Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Verwertung gemischter invarianter Flächenelemente zur Berechnung der Differentialinvarianten einer ebenen Transformationsgruppe.

Von **Gerhard Kowalewski** in Dresden.

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 8. Juli 1922.

In zwei Abhandlungen, deren eine bereits im Dezember 1921 in den Leipziger Berichten erschienen ist, während sich die andere dort im Druck befindet, habe ich eine neue Methode zur Berechnung der Differentialinvarianten ebener Transformationsgruppen entwickelt. Der von mir erzielte Fortschritt besteht darin, daß nicht mehr, wie bei Lie, vollständige Systeme integriert werden müssen, sondern nur Integrationen vollständiger Differentiale, also Quadraturen, auszuführen sind[1]).

Wenn auch von meiner Methode, die im wesentlichen auf der bisher unbemerkt gebliebenen Tatsache beruht, daß sich Differentialinvarianten von höherer als erster Ordnung als lineare Funktionen der höchsten Ableitung schreiben lassen, in den Arbeiten Lies und seiner Schule nirgends eine Spur zu finden ist, so hatte sich doch dem großen Meister unbewußt auf einem Umwege schon die Einsicht erschlossen[2]), daß die Bestimmung der Differentialinvarianten ebener Transformations-

[1]) Eine Ausnahme bilden nur diejenigen Gruppen, die sich auf q oder q, yq oder q, yq, y^2q reduzieren lassen. Bei ihnen muß eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung integriert werden.

[2]) Vgl. seine berühmte Abhandlung „Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen etc.“ Norwegisches Archiv 1883 oder Math. Annalen, Bd. 32.

gruppen durch „ausführbare Operationen“, wie er zu sagen pflegte, geleistet werden kann, abgesehen von den drei in Fußnote 1) bezeichneten Ausnahmefällen. Lie hat nämlich für seine sämtlichen ebenen Gruppentypen die Differentialinvarianten wirklich berechnet und andererseits gezeigt, daß die Zurückführung einer durch ihre infinitesimalen Transformationen gegebenen Gruppe auf die zugehörige kanonische Form nur „ausführbare Operationen“ erfordert, wenn es sich nicht gerade um einen jener drei Ausnahmefälle handelt.

In der vorliegenden Arbeit will ich die ganze Frage von einer anderen Seite behandeln und die Verwertung sogenannter gemischter Flächenelemente für die Berechnung der Differentialinvarianten ebener Transformationsgruppen auseinandersetzen, wodurch eine neue Quadraturenmethode zur Bestimmung dieser wichtigen Größen gewonnen wird, bei der man schließlich im allgemeinen nur ein einziges vollständiges Differential zu integrieren hat. In dieser Richtung öffnet sich noch ein weites, wenig bearbeitetes Gebiet, für das Lie sich erst in seinen letzten Jahren interessierte, als er Integralinvarianten und ihre Nutzbarmachung für Integrationsprobleme zu studieren begann.

Es fällt von meinen Untersuchungen auch neues Licht auf die von G. Pick in seiner Wiener Akademie-Abhandlung von 1906 begründete natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen, eine bis jetzt noch viel zu wenig gewürdigte, höchst interessante Theorie, von der die Differentialgeometrie manche Förderung zu erwarten hat. Die Pickschen kovarianten Koordinaten bilden eine besondere Klasse gemischter Differentialinvarianten und können nach meiner Quadraturenmethode durch „ausführbare Operationen“ aus den infinitesimalen Grundtransformationen der Gruppe gewonnen werden.

§ 1. Gemischte Pfaffsche Invarianten, Bogenelemente, Flächenelemente und Differentialinvarianten von G_r.

