bei dem System Membran usw. mit angehängter Luftsäule. Hier könnte wohl die Reduktion auf zwei Freiheitsgrade (vgl. unten) sehr nützlich sein.

In T_s ist noch ein Anteil vorhanden, der durch die Trägheit des Hammers bestimmt wird. Die Masse des Hammers reduziert man hierzu aus seinem Trägheitsmoment Θ auf den Mittelpunkt der Membran. Sie wird $= \Theta/a^2$. Für den Mittelpunkt ist $u_s = 1$. So ergibt sich der Zusatz für T_s zu $\frac{\Theta_H}{\rho a^4 \pi}$ vgl. unten (90).

Die zweite Grundgröße Φ_s wird nach der allgemeinen Formel (vgl. S. 29) gebildet.

a) Auf die Membran wirkt ein Druck p .

$$\Phi_s = p \int_0^a \int_{-\pi}^{+\pi} u_s r dr d\vartheta.$$

Da $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2k\vartheta d\vartheta$ und $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2k+1)\vartheta d\vartheta = 0$ ist, so fallen aus dem Integral u_2 und u_3 vgl. (74) heraus. Dadurch wird:

$$\begin{aligned} \Phi_s &= p \left\{ -\frac{2\pi a^2}{\mu_s a} J'_0(\mu_s a) - \frac{8}{\pi} \int_0^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s r)}{(2m+1)^2 J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s a)} r dr \right\} \\ &= \frac{2a^2 \pi p}{\mu_s a} \left\{ J_1(\mu_s a) - \frac{4}{\pi^2 (\mu_s a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m}{(2m+1)^2 J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s a)} \int_a^{\mu_s a} J_{m+\frac{1}{2}}(x) x dx \right\}. \end{aligned}$$

Das Integral $\int J_{m+\frac{1}{2}}(x) x dx$ wird man wohl ebenso wie unten (80) am besten in Reihen auswerten. Entwickelt man hierzu die Bessel-Funktion in Form der bekannten Reihe und integriert gliedweise, so erhält man schließlich:

$$\int_0^{\mu a} x J_{m+\frac{1}{2}}(x) dx = \frac{2(\mu a)^3 n! (2\mu a)^n}{(2n+1)! \sqrt{\frac{\pi \mu a}{2}}} N_m(\mu a),$$

worin N_m die Summe bedeutet:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2\nu} x^{2\nu}}{2^\nu \nu! (2n+3)(2n+5) \dots (2n+1+2\nu)(2n+5+4\nu)}.$$

Der Quotient dieses Integrals dividiert durch die Funktion $J_{m+\frac{1}{2}}$ ist gleich $\frac{2(\mu a)^2 N_m}{R_m}$. Zu R_m vgl. (80). Man erhält

$$\Phi_s = \frac{2a^2 \pi p}{\mu_s a} \left\{ J_1(\mu_s a) - \frac{16(\mu_s a)}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m(\mu_s a) N_m(\mu_s a)}{(2m+1)^2 R_m(\mu_s a)} \right\}.$$

Wenn man den Ausdruck in der Klammer $\{ \}$ mit $Z(\mu_s a)$ bezeichnet, so wird $\Phi_s = \frac{2a^2 \pi p}{\mu_s a} Z(\mu_s a)$. Oder

$$\int_0^{a+\pi} \int_{\pi}^{\pi} \mu_s r dr d\vartheta = \frac{2a^2 \pi}{\mu_s a} Z(\mu_s a). \quad (77)$$

b) Durch eine in der Mitte der Membran wirkende Kraft P wird der Stab herausgezogen. Arbeit wird nur an J_0 geleistet. Alle anderen Teile von u sind $= 0$, weil alle in u vorkommenden Bessel-Funktionen mit Ausnahme von J_0 für $r = 0$ zu 0 werden. J_0 selbst wird $= 1$. Also ist nach der Formel (33) $\Phi_s = P$.

3. Membran mit trägem Stab.

Zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung muß das Drehmoment, das die Spannung der Membran auf den Hammer ausübt, festgestellt werden (vgl. oben S. 48). Es ist:

$$Mom = 2S \int_0^a \frac{a-r}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\pi} dr.$$

Aus der Formel für u_s ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\pi} = \frac{2a}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu r)}{J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)}.$$

Daraus folgt:

$$Mom = \frac{4 a a}{\pi \mu} S \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m(\mu a) \left\{ \int_0^{\mu a} \left[\frac{\mu a}{x} J_{m+\frac{1}{2}}(x) - J_{m+\frac{1}{2}}(x) \right] dx \right\}}{J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)}.$$

Wie im folgenden gezeigt wird, läßt sich das Integral in der Klammer $\{ \}$ durch Reihen auswerten. Selbstverständlich ebenso $J_{m+\frac{1}{2}}$. Die drei Funktionen K_m , das Integral und $J_{m+\frac{1}{2}}$ bestimmen das Moment. Ferner läßt sich der Quotient $\frac{\text{Integral}}{J_{m+\frac{1}{2}}}$ in der Form ansetzen: $4 \mu a \frac{M_m}{R_m}$. Das Drehmoment der Spannung wird dann

$$Mom = \frac{16 a a^2}{\pi} S \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m M_m}{R_m}. \quad (78)$$

Jetzt ist das Gleichgewicht zwischen diesem Drehmoment und dem Moment der äußeren Kräfte zu ermitteln. In dem hier behandelten Fall wird das letztere Moment allein durch die Trägheitskräfte des Hammers erzeugt mit dem Trägheitsmoment Θ .

Es ist $= a n^2 \Theta = \frac{\alpha \mu^2 S \Theta}{\rho}$ und man erhält die charakteristische

Gleichung: $\frac{16 a a^2}{\pi} S \sum \frac{K_m M_m}{R_m} = \frac{\alpha \mu^2 S \Theta}{\rho}$ oder:

$$\frac{16}{\pi (\mu a)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m(\mu a) M_m(\mu a)}{R_m(\mu a)} = \frac{\Theta}{\rho a^4}. \quad (79)$$

Ich nenne die Funktion auf der linken Seite F .

Die nähere Begründung und die Kritik der Lösung ist in der Dissertation von Küffner (Medizin. Fakultät, München 1922) gegeben. Ich entnehme ihr, daß zur vollen Lösung der Zusatz zu w von Gliedern in der Form der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu_1}^{\mu_{\infty}} J_m(\mu r) \sin m \vartheta \cos (n t + \varepsilon)$$

vom analytischen Standpunkt notwendig ist. Diese Glieder entsprechen den Schwingungstypen \sim der in der Mitte belasteten Saite (vgl. Rayl, S. 206). Sie stören die Randbedingung für die Hammerlage nicht und tragen zu dem Moment M nichts bei. Sie fallen also bei der charakteristischen Gleichung weg, erzielen

aber die analytisch geforderte, zweifach unendliche Mannigfaltigkeit der Lösungen.

Aus der Abhandlung von Küffner gebe ich ferner eine Übersicht über die Berechnungsmethode. Die größten Schwierigkeiten bietet die Funktion K_m . Da nur eine Tabellierung der Bessel-Funktionen höherer Ordnung für ganzzahlige Argumente vorhanden ist, so muß man teilweise zu einer unmittelbaren Reihenentwicklung der Bessel-Funktionen, die in den Grundreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty}$$

enthalten sind, schreiben. Das Nähere ist in der angegebenen Abhandlung zu finden.

Auch die Funktion $J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)$ bzw. $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ ist für das vorliegende Problem am besten in Reihenform auszuwerten.

J wird dann

$$= \frac{x m! (2x)^m}{(2m+1)! \sqrt{\frac{\pi x}{2}}} R_m, \text{ worin}$$

$$R_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2^\nu \nu! (2m+3)(2m+5)\dots(2m+1+2\nu)}. \quad (80)$$

Unbedingt notwendig wird die Reihenentwicklung für das Integral

$$\int_0^{\mu a} \left[\frac{\mu a}{x} J_{m+\frac{1}{2}}(x) - J_{m+\frac{1}{2}}(x) \right] dx.$$

Es wird zu:

$$\frac{4 x^2 m! (2x)^m}{(2m+1)! \sqrt{\frac{\pi x}{2}}} M_m, \text{ worin } M_m$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2^\nu \nu! (2m+3)(2m+5)\dots(2m+1+2\nu) \times (2m+1+4\nu)(2m+3+4\nu)}.$$

Der Quotient aus dem Integral und der Funktion $J_{m+\frac{1}{2}}$ wird dann

$$\frac{4(\mu a) M_m(\mu a)}{R_m(\mu a)} \quad (82)$$

wie oben S. 52 schon angegeben. In der angegebenen Abhandlung ist das Nötige über die Konvergenz der Reihen enthalten.

