

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1921. Heft I

Januar- bis März-sitzung

---

München 1921

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Die Torsion runder Stäbe von veränderlichem Querschnitt.

Von Ludwig Föppl in Dresden.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Februar 1921.

Stäbe von überall kreisförmigem Querschnitt, aber veränderlichem Durchmesser, die auf Torsion beansprucht werden, kommen im Maschinenbau häufig vor. Die Veränderlichkeit des Durchmessers erfolgt in der Regel nur auf eine kurze Strecke, wie z. B. bei Eindrehungen einer Welle oder beim Übergang von einer zylindrischen Welle mit größerem Durchmesser auf eine solche mit kleinerem Durchmesser. Von Bedeutung ist hierbei die Kenntnis der Spannungserhöhung an der Stelle des Überganges, die selbstverständlich von der Art des Überganges abhängig ist. Außerdem kommen auch runde Stäbe mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen vor, die auf Torsion beansprucht werden und die Kenntnis der Verteilung der Torsionsspannungen im Meridianschnitt solcher Stäbe ist gleichfalls von Interesse.

Von Arbeiten, die sich mit den genannten Aufgaben beschäftigen, ist vor allen Dingen die grundlegende Abhandlung von A. Föppl<sup>1)</sup> zu nennen, in der er die Torsion solcher Stäbe vom Standpunkt der Elastizitätstheorie aus behandelt und zeigt, daß der Verdrehungswinkel  $p$  an jeder Stelle des Stabes der Differentialgleichung

<sup>1)</sup> A. Föppl, Sitzungsberichte der Bayer. Akad. d. Wiss. 1905, Bd. 35, S. 249 und Z. d. V. d. I. 1906, Bd. 50, S. 1032; siehe auch A. und L. Föppl, „Drang und Zwang“, Bd. 2, S. 149.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

genügen muß, wobei die  $z$ -Achse mit der Stabachse zusammenfällt, während mit  $r$  der Abstand von dieser Achse bezeichnet wird. Da die  $z$ -Achse Symmetrieachse ist, so genügt es, einen Meridianschnitt zu betrachten, der auf der einen Seite von der  $z$ -Achse und auf der anderen Seite von der Meridiankurve des betreffenden Stabes begrenzt ist. Die Torsionsspannung legt an jeder Stelle eine bestimmte Richtung in diesem Meridianschnitt fest. Verbindet man die Richtungen zu Linien, so erhält man die sogenannten Spannungslinien, die wir mit  $q = \text{const}$  bezeichnen wollen und von denen die  $z$ -Achse und die meridionale Begrenzungskurve des Stabes die beiden äußersten sind. Selbstverständlich sind bei einem Stab mit achsensymmetrischen Bohrungen oder Hohlräumen die innere und die äußere Begrenzungskurve des Meridianschnittes die äußersten Spannungslinien. Die Spannungslinien  $q = \text{const}$  stehen auf den Kurven gleichen Verdrehungswinkels  $p = \text{const}$  senkrecht. Die Differentialgleichung, der die Spannungslinien genügen müssen, lautet:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial q}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Wie leicht gezeigt werden kann, bedeutet  $q$  bei geeigneter Festsetzung einer noch willkürlichen Konstanten bis auf den Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  das Drehmoment, das von dem innerhalb der Spannungslinie  $q = \text{const}$  befindlichen Teil des Stabes aufgenommen wird, so daß  $q = 0$  die innere Begrenzung des Meridianschnittes bedeutet, während für die äußere Begrenzung  $2\pi q$  das gesamte vom Stab aufzunehmende Torsionsmoment angibt.

Die näheren Ausführungen hierzu findet man in der Göttinger Dissertation von F. A. Willers<sup>1)</sup> „Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse“, worin auch ein Verfahren

<sup>1)</sup> Siehe auch Zeitschr. f. Math. und Phys. 1906.

zur graphischen Lösung bestimmter einschlägiger Aufgaben angegeben wird.

Mit der Lösung einer der beiden Differentialgleichungen (1) und (2) unter Berücksichtigung, daß für die Begrenzungskurve des Stabes  $q = \text{const}$  ist, ist zugleich der Spannungszustand an jeder Stelle mit bestimmt, indem die in Richtung der  $z$ - und  $r$ -Achse gerichteten Schubspannungskomponenten mit  $p$  bzw.  $q$  folgendermaßen zusammenhängen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_z}{G} &= r \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial q}{\partial r} \\ \frac{\tau_r}{G} &= r \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wie in den oben genannten Arbeiten gezeigt ist.  $G$  bedeutet darin den Schubelastizitätsmodul.

Schließlich ist noch auf die Göttinger Dissertation von W. Arndt „Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen“ 1916 hinzuweisen. Hier wird der Zusammenhang der oben gekennzeichneten Torsionsaufgabe mit einer fünfdimensionalen achsensymmetrischen Potentialströmung aufgedeckt und mit Hilfe dieser hydrodynamischen Abbildung der Verlauf der Spannungslinien bei achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen angegeben.

