Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Neuer Beweis für die Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen endlicher Ordnung.

Von **Georg Pólya** in Zürich.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Januar 1921.

1. Der Satz, den ich beweisen werde, und der wohl als der Hauptsatz der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung gelten kann, lautet wie folgt:

Es sei $g(z)$ eine ganze Funktion, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ seien ihre von 0 verschiedenen Nullstellen, $z = 0$ sei eine m-fache Nullstelle ($m \geqq 0$). Es sei Λ die Ordnung von $g(z)$, p die zu Λ linksnächste ganze Zahl ($p \leqq \Lambda < p + 1$). Dann ist die Reihe

$$(1) \qquad \frac{1}{|a_1|^{p+1}} + \frac{1}{|a_2|^{p+1}} + \frac{1}{|a_3|^{p+1}} + \cdots$$

konvergent und es ist, das Produkt $\prod\limits_n$ über sämtliche Nullstellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ erstreckt

$$(2) \qquad g(z) = e^{Q(z)} z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{p a_n^p}}$$

wobei $Q(z)$ eine ganze rationale Funktion ist, deren Grad p nicht übersteigt.

Der Beweis dieses Satzes rührt von Hadamard[1]) her. Der Hadamardsche Beweis hat im Laufe der Zeit viele Wandlungen erfahren, und man kann wohl sagen, daß er heute in

[1]) J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journal des Math. (4) 9, 171—215 (1893).

allen Teilen vereinfacht und vervollständigt ist. Jedoch der Gedankengang des Beweises ist nicht modifiziert worden: es wird zunächst die Konvergenz der Reihe (1) gezeigt, woraus leicht folgt, daß mit einer gewissen ganzen Funktion $Q(z)$ die Formel (2) besteht. Der Zusatz, daß $Q(z)$ ein Polynom vom Grade $< p$ ist, bereitet die größte Schwierigkeit, die dann durch eine untere Abschätzung des zu $e^{Q(z)}$ komplementären Faktors und einen Hilfssatz über den reellen Teil von analytischen Funktionen überwunden wird[1]).

Ich schlage einen Weg ein, der von dem geschilderten, traditionell gewordenen Beweisgang wesentlich abweicht. Mein eigentlicher Ausgangspunkt ist der Fundamentalsatz der Algebra. Demgemäß besitzt jede Partialsumme

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = P_n(z) \tag{3}$$

der Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots = g(z) \tag{4}$$

eine Faktorenzerlegung. Ich erschließe die Faktorenzerlegung von $g(z)$ aus der von $P_n(z)$ durch Grenzübergang. Ich benötige dabei nur Hilfssätze, die geläufig sind, oder solche, die sich von geläufigen nur wenig unterscheiden. Mein Beweis zeigt Berührungspunkte mit dem von Lindwart[2]), mit dem einzigen mir aus der Literatur bekannt gewordenen Beweis, der nicht den traditionellen Hadamardschen Gang befolgt. Mein Beweis ist jedoch von dem Lindwartschen nicht bloß an Übersichtlichkeit und an direktem Gang, sondern dem ganzen Aufbau nach verschieden.

Um den Vortrag deutlich und voraussetzungslos zu gestalten, stelle ich zunächst die Hilfssätze mit gedrängtem Beweis zusammen.

---

[1]) Vgl. z. B. A. Pringsheim, Elementare Theorie der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung. Math. Ann. 58, 257—342 (1904). Die unterschiedenen drei Hauptphasen befinden sich bzw. in § 9, § 14, § 6.

[2]) E. Lindwart, Über eine Methode von Laguerre zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion. Dissertation, Göttingen 1914.

Die Hilfssätze.

I. In einem beliebigen Kreis der z-Ebene, an dessen Peripherie $g(z)$ nicht verschwindet, hat $P_n(z)$ ebensoviel Nullstellen wie $g(z)$, wenn n eine gewisse Grenze übersteigt[1]).

Am Rande des besagten Kreises hat $|g(z)|$ ein bestimmtes Minimum μ, $\mu > 0$. Falls an diesem Kreisrand

$$(5) \qquad |g(z) - P_n(z)| < \mu$$

ist, hat $P_n(z) = g(z) + (P_n(z) - g(z))$ ebensoviel Nullstellen im Kreise, wie $g(z)$, nach einem bekannten Satze von Rouché[2]). Jedoch (5) muß an dem ganzen Kreisrand für genügend großes n erfüllt sein, wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe (4).

