

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Bemerkungen zu einem Satze über die Riemannsche ζ -Funktion.

Von **Hans Hamburger** (Berlin).

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1922.

An anderer Stelle¹⁾ wurde der Satz bewiesen: *Es sei $f(s)$ gleich einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht dividiert durch ein Polynom; wenn außerdem*

1. $f(s)$ für $\Re(s) > 1$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe vom Typus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$,

2. die Funktion

$$(1) \quad g(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} f(s)$$

für $\Re(s) < -\alpha$ ($\alpha \geq 0$) durch eine absolut konvergente Reihe vom Typus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$ dargestellt wird, so ist $f(s) = \text{konst. } \zeta(s)$.

(Verlangt man statt 2. die schärfere Bedingung

$$2'. \quad g(1-s) = f(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1-s}},$$

so besagt 2'. nichts anders, als daß $f(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügen möge.)

¹⁾ H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion (erste Mitteilung). Math. Zeitschr. **10**, S. 240–254 (1921). Im folgenden kurz mit I zitiert.

Einen neuen außerordentlich kurzen und eleganten Beweis dieses Satzes hat kürzlich Herr Siegel¹⁾ angegeben; wenn trotzdem in der folgenden Note noch einmal auf den ursprünglichen Beweis des Satzes (l. c., Fußnote ¹⁾, S. 151) eingegangen wird, so besteht die Absicht, zu zeigen, daß auch dieser Beweis rasch zum Ziele führt, wenn man darauf verzichtet, die dort angegebenen Hilfssätze 1 und 2 (vgl. I, S. 242—245) zu benutzen. Diese Hilfssätze sind damals teils wegen ihres selbständigen Interesses herangezogen worden, teils um einen neuen Beweis dafür herzuleiten, daß die Funktion $\zeta(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügt (I, S. 253—254).

Dem Beweis schicken wir zwei einfache Integralformeln voraus.

Hilfssatz 1: Es ist²⁾

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4} - \infty i}^{-\frac{3}{4} + \infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} x^{-s} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\cos 2x - 1).$$

Beweis: Wie man leicht einsieht, ist das Integral linker Hand nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich der Summe der Residuen der Funktion

$$x^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} (2x)^{-s}}{\Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}}$$

¹⁾ C. Siegel, Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. Math. Ann. **86** (1922), S. 276—279. Vgl. auch ebenda **85** (1922), S. 129—140 eine Note des Verfassers „Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ -Funktion äquivalent sind“, die bereits den Hauptgedanken des Siegelschen Beweises enthält. Beide Noten sind völlig unabhängig voneinander entstanden.

²⁾ Ähnliche Integrale betrachtet Herr E. Landau in seiner Arbeit: Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid). Sitzgsb. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. **31** (1915), S. 458—476. Vgl. insbesondere S. 468—469. — Die Formel des Hilfssatzes ist nichts anderes als die Integralumkehrung der Formel (9) des Hilfssatzes 3 aus I, S. 246—247.

in der Halbebene $\Re(s) < -\frac{3}{4}$; mithin ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}-\infty i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\cos 2x - 1).$$

W. z. b. w.

Hilfssatz 2:¹⁾ Es ist für $\beta > 0$ und positive y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-s-\infty i}^{-s+\infty i} \frac{y^s}{(s-1)(s-2)} ds = \begin{cases} 0 & \text{für } y > 1 \\ y - y^2 & \text{für } y < 1. \end{cases}$$

Beweis: Diese Formel ist mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes unmittelbar zu verifizieren.

Beweis des Hauptsatzes: Man setze, indem man (1) benutzt (vgl. I, S. 248, Formel (17))

$$(2) \quad G(s) = \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)} g(1-s) = \pi^{\frac{3}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} f(s).$$

Aus der Relation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma(\sigma + it)|}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

folgt nach geeigneter Wahl positiver Konstanten T , C , C' für $\Re(s) = \frac{5}{4}$, $|t| > T$

$$(3) \quad \left| \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} \right| < C |t|^{-\frac{5}{4}}, \quad |G(s)| < C' |t|^{-\frac{5}{4}}.$$

Andererseits findet man für $\Re(s) = -\beta$, ($\beta > a$), da wegen der Voraussetzung 2. die Funktion $g(1-s)$ auf der Geraden $\sigma = -\beta$ beschränkt bleibt

$$(4) \quad |G(s)| < C'' |t|^{-2}.$$

¹⁾ Vgl. E. Landau, l. c., Fußnote 3), S. 467.