In den folgenden Ausführungen soll auch eine hydrodynamische Analogie zwischen der Torsionsaufgabe und einer Potentialströmung benutzt werden. Im Gegensatz zu der Arndtschen Arbeit wird aber keine fünfdimensionale Strömung, sondern eine gewöhnliche dreidimensionale achsensymmetrische Potentialströmung zu Hilfe genommen. Wenn es damit auch nicht wie bei der fünfdimensionalen gelingt, die Stromlinien und Spannungslinien sich entsprechen zu lassen, so bietet die neue Darstellung doch in anderer Richtung wesentliche Vorteile, so daß man einerseits die Arndtschen Resultate auf einfachere Weise ableiten kann (s. § 2), andererseits darüber hinausgehende Resultate sich angeben lassen (s. § 3).

### § 1. Das hydrodynamische Gleichnis.

Das Potential  $\Phi$  einer achsensymmetrischen Potentialströmung mit  $z$  als Rotationsachse genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

während die Stromfunktion  $\Psi$  die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

erfüllen muß. Der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitskomponenten  $v_z$  und  $v_r$  in Richtung der  $z$ -Achse bzw. senkrecht dazu mit dem Potential  $\Phi$  und der Stromfunktion  $\Psi$  ist durch die bekannten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

gegeben.

Das hydrodynamische Gleichnis unserer Torsionsaufgabe besteht in dem einfachen Zusammenhang der Differentialgleichung (1) für den Verdrehungswinkel  $p$  mit der Differentialgleichung (5) für die Stromfunktion  $\Psi$ . Durch die Beziehung

$$p = a \frac{\Psi}{r^2} \quad (7)$$

gehen nämlich die beiden Differentialgleichungen ineinander über, wie eine einfache Ausrechnung lehrt. Der konstante Vergleichsfaktor  $a$  hat die Dimension  $\frac{\text{sec}}{\text{cm}}$ . Er wird im folgenden der Einfachheit halber weggelassen, da er nicht unbedingt für das Verständnis erforderlich erscheint. Wir können demnach feststellen:

Die Lösung jeder dreidimensionalen achsensymmetrischen Potentialströmung liefert zugleich die Lösung einer entsprechenden Torsionsaufgabe.

Um den Zusammenhang zwischen den Schubspannungskomponenten der Torsionsaufgabe und den Geschwindigkeitskomponenten der zugehörigen Strömungsaufgabe aufzudecken, setzen wir nach den Gleichungen (3) und (6):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_z}{G} &= r \frac{\partial p}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Psi}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -v_r \\ \frac{\tau_r}{G} &= r \frac{\partial p}{\partial r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{2\Psi}{r^2} = v_z - \frac{2\pi\Psi}{\pi r^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

und ersehen daraus, daß bis aufs Vorzeichen die achsiale Schubspannungskomponente an jeder Stelle mit der radialen Geschwindigkeitskomponente übereinstimmt, während die radiale Schubspannungskomponente bis auf die Größe  $\frac{2\pi\Psi}{\pi r^2}$  sich mit der achsialen Geschwindigkeitskomponente deckt. Da  $2\pi\Psi$  die sekundliche Durchflußmenge durch die Stromlinienröhre  $\Psi = \text{const}$  bedeutet, so hat die Größe  $\frac{2\pi\Psi}{\pi r^2}$  die Bedeutung der durchschnittlichen Achsialgeschwindigkeit innerhalb der vollen Stromröhre, die wir mit  $\bar{v}_z$  bezeichnen wollen. Für die Stromlinie  $\Psi = 0$  ist diese Größe Null, wenn nicht gleichzeitig  $r = 0$  ist. Nehmen wir z. B. die Potentialströmung um eine Kugel in einer sonst gleichförmigen Parallelströmung, so ist für die Kugeloberfläche  $\Psi = 0$ , während  $r$  nicht gleich Null ist. Hier geht demnach die allgemein gültige Beziehung, die aus den Gleichungen (8) folgt:

$$\frac{\tau_z}{\tau_r} = - \frac{v_r}{v_z - \bar{v}_z} \quad (9)$$

über in

$$\frac{\tau_z}{\tau_r} = - \frac{v_r}{v_z}$$

d. h. die Spannungslinien in der zugehörigen Torsionsaufgabe müssen auf der Kugel senkrecht stehen. Man hat demnach an den Gleich. (8) und (9) ein Mittel, um aus dem Stromlinienverlauf auf den Verlauf der Spannungslinien bei der zu-

gehörigen Torsionsaufgabe zu schließen. In der Regel wird es jedoch einfacher sein, von Gleich. (7) auszugehen und mittelst  $p$  durch die in den Gleich. (3) enthaltenen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial z} &= -r^3 \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial q}{\partial r} &= r^3 \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

den Verlauf der Spannungslinien  $q = \text{const}$  zu erhalten.