II. Es sei $g(0) \neq 0$ und es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\mu, \ldots$ die Nullstellen von $g(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ mit richtiger Vielfachheit geschrieben und so geordnet, daß

$$(6) \qquad 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \cdots.$$

Dann ist[3]) für jedes $r > 0$ und für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(7) \qquad \frac{|c_0|^2 r^{2\mu}}{|a_\mu|^{2\mu}} < |c_0|^2 + |c_1|^2 r^2 + |c_2|^2 r^4 + \cdots.$$

Ist $|a_\nu| \leq r < |a_{\nu+1}|$, so ist unter allen Produkten

$$\frac{r}{|a_1|}, \frac{r}{|a_1|}\frac{r}{|a_2|}, \ldots, \frac{r}{|a_1|}\frac{r}{|a_2|}\cdots\frac{r}{|a_\nu|}, \frac{r}{|a_1|}\frac{r}{|a_2|}\cdots\frac{r}{|a_\nu|}\frac{r}{|a_{\nu+1}|}, \ldots$$

keines größer, als das ν-te, wie der Aufbau aus sukzessiven Faktoren zeigt, mit Rücksicht auf (6). Es ist somit, wenn $\mu \gtrless \nu$,

$$(8) \qquad \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^\mu < \frac{r}{|a_1|}\frac{r}{|a_2|}\cdots\frac{r}{|a_\mu|} \leq \frac{r}{|a_1|}\frac{r}{|a_2|}\cdots\frac{r}{|a_\nu|}.$$

---

[1]) A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Besselschen Funktion Math. Ann. 33, 246—266; vgl. S. 249.

[2]) Sur la série de Lagrange. Journ. Éc. polytechn. Cah. 39 (1862), p. 217—219.

[3]) Vgl. E. Landau, Sur quelques théorèmes de M. Petrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques. Bull. de la Soc. math. de France 33 (1905), p. 259.

Wenn jedoch $|a_\nu| < r < |a_{\nu+1}|$, so ist nach Jensen[1])

$$\lg \frac{|c_0| r^\nu}{|a_1 a_2 \ldots a_\nu|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |g(re^{i\varphi})| \, d\varphi. \tag{9}$$

Nach der Ungleichung, betreffend das arithmetische und das geometrische Mittel, ist

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg |g(re^{i\varphi})|^2 \cdot d\varphi} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi. \tag{10}$$

Endlich ist bekanntlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = |c_0|^2 + |c_1|^2 r^2 + |c_2|^2 r^4 + \cdots. \tag{11}$$

Durch Elimination aus (8), (9), (10), (11) ergibt sich das bisher noch ausstehende (7).

III. Setzt man zur Abkürzung

$$(1-z)\, e^{\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}} = E_p(z), \tag{12}$$

so besteht

$$|E_p(z) - 1| < |z|^{p+1} \qquad \text{für } |z| < 1.$$

Es ist[2])

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= ((1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-1}) - 1)\, e^{\frac{z}{1} + \cdots + \frac{z^p}{p}} \\ &= -z^p (q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots), \end{aligned} \tag{13}$$

wo

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{1} + \cdots + \frac{z^p}{p}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p} \right)^n \\ &= q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

---

[1]) Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. Acta math. 22 (1899), p. 359—364.

[2]) Vgl. A. Pringsheim, Über die Weierstraßsche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen und über bedingt konvergente unendliche Produkte. Münchener Ber. (1915), 387—400, Formeln (6) bis (11.)

gesetzt wurde. Aus (14) geht hervor, daß die Zahlen q_0, q_1, q_2, ... positiv sind. Es ist nach (13)

$$(15) \qquad 1 - E_p(z) = z^{p+1}\left\{\frac{q_0}{p+1} + \frac{q_1 z}{p+2} + \frac{q_2 z^2}{p+3} + \cdots\right\}.$$

Die Reihe in Klammer rechts in (15) hat positive Koeffizienten; ihren größten Wert im Kreise $|z| \leq 1$ nimmt sie daher im Punkte $z = 1$ an. Dieser größte Wert ist $= 1$, nach (15), da $E_p(1) = 0$, $1^{p+1} = 1$. Damit ist Hilfssatz III bewiesen.

