Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft III
Oktober- bis Dezembersitzung

München 1918
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Dezember 1918.

Ernst Mach hat einmal gesagt: „Verschiedene Wissensgebiete entwickeln sich oft lange Zeit nebeneinander, ohne daß eines auf das andere Einfluß nimmt. Gelegentlich können sie aber wieder in engeren Kontakt treten, wenn bemerkt wird, daß die Lehren des einen durch jene des andern eine unerwartete Aufklärung finden.“ Diese Erfahrung bestätigt sich auch für die Teilgebiete einer Wissenschaft. Innerhalb der Mathematik stehen z. B. in diesem Verhältnis bald kühler Zurückhaltung, bald fördernder Wechselwirkung die *Variationsrechnung* und alle jene Forschungen, die sich mit der geometrischen Theorie der Differentialgleichungen, insbesondere mit den *Berührungstransformationen* befassen. Man braucht nur an Namen wie Weierstraß und Lie zu erinnern, um eine Zeit völliger Trennung sich ins Gedächtnis zu rufen. Das hat sich aber geändert; es war das Bestreben von Cartan, Engel, Kneser und dem Verfasser dieser Mitteilung, durch die in der Gedankenrichtung von Lie gelegenen Vorstellungen der Variationsrechnung neue Seiten abzugewinnen — oder nach von anderer Seite ausgesprochener Auffassung alte Saiten neu erklingen zu lassen — weniger in der Richtung nach den strengen Existenzbeweisen hin, als mit der Absicht, die Bedeutung der Extremalen dem geometrischen Verständnis näher zu führen[1]).

[1]) Vgl. Math. Enc. III D 7 (*Berührungstransformationen*), Nr. 8 e, sowie die ergänzende Bemerkung, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver.

Damit ergeben sich dann von selbst, insbesondere durch erneute Heranziehung der von Lie zu einem Lehrgebäude ausgebauten Theorie der Berührungstransformationen, neue Aufgaben.

Ganz abgesehen aber von dieser Erweiterung und Bereicherung des Gebietes, über deren Wert ein selbst seit Jahren an derartigen Untersuchungen Beteiligter sich kein Urteil erlauben darf, hat aber bei den isoperimetrischen Hauptproblemen über Kreis und Kugel gerade für die den Abschluß bildenden Existential- und Eindeutigkeitssätze die klassische und einfachste Berührungstransformation, die von Huygens in die Optik eingeführte *Dilatation* eine große Rolle gespielt. Es mag nur daran erinnert werden, daß F. Bernstein bei seinem Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises auf der Kugel (deren Radius gleich Eins gesetzt ist) von dem Ausdruck

$$(2\pi - F)^2 + L^2 \geqq 4\pi^2$$

ausgeht[1]). F bedeutet dabei den Inhalt, L die Länge einer geschlossenen Kurve, und der Umstand, daß dieser Ausdruck eine Integralinvariante bei der Gruppe der Dilatationen ist, spielt eine große Rolle bei dem Beweis, daß die angeschriebene Ungleichheit besteht und der untere Grenzwert nur für den Kreis erreicht wird.

Wir stellen uns, indem wir dabei die Rücksicht auf isoperimetrische Probleme fest im Auge behalten, die Aufgabe, systematisch *Integralinvarianten für die Gruppe der Dilatationen zu bilden.* Die Bausteine dieser Invarianten sollen bestimmte Integrale bilden, auf die man bei Betrachtung geschlossener Kurven in der Ebene, geschlossener Flächen im Raum usw. ganz von selbst geführt wird. Als Beispiele seien noch genannt Rauminhalt (J), Oberfläche (L) und das Flächenintegral der mittleren Krümmung

$$M = \tfrac{1}{2}\int (R_1 + R_2)\, d\omega = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df,$$

1915, S. 66. In einer neuen Bearbeitung des Encyklopädieartikels über *Variationsrechnung* würde der Herr Verfasser schon auf Grund seiner eigenen Arbeiten den Anlaß haben, verschiedene Zusätze zu machen.