Wir wollen diesen Gang der Rechnung an dem oben erwähnten Beispiel der Strömung um eine ruhende Kugel durchführen. Ist  $V$  die Geschwindigkeit im Unendlichen, also für  $z = \pm \infty$  und  $a$  der Kugelradius, so lautet die Stromfunktion<sup>1)</sup>:

$$\Psi = \frac{Vr^2}{2} \left( 1 - \frac{a^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (11)$$

Daraus folgt für die entsprechende Torsionsaufgabe:

$$p = \frac{V}{2} \left( 1 - \frac{a^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (12)$$

d. h.  $p = \text{const}$  sind die Kugeln  $r^2 + z^2 = \text{const}$  um den Anfangspunkt. Setzt man diesen Wert von  $p$  in die Gleichung (10) ein, so folgt für  $q$ :

$$q = a^3 z \frac{3r^2 + 2z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (13)$$

Demnach ist  $q = \text{const}$  für  $\frac{r}{z} = \text{const}$  d. h. die Spannungslinien sind die Geraden durch den Anfangspunkt. Da die meridionale Begrenzungskurve des Stabes mit einer Spannungslinie  $q = \text{const}$  zusammenfallen muß, so handelt es sich hier um die Torsion eines kegelförmigen Stabes. Die schon oben gefundene Bedingung, daß die Spannungslinien überall auf der Kugel der entsprechenden Potentialströmung senkrecht stehen müssen, bestätigt sich durch dieses Resultat. Die Ver-

<sup>1)</sup> Siehe z. B. H. Lorenz, Technische Hydromechanik, S. 299.

teilung der Torsionsspannungen im Meridianschnitt folgt aus den Gleichungen (3) durch einfache Ausrechnung.

Als weitere einfache Lösungen seien hier noch aufgeführt

$$\Psi = z,$$

woraus

$$p = \frac{z}{r^2} \text{ und } q = \frac{r^2}{2} + z^2$$

folgen. Die Lösung ist für die Torsion einer achsensymmetrischen elliptischen Schale zu brauchen, jedoch praktisch nicht von Bedeutung. Ferner sei die von Prasil<sup>1)</sup> angegebene achsensymmetrische Potentialströmung für den Saugstrahl einer Turbine erwähnt. Die Stromlinienfunktion lautet:

$$\Psi = r^2 z.$$

Daraus ergibt sich

$$p = z \text{ und } q = \frac{r^4}{4}. \quad (14)$$

Diese Lösung entspricht demnach dem gewöhnlichen kreiszylindrischen Stab. Daß das Torsionsmoment  $2\pi q$  proportional mit  $r^4$  wächst, ist eine bekannte Tatsache.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß durch Addition von Lösungen für  $p$  und  $q$  wieder neue Lösungen gefunden werden, wovon wir später Gebrauch machen werden

## § 2. Achsensymmetrische Bohrungen und Hohlräume.

In § 1 haben wir als Beispiel die Strömung um eine Kugel und die entsprechende Torsionsaufgabe behandelt. Sobald man eine Lösung  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $p$  oder  $q$  der zugehörigen Differentialgleichungen hat, kann man durch Differentiationen oder Integrationen nach  $z$  sofort beliebig viele neue Lösungen angeben. Es geht dies ohne weiteres aus dem Bau der Differentialgleichungen hervor. Mit solchen Lösungen wollen wir uns in diesem Paragraphen beschäftigen und dabei von den

<sup>1)</sup> F. Prasil, „Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen“. Schweizer Bauzeitung, Bd. 41, 1903.

Gleichungen (11) bis (13) für die Strömung um die Kugel ausgehen. Man kann sie bekanntlich auffassen als Überlagerung einer gleichmäßigen Strömung parallel der  $z$ -Achse mit einer Doppelquelle im Nullpunkt. Da bei der zugehörigen Torsionsaufgabe die Spannungslinien Gerade sind, die alle vom Nullpunkt auslaufen, so müßte man hier eigentlich von einer einfachen Quelle sprechen, und in der Tat geschieht dies auch bei dem in der Einleitung erwähnten Vergleich der Torsionsaufgabe mit einer fünfdimensionalen Strömung. Wir wollen jedoch an dem Vergleich mit der dreidimensionalen Strömung festhalten und werden demnach sowohl bei der Strömung wie beim zugehörigen Torsionsproblem von einer Doppelquelle im Nullpunkt sprechen. Durch Integration nach  $z$  erhält man aus der Doppelquelle die einfache Quelle. Um die einfache Quelle zu kennzeichnen, wollen wir an  $p$  und  $q$  die Indizes 1 anhängen. Aus Gleich. (12) und (13) folgt demnach

$$p_1 = \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{und} \quad q_1 = \frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (15)$$

Durch nochmalige Integration folgt

$$p_0 = \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{r^2} \quad \text{und} \quad q_0 = z \sqrt{r^2 + z^2} \quad (16)$$

usw. und durch Differentiation der Gleichungen (12) und (13)

$$p_3 = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad q_3 = \frac{r^4}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (17)$$