Ich betrachte jetzt l simultan gegebene Zahlenfolgen

$$(16) \qquad \begin{array}{l} u_1', \ u_2', \ u_3', \ \ldots \ u_n', \ \ldots \\ u_1'', \ u_2'', \ u_3'', \ \ldots \ u_n'', \ \ldots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ u_1^{(l)}, \ u_2^{(l)}, \ u_3^{(l)}, \ \ldots \ u_n^{(l)}, \ \ldots \end{array}$$

Ich sage, daß diese l Folgen **kollektiv genommen** gegen die Grenzwerte u', u'', ... $u^{(l)}$ streben, wenn zu jedem ε, $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl N existiert, derart, daß für jedes $n > N$ eine Permutation i_1, i_2, ... i_l der Zahlen 1, 2, 3, ... l angegeben werden kann, für welche die Ungleichungen bestehen

$$|u_n^{(i_1)} - u_n'| < \varepsilon, \quad |u_n^{(i_2)} - u_n''| < \varepsilon, \quad \ldots \quad |u_n^{(i_l)} - u_n^{(l)}| < \varepsilon.$$

Mit andern Worten: die l gegebenen Folgen sollen durch gewisse Vertauschungen von Elementen von gleichem unteren Index (wie $u_n^{(r)}$ und $u_n^{(s)}$) in l neue Folgen

$$\begin{array}{l} v_1', \ v_2', \ v_3', \ \ldots \ v_n', \ \ldots \\ v_1'', \ v_2'', \ v_3'', \ \ldots \ v_n'', \ \ldots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ v_1^{(l)}, \ v_2^{(l)}, \ v_3^{(l)}, \ \ldots \ v_n^{(l)}, \ \ldots \end{array}$$

verwandelt werden können, derart, daß

$$\lim_{n=\infty} v_n' = u', \quad \lim_{n=\infty} v_n'' = u'', \quad \ldots \lim_{n=\infty} v_n^{(l)} = u^{(l)}.$$

Konvergieren die Folgen (16) kollektiv genommen gegen $u', u'', \ldots u^{(l)}$, und ist $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_l)$ eine stetige, symmetrische Funktion, so ist

$$\lim_{n=\infty} \varphi(u_n', u_n'', \ldots u_n^{(l)}) = \varphi(u', u'', \ldots u^{(l)}).$$

IV. Die unendliche Gesamtheit von Zahlen

$$\begin{array}{l} u_{11} \\ u_{21}, \quad u_{22} \\ u_{31}, \quad u_{32}, \quad u_{33} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{n1}, \quad u_{n2}, \quad u_{n3}, \quad \ldots \quad u_{nn} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

sei folgenden Bedingungen unterworfen:

1. Es existieren zwei unendliche Zahlenfolgen:

$$\begin{array}{l} u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots \quad u_n, \quad \ldots, \\ m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots \quad m_q, \quad \ldots, \end{array}$$

die letztere monoton wachsend und aus positiven ganzen Zahlen bestehend, so beschaffen, daß die $m_q - m_{q-1}$ Größen

$$u_{n, m_{q-1}+1}, \quad u_{n, m_{q-1}+2}, \quad \ldots \quad u_{n, m_q}$$

für $n \to \infty$ kollektiv genommen gegen

$$u_{m_{q-1}+1}, \quad u_{m_{q-1}+2}, \quad \ldots \quad u_{m_q}$$

streben ($q = 1, 2, 3, \ldots,\ m_0 = 0$ gesetzt).

2. Es existiert eine konvergente Reihe $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ mit positiven Gliedern, so beschaffen, daß

$$|u_{n,\mu}| < p_\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots n). \tag{17}$$

Dann konvergiert das unendliche Produkt $(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots$ absolut und es ist

$$\lim_{n=\infty} (1 + u_{n1})(1 + u_{n2}) \ldots (1 + u_{nn}) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + u_m).$$