Endlich ist nach Voraussetzung $f(s)$ und damit auch $G(s)$ im Streifen $-\beta \leq \Re(s) \leq \frac{5}{4}$ bis auf endlich viele Pole regulär; folglich ergibt sich aus einem oft angewandten funktionentheoretischen Hilfssatze von Phragmén-Lindelöf¹⁾ — der gestattet, von der Größenordnung einer analytischen Funktion auf dem Rande eines Bereiches auf ihre Größenordnung im Innern zu schließen — wegen (3) und (4) die Existenz zweier positiver Konstanten T' und C''' , derart, daß in dem ganzen Bereiche $-\beta < \Re(s) \leq \frac{5}{4}$, $|t| \geq T'$

$$(5) \quad |G(s)| \leq C''' |t|^{-\frac{5}{4}} \text{ ist.}$$

Bezeichnet x eine positive Zahl, so bilde man das Integral

$$(6) \quad J(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\frac{5}{4} - \infty i}^{\frac{5}{4} + \infty i} G(s) x^{-s+2} ds - \int_{-\beta + \infty i}^{-\beta - \infty i} G(s) x^{-s+2} ds \right);$$

dann läßt sich wegen (5) $J(x)$ als ein Integral über den Rand des Streifens $-\beta \leq \Re(s) \leq \frac{5}{4}$ auffassen, und es ergibt sich nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(7) \quad J(x) = R(x),$$

unter $R(x)$ die Summe der Residuen von $G(s)$ an den endlich vielen Polen im Innern des Streifens verstanden; mithin ist

$$(8) \quad R(x) = \sum_{r=1}^m x^{-s_r+2} P_r(\log x),$$

wenn $s_1, s_2, \dots, s_r, \dots, s_m$ die Pole von $G(s)$ im betrachteten Streifen, $P_1, \dots, P_r, \dots, P_m$ Polynome in $\log x$ bezeichnen.

Setzt man, indem man für $G(s)$ Formel (2) benutzt (vgl. I, S. 249, Formel (19))

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{5}{4} - \infty i}^{\frac{5}{4} + \infty i} G(s) x^{-s+2} ds = \frac{V\pi}{2\pi i} \int_{\frac{5}{4} - \infty i}^{\frac{5}{4} + \infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} f(s) (\pi x)^{-s+2} ds,$$

¹⁾ E. Phragmén und E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta Math. **31** (1908), S. 381—406, insb. S. 385.

so ergibt sich, wenn man für $f(s)$ die Dirichletsche Reihe aus Voraussetzung 1. einsetzt und wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für $\Re(s) = \frac{5}{4}$, die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \int_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} (\pi n x)^{-s+2} ds \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \int_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} (\pi n x)^{-s} ds \\
 (9) \quad &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1) \quad (\text{nach Hilfssatz 1}).
 \end{aligned}$$

Substituiert man andererseits in das Integral

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} G(s) x^{-s+2} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)} g(1-s) x^{-s+2} ds
 \end{aligned}$$

für $g(1-s)$ die Dirichletsche Reihe aus Voraussetzung 2. und integriert dann gliedweise, so folgt aus Hilfssatz 2

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= -4\pi^2 x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^s}{(s-2)(s-1)} ds \\
 (10) \quad &= -4\pi^2 \sum_{n=1}^m b_n (x-n) \quad (m+1 \leq x < m).
 \end{aligned}$$

Wegen (6) und (7) ist

$$(11) \quad \varphi(x) - \psi(x) = R(x).$$

$\varphi(x)$ ist aber, wie aus (9) hervorgeht, eine periodische Funktion mit der Periode 1. Mithin ergibt sich aus (11) und (10)

$$(12) \quad R(x+1) - R(x) = \psi(x) - \psi(x+1) \\ = 4\pi^2 \left(b_{m+1}(x-m) + \sum_{n=1}^m b_n \right) \quad (\text{für } m < x \leq m+1).$$

Formel (8) läßt erkennen, daß $R(x+1) - R(x)$ für $x > 0$ einen stetigen Differentialquotienten erster Ordnung hat; damit dasselbe nun aber auch für die rechte Seite von (12) gilt, ist notwendig, daß alle Koeffizienten b_{m+1} gleich einer festen Konstanten b sind. Mithin ist

$$g(1-s) = b\zeta(1-s).$$

Setzt man diesen Wert für $g(1-s)$ in die Formel (1) ein, so folgt aus der Riemannschen Funktionalgleichung auch

$$f(s) = b\zeta(s).$$

W. z. b. w.