Letztere Lösung, auf die wir unten noch näher eingehen werden, entspricht einer dreifachen Quelle im Nullpunkt. Allen Lösungen, die man auf diese Weise erhält, ist gemeinsam, daß der Nullpunkt ausgezeichnet ist und daß durch ihn als Quell- bzw. Senkpunkt unendlich viele Spannungslinien laufen. Infolgedessen sind diese Lösungen nicht für einen massiven Stab zu brauchen, der von  $z = -\infty$  bis  $z = +\infty$  reicht, sondern nur für Stäbe, die den Nullpunkt ausschließen, wie z. B. der schon erwähnte kegelförmige Stab ohne Spitze oder

auch Stäbe mit Bohrungen und Hohlräumen. Um einen zylindrischen Stab mit solchen Bohrungen oder Hohlräumen zu untersuchen, muß man eine der oben angegebenen Lösungen  $q_0$  bis  $q_3$  mit der durch Gleich. (14) bestimmten Lösung für den zylindrischen Stab zusammensetzen. Wir werden eine solche Quelle im Nullpunkt zu wählen haben, daß für  $z = \pm \infty$  der Einfluß der Quelle endliche Werte für  $q$  liefert oder verschwindet. Das ist unter Verwendung des Wertes  $q$  aus Gleichung (13) der Fall. Wir setzen daher:

$$q = c_1 \frac{r^4}{4} - c_2 \left( z \frac{3r^2 + 2z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 2 \right). \quad (18)$$

Dabei sind  $c_1$  und  $c_2$  Konstante und die konstante Größe  $-2c_2$  ist noch hinzugefügt, damit die Klammer für  $z = -\infty$  wegfällt und nur das erste Glied stehen bleibt. Demnach entspricht Gleich. (18) im Unendlichen der negativen  $z$ -Achse einem gewöhnlichen kreiszylindrischen Stab und  $q = 0$  deckt sich dort mit der  $z$ -Achse, während für  $z = +\infty$  aus Gleichung (18) für  $q = 0$

$$\frac{c_1}{4} R^4 - 4c_2 = 0$$

oder 
$$R = 2 \sqrt[4]{\frac{c_2}{c_1}}$$

folgt, d. h. der Stab ist hier mit einem Radius  $R$  ausgebohrt. Die Bohrung hat die in Abb. 1 gezeichnete Gestalt, wobei  $z_0$ , wie aus Gleich. (18) mit  $q = 0$  abgeleitet werden kann, den Wert

$$z_0 = \frac{R}{2} \sqrt[4]{3} = 0,66 R$$

annimmt.

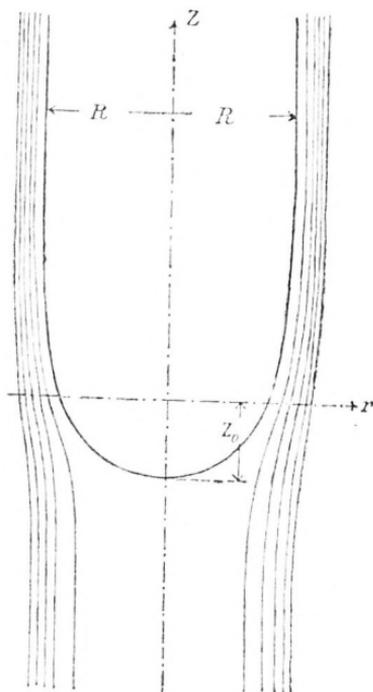


Abb. 1

Der Verlauf weiterer Spannungslinien, die einer um konstante Größen wachsenden Wertefolge von  $q$  entsprechen, ist aus Abb. 1 zu ersehen. Im übrigen wird auf die Arndtsche Dissertation verwiesen, wo auch Näheres über die Verteilung der Schubspannungen in der Bohrwandung zu finden ist. Es sei hier nur noch darauf hingewiesen, daß statt der einseitig geschlossenen Bohrung auch irgend eine andere Spannungslinie als innere Begrenzung genommen werden kann. Dieser Fall wird einer durchgehenden Bohrung entsprechen, die im allgemeinen für  $z = +\infty$  eine andere Öffnung hat als für  $z = -\infty$ . Wie aus Abb. 1 zu ersehen, streben die äußeren Spannungslinien rasch Parallelen zur  $z$ -Achse zu und somit einer gewöhnlichen Hohlwelle.

Der Fall einer achsensymmetrischen kugelförmigen Höhlung, der auch in der Arndtschen Arbeit besprochen wird, läßt sich hier auch auf einfacherem Weg ableiten, indem wir Gleich. (14) und (17) zusammenfassen:

$$q = c_1 \frac{r^4}{4} - c_2 \frac{r^4}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (19)$$

Die innere Begrenzung  $q = 0$  setzt sich hier aus der  $z$ -Achse  $r = 0$  und der Kugel

$$\sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt[5]{\frac{4c_2}{c_1}}$$

zusammen. Auch dieses Resultat ist in der erwähnten Arbeit von W. Arndt zahlenmäßig besprochen, so daß wir hier nicht näher darauf einzugehen brauchen.