4. Ausgezeichnete Punkte der Funktion $\sum \frac{K_m M_m}{R_m}$ (bzw. der charakteristischen Funktion).

Die ausgezeichneten Punkte sind 1. der Anfang der Funktion für $x = 0$, 2. die Unstetigkeitsstellen, an denen die Funktion $= \infty$ wird und 3. die Nullstellen. Die beiden letzteren Punkte sind von wesentlich physikalischer Bedeutung.

1. Für $x = 0$ bekommt die Funktion einen Grenzwert. Da nämlich die Funktion K_m für $x = 0$ den Wert des 0ten Gliedes $= \frac{-4}{(2n-1)(2n+3)}$, M_m den Wert $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$, R_m den Wert 1 erhält, so ergibt sich für

$$\sum \frac{K_m M_m}{R_m} : -4 \sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)^2}.$$

Die Reihe läßt sich in geschlossener Form summieren. Sie wird zu $-\frac{(16 - \pi^2)}{64}$, vgl. Schaetz, Manuskript S. 22. Also wird

$$\left(\sum \frac{K_m M_m}{R_m} \right)_{x=0} : \frac{16 - \pi^2}{16} = 0.383150.$$

Auch der Differentialquotient von $\sum \frac{KM}{R}$ läßt sich für die Stelle $x = 0$ bestimmen. Da $\frac{dK_m}{dx} = \frac{dM_m}{dx} = \frac{dR_m}{dx} = 0$ ist, so wird auch $\frac{d}{dx} \left(\frac{KM}{R} \right)_{x=0} = 0$.

2. Die Unendlichkeitsstellen sind durch das Nullwerden des Nenners, d. h. von R_m bzw. $J_{m+\frac{1}{2}}$ bedingt. Da die Bessel-Funktionen gebrochener Ordnung in endlichen Reihen dargestellt werden können, lassen sich die Gleichungen für das Nullwerden von $J_{m+\frac{1}{2}}$ leicht angeben.

Für $m = 0$ wird $J_{m+\frac{1}{2}}$ zu $J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi x/2} \cdot \sin x$. (Ich lasse den Faktor $\sqrt{\pi x/2}$ weiterhin aus.) Also $J_{\frac{1}{2}} \sim \sin x$. $\sin x$ wird 0 für $x = m\pi$, also sind Unstetigkeitsstellen für $x = \pi = 3.14159$, $x = 2\pi = 6.28319$ usw. vorhanden. Für $m = 1$ soll $J_{m+\frac{1}{2}} = J_{\frac{3}{2}} = \frac{\sin x}{x} - \cos x = 0$ werden, oder $\tan x = x$, d. h. es resultiert die bekannte transzendente Gleichung mit den Lösungen

$x = 0, 4.4934, 7.7253$ usw. vgl. Jahnke-Emde S. 3. Für $m = 2$ wird $J_{m+\frac{1}{2}} = J_{\frac{3}{2}}$ zu $\left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x$ oder $\tan x = \frac{3x}{3-x^2}$. Durch Ausprobieren (regula falsi) findet man $x = 5.768$. Für $m = 3$ oder $J_{m+\frac{1}{2}} = J_{\frac{7}{2}} = \left(\frac{16}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \sin x - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \cos x = 0$ oder $\frac{15x - x^3}{15 - 6x^2} = \tan x$ findet man ebenso $x = 6.9874$. Alle weiteren Unstetigkeitsstellen liegen über $x = 7$.

3. Die Nullstellen lassen sich nur durch Ermittlung des ganzen Verlaufs der charakteristischen Funktion F' feststellen, und durch Interpolation des Nullwertes. Sie werden, wie die Schlußzusammenstellung zeigt, gefunden zu: $x = 2.417, 4.139, 5.222, 5.960$ und 6.769 .

5. Diskussion der Funktion $F' = \frac{16}{\pi x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m M_m}{R_m}$.

Die Funktion F' ist mit 100 multipliziert in der Tabelle für eine Reihe von Argumenten ausgewertet.

Tabelle.

$x = 0$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.4	2.417	2.5	3.0
$F' = \infty$	+ 767.5	+ 175.2	+ 64.78	+ 22.82	+ 1.061	0	- 4.516	- 92.19
$x = 3.142$	3.5	4.0	4.1	4.139	4.2	4.493	4.5	5.0
$F' = \mp \infty$	+ 37.95	+ 6.426	+ 1.964	0	- 2.820	$\mp \infty$	+ 678.1	+ 7.654
$x = 5.222$	5.5	5.768	5.8	5.9	5.960	6.0	6.283	6.5
$F' = 0$	- 7.262	$\mp \infty$	+ 47.27	+ 5.79	0	- 4.881	$\mp \infty$	+ 19.85
$x = 6.769$	6.9	6.987	7.0					
$F' = 0$	+ 8.132	$\mp \infty$	+ 96.10					

Die Schnittpunkte dieser Funktion mit der zur Abszisse parallelen Geraden mit dem Ordinatenwert $\frac{\Theta_x}{\rho a^4}$ stellen die Lösung der Gleichung dar. Sie geben die Schwingungszahlen durch die Beziehung $n = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$ an. Die Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte der Kurve sind physikalisch von großer Bedeutung.

Die Nullpunkte geben die Lösung für das Verhältnis $\frac{\Theta}{\rho} = 0$ oder für die Masse des Hammers = 0 an. Die Unendlichkeits-

punkte geben die Lösung für das Unendlichwerden der Masse an. Der erste Nullpunkt stellt die Hauptschwingung der Membran mit eingefügtem masselosen Stab dar. Seine Größe ist ein bemerkenswertes Beispiel für das Prinzip des Zwangs. Die Einfügung des masselosen Hammers ruft keine Vermehrung der Massenwirkung hervor. Dagegen bedeutet sie einen Zwang. Die Schwingungszahl muß also gegenüber der Hauptschwingungszahl der hammerlosen Membran vergrößert sein. In der Tat ist dies der Fall. Das μa der Hauptschwingung für die einfache hammerlose Membran ist = 2.404, für die Membran mit masselosem Hammer 2.417. Der Zwang ist also nur verhältnismäßig klein. Nach dem von Rayleigh ausgearbeiteten Prinzip des Zwangs müssen die sämtlichen Schwingungen der Membran mit Hammer zwischen den Schwingungszahlen für die hammerfreie Membran liegen.

Membran

frei	2.404	3.832	5.135	5.520	6.379
mit Hammer	2.417	4.139	5.222	5.960	6.769

Die Zusammenstellung der Schwingungszahlen zeigt diese wichtige Beziehung. Das Prinzip ermöglicht für die höheren Obertöne die Schätzung der Schwingungszahlen für die Hammer-Membran aus den Schwingungszahlen der hammerlosen Membran auf 2—3% genau.

Von noch größerer Bedeutung sind die Unstetigkeitspunkte. Sie geben die Schwingungszahlen für die Masse des Hammers $=\infty$ an. Eine unendliche Masse wirkt wie ein Festhalten. So stimmen die oben angegebenen Größen für μa , die diesen Punkten entsprechen, überein mit den Größen von μa für den festgehaltenen Hammer. Für das letztere System ist schon von Rayleigh ohne Bezugnahme auf das Problem des Trommelfells die Lösung gegeben worden. Die Erscheinung entspricht dem Theorem von Rayleigh, daß das Unendlichwerden einer Masse bei gekoppelten Systemen bzw. einer diskreten Masse bei kontinuierlichen Systemen dieselben Schwingungszahlen hervorruft, die ein unendlich großer Zwang bewirkt. Nur wird die Folge der gesamten Schwingungszahlen im ersteren Fall um eine Ordnung erniedrigt, im anderen erhöht. Der Grundton wird im ersten Fall unendlich, der erste Oberton wird gleich dem Grundton des Systems bei unendlich

großem Zwang. Die Wichtigkeit der Unendlichkeitsstellen liegt vor allem darin, daß die Kurve von ∞ ab außerordentlich steil abfällt, so daß selbst bei verhältnismäßig kleiner Masse des Hammers die Schwingungszahl nur wenig größer ist als bei unendlicher Masse. Wenn, wie dies von mir und Prof. Broemser gefunden worden ist, das Trägheitsmoment des Gehörknöchelchensystems $= 2.5 \times 10^{-3}$, die Dicke des Trommelfells $= 0.01$ und sein Radius $= 0.45$ cm ist, so fallen die Obertöne außerordentlich nahe hinter die Unendlichkeitsstellen. Z. B. der zweite Oberton kurz hinter $\mu a = 4.5$, etwa bei 4.493, der dritte Oberton zwischen 5.768 und 5.8. Diese Tatsache kann man unbedenklich zu einer Verallgemeinerung benutzen. Die Obertöne des wirklichen Trommelfells werden sehr nahe denjenigen liegen, die bei festgehaltenen Gehörknöchelchen erzeugt werden.