Es folgt zunächst, wenn $\sum_q$ Summation von $m_{q-1}+1$ bis m_q bedeutet:

$$\sum_q |u_\mu| = \lim_{n=\infty} \sum_q |u_{n\mu}| \leq \sum_q p_\mu .$$

Diesen Schluß für $q = 1, 2, 3, \ldots$ wiederholt, stellt sich $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} |u_\mu|$ als konvergent oder, anders gesagt, $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty}(1+u_\mu)$ als absolut konvergent heraus. Es sei k aus der Folge $m_1, m_2, \ldots m_q, \ldots$ gewählt, und so groß, daß

$$p_{k+1} + p_{k+2} + p_{k+3} + \cdots < \varepsilon. \tag{18}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} |(1+u_{n,k+1})(1+u_{n,k+2})\ldots(1+u_{n,n}) - 1| \\ &< (1+p_{k+1})(1+p_{k+2})\ldots(1+p_n) - 1 \\ &< e^{p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots+p_n} - 1 \\ &< e^\varepsilon - 1 \end{aligned} \tag{19}$$

gemäß (18) und durch einen analogen Schluß

$$\left|\prod_{\mu=k+1}^{\infty}(1+u_\mu) - 1\right| \leq \prod_{\mu=k+1}^{\infty}(1+p_\mu) - 1 < e^\varepsilon - 1. \tag{20}$$

Die Abschätzungen (19), (20) sind unabhängig von n. Andererseits ist, für genügend großes n, nach Voraussetzung 1 und weil k aus der Folge $m_1, m_2, \ldots$ gewählt ist,

$$\begin{aligned} |(1+u_{n,1})(1+u_{n,2})\ldots(1+u_{nk}) - \\ (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Ungleichungen (19), (20), (21) enthalten den Hilfssatz IV.

In Hinsicht auf die Anwendung, die ich im Sinne habe, sei noch hinzugefügt, daß Hilfssatz IV unverändert gültig bleibt, wenn n sowohl in der Voraussetzung wie in der Behauptung nicht alle ganze Zahlen durchläuft, nur eine unendliche Auswahl, ferner auch dann, wenn die Ungleichung (17) zwar nicht für alle n, μ besteht, jedoch für $n > n_0$, $\mu > \mu_0$, wo n_0, μ_0 feste ganze Zahlen.

Der Beweis.

Ich nehme an, daß $g(0) \neq 0$ ist. Diese Annahme beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit, denn sie kommt darauf hinaus, die beiden Seiten der zu beweisenden Gleichung (2) mit z^m zu dividieren. Ich bezeichne die Nullstellen von $g(z)$ mit a_1, a_2, $a_3, \ldots,$ mit richtiger Vielfachheit geschrieben und nach wachsenden absoluten Beträgen geordnet, wie im Hilfssatz II. Ich betrachte Kürze halber nur den Fall explicite, wo $g(z)$ unendlich viele Nullstellen hat. Besitzt $g(z)$ nur N Nullstellen, so ist der Beweis nur unwesentlich zu modifizieren, insbesondere bleiben alle Formeln richtig, wenn $\dfrac{1}{a_n}$ als 0 gelesen wird für $n > N$.

Ich betrachte nur solche durch (3) definierte Partialsummen $P_n(z)$ der Potenzreihe (4), in denen $c_n \neq 0$ ist. Wenn ich so eventuell gewisse Werte von n auch unbeachtet lassen muß, habe ich auf alle Fälle mit einer unendlichen Auswahl von Partialsummen zu tun. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist

$$P_n(z) = c_0\left(1 - \frac{z}{a_{n1}}\right)\left(1 - \frac{z}{a_{n2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{a_{nn}}\right), \tag{22}$$

wo die Numerierung so erfolgt, daß

$$0 < |a_{n1}| \leq |a_{n2}| \leq |a_{n3}| \leq \ldots \leq |a_{nn}|.$$

Eine ganze transzendente Funktion $g(z)$ heißt von der Ordnung Λ, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

Ist $\beta > \Lambda$, so ist $g(z)e^{-|z|^\beta}$ in der ganzen z-Ebene beschränkt.

Ist $\alpha < \Lambda$, so ist $g(z)e^{-|z|^\alpha}$ nicht beschränkt. (Im Spezialfall $\Lambda = 0$ fällt diese zweite Bedingung fort.)