Mit G_r werde eine r-gliedrige ebene Transformationsgruppe bezeichnet, die auf zwei Kurvenelemente

$$x, y, y_1, \ldots, y_{\alpha-2} \text{ und } \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\beta-2}$$

mit der Koordinatensumme $\alpha + \beta = r$ transitiv einwirkt[1]), so daß diese Elemente, die wir kurz $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ nennen wollen, gegenüber G_r keine Invariante besitzen. Dann gibt es zwei invariante Pfaffsche Ausdrücke

$$\Pi_1 = \varphi_1(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, dx + \varphi_2(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, dy,$$
$$\Pi_2 = \psi_1(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, dx + \psi_2(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, dy$$

mit nicht verschwindender Determinante. Dieser den Kennern der Lieschen Theorien geläufige Satz gehört zu den Grundwahrheiten, von denen man sich ohne größere Vorkenntnisse direkt überzeugen kann. Im vorliegenden Falle würde ich dazu folgende elementare Überlegung empfehlen.

Man gehe aus von der endlichen Darstellung der Gruppe G_r und stelle in der durch die Differentialrechnung bekannten Weise fest, wie G_r auf die beiden Elemente $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ wirkt. Die Gleichungen der so erweiterten Gruppe mögen lauten

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= F(x, y, a_1, \ldots, a_r),\\
Y &= G(x, y, a_1, \ldots, a_r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_{\alpha-2} &= G_{\alpha-2}(x, y, y_1, \ldots, y_{\alpha-2}, a_1, \ldots, a_r),\\
\mathfrak{X} &= F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1, \ldots, a_r),\\
\mathfrak{Y} &= G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1, \ldots, a_r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{Y}_{\beta-2} &= G_{\beta-2}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\beta-2}, a_1, \ldots, a_r).
\end{aligned}\right.$$

---

[1]) Wir könnten ebensogut drei oder mehr Kurvenelemente mit der Koordinatensumme r zum Ausgangspunkt nehmen, vorausgesetzt, daß sie keine Invariante besitzen. Die Ableitungen bezeichnen wir der Bequemlichkeit halber durch untere Indizes.

Jetzt wollen wir noch eine neue Erweiterung der Gruppe vornehmen, indem wir darauf achten, wie die Differentiale dx, dy bei ihr transformiert werden, d. h. wir fügen zu den obigen Gleichungen noch die folgenden:

$$(2)\quad \begin{cases} dX = \dfrac{\partial F}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\, dy, \\ dY = \dfrac{\partial G}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial G}{\partial y}\, dy. \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung $\alpha + \beta = r$ ist und die Elemente $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ keine Invariante besitzen sollen, so kann das System (1) nach den Parametern $a_1, \ldots, a_r$ aufgelöst werden, wodurch diese als Funktionen von $e_{\alpha-2}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}$, $E_{\alpha-2}$, $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ erscheinen. Setzen wir die gewonnenen Ausdrücke in die Gleichungen (2) ein, so gehen diese über in

$$(2')\quad \begin{cases} dX = \varphi_1(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dx + \varphi_2(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dy, \\ dY = \psi_1(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dx + \psi_2(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2})\, dy. \end{cases}$$

Wenn wir nun das System (1) symbolisch in der Form

$$(E_{\alpha-2},\ \mathfrak{E}_{\beta-2}) = (e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\, S_a$$

schreiben und

$$(e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\, S_b = (e'_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}'_{\beta-2})$$

setzen, wobei S_b ebenso wie S_a eine Transformation der Gruppe G_r bedeutet, so wird wegen der Gruppeneigenschaft

$$(E_{\alpha-2},\ \mathfrak{E}_{\beta-2}) = (e'_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}'_{\beta-2})\, S_b^{-1} S_a = (e'_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}'_{\beta-2})\, S_c$$

sein. Die Systeme (1), (2) und (2′) bleiben also bestehen, wenn man $x, y, \ldots, y_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{y}_{\beta-2}$ mit Strichen versieht und die Parameter $a_1, \ldots, a_r$ durch $c_1, \ldots, c_r$ ersetzt. Die rechten Seiten der Gleichungen (2′), wo die Parameter ganz fehlen, verhalten sich also invariant, wenn man $E_{\alpha-2}$, $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ ungeändert läßt und auf $x, y, \ldots$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$ die Transformation S_b anwendet. Denkt man sich $E_{\alpha-2}$, $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ irgendwie fixiert, so entstehen zwei invariante Pfaffsche Ausdrücke Π_1 und Π_2 von der behaupteten Form. Die Determinante

$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ist als Funktionaldeterminante von X, Y nach x, y von Null verschieden.