Die ganze Beziehung kann man in dem Satz zusammenfassen: Die Schwingungszahlen liegen für beliebige Massenverhältnisse von $\infty - 0$ jeweilig in den Bezirken von $F = \infty$ bis $F = 0$.

6. Die Knotenlinien.

Für die Untersuchung der Knotenlinien der Membran, deren Verlauf $r = f(\vartheta)$ analytisch durch die Gleichung $w = 0$ für ein bestimmtes μa gegeben ist, kann man folgenden aus den physikalischen Verhältnissen abgeleiteten Satz aufstellen. Der Hammer kann einen Teil einer Knotenlinie für die Normalschwingungen nur dann bilden, wenn bei diesen Schwingungen keine Kraft an ihm wirkt. Und dies ist nur der Fall, wenn sich die Ausbuchtungen seitlich von dem Hammer spiegelbildlich gleichen, also von der Form \sim sind. Oder analytisch gesprochen bei Schwingungen, die in der Zusatzreihe $\sum J_m \sin m \vartheta$ gegeben sind (vgl. oben S. 52). Für die Schwingungen, deren Schwingungszahl

durch die Gleichungen $F = \frac{\Theta}{Q a^4}$ bestimmt ist, fällt die Linie des

Hammers nicht mit einer Knotenlinie zusammen. Die Knotenlinien können im allgemeinen nur durch den Drehpunkt des Hammers an der Peripherie des Kreises gehen. Einen weiteren Anhaltspunkt für die Bildung der Knotenlinien kann man durch Betrachtung des Übergangs von den Schwingungen des im Raum festgehaltenen Hammers zu dem System mit masselosem Hammer gewinnen. So kann man sich folgendes Bild machen:

Bei dem Grundton der Membran mit unendlicher Hammermasse schwingt die Membran, ohne daß eine Knotenlinie in ihr selbst vorhanden wäre, um den Hammer als Knotenlinie. In diese Linie muß die Knotenlinie des ersten Obertons des Systems mit wachsender Masse des Hammers übergehen. Sie läuft durch den Drehpunkt des Hammers, umschließt ihn um so enger, je größer seine Masse ist. Einen analytischen Anhaltspunkt kann man wohl in diesem Fall noch verhältnismäßig leicht durch Feststellung von w für den Radiusvektor $\vartheta = 0$ gewinnen. (Für einen raschen Überblick wäre μa etwas kleiner als 2.417, $r = \frac{1}{4} a$ und $\frac{3}{4} a$ zu wählen.) Auch für den zweiten Oberton kann man den Verlauf der Knotenlinien auf Grund von ähnlichen Überlegungen skizzieren. Knotenlinien bei unendlich großer Masse des Hammers sind der Hammerradius und die Radien im Abstand $= \pm 120^\circ$ vom Hammer.

7. Mit dem Anfang des Hammers sind zwei an Federn aufgehängte Massen (Amboß und Steigbügel) verbunden.

Die Behandlung ist ganz analog des ähnlichen Problems für die mit zentrischer Scheibe versehene Membran (vgl. S. 43). Die Gleichungen, die das System charakterisieren, lauten:

$$1. w_s = a a \cos q t, \quad 2. x_1 = B \cos q t, \quad 3. x_2 = C \cos q t,$$

$$4. (x_1 - w_s) E_{12} + \frac{q^2 \Theta w_s}{a^2} = \frac{16 w_s}{a^2} S \sum \frac{K_m M_m}{R_m},$$

$$5. m_1 \ddot{x} + E_{12} (x_1 - x_2) + E_{12} (x_1 - w_s) = 0,$$

$$6. m_2 \ddot{x} + E_3 x_2 + (x_2 - x_1) E_{23} = 0.$$

Hierin ist w_s die lineare Verrückung der Spitze des Hammergriffes. Auf diesen Punkt sind alle anderen Verrückungen und Koeffizienten bezogen (vgl. S. 21).

Aus Gleichungen 1, 2, 3, 5, 6 ergeben sich die willkürlichen Konstanten ähnlich wie früher, zu:

$$B - a a = C \frac{(E_{23} + E_3 - m_2 q^2) m_1 q^2 - E_{23} E_3 + E_{23} m_2 q^2}{E_{12} E_{23}},$$

$$a a = C \frac{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4}{E_{12} E_{23}}.$$

Die Gleichung 4 hat die Form:

$$\frac{(B - a a) E_{12}}{a a} + \frac{q^2 \Theta}{a^2} = \frac{16}{\pi} S \sum \frac{K_m M_m}{R_m}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann:

$$\sum \frac{K_m M_m}{R_m} = \frac{\pi}{16 S} \times \quad (83)$$

$$\left\{ \frac{[-E_{23} E_3 + (E_{23} + E_3) m_1 q^2 + E_{23} m_2 q^2 - m_1 m_2 q^4] E_{12}}{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4} + \frac{\Theta q^2}{a^2} \right\}.$$

Die Systeme, Membran mit trägem Hammer oder Membran mit massenlosem Hammer und Feder oder Membran mit trägem Hammer und durch Federn mit dem Hammer verbundenen Amboss sind selbstverständlich Spezialfälle dieses allgemeinsten Systems.

Wenn an den Massen Θ/a^2 und m_1 Federzüge mit den Koeffizienten E_1 und E_2 angreifen, die von festen Wänden ausgehen, vgl. Fig. 2, dann ist statt $\Theta/a^2 q^2$ und $m_1 q^2$: $\Theta/a^2 q^2 - E_1$ und $m_1 q^2 - E_2$ in die Gleichung einzusetzen.

8. Statik des Hammermembransystems.

a) Für eine zentrisch wirkende Kraft P , bzw. das Drehmoment $P \cdot a$. Da wie oben entwickelt für diesen Fall $\Phi_s = P$ ist, wird für das Gleichgewicht

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{u_s(r, \vartheta)}{(\mu_s a)^2 T(\mu_s a)}.$$

Handelt es sich um die Erhebung des Mittelpunktes, so wird $u_s = 1$ und

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{1}{(\mu_s a)^2 T(\mu_s a)}. \quad (84)$$

Diese Formel muß dasselbe ergeben, wie die mit Fourierschen Reihen gefundene Formel S. 16, wenn das System aus Membran und Hammer allein besteht bzw. die darin vorkommenden $\mu_s a$ die Lösungen der charakteristischen Gleichung (79) sind. Im übrigen gilt die Formel für alle behandelten Systeme, auch für die Systeme von Nr. 7, wenn die entsprechenden Wurzeln eingesetzt werden.

b) Einwirkung eines Drucks p . Für das Gleichgewicht ergibt sich

$$w = \frac{2 a^2 p}{S} \sum \frac{Z(\mu_s a) u_s(r, \vartheta)}{(\mu_s a)^3 T(\mu_s a)}. \quad (85)$$

Diese Beziehung muß ebenfalls mit der für die Statik der Hammermembran durch Fourier-Entwicklung gewonnenen übereinstimmen. Für den Mittelpunkt der Membran wird

$$w = \frac{2 a^2 p}{S} \sum \frac{Z(\mu_s a)}{(\mu_s a)^3 T(\mu_s a)}.$$

9. Auslösung der Schwingungen. Es genügt, die Gleichung anzuschreiben:

a) Auslösung durch eine zentrische Kraft P :

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{u_s(r, \vartheta) \cos n_s t}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (86)$$

b) Auslösung durch einen Druck p :

$$w = \frac{2 a^2 p}{S} \sum \frac{Z(\mu_s a) u_s(r, \vartheta) \cos n_s t}{(\mu_s a)^3 T(\mu_s a)}. \quad (87)$$

10. Erzwungene Schwingungen. Ich gebe wiederum nur die Formeln an:

a) Erregung durch eine Kraft $P \cos \nu t$:

$$w = \frac{P \cos \nu t}{\pi S} \sum \frac{u_s(r, \vartheta)}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (88)$$

b) Erregung durch einen allgemeinen Druck:

$$w = \frac{2 a^2 p}{S} \cos \nu t \sum \frac{Z(\mu_s a) u_s(r, \vartheta)}{(\mu_s a)^3 T(\mu_s a)}. \quad (89)$$

11. Hammermembran mit Gehörknöchelchen und angehängter Luftsäule. Die charakteristische Gleichung läßt sich nach der oben (43) angegebenen Formel unmittelbar anschreiben. Sie lautet:

$$\cot Lq \sqrt{\frac{QL}{\kappa}} = \frac{4 \pi a^4 q \sqrt{\kappa QL}}{QS} \sum \frac{Z^2(\mu_s a)}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^4 T_s}. \quad (90)$$

Hierin sind ebenso wie o. S. 47 für $\mu_s a$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für das System Hammermembran mit Gehörknöchelchen einzusetzen und T_s muß den Zusatz enthalten, der durch das Trägheitsmoment des Hammers bedingt ist.