### § 3. Zylindrische Stäbe mit Einkerbungen.

Wir haben schon in § 2 darauf hingewiesen, daß wir mit den dort verwendeten Lösungen, die zu Quellen verschieden hoher Ordnung im Nullpunkt gehören, nicht die Torsion eines massiven Stabes mit einer Einkerbung am Umfang wieder geben können. Das naheliegendste wäre es nun, in Analogie zu den Überlegungen des vorigen Paragraphen hier von einer ring-

förmigen Quellenverteilung auszugehen und ähnlich, wie wir vorhin von der Strömung um eine Kugel ausgegangen sind, hier die Potentialströmung um einen Ring zu Grunde zu legen und mittels der in § 1 angegebenen Schritte das zugehörige Torsionsbild zu entwerfen. Dieser Weg ist durchaus gangbar; er scheint mir jedoch wegen der umständlichen Darstellungsweise für die Potentialströmung um einen Ring mit wesentlich mehr Rechenarbeit verbunden zu sein als der folgende Weg, den wir einschlagen wollen und der uns zugleich als besonderen Fall die Ergebnisse des vorigen Paragraphen liefert.

Wir gehen zu dem Zweck von Lösungen der Gleich. (4) und (5) für Potentialströmungen aus, die sich mittelst Besselscher Funktionen darstellen lassen. Bezeichnen wir mit  $k$  irgend eine Konstante und mit  $a$  einen festen Wert von  $r$ , so sind<sup>1)</sup>

$$\Phi = e^{-k \frac{z}{a}} J_0 \left( k \frac{r}{a} \right) \quad \text{und} \quad \Psi = r e^{-k \frac{z}{a}} J_0' \left( k \frac{r}{a} \right)$$

Lösungen der Gleich. (4) und (5), wovon man sich durch Einsetzen sofort überzeugen kann. Dabei bedeutet der Strich an  $J_0 \left( k \frac{r}{a} \right)$  wie auch später stets Differentiation nach dem Argument  $k \frac{r}{a}$ , also

$$J_0' = \frac{a}{k} \frac{dJ_0}{dr}; \quad J_0'' = \frac{a^2}{k^2} \frac{d^2 J_0}{dr^2} \quad \text{usw.}$$

Mit Hilfe von  $\Psi$  ergibt sich nach unserer hydrodynamischen Analogie

$$p = \frac{1}{r} e^{-k \frac{z}{a}} J_0' \left( k \frac{r}{a} \right)$$

und wegen Gleich. (10)

$$q = -r e^{-k \frac{z}{a}} \left[ r J_0 \left( k \frac{r}{a} \right) + \frac{2}{k} J_0' \left( k \frac{r}{a} \right) \right].$$

<sup>1)</sup> Siehe Lamb-Friedel, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 156.

Bei Ableitung des letzteren Ausdruckes ist schon von einer Umformung mit Hilfe der Besselschen Differentialgleichung

$$J_0''\left(k\frac{r}{a}\right) + \frac{a}{kr} J_0'\left(k\frac{r}{a}\right) + J_0\left(k\frac{r}{a}\right) = 0$$

Gebrauch gemacht. Die Ausdrücke für  $p$  und  $q$  lassen sich noch einfacher schreiben, wenn man sich Besselscher Funktionen höherer Ordnung bedient und dabei die bekannte Beziehung

$$J_n'\left(k\frac{r}{a}\right) = \frac{na}{kr} J_n\left(k\frac{r}{a}\right) - J_{n+1}\left(k\frac{r}{a}\right)$$

benützt; dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{a}{r} e^{-k\frac{z}{a}} J_1\left(k\frac{r}{a}\right) \\ q &= ar^2 e^{-k\frac{z}{a}} J_2\left(k\frac{r}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dabei sind Faktoren  $a$  zugefügt, so daß für  $p$  und  $q$  die richtigen Dimensionen herauskommen. Aus diesen Grundlösungen der Differentialgleichungen (1) und (2) ergeben sich die Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_z}{G} &= r \frac{\partial p}{\partial z} = ke^{-k\frac{z}{a}} J_1\left(k\frac{r}{a}\right) \\ \frac{\tau_r}{G} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial q}{\partial z} = ke^{-k\frac{z}{a}} J_2\left(k\frac{r}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Da  $k$  in den Gleich. (20) und (21) noch als Parameter eingeht, den wir beliebig wählen können, so besteht die Möglichkeit, durch Überlagerung mehrerer oder unendlich vieler solcher Einzellösungen mit verschiedenen Werten  $k$  auf Lösungen zu gelangen, die für unsere Zwecke brauchbar sind. So führt die Integration nach  $k$  zwischen den festen Grenzen 0 und  $\infty$  auf die Lösungen, die wir im vorigen Paragraphen betrachtet haben; denn es ist<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Lamb-Friedel, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 160.