Man kann Π_1 und Π_2 als Invarianten des Elements $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ und zweier unendlich benachbarter Elemente $e_{\alpha-2}$ auffassen. Nimmt man diese in vereinigter Lage an, setzt man also $dy = y_1\,dx$, so verwandeln sich Π_1 und Π_2 in gemischte invariante Bogenelemente, weil die vereinigte Lage zweier Elemente eine invariante Beziehung ist. Wir wollen ausdrücklich $\alpha > 2$ annehmen. Dann haben diese Bogenelemente die Form

(3) $$d\sigma = \omega\,(e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\,dx\,.$$

Es ist ausgeschlossen, daß in beiden Fällen ω identisch verschwindet, weil die Gleichungen

$$\varphi_1 + y_1\varphi_2 = 0, \qquad \psi_1 + y_1\psi_2 = 0$$

nicht zusammen bestehen können. Andererseits würde das Verhältnis der beiden ω eine Invariante von $e_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ sein, wenn es nicht konstant wäre. Da nach Voraussetzung der erstere Fall ausgeschlossen ist, so folgt, daß sich die beiden Bogenelemente nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, so daß nur von einem Bogenelement der obigen Form zu reden sein wird.

Ebenso einfach erkennt man die Existenz eines gemischten invarianten Flächenelements. Man muß zu diesem Zweck zwei verschiedene zu $e_{\alpha-2}$ benachbarte Elemente in Betracht ziehen, also mit zwei Reihen von Differentialen operieren, den Differentialen d und den Differentialen d'. Die Invarianz von Π_1, Π_2 und

$$\Pi_1' = \varphi_1\,(e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\,d'x + \varphi_2\,(e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\,d'y,$$
$$\Pi_2' = \psi_1\,(e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\,d'x + \psi_2\,(e_{\alpha-2},\ \mathfrak{e}_{\beta-2})\,d'y$$

bringt es mit sich, daß auch

$$\begin{vmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_1' & \Pi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy \\ d'x & d'y \end{vmatrix}$$

eine Invariante ist. Es gibt also einen invarianten Ausdruck von der Form

$$\Omega(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})(dx\,d'y - dy\,d'x), \tag{4}$$

und zwar bis auf einen konstanten Faktor nur einen. Er stellt das invariante gemischte Flächenelement dar, von dem wir in der Überschrift sprachen.

Sind von der Gruppe G_r nur die infinitesimalen Transformationen bekannt, so lassen sich, wie man weiß, Bogenelement und Flächenelement durch Quadraturen finden. Ist $Af = \xi p + \eta q$ eine der r infinitesimalen Grundtransformationen, $\mathfrak{A}\mathfrak{f}$ dasselbe Symbol in den deutschen Veränderlichen, bezeichnet man ferner die Erweiterung nach Lies Weise durch obere Indizes und setzt zur Abkürzung

$$Wf = A^{(\alpha-2)}f + \mathfrak{A}^{(\beta-2)}\mathfrak{f},$$

so genügt Ω den Differentialgleichungen

$$W\Omega + \Omega(\xi_x + \eta_y) = 0 \tag{5}$$

und ω den Differentialgleichungen

$$W\omega + \omega(\xi_x + y_1 \xi_y) = 0. \tag{6}$$

Aus (5) läßt sich $d \log \Omega$, aus (6) $d \log \omega$ gewinnen, und $\log \Omega$, $\log \omega$ ergeben sich dann durch Quadraturen.