12. Einfluß der Luft der Paukenhöhle. Wenn die Luftsäule, die an die Hammermembran angehängt ist, im Anfang durch eine starre Wand verschlossen ist, so lautet die charakteristische Gleichung:

$$\tan Lq \sqrt{\frac{QL}{\kappa}} = \frac{4 \pi a^4 q \sqrt{\kappa QL}}{QS} \sum \frac{Z^2(\mu_s a)}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^4 T_s}. \quad (91)$$

Wenn die Luft ohne Trägheit angenommen wird, so entwickelt sich hieraus, da \tan sehr klein ist:

$$\frac{1}{E'_L} = \frac{4 a^4 \pi}{S} \sum \frac{Z^2 (\mu_s a)}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^4 T_s},$$

worin E'_L den Volumelastizitäts-Koeffizienten des Luftraums bedeutet. Wenn wie bei dem Ohr außen die Luftsäule des äußeren Gehörgangs und innen sich der abgeschlossene Luftraum der Paukenhöhle befindet, so ergibt sich nun für das Gesamtsystem unter Berücksichtigung aller Teile Membran mit der ganzen Kette der Gehörknöchelchen, Luftsäule im äußeren Gehörgang und Luft der Paukenhöhle die folgende charakteristische Gleichung:

$$4 a^4 \pi \cdot q \sqrt{\kappa \varrho_L} \frac{\tan Lq \sqrt{\frac{\varrho_L}{\kappa}} - E' Q}{\pi Q S} \sum \frac{Z^2 (\mu_s a)}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^4 T_s} = 1. \quad (92)$$

Annäherungsmethoden für die Berechnung der Schwingungszahlen.

Die strenge Berechnung der Modelle des schalleitenden Apparates des Ohrs sind als Grundlage für die Durchrechnung des wirklichen Trommelfells von ausschlaggebender Bedeutung. Aber schon in der ersten Akademieabhandlung habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß Annäherungsmethoden dann notwendig werden, wenn sich die wirklichen Systeme von dem Schema der mathematischen Modelle zu weit entfernen. Denn die strenge Berechnung dürfte mit den in dieser Abhandlung behandelten Systemen ihr Ende gefunden haben. Zu der angenäherten Berechnung können verschiedene Methoden benutzt werden.

1. Wenn die Abweichungen des wirklichen Systems von demjenigen des Modells nur gering sind, dann reichen vielleicht die von Rayleigh, Sound Art. 90/91 und 140 für die Saite S. 185, 186 für den Stab, S. 209 für Membranen, deren Begrenzung nur wenig von dem Kreis abweicht, vorgeschlagenen Annäherungsmethoden.

2. Für die Ermittlung der Hauptschwingung ist am vorteilhaftesten die Methode, die Rayleigh, Sound I, Art. 89 behandelt. Das System führt hierbei eine vorgeschriebene Bewegung von

einem Freiheitsgrad aus. Für sie wird die potentielle und kinetische Energie ermittelt und aus dem Satz von der lebendigen Kraft die Schwingungszahl abgeleitet. Sie führt im allgemeinen zu sehr guten Annäherungen, von denen ich in dem Abschnitt 5 einige Beispiele für Membransysteme geben werde.

3. Das Prinzip der Massenkonzentration. Ich habe in der ersten Akademieabhandlung S. 308, dann in der zweiten Abhandlung S. 147 das Nötige hierüber gesagt.

4. Für die Berechnung einer Oberschwingung ist eine Methode sehr gut anwendbar, die darin besteht, daß man die Zahl der Freiheitsgrade durch eine den Forderungen des Problems angemessene Festsetzung auf zwei Freiheitsgrade reduziert. Sie ist wohl hauptsächlich für die Verbindung eines Membransystems mit einer Luftsäule anwendbar. Die hierzu notwendige Zerlegung in zwei Einzelsysteme kann man so erhalten, daß man einmal die Masse eines charakteristischen Teils $= 0$ setzt, die Schwingungszahl hierfür bestimmt und für das zweite Einzelsystem die übrige Masse $= 0$ setzt und wieder die Schwingungszahl hierfür berechnet, z. B. bei dem System Membran mit Scheibe in der Mitte zuerst die Masse der Membran und für die Gewinnung der zweiten Einzelfrequenz die Masse der Scheibe $= 0$ setzt. Die Berechnung der beiden Frequenzen des Gesamtsystems erfolgt nach der ersten Akademieabhandlung S. 291 (4).

5. Um ein Urteil über die Leistungen dieser angenäherten Methoden zu gewinnen, teile ich die Ergebnisse einiger Berechnungen mit.

Die Hauptfrequenz einer freien Membran fällt nach der Rayleigh-Methode um 0.4% zu hoch aus. Das System: „Membran mit zentrischer Scheibe, die Scheibe masselos, Verhältnis der Radien der Scheibe und des äußeren Kreises $= 0.2$ “ erhält durch die angenäherte Berechnung einen um 1.1% zu hohen Wert. Für einen Membranring fällt unter denselben Verhältnissen die Frequenz 3.2% zu hoch. Aus der Reduktion auf 2 Freiheitsgrade ergibt sich für das System: „träge Membran mit träger Scheibe in der Mitte“ die Hauptschwingung um 2% und die Oberschwingung um 4.2% zu hoch. Ebenso bei dem System freie träge Membran mit angeschlossener Luftsäule, Hauptschwingung 5.3% zu hoch, Oberschwingung 13% zu niedrig.

Die Schwingungszahlen der Ohrmodelle und des wirklichen Ohrs.

Eine wesentliche Größe für die Bewertung der Trägheitswirkung ist das Trägheitsmoment der Gehörknöchelchen für das Achsenband als Drehungsachse. Von Prof. Broemser und mir ist es zu rund 2.5×10^{-3} gmcm² ermittelt worden. Durch ein rechnerisches Verfahren, das einer gewissen allgemeinen Anwendung fähig ist, kann man das Verhältnis zwischen der Trägheit der Gehörknöchelchen und der Membran auf das System Scheibe mit Membran übertragen. Die Membran ist an der Umgrenzung festgelegt. Man nehme nun an, daß sie sich wie ein Konus bewegt, d. h. sich wie ein System von Stäben um die Peripherie als Achsen dreht. So erhält man „das Trägheitsmoment“ der Membran folgendermaßen:

$$\Theta = \varrho_M \int_0^a 2\pi r dr (a - r)^2 = \frac{a^4 \pi \varrho_M}{6}$$

(ϱ_M = Masse der Membran für die Flächeneinheit).

Das Verhältnis der Trägheitswirkung der Gehörknöchelchen und der Trägheitswirkung des Trommelfells ist dann:

$$R = \frac{\Theta \text{ Gehörkn.}}{\Theta \text{ Trommelfell}} = \frac{6 \Theta \text{ Gehörkn.}}{a^4 \pi \varrho_M},$$

Bei dem wirklichen Trommelfell würde dieses Verhältnis

$$R = \frac{6 \times 2.5 \times 10^{-3}}{0.45^4 \pi \times 0.01} = 13.4$$

sein. In der Formel für die Schwingungen einer Membran mit Scheibe tritt das Verhältnis $\frac{\varrho \text{ Sch.}}{\varrho_M}$ vgl. (58) auf. Man kommt zu ihm durch eine Reduktion des Trägheitsmoments der Membran auf die Peripherie der Scheibe. Man erhält so ähnlich wie vorher das Trägheitsmoment der Membran

$$= \frac{\pi \varrho_M (a - b)^3 (a + 3b)}{6}.$$

Die Reduktion auf die Peripherie erfolgt durch die Division mit dem Quadrat des „Hebels“ = $(a - b)^2$. Die reduzierte Masse wird dann

$$= \frac{\pi}{6} \cdot a^2 \varrho_M (1 - \delta) (1 + 3\delta), \text{ worin } \delta = \frac{b}{a}$$

ist. Diese reduzierte Masse der Membran steht in dem Verhältnis zur Masse der Scheibe wie $1/R$ und es existiert die Beziehung:

$$\frac{\varrho_{Sch}}{\varrho_M} = \frac{R}{6} \cdot \frac{(1 - \delta) (1 + 3\delta)}{\delta^2}.$$

Wenn nun $\delta = 0.2$ ist, was eine Koppelungszahl von ungefähr 0.5 für die Verbindung Scheibe mit Membran ergibt, und wenn R aus der obigen Zahl entnommen wird, dann erhält man:

$$\frac{\varrho_{Sch}}{\varrho_M} = \frac{13.4}{6} \times \frac{0.8 \times 1.6}{0.04} = 71.3.$$

Berechnet man jetzt aus diesen Daten die zwei ersten Wurzeln der charakteristischen Gleichung für das System Membran mit Scheibe und Membran mit Stab, so kommt man in beiden Fällen zu ziemlich denselben Zahlen, nämlich

Membran mit Scheibe $\delta = 0.2$:	Für die Grundschiwingung	$\mu a = 0.70$.
	Die erste Oberschiwingung	" = 3.7.
	Die zweite Oberschiwingung	" = 7.8.
Membran mit Stab:	Die Grundschiwingung	" = 0.65.
	Die erste Oberschiwingung	" = 3.3.