Ich denke β fest gewählt, $\Lambda < \beta < p + 1$, oder, anders ausgedrückt:

$$p + 1 = \beta(1 + \eta), \qquad \eta > 0. \tag{23}$$

Es existiert also eine Konstante K, sodaß stets:

$$|g(z)| < K e^{|z|^\beta}. \tag{24}$$

Ich wende den Hilfssatz II statt auf $g(z)$ auf die ganze rationale Funktion $P_n(z)$ an. Es ist:

$$\frac{|c_0|^2 r^{2\mu}}{|a_{n\mu}|^{2\mu}} \leq |c_0|^2 + |c_1|^2 r^2 + |c_2|^2 r^4 + \cdots + |c_n|^2 r^{2n}. \tag{25}$$

Ich berücksichtige (11) und (24). Es folgt aus (25) weiter:

$$\frac{|c_0|^2 r^{2\mu}}{|a_{n\mu}|^{2\mu}} < \sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 r^{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq K^2 e^{2r^\beta}.$$

Hieraus folgt durch Umformung mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{1}{|a_{n\mu}|^{p+1}} < \left(\frac{K}{|c_0|}\right)^{\frac{p+1}{\mu}} \frac{e^{\frac{(p+1)r^\beta}{\mu}}}{r^{\beta(1+\eta)}}. \tag{26}$$

Wählt man, was freisteht, $r^\beta = \mu$, und setzt man $(K|c_0|^{-1}e)^{p+1} = C$ (es ist $|c_0| < K$ gemäß (24)), so ergibt sich aus (26):

$$\frac{1}{|a_{n\mu}|^{p+1}} < \frac{C}{\mu^{1+\eta}} \tag{27}$$

für alle zulässigen, unendlich vielen n und für $\mu = 1, 2, 3, \ldots n$. Diese von n unabhängige untere Abschätzung (27) von $|a_{n\mu}|$ ist eine Hauptstütze des Beweises.

Es sollen $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, \ldots a_{m_q}, \ldots$ sämtliche voneinander verschiedenen absoluten Beträge in der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ repräsentieren. Es sei, vollständiger gesagt, $|a_{m_1}| = |a_1|$ und

$$|a_{m_{q-1}}| < |a_{m_{q-1}+1}| = |a_{m_{q-1}+2}| = \cdots = |a_{m_q}| \tag{28}$$

$$(q = 2, 3, 4, \ldots).$$

Ich behaupte, daß die $m_q - m_{q-1}$ Nullstellen von $P_n(z)$:

$$a_{n,m_{q-1}+1},\ a_{n,m_{q-1}+2},\ \ldots\ a_{n,m_q} \tag{29}$$

kollektiv genommen gegen

(30) $$a_{m_{q-1}+1},\ a_{m_{q-1}+2},\ \ldots\ a_{m_q}$$

konvergieren für unendlich wachsendes n.

Unter den Größen (30) soll es v verschiedene geben. Sie werden durch v geometrisch verschiedene Punkte an der Peripherie des Kreises $|z| = R$ repräsentiert, wo

$$R = |a_{m_{q-1}+1}| = |a_{m_{q-1}+2}| = \cdots = |a_{m_q}|.$$

(Vgl. (28).) Um diese v Punkte schlage ich v Kreise, alle mit dem Radius ε. Es sei ε so klein gewählt, daß je zwei von diesen „ε-Kreisen" (so will ich sie bezeichnen) keinen gemeinsamen Punkt haben, ferner, daß

(31) $$|a_{m_{q-1}}| < R - 2\varepsilon, \quad |a_{m_q+1}| > R + 2\varepsilon.$$

Ich wende den Hilfssatz I auf $v + 2$ Kreise zugleich an: auf die ε-Kreise und auf die beiden konzentrischen $|z| = R - 2\varepsilon$ und $|z| = R + 2\varepsilon$. Von einem gewissen n an gilt also folgendes: Im Kreise $|z| \leq R - 2\varepsilon$ hat $P_n(z)$ genau m_{q-1} Nullstellen. Diese sind natürlich seine absolut kleinsten Nullstellen, also $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{n m_{q-1}}$. Im Kreise $|z| \leq R + 2\varepsilon$ hat $P_n(z)$ genau m_q Nullstellen, nämlich $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{n m_q}$. Im Kreisring $R - 2\varepsilon < |z| < R + 2\varepsilon$ befinden sich also genau die unter (29) aufgezählten $m_q - m_{q-1}$ Nullstellen von $P_n(z)$. Jeder ε-Kreis enthält genau so viele Größen aus der Gesamtheit (29) wie aus der Gesamtheit (30). Folglich sind sämtliche Größen (29) auf die v erwähnten ε-Kreise verteilt, in deren Mittelpunkten die Größen (30) untergebracht sind. D. h. es muß

$$|a_{n\mu} - a_\nu| < \varepsilon$$

sein, wo μ und ν, vielleicht in verschiedener Reihenfolge, dieselben Indizes $m_{q-1} + 1,\ m_{q-1} + 2, \ldots m_q$ durchlaufen und zwar jeden nur einmal, w. z. b. w. Damit haben wir den zweiten wesentlichen Anhaltspunkt gewonnen.