[1]) Math. Ann. 60 (1905), S. 117.

in dem R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, df das Flächenelement, $d\omega$ das Element des sphärischen Bildes bedeutet. Bekanntlich hat schon Steiner festgestellt, daß bei endlicher Dilatation, d. h. bei Übergang zur Parallelfläche im Abstand t, die Integrale übergehen in

$$J(t) = J + Ot + Mt^2 + \frac{4\pi}{3}t^3,$$
$$O(t) = O + 2Mt + 4\pi t^2,$$
$$M(t) = M + 4\pi t,$$

und hieraus kann man durch Elimination von t die Invarianten bestimmen. Man kann sich aber auch zur Bestimmung der Invarianten der Methode von Lie bedienen, wobei man nur einfache Systeme von Differentialgleichungen zu integrieren hat, und das ist oft leichter durchzuführen als Eliminationen. Bei der Wahl der Integrale, aus denen man Invarianten aufzubauen gedenkt, wird man sich selbstverständlich durch bestimmte Gesichtspunkte leiten lassen[1]). Mit aller gebotenen Zurückhaltung darf darauf hingewiesen werden, *daß wir dabei auf eine Reihe noch offener Fragen stoßen*, deren Beantwortung hiermit angeregt werden möge. Es soll dabei nicht vergessen werden, daß jede neue Fragestellung im Meer der Wissenschaft die Klippe der Unlösbarkeit und den seichten Strand der Trivialität zu fürchten hat; auch ist sie auf den starken persönlichen Schwankungen unterworfenen Geschmack angewiesen!

Neben der euklidischen wollen wir die sphärische und hyperbolische Geometrie zu ihrem Recht kommen lassen, in der zuletzt genannten soll die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf Grund des vervollständigten „Viergelenkverfahrens" von Steiner nachgewiesen werden.

---

[1]) Die bereits zu einem ganzen Zweig mathematischer Spezialforschung angewachsene, in einer Reihe von Abhandlungen in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. W. seit 1916 dargestellte „*Affingeometrie*" hat ihren Ausgangspunkt auch in der Bestimmung von *Integralinvarianten*, die G. Pick für die affine Gruppe nach Lieschen Methoden bestimmt hat. Aus den Invarianten werden die isoperimetrischen Probleme aufgebaut, die einen großen Teil dieses „neuen Zweiges der Geometrie" ausmachen.

§ 1. Integralinvarianten der euklidischen Dilatationsgruppe.

Aus den beiden Größen F (Flächeninhalt) und L (Bogenlänge) erhält man leicht eine Größe, die gegenüber Dilatationen invariant ist. Ist $d\tau$ der Kontingenzwinkel, so wachsen bei einer infinitesimalen Dilatation, d. h. bei einer Verschiebung der Linienelemente ds der Kurve in der Richtung der Normale um die Strecke dt diese Größen um

$$dL = dt \int d\tau = 2\pi\, dt, \quad dF = dt \int ds = L\, dt.$$

Demnach ist

$$\frac{dL}{2\pi} = \frac{dF}{L} = dt, \tag{1}$$

und man findet sofort durch Integration die Invariante

$$L^2 - 4\pi F = c_1. \tag{2}$$

Es ist bekannt, wie großer Anstrengungen es bedurfte, um nachzuweisen, daß diese Invariante ihren kleinsten Wert Null nur beim Kreis erreicht[1]). Man kann aber auch eine

[1]) W. Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig 1916), Kap. I. — Einen Beweis für die Ungleichheit*

$$L^2 - 4\pi F > 0,$$

der sich an Einfachheit dem Beweis der entsprechenden Ungleichheit für sphärische Kurven messen kann, gibt es noch nicht. Es läge nahe, zu versuchen, den Beweis von Frobenius (Berl. Ak. Ber. 28, 1915, S. 387—404) für die Brunn-Minkowskische Ungleichung so zu fassen, daß man unmittelbar erkennen könnte: Unter den Parallelkurven eines Ovals gibt es auch Kurven mit negativem Inhalt, wenn das Oval kein Kreis ist. Dann müßte nämlich

$$F + tL + t^2\pi$$

durch geeignete Wahl von t negativ gemacht werden können, also die Ungleichheit bestehen. Allein eine von Frobenius selber herrührende Bemerkung warnt vor einem solchen Versuch. — Leider lassen sich die so einfachen Betrachtungen dieses Forschers auch nicht zum Beweis der für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel erforderlichen Beziehung