$$p = - \frac{a}{r} \int_0^{\infty} e^{-k \frac{z}{a}} J_1 \left( k \frac{r}{a} \right) dk = - \frac{a^2}{\sqrt{z^2 + r^2} (\sqrt{z^2 + r^2} + z)}$$

und entsprechend für  $q$ . Es ergibt sich also wieder im Nullpunkt die Singularität, die einem Quellpunkt höherer Ordnung entspricht. Durch geeignete Differentiation bzw. Integration nach  $z$  lassen sich auf diesem Weg sämtliche Lösungen des vorigen Paragraphen wieder finden. Der angegebene Weg bietet uns aber auch die Möglichkeit, aus der Grundlösung durch geeignete andere Überlagerungen auf die Lösungen zu kommen, die wir wünschen, nämlich Lösungen, bei denen die Quelle sich nicht im Nullpunkt befindet, sondern längs eines Kreises vom Radius  $a$  um den Nullpunkt gleichmäßig verteilt ist, so daß wir die Torsionsaufgabe eines unendlich langen zylindrischen Stabes mit einer Einkerbung damit lösen können. Dies ist der Fall, wenn wir setzen

$$\left. \begin{aligned} p &= - \frac{a}{r} \int_0^{\infty} k^n e^{-k \frac{z}{a}} J_1 \left( k \frac{r}{a} \right) J_1(k) dk \\ q &= a r^2 \int_0^{\infty} k^n e^{-k \frac{z}{a}} J_2 \left( k \frac{r}{a} \right) J_1(k) dk \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und dementsprechend

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_z}{G} &= \int_0^{\infty} k^{n+1} e^{-kz} J_1 \left( k \frac{r}{a} \right) J_1(k) dk \\ \frac{\tau_r}{G} &= \int_0^{\infty} k^{n+1} e^{-kz} J_2 \left( k \frac{r}{a} \right) J_1(k) dk \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Darin soll  $n$  eine zunächst noch beliebige ganze Zahl bedeuten. Die Gleich. (22) und (23) lösen, wie gezeigt wird, die Torsionsaufgabe für einen beiderseits im Unendlichen kreiszylindrischen Stab vom Radius  $a$ , der in der Umgebung der Stelle  $z = 0$  eine Einschnürung besitzt, die einen um so schärferen Übergang besitzt, je größer  $n$  gewählt wird. Der

Wert von  $r$  ist also stets kleiner als  $a$ . Für  $x = 0$  lassen sich die Integrale angeben<sup>1)</sup> und es zeigt sich dabei, daß der Nullpunkt jetzt tatsächlich kein Quellpunkt mehr ist wie bei der obigen Darstellung, sondern daß  $p$  für kleine Werte von  $r$  in erster Annäherung konstant ist, während  $q$  proportional  $r^4$  wächst, wie es auch verlangt werden muß, da sich der Spannungszustand für die nächste Umgebung der  $x$ -Achse nicht merklich von dem eines entsprechenden Stabes ohne Einkerbung unterscheiden darf. Daß die  $x$ -Achse bei unserem Beispiel keine Singularität aufweisen kann, läßt sich auch ohne den formalen Beweis an Hand der Formeln dadurch klar machen, daß das entsprechende hydrodynamische Bild bei geeignetem Wert  $n$  die Potentialströmung einer Flüssigkeit von der einen Seite einer unendlichen Ebene durch ein kreisförmiges Loch vom Radius  $a$  nach der anderen Seite der Ebene bedeutet<sup>2)</sup>, so daß also im hydrodynamischen Bild die  $x$ -Achse auch singularitätenfrei ist.

Von Wichtigkeit ist die Spannungsverteilung in der Umgebung der Kerbe und wir müssen zu dem Zweck die obigen Integrale für  $x \neq 0$  und für Werte von  $\frac{r}{a}$ , die sich nicht sehr viel von 1 unterscheiden, da wir keine zu tiefe Kerbe voraussetzen wollen, wenigstens näherungsweise auswerten. So lange  $\frac{r}{a}$  nicht erheblich kleiner als 1 ist, gelingt dies mittelst der asymptotischen Darstellungen für die Besselschen Funktionen:

$$J_1\left(k \frac{r}{a}\right) = -\sqrt{\frac{2a}{\pi k r}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - k \frac{r}{a}\right)$$

$$J_2\left(k \frac{r}{a}\right) = -\sqrt{\frac{2a}{\pi k r}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - k \frac{r}{a}\right).$$

Wenn wir diese Werte in die obigen Integrale einsetzen, so ist allerdings zu bedenken, daß für Werte von  $k$ , die nahe

1) Siehe N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen.