Es sei im folgenden z beliebig aber fest gewählt. Es sei μ_0 der kleinste Index so beschaffen, daß $|a_{\mu_0}| > |z|$. In einem festen Kreise, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist und dessen

Radius zwischen $|z|$ und $|a_{\mu_0}|$ enthalten ist, befinden sich von einem gewissen Werte von n, sagen wir von n_0 an, gemäß Hilfssatz I, genau $\mu_0 - 1$ Nullstellen von $P_n(z)$. Somit muß

$$(32) \qquad |z| < |a_{n\mu_0}| < |a_{n,\mu_0+1}| < \cdots \qquad \text{für } n > n_0$$

sein. Wenn (32) erfüllt ist, wird Hilfssatz III anwendbar, und es ist

$$\left| E_p\left(\frac{z}{a_{n\mu}}\right) - 1 \right| \leq \left| \frac{z}{a_{n\mu}} \right|^{p+1},$$

woraus gemäß (27) weiter folgt:

$$(33) \qquad \left| E_p\left(\frac{z}{a_{n\mu}}\right) - 1 \right| < \frac{C\,|z|^{p+1}}{\mu^{1+\eta}} \quad \text{für } \mu \geq \mu_0,\ n \geq n_0.$$

Um die Formel aufstellen zu können, die durch Grenzübergang in die zu beweisende Formel (2) übergehen wird, betrachte ich die ersten p Potenzsummen der reziproken Nullstellen von $P_n(z)$, d. h. die Summen:

$$(34) \qquad s_k = \left(\frac{1}{a_{n1}}\right)^k + \left(\frac{1}{a_{n2}}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{a_{nn}}\right)^k$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots p).$$

Ich setze voraus, daß $n > p$. Dann ist die rechte Seite von (34) von n unabhängig (was ich schon durch die Bezeichnung s_k antizipierte), denn s_k drückt sich, wie in der Algebra gezeigt wird, durch $c_0, c_1, c_2, \ldots c_k$ mittelst einer von n unabhängigen Formel aus, sobald $n > k$. Es ist

$$s_1 = -\frac{c_1}{c_0}, \quad s_2 = \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 - \frac{2\,c_2}{c_0}, \quad \ldots.$$

Gemäß (34), (22), (12) besteht identisch

$$(35) \qquad P_n(z)\, e^{\frac{s_1 z}{1} + \frac{s_2 z^2}{2} + \cdots + \frac{s_p z^p}{p}} = c_0 \prod_{\mu=1}^{n} E_p\left(\frac{z}{a_{n\mu}}\right).$$

Setzt man

$$E_p\left(\frac{z}{a_{n\mu}}\right) = 1 + u_{n\mu}, \quad E_p\left(\frac{z}{a_\mu}\right) = 1 + u_\mu, \quad \frac{C\,|z|^{p+1}}{n^{1+\eta}} = p_n,$$

so sind sämtliche Bedingungen des Hilfssatzes IV erfüllt gemäß (33) und der kollektiven Konvergenz der Nullstellen $a_{n\mu}$ von $P_n(z)$ zwischen den Grenzen $m_{q-1} < \mu \leqq m_q$, $q = 1, 2, 3, \ldots$. Hilfssatz IV ermöglicht uns, an der rechten Seite der Formel (35) zur Grenze überzugehen. An der linken Seite hat der Grenzübergang keine Schwierigkeit, denn nach (3) ist $P_n(z)$ Partialsumme der stets konvergenten Potenzreihe (4). Indem man also an beiden Seiten von (35) den Grenzwert nimmt, entsteht

$$g(z)\, e^{\frac{s_1 z}{1} + \frac{s_2 z^2}{2} + \cdots + \frac{s_p z^p}{p}} = c_0 \prod_{\mu=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{a_\mu}\right),$$

w. z. b. w.