Ich füge noch hinzu: Für eine „Membran, frei ohne Belastung“ ist die Grundfrequenz bestimmt durch . $\mu a = 2.404$.

Für Membran mit massenloser Scheibe . . . „ = 2.575.

Für einen Membranring „ = 3.81.

(Jedesmal $\delta = b/a = 0.2$.)

3. Ergebnisse der Theorie für die Physiologie der Schalleitung.

Meine Abhandlung ist in der Hauptsache der mathematischen Behandlung einiger Modelle gewidmet, die dem wirklichen Aufbau des Ohrs sehr nahe liegen. Die Annäherung ist bei dem Modell III so weit erfüllt, daß man ebenso gut mit ihm hören würde wie mit dem wirklichen. Die Mechanik des schalleitenden Apparates ist dadurch sowohl nach der statischen als nach der dynamischen Seite wesentlich weiter entwickelt, als dies bis jetzt der Fall war. Besonders muß man sich darüber wundern, daß die an sich ein-

fachere Statik gar nicht behandelt worden ist. Aus ihr allein können außerordentlich wichtige Folgerungen gezogen werden. Ich behandle zunächst das Grundproblem: Warum ist das Trommelfell mit den Gehörknöchelchen überhaupt vor die Labyrinthöffnung vorgelagert? Man wird geneigt sein, als alleinigen Zweck die Vergrößerung der Fläche, auf welche die Schallwellen auftreffen, gegenüber der Fläche des Labyrintheingangs anzunehmen. Das Kolbenmodell zeigt, daß in der Tat die Empfindlichkeit unter sonst gleichen Verhältnissen bei dem Menschenohr um das 20 fache gesteigert wird. Es wird sich aber zeigen, daß die Einschaltung der Gehörknöchelchenkette mit ihren nicht absolut engen Kopplungen den Schluß nicht zu einem zwingenden macht, abgesehen davon, daß die Einschaltung des Trommelfells und der Gehörknöchelchenkette einen dynamischen Nachteil durch die Vermehrung der Masse bedingt. Am sichersten kommt man zu einem Urteil, wenn man sich die jetzt noch nie aufgeworfene Frage vorlegt: Was geschieht, wenn das Trommelfell mit der Gehörknöchelchenkette weggenommen wird? Die Schallwellen treffen dann unmittelbar auf die zwei durch Membranen verschlossenen Öffnungen des Labyrinths der fenestra vestibuli (fenestra ovalis) und der fenestra cochleae (fenestra rotunda). Wirkt nun auf beide Öffnungen wie bei einer gleichmäßig auftreffenden Welle der gleiche Druck, so kann keine Bewegung der Labyrinthlymphe stattfinden. Der Satz leuchtet wohl von selbst ein. Aber eine kleine mathematische Entwicklung gibt sicherere Ergebnisse. Ein von starren Wänden begrenzter Raum sei mit einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt. Er besitzt zwei mit Membranen oder Membranen mit Platten oder Kolben mit Federn usw. verschlossene Öffnungen. Auf die eine Öffnung wirkt der Druck p_1 , auf die andere der Druck p_2 . Der Druck im Innern sei $= p_i$. Wenn E' der Volumelastizitäts-Koeffizient des Verschlusses ist, d. h. der Quotient aus auf den Verschuß wirkender Druckdifferenz und der Ausbauchung (bzw. Volumverrückung), dann besteht die Beziehung $p_1 - p_i = E' V$. Ebenso $p_i - p_2 = E'_2 V$. Eliminiert man p_i , so erhält man $p_1 - p_2 = V(E'_1 + E'_2)$. Wenn nun $p_1 = p_2$ ist, so ist die Volumverrückung $V = 0$, ganz unabhängig von der Größe von E'_1 und E'_2 und damit unabhängig von der Größe der Öffnungen und der Spannung der Membran.

Unter der Einwirkung von Schwingungen kann aber eine Bewegung der Lymphe hervorgerufen werden, wenn die zweite Öffnung in den „Schallschatten“ gebracht wird. Das geschieht unter normalen Verhältnissen so, daß die Schallwellen auf das Trommelfell auftreffen, hinter dem die Luft der Paukenhöhle sich befindet. (Selbstverständlich darf aber der Volumelastizitäts-Koeffizient der Luft in der Paukenhöhle nicht so groß sein, daß der Druck durch das Trommelfell sich im wesentlichen ungeschwächt hindurch fortpflanzt.) Berechnungen des E' für die Paukenhöhle aus dem Luftvolumen der Paukenhöhle und experimentelle Bestimmungen haben dies erwiesen. Man kann schließlich die paradox klingende Behauptung aufstellen, daß die Schnecke bis in den Nasenrachenraum oder bis zur anderen entgegengesetzten Seite des Kopfes reichen müßte, damit die zweite notwendige Öffnung des Labyrinths in den Schallschatten kommt, wenn nicht der schalleitende Apparat vorgeschaltet wäre. Nun haben die Otiater beobachtet, daß nach vollständigem Verlust des Trommelfells, wenn nur der Steigbügel erhalten bleibt, das Gehör wohl geschädigt ist, aber wesentlich nur für die tiefen Töne. Wie können die Schallwellen nach dem Vorhergesagten überhaupt wirken? Hier wird man darauf aufmerksam, daß die fenestra cochleae ganz versteckt hinter einem Wulst, dem Promontorium, in einer trichterähnlichen Höhle liegt, der Fossula fenestrae cochleae. Durch diesen Vorsprung kann ein Schallschatten bedingt sein. An einem geeigneten Modell ausgeführte Experimente bestätigen diese Annahme. Wenn man eine Röhre ähnlich so bildet, wie in der Fig. 1 das Labyrinth angedeutet ist, so erhält man keine Schwingungen, wenn man die Schallwellen frei auf die durch Membranen verschlossenen Öffnungen einwirken läßt. Bringt man aber vor die eine Öffnung einen kleinen Schirm, so schwingt die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit. Bei einer theoretischen Behandlung dieser Erscheinung wäre wohl auch auf die Reibung in dem engen Kanal zu achten. Der Schatten wird um so besser wirken, je höher die Schwingungszahl ist. Bei unendlich langsamen Schwingungen, d. h. bei einer statischen Einwirkung hat das Vorlagern eines Schirms oder dergleichen keine Wirkung. Der Schatten kommt also nur zur Geltung, wenn Bewegungen auftreten. Damit wäre die Beobachtung der Otiater erklärt. Dar-

nach ist das Trommelfell in erster Linie notwendig, um eine geordnete Zuleitung der Schalleinwirkung zu der fenestra vestibuli zu bewirken. Für die höheren Töne wird diese Zuleitung weniger wirksam (vgl. unten S. 76).

Um die weiteren statischen Verhältnisse zu übersehen, vereinfache ich die Kette der Gehörknöchelchen etwas, indem ich den Amboß ausfallen lasse. Das System besteht aus der Membran mit dem Hammer, der selbst mit dem Steigbügel durch eine elastische Verbindung von dem Koeffizienten E_{12} zusammenhängt. Der Steigbügel ist in die Wand der Paukenhöhle durch eine Verbindung von dem Koeffizienten E_2 eingefügt. Die Größe der Empfindlichkeit läßt sich unmittelbar aus der Formel (17) entnehmen. Sie ist:

$$\gamma_{(H+S)S} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_{H-Fen.ov.}} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + \frac{E_{12} E_2}{E_{12} + E_2}}.$$

Für eine Übersicht empfiehlt es sich, zwei extreme Typen zu behandeln. Einen bei dem E_{12} groß gegen E_2 , einen anderen bei dem E_{12} klein gegen E_2 ist. Im ersteren Fall ist die Koppelung von Hammer und Steigbügel eng, im zweiten Fall lose.