2) Siehe Lamb-Friedel, S. 161.

an Null liegen, die asymptotische Darstellung nicht mehr brauchbar ist. Eigentlich müßten wir die untere Grenze des Integrals nicht gleich Null, sondern einem positiven Wert gleichsetzen, um die asymptotische Darstellung der Besselschen Funktionen fürs ganze Integral anwenden zu dürfen. Nennt man die untere Grenze etwa  $b$ , das irgend eine positive große aber endliche Zahl vorstellen soll, so kann man durch Einführung der Substitution  $k = k' + b$  die untere Grenze des Integrales wieder zu Null machen. Unter dem Integral lassen sich dann ohne Bedenken die Besselschen Funktionen durch ihre asymptotischen Werte ersetzen. Man erhält alsdann für die Größen  $p$ ,  $q$  und für die Spannungskomponenten Integraldarstellungen, die für  $b = 0$  mit den unten folgenden Gleichungen (24) übereinstimmen. Man überzeugt sich leicht, wie ich hier nicht näher ausführen will, daß gerade für den Grenzfall, den wir unten betrachten werden, das Glied  $b = 0$  bei einer Entwicklung nach  $b$  das allein ausschlaggebende ist, so daß für den Grenzfall die unten folgenden Formeln keine Näherungsformeln mehr sind, sondern ihnen exakte Gültigkeit zukommt. Auch ohne diesen Umweg über eine von Null verschiedene untere Grenze, sieht man, daß bei einigermaßen großem  $n$  der Beitrag, der bei Einführen der asymptotischen Darstellung der Besselschen Funktionen von den kleinen Werten  $k$  herrührt, gegenüber dem anderen Teil nicht wesentlich in Betracht kommt. Dabei ist zu bedenken, daß durch die asymptotische Darstellung die Besselschen Funktionen bis verhältnismäßig nahe an den Nullpunkt gut wieder gegeben werden. Namentlich für sehr große Werte  $n$ , für die wir sogleich eine Anwendung machen, wird der Fehler bei kleinem  $k$  sehr gering. Mittelst der asymptotischen Darstellung der Besselschen Funktionen ergibt sich unter Verwendung der aus der Trigonometrie bekannten Formeln für die Produkte der  $\cos$  und  $\sin$  zweier Winkel:

$$\left. \begin{aligned}
 p &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^3} \int_0^{\infty} k^{n-1} e^{-k \frac{z}{a}} \left( \sin k \frac{a+r}{a} + \cos k \frac{a-r}{a} \right) dk \\
 q &= \frac{1}{\pi} \sqrt{(ar)^3} \int_0^{\infty} k^{n-1} e^{-k \frac{z}{a}} \left( \cos k \frac{a+r}{a} - \sin k \frac{a-r}{a} \right) dk \\
 \frac{\tau_z}{G} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \int_0^{\infty} k^n e^{-k \frac{z}{a}} \left( \sin k \frac{a+r}{a} + \cos k \frac{a-r}{a} \right) dk \\
 \frac{\tau_r}{G} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \int_0^{\infty} k^n e^{-k \frac{z}{a}} \left( \cos k \frac{a+r}{a} - \sin k \frac{a-r}{a} \right) dk
 \end{aligned} \right\} (24)$$

Die hier vorkommenden Integrale sind aber bekannt<sup>1)</sup>.  
Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} k^n e^{-k \frac{z}{a}} \frac{\sin k \frac{a \pm r}{a}}{\cos \frac{a \pm r}{a}} dk \\
 &= \frac{n!}{\left[ \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{a \pm r}{a}\right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\sin \left[ (n+1) \operatorname{arctg} \frac{a \pm r}{z} \right]}{\cos \left[ (n+1) \operatorname{arctg} \frac{a \pm r}{z} \right]}
 \end{aligned} \quad (25)$$

Benützen wir die aus Abb. 2 ersichtlichen Bezeichnungen

$$\varrho^2 = z^2 + (a-r)^2;$$

$$\varrho_1^2 = z^2 + (a+r)^2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{a-r} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a-r}{z}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{z}{a+r} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a+r}{z},$$

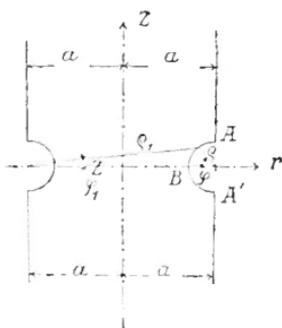


Abb. 2

so können wir mit Hilfe der Integralformel (25) folgendermaßen schreiben:

<sup>1)</sup> Bierens de Haan, Nouvelles tables d'integral définies, S. 505.

$$\left. \begin{aligned}
 p &= \frac{(n-1)!}{\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^3} a^n \left( \frac{\sin n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)}{\varrho_1^n} + \frac{\cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\varrho^n} \right) \\
 q &= \frac{(n-1)!}{\pi} \sqrt{(ar)^3} a^n \left( \frac{\cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)}{\varrho_1^n} - \frac{\sin n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\varrho^n} \right) \\
 \frac{\tau_z}{G} &= \frac{n!}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} a^{n+1} \left( \frac{\sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)}{\varrho_1^{n+1}} + \frac{\cos(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\varrho^{n+1}} \right) \\
 \frac{\tau_r}{G} &= \frac{n!}{\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} a^{n+1} \left( \frac{\cos(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)}{\varrho_1^{n+1}} - \frac{\sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\varrho^{n+1}} \right)
 \end{aligned} \right\} (26)$$