Wir kehren noch einmal zu dem System (1) zurück und wollen es, anstatt durch die Gleichungen (2), nunmehr durch die Gleichung

$$Y_{\alpha-1} = \left(\frac{\partial G_{\alpha-2}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial G_{\alpha-2}}{\partial y} + \cdots + y_{\alpha-1} \frac{\partial G_{\alpha-2}}{\partial y_{\alpha-2}}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

erweitern, die angibt, wie sich die $(\alpha - 1)$te Ableitung von Y nach X durch die Elemente $e_{\alpha-1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ ausdrückt. Setzen wir hier für $a_1, \ldots, a_r$ die aus (1) gewonnenen Werte ein, so nimmt die obige Gleichung folgende Gestalt an

$$Y_{\alpha-1} = \varphi(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2}) + \psi(e_{\alpha-2}, E_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \mathfrak{E}_{\beta-2}) \cdot y_{\alpha-1}.$$

Dabei halten wir an der Annahme $\alpha > 2$ fest. Es zeigt sich nun ähnlich wie bei der Herleitung der beiden Pfaffschen

Invarianten, daß $\varphi + \psi y_{\alpha-1}$ invariant bleibt, wenn man $E_{\alpha-2}$ und $\mathfrak{E}_{\beta-2}$ festhält und auf $e_{\alpha-1}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ irgend eine Transformation der Gruppe wirken läßt. Hiermit ist bewiesen, daß es eine in $y_{\alpha-1}$ lineare Invariante von $e_{\alpha-1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ gibt, mit andern Worten eine gemischte Differentialinvariante von der Form

$$J = \varphi(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2}) + \psi(e_{\alpha-2}, \mathfrak{e}_{\beta-2})\, y_{\alpha-1}. \tag{7}$$

Der Faktor ψ kann nicht identisch verschwinden, weil in dem Ausdruck für $Y_{\alpha-1}$ sicher $y_{\alpha-1}$ vorkommt.

J ist im wesentlichen die einzige Invariante von $e_{\alpha-1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$. Ebenso gibt es je eine Invariante von e_α und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$, von $e_{\alpha+1}$ und $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ usw., die immer die höchste lateinische Ableitung linear enthält. Man findet diese höheren Differentialinvarianten J_1, J_2, ... aus der niedrigsten J mit Hilfe des Bogenelements $d\sigma$, und zwar ist

$$J_1 = \frac{dJ}{d\sigma}, \quad J_2 = \frac{dJ_1}{d\sigma}, \quad \ldots$$

Über die Berechnung von J aus den infinitesimalen Transformationen von G_r läßt sich folgendes sagen. Unter der von uns gemachten Annahme $\alpha > 2$ ist

$$W y_{\alpha-1} = L(e_{\alpha-2}) + y_{\alpha-1} M(e_{\alpha-2}).$$

Setzt man diesen Ausdruck in $WJ = 0$, d. h. in

$$W\varphi + W\psi \cdot y_{\alpha-1} + \psi W y_{\alpha-1} = 0$$

ein, so spaltet sich die Gleichung in

$$W\psi + \psi M = 0 \tag{8}$$

und

$$W\varphi + \psi L = 0. \tag{9}$$

Aus (8) findet man $d \log \psi$ und dann durch Quadratur $\log \psi$, aus (9) $d\varphi$ und durch Quadratur φ. Damit ist die gemischte Differentialinvariante J gewonnen.

§ 2. Verwertung der gemischten Differentialinvarianten, Bogenelemente und Flächenelemente zur Bestimmung der gewöhnlichen.

Die Berechnung gemischter Differentialinvarianten, Bogen- und Flächenelemente darf für einfacher gelten als die der gewöhnlichen, weil man die Erweiterung der infinitesimalen Transformationen nicht so weit zu treiben braucht. Hat man nun in der oben geschilderten Weise gemischte Differentialinvarianten, Bogen- und Flächenelemente durch Quadraturen berechnet, so kann man aus ihnen durch Differentiation und Elimination auch die gewöhnlichen finden.