1. Enge Koppelung zwischen Hammer und Steigbügel, d. h. E_{12}/E_2 groß. Das ganze verhält sich wie ein Federmanometer (vgl. erste Akademieabhandlung 1915). Die Empfindlichkeit wird nun $= \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_2}$ und, wenn zugleich η_M klein gegen E_2 ist $= \frac{\gamma_M \eta_M}{E_2}$. Führt man $K_{Tr} = E' \eta \gamma^2$ ein und das Verhältnis der Verrückung des Hammers zu der Volumausbauchung der Membran $\frac{f}{V} = \frac{C}{F} = \gamma E'$, so erhält man $\gamma_{(H+S)S} = \frac{K_{Tr} \cdot F}{C E_2}$. Hier zeigt sich der Einfluß der Größe der Trommelfellfläche F einerseits und der Koppelung des Hammers mit dem Trommelfell K_{Tr} andererseits auf die Empfindlichkeit, der S. 2 behauptet war.

2. Anders liegen die Verhältnisse, wenn E_{12} klein gegen E_2 ist. Dann wird

$$\gamma_{(H+S)S} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_{12}} \cdot \frac{E_{12}}{E_2}.$$

Ist E_{12} klein gegen η_M , dann ist

$$\gamma = \frac{\gamma_M \cdot E_{12}}{E_2} = \frac{K_{Tr} F}{C E_2} \cdot \frac{E_{12}}{\eta_M},$$

d. h. es ergibt sich nicht mehr die einfache Abhängigkeit von der Größe des Trommelfells und von der Koppelung. Außer von K_{Tr} und F hängt die Empfindlichkeit noch von E_{12}/E_2 ab. Die Formel zeigt, daß die Empfindlichkeit durch einen niederen Elastizitätskoeffizienten E_{12} gegenüber der Empfindlichkeit, die durch die Trommelfellkoppelung schon herabgesetzt ist, nochmals herabgesetzt wird.

Eine weitere Anwendung dieser Formeln kann man auf die Helmholtzsche Hypothese von der Bedeutung des schalleitenden Apparates machen. Helmholtz schreibt S. 219 „Tonempfindungen“, 6. Ausgabe: „Die mechanische Aufgabe des Trommelhöhlenapparates ist also eine Bewegung von großer Amplitude und geringer Kraft, welche das Trommelfell trifft, zu verwandeln in eine von geringer Amplitude und großer Kraft, die dem Labyrinthwasser mitzuteilen ist. Es ist dies eine Aufgabe, wie sie durch vielerlei mechanische Apparate als Hebel, Flaschenzüge, Krane usw. gelöst wird. Die Art, wie dies im Trommelhöhlenapparat geschieht, ist ganz abweichend und sehr eigentümlich. Eine Hebelwirkung wird zwar auch benützt, aber nur in geringem Maße. Die Spitze des Hammerstieles, auf welche der Zug des Trommelfells zunächst einwirkt, ist allerdings etwa $1\frac{1}{2}$ mal so weit von der Drehungsachse entfernt, als die Spitze des Ambosses, welche auf den Steigbügel drückt. Der Hebelstiel bildet also den längeren Hebelarm und der Druck auf den Steigbügel wird $1\frac{1}{2}$ mal so groß sein als die Kraft, welche die Spitze des Hammerstieles eintreibt.“ Die allgemeine Aufgabe des Trommelhöhlenapparates ist gewiß durch den Helmholtzschen Satz nicht vollständig beschrieben. Aber auch die Wirkung eines Krafthebels ist durchaus nicht eindeutig zu erkennen. Man braucht sich nur zu überlegen, daß wenn der Angriffspunkt des Steigbügels näher an die Achse rückt, wohl die Kraftwirkung an dieser Stelle größer ist, daß zu gleicher Zeit aber auch der Ausschlag des Steigbügels verringert wird. Man wird also erwarten können, daß die Verlagerung des Steigbügelköpfchens entlang einem Hebel, der sich um das Achsenband

dreht, zu einer optimalen Wirkung bei einer bestimmten Länge dieses Hebels führt.

Die Formeln erweisen diese Vermutungen als richtig und sie geben den vollständigen Aufschluß, weil das System in allen wichtigen Punkten mit dem schalleitenden Apparat gleich ist. Alle diese Fragen spitzen sich zur Frage nach der Größe der Empfindlichkeit zu. Man hat in den obigen Formeln nur die Empfindlichkeit für die lineare Verrückung des Steigbügels festzustellen, alles was dem Trommelfell-Hammerapparat eigentümlich ist, nämlich die γ_α und η_α konstant zu lassen und den Angriffspunkt des Steigbügels an dem Hebel zu verrücken. Dazu muß man das Torsionsmoment η_α durch Division mit l^2 in einen gewöhnlichen Elastizitätskoeffizienten und die Winkel-Empfindlichkeit in eine lineare verwandeln (vgl. oben S. 23). Darnach wird:

$$\gamma_{f(H+S)}s = \frac{\gamma_{\alpha M} l \eta_{\alpha M} / l^2}{\eta_{\alpha M} / l^2 + E_{H-Fen.ov.}} = \frac{\gamma_{\alpha M} \eta_{\alpha M}}{\eta_{\alpha M} / l + l E_{H-Fen.ov.}}$$

Behandelt man die beiden obigen Fälle getrennt, so ergibt sich für eine enge Koppelung zwischen Hebel und Steigbügel oder $\lim E_{12} = \infty$ folgende Formel:

$$\gamma_{f(H+S)}s = \frac{\gamma_{\alpha M} \eta_{\alpha M}}{\eta_{\alpha M} / l + E_2 l}$$

Die Maximumbedingung für γ_f lautet: $-\eta_\alpha / l^2 + E_2 = 0$ oder $E_2 l^2 = \eta_\alpha$. Also wirkt die Verkürzung des Hebelarms nicht unbedingt günstig, und sicher kann man jetzt sagen, daß die Verhältnisse beim menschlichen Ohr nicht so liegen, daß E_{12} / E_2 groß ist. Wenn wie bei dem zweiten Fall E_{12} klein gegen E_2 ist, dann lautet die entsprechende Formel:

$$\gamma_{f(H+S)}s = \frac{\gamma_{\alpha M} \eta_{\alpha M}}{\eta_{\alpha M} / l + E_{12} l}$$

Hier existiert ebenfalls ein Maximum der Empfindlichkeit für $E_{12} l^2 = \eta_\alpha$. Da aber hier E_{12} verhältnismäßig klein ist, wird die optimale Länge größer ausfallen. Hier ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Verkürzung des Hebelarms gegenüber dem Hebelarm des Amboß günstig wirkt, noch geringer als bei Fall 1. Daß im äußersten Fall aber auch die Möglichkeit besteht, daß

eine Verlängerung des Hebelarms günstig wirkt, kann man aus dem Fall entnehmen, bei dem $E_{12} l^2$ klein ist gegen η_a . Dann wird

$$\gamma = \frac{\gamma_a \eta_a \cdot l}{\eta_a},$$

und eine Verlängerung des Hebelarms wirkt nur günstig. Man sieht also, daß alle diese maßgebenden Konstanten bekannt sein müssen, um einen Entscheid über die Zweckmäßigkeit des Baues des schalleitenden Apparates zu liefern, und daß die Helmholtzsche Behauptung durchaus nicht schlüssig ist. Zurückzutreten scheint mir ganz die Bedeutung der besonderen Form des Trommelfells, der Helmholtz einen großen Raum bei seinen Erörterungen gewidmet hat.

Ein drittes Problem bietet die Einschaltung einer verhältnismäßig losen Koppelung, wie sie zwischen Hammer und Steigbügel durch das Amboß-Steigbügelgelenk gegeben wird. Für die Beurteilung des Einflusses dieser losen Koppelung wird der Entscheid nicht durch die Bewertung der Empfindlichkeit allein gegeben, sondern die Schwingungszahl kommt ebenfalls in Betracht, d. h. die Güte. Ich habe die Güte das Produkt aus der Empfindlichkeit und dem Quadrat der Schwingungszahl, und zwar der Hauptschwingungszahl bei Systemen von mehreren Freiheitsgraden, genannt (vgl. oben S. 12). Für die folgenden Betrachtungen nehme ich die Membran als masselos an bzw. durch eine Reduktion in die Masse des Hammers einbezogen. Das System besitzt so zwei Freiheitsgrade. Es bestehen dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} G &= n_h^2 \gamma = \frac{1}{2} [n_1^2 + n_2^2 - \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2 K}], \\ C_1 &= \eta_H + E_{12}, \quad C_2 = E_{12} + E_2, \quad C_{12} = E_{12}, \\ n_1^2 &= \frac{\eta_H + E_{12}}{m_1}, \quad n_2^2 = \frac{E_{12} + E_2}{m_2}, \quad K_{tot} = \frac{E_{12}^2}{(\eta_H + E_{12})(E_{12} + E_2)}. \end{aligned}$$