Man erkennt aus dieser Darstellung zunächst, daß für große Werte von  $z$ , d. h. von  $\varrho$  und  $\varrho_1$  alle vier Ausdrücke stark abnehmen und zwar um so stärker, je größer  $n$  ist. Fügen wir also zu dem aus Gleich. (14) bekannten Wert von  $q$  für den kreiszylindrischen Stab  $q = c_1 \frac{r^4}{4}$  das  $q$  aus Gleich. (26) mit einer Konstanten versehen additiv hinzu, so erhalten wir für genügend großes  $n$  angenähert den in Abb. 2 gezeichneten Verlauf für den Meridianschnitt des Stabes. Nehmen wir nun an, daß die Kerbe sehr klein, d. h.  $\varrho$  sehr klein ist, so kommen in den Gleichungen (26) die Glieder mit  $\varrho_1$  und  $\varphi_1$  nicht in Betracht gegenüber den Gliedern mit  $\varrho$  und  $\varphi$ , welche erstere wir uns daher gestrichen denken wollen. Nehmen wir ferner an, daß die Kerbe nach Art der in Abb. 2 gezeichneten bei  $A$  bzw.  $A'$  senkrecht zur Erzeugenden einschneidet, so muß dort  $\tau_z = \tau_r = 0$  sein; denn die zugeordneten Schubspannungen sind Null, da wir am Rand keine äußeren Kräfte annehmen. Wegen  $\tau_z = 0$  an der Stelle  $A$  gilt

$$c_1 a + c_2 \frac{n!}{\pi} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} \cos(n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0,$$

wobei das Glied

$$c_1 a = \frac{(\tau_z)_\infty}{G}$$

in dieser Summe von dem im Unendlichen allein in Frage kommenden Wert von  $q = c_1 \frac{a^4}{4}$  herrührt. Wegen  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  für die Stelle  $A$  folgt

$$c_2 \frac{n!}{\pi} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} = - \frac{(\tau_z)_\infty}{G} \quad (27)$$

An der gleichen Stelle  $A$  hat auch die Schubspannungskomponente  $\tau_r$  den Wert 0 wie auch aus Gleichung (26) hervorgeht. Da aber  $\tau_r$  auch am Kerbgrund, also an der Stelle  $B$ , verschwinden muß, so gilt  $\sin(n+1)\frac{\pi}{2} = 0$ , woraus folgt, daß  $n+1$  eine gerade Zahl, also  $n+1 = 2N$  sein muß.  $N$  selbst darf nicht mehr gerade sein, weil sonst für  $\varphi = \frac{\pi}{4}$   $\tau_r$  verschwinden würde, während es dort entsprechend der Richtung der Tangente an die Randkurve ebenso groß wie  $\tau_z$  ist. Für den Kerbgrund  $\varphi = 0$  folgt demnach, wenn wir dort wegen des sehr kleinen Wertes von  $\varrho$  für  $r$  wieder  $a$  setzen:

$$\frac{(\tau_z)_\infty}{G} = c_1 a - c_2 \frac{n!}{\pi} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} = 2 \frac{(\tau_z)_\infty}{G}$$

oder

$$(\tau_z)_B = 2 (\tau_z)_\infty.$$

Wir können also folgenden praktisch wichtigen Satz aufstellen:

In einer auf Torsion beanspruchten kreiszylindrischen Welle wird durch eine sehr kleine Kerbe, die unvermittelt ohne sanften Übergang in den Zylindermantel senkrecht zu den Erzeugenden eingeschnitten ist, die Torsionsspannung verdoppelt.

Da an der scharfen Kante überhaupt keine Spannung herrscht, so wird an dem Verlauf der Spannungslinien nichts

wesentliches geändert, wenn man die Kante durch eine kleine Abrundung ersetzt<sup>1)</sup>.

Der abgeleitete Satz erinnert an die Verdoppelung der Torsionsspannung eines vollkommen zylindrischen Stabes, der im Querschnitt eine sehr kleine kreisförmige Öffnung besitzt, wie aus dem hierbei gültigen hydrodynamischen Vergleich mit einer im Querschnitt rotierenden Flüssigkeit hervorgeht. Die Verdoppelung gilt in diesem Fall auch noch, wenn der sonst zylindrische Stab eine parallel den Erzeugenden verlaufende unendliche kleine Kerbe am Umfang aufweist, die scharf in den Zylindermantel eingeschnitten ist. Wir haben nun bewiesen, daß diese Verdoppelung der Spannung auch noch Gültigkeit behält, wenn die Kerbe rings um den Zylindermantel läuft.

Der Spannungsverlauf bei anders geformten Kerben und flacheren Übergängen läßt sich aus obigen allgemeinen Formeln gleichfalls ableiten, wobei jedoch namentlich bei tieferen Einschnitten die asymptotische Darstellung der Besselschen Funktionen, die in unserem Grenzfall erlaubt war, vermieden werden muß. Es ist hier nicht der Platz, um auf diese praktisch auch sehr wichtigen Untersuchungen näher einzugehen.

---

<sup>1)</sup> Siehe K. Kutzbach, Gemeinsame Probleme des Maschinenbaues, Z. d. V. d. I. 1915, S. 849.