Die β ersten Gleichungen der Reihe

$$
\begin{aligned}
J &= \chi(e_{\alpha-1}, \mathfrak{e}_{\beta-2}),\\
J_1 &= \frac{dJ}{d\sigma} = \chi_1(e_\alpha, \mathfrak{e}_{\beta-2}),\\
J_2 &= \frac{dJ_1}{d\sigma} = \chi_2(e_{\alpha+1}, \mathfrak{e}_{\beta-2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

wird man benutzen, um die Koordinaten von $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ durch J, $J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ und durch die Koordinaten von e_{r-2} auszudrücken. Ließen sich diese Gleichungen nicht nach den Koordinaten von $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ auflösen, so gäbe es in der Reihe J, J_1, $\ldots$, $J_{\beta-1}$ ein Glied, das man durch die vorhergehenden und durch e_{r-2} ausdrücken könnte. Hieraus würde folgen, daß das Element e_{r-2} bei G_r nicht frei beweglich ist, daß also eine gewöhnliche Differentialinvariante von $(r-2)$ter oder niedrigerer Ordnung existiert. Wird von diesem Ausnahmefall, dessen Bedeutung man in meinen andern Arbeiten erörtert findet, abgesehen, so sind die Koordinaten von $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ durch J, $J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ und e_{r-2} ausdrückbar. Die gefundenen Ausdrücke werden nun in die nächstfolgende gemischte Differentialinvariante

$$J_\beta = \frac{dJ_{\beta-1}}{d\sigma}$$

eingesetzt. Diese erscheint dann abhängig von den β ersten J und von e_{r-1}. Damit ist die niedrigste gewöhnliche Differentialinvariante von G_r gewonnen[1]). In derselben Weise läßt sich das gemischte Bogenelement $d\sigma$ in ein gewöhnliches Bogenelement von der Form $\bar{\omega}(e_{r-2})\,dx$ und das gemischte Flächenelement in ein gewöhnliches von der Form $\overline{\Omega}(e_{r-2})$ $(dx\,d'y - dy\,d'x)$ verwandeln.

Wie bereits oben erwähnt wurde, übertragen sich unsere Betrachtungen ohne weiteres auf gemischte Invarianten, an denen mehr als zwei Elemente beteiligt sind, wobei die Koordinatensumme dieser Elemente gleich r sein muß. Auch dürfen die Elemente gegenüber G_r keine Invarianten besitzen. Natürlich muß r oberhalb einer gewissen Grenze liegen, wenn man diese Methode zur Berechnung gewöhnlicher Differentialinvarianten durch die gemischten überhaupt anwenden will. Man kann es gewöhnlich einrichten, daß die beteiligten Elemente alle von nullter oder erster und wenigstens eins wirklich von erster Ordnung sind. Der Vorteil dieses Verfahrens ist dann, daß man die Gruppe nur auf die erste Ordnung zu erweitern braucht. Hat man das Flächenelement

$$\Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)(dx\,d'y - dy\,d'x)$$

und das Bogenelement

$$d\sigma = \omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\,dx$$

bestimmt, so läßt sich die Berechnung der Differentialinvarianten ohne jede weitere Integration auf folgende Weise erledigen. Es ist klar, daß auch

$$\mathfrak{d}\mathfrak{s} = \omega(\mathfrak{e}_1, e_{\beta-2}, \ldots)\,\mathfrak{d}\mathfrak{x}$$

ein invariantes Bogenelement sein wird. Dabei sind die durch Punkte angedeuteten Elemente dieselben geblieben. Nur die lateinischen und deutschen Buchstaben haben ihre Rollen ge-

[1]) Die Größen $J, J_1, \ldots, J_{\beta-1}$ spielen hier die Rolle von Konstanten. Die Methode gilt auch noch in dem oben erwähnten Ausnahmefall. Wir lassen ihn nur mit Rücksicht auf die bequemere Darstellung bei Seite.