K_{tot} ist die Koppelungszahl für das ganze System. Ich behandle wiederum die zwei Fälle: 1. E_{12} groß gegen E_2 und damit K_{tot} nahezu 1. Dann wird:

$$\gamma = \frac{\gamma_M \eta_M}{E_2} \text{ (vgl. oben) und } n_h^2 = \frac{\eta_H + E_2}{m_1 + m_2}$$

und die Güte

$$G_1 = \frac{\gamma_M \eta_M}{E_2} = \frac{\eta_M + E_2}{m_1 + m_2}.$$

Wenn η_M klein gegen E_2 und wenn m_2 (des Steigbügels) klein gegen m_1 (des Hammers) ist, dann wird

$$G_1 = \frac{\gamma_M \eta_M}{m_1} = \frac{K_{Tr} F}{m_1}.$$

2. E_{12} klein. Dann ist, wenn n_2^2 groß gegen n_1^2 ist,

$$n_h^2 = n_1^2 (1 - k) = \frac{\eta_M + E_{12}}{m_1}.$$

G_2 wird

$$\frac{\gamma_M \eta_M E_{12}}{(\eta_M + E_{12}) E_2} \cdot \frac{\eta_M + E_{12}}{m_1} = \frac{\gamma_M \eta_M}{m_1} \cdot \frac{E_{12}}{E_2} = \frac{K_{Tr} \cdot F}{m_1} \cdot \frac{E_{12}}{E_2}.$$

Das Verhältnis der Güten der beiden Systeme, die sich nur durch die Größe von E_{12} unterscheiden, wird $= E_{12}/E_2$, worin E_{12} der Koeffizient für das lose gekoppelte System ist, d. h. die lose Koppelung verschlechtert die Güte. Da bei dem Vogelohr die Masse der Columella sehr klein ist, da ferner die Koppelung zwischen dem in das Trommelfell eingelassenen Schenkel der Columella und dem eigentlichen Columellastübchen, das unmittelbar mit der Membran der fenestra vestibuli in Verbindung steht, sicher wesentlich größer ist als bei den Säugetieren, so ist die Güte des schalleitenden Apparates bei dem Vogel größer als bei den Säugetieren. Wie sich die Erhöhung der Güte bei dem Vogelohr auf die Empfindlichkeit und die Schwingungszahl verteilt, kann nur durch Versuche entschieden werden, die ich für das Ohr des Truthahns und der Gans mit Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen habe.

Damit ist die letzte Frage dieser Reihe aufgeworfen, die Frage nach der Bedeutung des Amboß. Die Güte des schalleitenden Apparates wird zweifellos durch die Einfügung des Amboß verschlechtert. Denn es kommt eine neue Masse hinzu und außerdem wirkt die Hammer-Amboß-Gelenkverbindung mit einem kleinen E_{12} . Die Versuche, die von Broemser und mir angestellt worden sind, erweisen dies unmittelbar. Die Einfügung des Amboß kann also nur durch sekundäre Momente bedingt sein. Man könnte an die von Helmholtz behauptete Sperrwirkung denken (Helmholtz, Tonempfindungen, S. 217). Nach Helmholtz hat das Hammer-Amboßgelenk Sperrzähne, die so

wirken, „daß wenn der Hammer mit seinem Stiel nach innen gezogen wird, er den Amboß ganz fest packt und mitnimmt, umgekehrt, wenn das Trommelfell mit dem Hammer nach außen getrieben wird, braucht der Amboß nicht mitzugehen. . . . Der Steigbügel kann nicht aus dem ovalen Fenster ausgerissen werden, wenn die Luft im Gehörgang erheblich verdünnt wird. Eintreibung des Hammers, wie sie durch Verdichtung der Luft im Gehörgang entstehen könnte, ist ebenfalls ohne Gefahr, da sie durch die Spannung des trichterförmig eingezogenen Trommelfells selbst kräftig gehemmt wird“. Diese Sperrvorrichtung ist aber nicht unumgänglich notwendig. Denn bei Vögeln ist diese Schutzvorrichtung nicht vorhanden. Bei meinen bisher angestellten Versuchen hat sich bis jetzt noch nicht ein Anzeichen dafür ergeben, daß die Sperrvorrichtung bei dem menschlichen Ohr wirkt. Allerdings haben wir unsere Versuche nicht unmittelbar auf diesen Punkt gerichtet.

Es bleibt zunächst nur die Annahme, daß die Einfügung des Amboß etwas mit den Trommelfellmuskeln zu tun hat. Bei den Säugetieren sind zwei Muskeln vorhanden, der tensor tympani und der Stapedius. Der eine greift unmittelbar an dem Hammer, und der andere an dem Steigbügel an. Wenn die beiden getrennt wirken sollen, muß eine lose Verbindung vorhanden sein. Sie wird durch das Einfügen des Amboß erzeugt. Ich hatte diese Meinung über die Bedeutung des Amboß schon ausgesprochen, als ich in Wiedersheim „Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere“ die Bemerkung fand, daß nur die Säugetiere einen tensor tympani besitzen. Sie besitzen aber auch keinen Amboß. Möglich ist, daß die Sperrvorrichtung eine Vergrößerung der Koppelung zwischen Hammer und Steigbügel hervorruft. Eine gewisse jedenfalls weniger ausgiebige Koppelung ist zwischen dem in das Trommelfell eingefügten ersten Schenkel der Columella und der eigentlichen Columella auch bei den Vögeln vorhanden. Ich habe in dieser Abhandlung die Wirkungsweise der beiden Muskeln nicht behandelt. Aber diese Überlegungen haben mich zu der Meinung geführt, daß sie beide Spanner sind, d. h. daß der Tensor, das Trommelfell bzw. das Achsenband (vgl. Helmholtz, „Tonempfindungen“, S. 216, und der Stapedius die membrana fenestrae ovalis spannt.

Mit Prof. Broemser zusammen habe ich eine Reihe von Experimenten durchgeführt, die bis zu einem gewissen Grad die Leistung der Theorie erweisen und im einzelnen wichtiges ergeben. Wir haben nicht nur die Statik des schalleitenden Apparates gründlich untersucht, sondern auch die Eigenschwingungen festgestellt. Zunächst haben wir hierzu das tote menschliche Ohr benutzt. Wir haben Spiegel auf dem Hammerkopf, auf dem Amboßkörper, ferner auf der Steigbügelplatte und Drahtmarken an dem Steigbügel angebracht und die Exkursionen durch Einwirkungen eines Drucks oder eines Drehmoments auf den Hammer, bzw. die Größen γ und η , an dem ganzen System, z. T. auch nach Eröffnung der fenestrae rotunda, nach Lostrennung des Steigbügels von dem Amboß und nach weiterer Lostrennung des Amboß von dem Hammer gemessen. Die Auslösung der Schwingungen geschah nach dem von Petter, Broemser und mir ausgearbeiteten Verfahren. Wir können damit schließlich über alle Einzelkonstanten verfügen. Die Überarbeitung der Ergebnisse hat, wie ich schon früher bei der Experimentaluntersuchung der Registrierinstrumente gezeigt, welche ungemeine Bedeutung die mathematische Analyse als Fingerzeig für die Anstellung der Experimente hat. Die Hauptergebnisse sind bereits eindeutig. Die Koppelungszahl für die Einfügung des Hammers in das Trommelfell (K_{T_r}) ist annähernd $= 0.5$ und, wie schon oben angegeben wurde (vgl. S. 24), etwas größer als diejenige für einen Stab, der in einer ebenen gespannten Membran bis zur Mitte reicht. Die Koppelung zwischen Hammer und Amboß, ferner die Verbindungen des Hammers und des Amboß mit der festen Wand sind sehr lose. Die darnach möglichen Folgerungen für den schalleitenden Apparat sind oben angegeben.