wechselt. Gleichzeitig mit $\Omega\,(dx\,d'y - dy\,d'x)$ ist nun offenbar auch

$$\frac{\mathfrak{d}\,\Omega}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}}\,(dx\,d'y - dy\,d'x)$$

eine Invariante, wobei die Operation $\mathfrak{d}$ nur auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, ... wirkt. Man muß sich vorstellen, daß das Element $\mathfrak{e}_{\beta-2}$ längs einer Kurve fortrückt. Dividiert man die beiden mit $dx\,d'y - dy\,d'x$ behafteten Invarianten durcheinander, so entsteht die gemischte Differentialinvariante[1])

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{d}\log\Omega}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}}.$$

Da bei uns $\beta - 2$ entweder gleich 0 oder gleich 1 ist, so wird $\mathfrak{J}$ von e_1, $\mathfrak{e}_{\beta-1}$, ... abhängen. Wäre $\mathfrak{J}$ frei von $\mathfrak{y}_{\beta-1}$, so müßte es, weil die Elemente e_1, $\mathfrak{e}_{\beta-2}$, ... keine Invariante haben sollen, eine Konstante sein. Man hätte dann, abgesehen von einem konstanten Faktor,

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{s} = \mathfrak{d}\log\Omega.$$

Wir wollen von diesem Ausnahmefall, dessen gruppentheoretische Bedeutung sich leicht ermitteln ließe, absehen. Dann können wir aus $\mathfrak{J}$ eine Reihe höherer Invarianten

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{J}}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}},\quad \mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{s}},\quad \ldots$$

herleiten und aus ihnen durch Elimination die gewöhnlichen Differentialinvarianten (deutsch geschrieben).

Es kommt also letzten Endes nur darauf an, $\Omega\,(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\,(dx\,d'y - dy\,d'x)$ und $\omega\,(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\,dx$ zu finden, und wir werden sehen, daß im allgemeinen sogar das Flächenelement allein genügt.

---

[1]) Ähnlich läßt sich auch aus $d\sigma$ eine gemischte Differentialinvariante gewinnen.

§ 3. Beziehungen zwischen gemischten Flächenelementen, Bogenelementen und Differentialinvarianten.

Aus dem Erweiterungsgesetz der infinitesimalen Transformationen läßt sich entnehmen, daß die in § 2 mit $M(e_{\alpha-2})$ bezeichnete Größe ($\alpha > 2$) den Wert

$$\xi_x + \eta_y - \alpha(\xi_x + y_1 \xi_y)$$

hat. Vergleicht man nun die Differentialgleichungen (8) mit (5) und (6), so ergibt sich, da es bei ψ auf einen konstanten Faktor nicht ankommt,

$$\psi = \Omega\, \omega^{-\alpha}. \tag{10}$$

Um die gemischte Differentialinvariante $J = \varphi + \psi y_{\alpha-1}$ zu finden, hat man also noch mit Hilfe von (9) die Funktion φ zu ermitteln, d. h. ein vollständiges Differential zu integrieren. Obwohl wir am Schlusse von § 2 eine andere Methode kennen gelernt haben, die nur die Berechnung eines gemischten Flächenelements und Bogenelements verlangt, ist doch manchmal auch das direkte Verfahren zur Bestimmung von J bequem. Handelt es sich z. B. um eine projektive Gruppe und hat man die Fundamentalelemente $e_{\alpha-2}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots$ so gewählt, daß sie alle von nullter und erster Ordnung sind, $e_{\alpha-2}$ aber von erster Ordnung, so wird $L = 0$ sein, weil die Gruppe die Differentialgleichung $y_2 = 0$ invariant läßt. Die Differentialgleichungen, aus denen sich φ bestimmt, lassen dann erkennen, daß φ eine Konstante ist, die man ohne weiteres gleich Null setzen darf, so daß die Invariante J die Form

$$y_2\, \Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)\, \omega^{-3}(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)$$

annimmt.