Die Untersuchung der Statik ermöglicht mir einen Einwand gegen die Versuche am Leichenohr zu widerlegen. Es ist gelungen, eine der wichtigen statischen Konstanten, die Größe E' , d. i. das Verhältnis des einwirkenden Drucks zu der Volumenausbauchung der Membran, am lebenden Menschen zu bestimmen. Die Werte zeigen, daß die Elastizitätskoeffizienten des lebenden Ohrs und die Spannung nicht wesentlich von den entsprechenden Größen des toten Ohrs abweichen. Für mich war das von vornherein unwahrscheinlich, da ich bei der Untersuchung der Elastizität der

Arterien gefunden habe, daß die Elastizitätskoeffizienten der rein elastischen Organe bis zur beginnenden Fäulnis sich nicht verändern. Die Eigenschwingungszahlen des Gesamtsystems belaufen sich bei 3 Ohren auf 1110, 1092, 1340, im Mittel rund 1200/sec. für die Hauptschwingung. Der sogenannte Eigenton ist also sicher höher als der Formant des wichtigsten Vokals *a*. Man kann gewiß nicht sagen, daß Hermann mit seiner Bemerkung, Poggendorfs Annalen der Physik, Bd. 37, S. 432, recht hat. „Es läßt sich leicht zeigen, worauf ich indessen hier nicht näher eingehe, daß die Leistung des Trommelfells, jede Ton- oder Partialtonhöhe annähernd gleich gut auf das innere Ohr wirken zu lassen, mit der Resonanztheorie nur vereinbar ist, wenn man ihm einen sehr tiefen Eigenton, d. h. fast gar keine Spannung, dagegen eine ungemein starke Dämpfung zuschreibt; aber bei der enormen Empfindlichkeit des Ohres ist dies kein Einwand.“ Auch mit der Behauptung, daß die Dämpfung ungemein stark ist oder wie er sich später ausgedrückt hat, überaperiodisch ist, hat Hermann nicht recht, denn es treten immer 2 oder 3 gut ausgeprägte Schwingungen zutage. Die Dämpfungszahl *D*, die bei aperiodischer Bewegung = 1 ist, ist bei dem Ohr, dieses als ein System von einem Freiheitsgrad betrachtet, 0,3. Die Behauptung Hermanns steht im Zusammenhang mit seiner eigentümlichen Anschauung, daß durch eine überaperiodische Dämpfung bei niedriger Schwingungszahl eine korrekte Aufzeichnung stattfindet. Er hat deshalb für den Phonograph auch eine solche überaperiodische Dämpfung angenommen. Ich habe nachgewiesen, daß auch für den Phonograph die Dämpfung gewiß nicht überaperiodisch ist. Wenn man aus den statischen Versuchen die Spannung des Trommelfells und die übrigen elastischen Koeffizienten berechnet, so kommt man für die Grundschwingung zu einer außerordentlich guten Übereinstimmung zwischen der gefundenen und berechneten Schwingungszahl. Abgesehen von den Elastizitätskoeffizienten muß man hierzu die Massenverhältnisse kennen. Sie sind bei dem Trommelfell selbst durch die Dicke des Trommelfells bestimmt, die etwa 0,1 mm beträgt, und das spezifische Gewicht des Trommelfells. Für die Gehörknöchelchenkette muß das Trägheitsmoment der Kette aus den Dimensionen und dem spezifischen Gewicht berechnet oder experimentell bestimmt werden. Für den letzten

Fall haben wir die Kette um einen dünnen Faden, der in der Richtung des Achsenbandes durch die Kette hindurchgezogen war, schwingen lassen, die Schwingungszahl und das Torsionsmoment des Fadens bestimmt. Aus beiden Bestimmungsmethoden hat sich ungefähr dieselbe Zahl ergeben, nämlich für das Gesamtträgheitsmoment 2.5 mg cm^2 . Es ist so groß, wie wenn die ganze Masse weggenommen wäre und 12 mg oder rund 1 cg an der Spitze des Hammers befestigt werden. Merkwürdigerweise ist früher nicht einmal diese wichtige Grundzahl des schalleitenden Apparates bestimmt worden. Das Hauptergebnis dieser Bestimmung zeigt, daß die Trägheit des Trommelfells gegenüber der Gehörknöchelchenkette wesentlich zurücktritt, während in allen Betrachtungen von Helmholtz und von Hermann das Trommelfell die Hauptrolle spielt. Eine Oberschwingung tritt auf den Kurven kaum zutage. Es ist eine sehr rasche Schwingung von etwa $5000/\text{sec}$. Am besten tritt eine solche Schwingung bei dem System Trommelfell mit Hammer allein hervor. Dies könnte seinen Grund darin haben, daß in diesem Fall die Grundschiwingung relativ langsam ist. Wenn man in das mathematische Modell die bei dem Trommelfell wirklich festgestellten Größen einführt, so kommt man zu einem relativ sehr hohen Oberton (vgl. oben S. 64). Der Abstand zwischen dem Oberton und dem Grundton ist so groß, daß man durch Annäherungsmethoden leicht den Grundton berechnen kann, wenn man das Trommelfell eine beliebige Schwingungsform (parabolischen Charakters oder dgl.) (vgl. oben S. 61) ausführen läßt. In der Erörterung über die Leistungen des schalleitenden Apparates kann die Form des Trommelfells nicht die große Rolle spielen, die ihr Helmholtz zugeschrieben hat.

Wenn man nun das Ganze auf ein System von einem Freiheitsgrad reduziert und auf Grund der Schwingungszahl und der Dämpfung eine Resonanzkurve bildet, so tritt ein deutliches Resonanzmaximum hervor. Die Amplituden der erregten Schwingung werden bis in die Nähe des Resonanzmaximums richtig in den erzwungenen Schwingungen dargestellt. Bei dem Resonanzmaximum, das selbstverständlich bei 1200 liegt, werden die Amplituden überhöht, Schwingungen, die über diesem Resonanzmaximum liegen, werden verkleinert aufgezeichnet. In der Nähe dieses Resonanzmaximums liegt nun nach den allerdings nicht un-

bestrittenen Angaben von Max Wien das Empfindlichkeitsmaximum. M. Wien meint, daß dieses Maximum nicht ein Resonanzmaximum wäre, besonders, weil die Kurve der Empfindlichkeit von der Empfindlichkeit 0 bis zu diesem Maximum steigt und wieder auf 0 herabsinkt. Es ist selbstverständlich, daß der Verlauf der Kurve nicht von diesem Resonanzmaximum allein bedingt sein kann, aber auf der andern Seite auch klar, daß die Empfindlichkeitskurve mit der Empfindlichkeit 0 an der Grenze beginnt, bei der überhaupt eine Empfindung auftritt, nämlich bei einer Schwingungszahl von 20 in der Sekunde und daß auf der andern Seite die Kurve wieder auf 0 bei der oberen Hörgrenze herabsinkt. Es dürfte sich also um eine Vereinigung von physiologischen und physikalischen Momenten handeln. Daß die von mir bestimmte Schwingungszahl richtig ist, zeigen auch die Versuche mit erzwungenen Schwingungen. Wir haben zur gleichen Zeit einen Pfeifenton auf die von uns konstruierte akustische Kapsel und das Ohr wirken lassen. Die akustische Kapsel hat eine Eigenfrequenz von 3000. Man sieht, daß bei dem hohen Pfeifenton die Amplitude der Ohrregistrierung weit hinter der Amplitude der Registrierung mit der akustischen Kapsel zurückbleibt, d. h. wie die Theorie fordert, die Amplitude durch den schalleitenden Apparat und seine verhältnismäßig geringe Schwingungszahl herabgedrückt wird. Um schließlich die Leistungen des schalleitenden Apparates für wichtige Schalleinwirkungen zu demonstrieren, haben wir auch Vokale einwirken lassen. Die Versuche zeigen, daß wenigstens die Registrierung des *a* von keinem Registrierapparat besser erreicht wird. Man versteht jetzt auch, warum bei Defekten des Mittelohrs die hohen Töne noch fast ebensogut gehört werden wie mit dem schalleitenden Apparat. Denn der Trommelfell-Hammer-Amboßteil des schalleitenden Apparates setzt die Amplitude der Schwingungen außerordentlich herab. Nach der oben geäußerten Ansicht führt in diesem Fall die versteckte Lage des foramen rotundum zu einem genügenden Schallschatten.

Die Schwingungszahl des schalleitenden Apparates ist wahrscheinlich bei den kleineren Tieren höher. Ein Blick auf die zarten Knöchelchen des Kaninchens in dem Stereogramm zeigt die starke Massenreduktion und damit unter im übrigen gleichen Verhältnissen die höhere Schwingungszahl. Bestätigt wird diese

Vermutung durch eine Feststellung der Eigenschwingungszahl bei der Katze, die bei etwa 1600 liegt. Daß die Güte des Vogelohrs größer ist als bei den Säugetieren, habe ich durch besondere Versuche bereits nachgewiesen (vgl. S. 71). Der Gehörsinn ist zweifellos in erster Linie für die Verständigung mit den Artgenossen bestimmt. Für wen singt der Vogel im Frühling? Für die Artgenossin. Die übrige Welt ist für ihn zu dieser Zeit ent-rückt. Wenn beim Menschen die Schwingungszahl des Ohrs adaptiert ist an die Sprache, so zweifellos bei den Tieren auch an die eigenen Tierlaute. Und diese harmonieren bei den kleineren Tieren wieder mit der Perzeption durch das Gehörorgan, indem ihre Laute höher sind. Sie sind höher, weil ihre Stimmorgane kleiner sind und deshalb höhere Schwingungszahlen besitzen.