Es besteht auch zwischen dem gemischten Bogenelement und dem gemischten Flächenelement ein inniger Zusammenhang. Das aus den Gleichungen (5) berechnete Differential von $\log \Omega$ läßt erkennen, welches die höchste in Ω auftretende Ableitung y_2 ist. Wir stellen uns jetzt auf den allgemeinen Standpunkt, denken uns also die Fundamentalelemente $e_{\alpha-2}$, $\mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots$ nicht ausschließlich als Punkte und Linienelemente.

Nehmen wir nun $\varrho > 0$ an, so ergibt sich[1]) durch Differentiation von (5) nach y_ϱ

$$W\Omega_{y_\varrho} + \{2(\xi_x + \eta_y) - (\varrho + 1)(\xi_x + y_1 \xi_y)\}\, \Omega_{y_\varrho} = 0,$$

und der Vergleich mit den Systemen (5) und (6) lehrt, daß

$$\Omega_{y_\varrho} = -\Omega^2 \omega^{-(\varrho+1)}$$

gesetzt werden kann. Es kommt hier auf einen konstanten Faktor nicht an. Aus der gewonnenen Relation geht hervor

$$\omega = \left(\frac{\partial(\Omega^{-1})}{\partial y_\varrho}\right)^{-\frac{1}{\varrho+1}}. \tag{11}$$

Hat man also durch Integration eines vollständigen Differentials das Flächenelement $\Omega(dx\,d'y - dy\,d'x)$ bestimmt und enthält dieses eine Ableitung von y, so kann man nach der Formel (11) das Bogenelement $\omega\,dx$ finden. Liegt der besondere Fall vor, daß das Fundamentalsystem aus einem Linienelement zusammen mit Linienelementen und Punkten besteht, so treten die Betrachtungen am Schlusse von § 2 in Kraft, und es ist außer der Integration des Differentials $d \log \Omega$ im allgemeinen überhaupt keine Integration mehr zu leisten. Halten wir an dem erwähnten Sonderfall fest, so läßt sich, wenn $\Omega(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)$ frei von y_1 sein sollte, wohl aber $\mathfrak{y}_1$ enthält, immer noch das Bogenelement ohne Integration finden. Man erhält nämlich durch Differentiation des auf diesen Fall übertragenen Systems (5) nach $\mathfrak{y}_1$

$$W(\log \Omega)_{\mathfrak{y}_1} + \left\{\frac{\partial \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}} - 2\left(\frac{\partial \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{x}} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathfrak{y}_1 \frac{\partial \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}}\right)\right\} (\log \Omega)_{\mathfrak{y}_1} = 0.$$

Vertauscht man nun in $\log \Omega$ die deutschen und lateinischen Buchstaben, so verwandelt sich $(\log \Omega)_{\mathfrak{y}_1}$ in eine Funktion, die den Differentialgleichungen

[1]) Man überzeugt sich leicht, daß auch der Fall $\varrho = 1$ mit eingeschlossen ist.

$$Wf + \{\xi_x + \eta_y - 2(\xi_x + y_1 \xi_y)\} = 0$$

genügt, welche andererseits $\Omega\,\omega^{-2}$ erfüllt, so daß sich wieder die Möglichkeit ergibt, ω durch Ω auszudrücken. Der einzige Ausnahmefall, der übrig bleibt, ist der, daß Ω ganz frei von Ableitungen erscheint.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man auch aus dem gemischten Bogenelement $\omega\,dx$ das gemischte Flächenelement $\Omega\,(dx\,d'y - dy\,d'x)$ gewinnen kann, wenn in ω eine höhere Ableitung von y als die erste vorkommt. Liegt der mehrfach erwähnte Sonderfall vor, so genügt es auch, wenn $\omega\,(e_1, \mathfrak{e}_{\beta-2}, \ldots)$ eine Ableitung von $\mathfrak{y}$ enthält, also $\beta = 3$ ist.

Durch Nullsetzen der Determinante der Wf ergeben sich manchmal invariante Relationen, die noch Vereinfachungen unserer Betrachtungen ermöglichen.