$$O^3 - 36\pi J^2 \geq 0$$

verwenden. Es sei gestattet, hier eine Briefstelle mitzuteilen: „Als ich meine Arbeit über den gemischten Flächeninhalt schrieb, habe ich sehr *obere* Grenze für c_1 bestimmen, die ebenfalls nur beim Kreis mit der unteren zusammenfällt und für Schätzungen einen gewissen Wert hat. Versteht man unter ϱ_1 den größten, unter ϱ_2 den kleinsten Krümmungsradius der Eilinie, so ist

$$L < 2\pi\varrho_1, \quad F > \pi\varrho_2^2.$$

Zieht man jetzt die innere Parallelkurve im Abstand t, so erhält man

$$L^2 - 4\pi F = L^2(-t) - 4\pi F(-t) \leqq 4\pi((\varrho_1 - t)^2 - (\varrho_2 - t)^2).$$

Setzt man $-t$ gleich ϱ_2, so folgt die für Schätzungen verwertbare Beziehung

2') $$4\pi(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \geqq L^2 - 4\pi F.$$

Für die Ebene wollen wir noch eine zweite Integralinvariante bilden, indem wir noch das Integral

$$E = \tfrac{1}{2}\int \varrho^2\, d\tau$$

mit hereinziehen, das den Flächeninhalt zwischen Kurve und Evolute (mit Berücksichtigung der mehrfachen Überdeckung einiger Gebiete) angibt.

Man erhält $$dE = dt\,L,$$

und aus $$\frac{dF}{L} = \frac{dE}{L} = dt$$

die leicht zu deutende Invariante

3) $$E - F = c_2.$$

Auch diese Invariante hat die obere Grenze $\pi(\varrho_1 - \varrho_2)^2$ und dürfte nur für den Kreis die untere Grenze Null erreichen.

---

angestrengt, aber vergeblich darüber nachgedacht, ob man die Methode auch auf das gemischte Volumen ausdehnen kann. . . . Wenn man ein Polyeder darstellen kann als Differenz eines umschließenden Tetraeders und einer Anzahl anschließender Tetraeder, so bietet die weitere Untersuchung keine besonderen Schwierigkeiten. Aber das kann man nur in den seltensten Fällen, und daran scheitert der Versuch, meine Methode auf den Raum zu übertragen."

* **Bemerkung bei Korrektur:** Der Beweis ist doch auf dem hier angedeuteten Weg durchführbar.

Im (dreidimensionalen) Raum bauen wir Invarianten zunächst auf aus den schon in der Einleitung erwähnten Größen, dem Rauminhalt J einer geschlossenen, doppelpunktfreien Fläche, der Oberfläche

$$O = \int R_1 R_2 \, d\omega,$$

und dem Integral der mittleren Krümmung

$$M = \tfrac{1}{2} \int (R_1 + R_2) \, d\omega,$$

Infinitesimale Dilatation läßt $d\omega$ ungeändert, läßt aber R_1 und R_2 um dt wachsen, so daß man erhält

$$dJ = O\,dt, \quad dO = 2M\,dt, \quad dM = dt \int d\omega = 4\pi\,dt,$$

also zur Bestimmung der Invarianten das System

$$\frac{dJ}{O} = \frac{dO}{2M} = \frac{dM}{4\pi} = dt \tag{4}$$

zu integrieren hat. Man erhält die eine Invariante

$$M^2 - 4\pi O = c_1 \tag{5}$$

und aus

$$dJ = O\,dM = \frac{M^2 - c_1}{16\pi^2}\,dM$$

die weitere

$$J - \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{M^3}{3} - c_1 M\right) = c_2$$

oder

$$16\pi^2 J + \frac{2M^3}{3} - 4\pi M O = c_2. \tag{6}$$

Die Invariante (5) ist bekanntlich (Blaschke, a. a. O., S. 104) nur für die Kugel gleich Null, für alle anderen Flächen positiv; sie tritt beim Nachweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel auf. Man kann auch leicht die der Formel (3') entsprechende Beziehung

$$16\pi^2 (\overline{R}_1 - \overline{R}_2)^2 \geqq M^2 - 4\pi O \tag{5'}$$

nachweisen, in der $\overline{R}_1$ den größten, $\overline{R}_2$ den kleinsten auf der Fläche vorhandenen Hauptkrümmungsradius bedeutet.

Noch zwei weitere Integrale wollen wir in Betracht ziehen, nämlich

$$N = \int \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 d\omega$$

und
$$P = \int R_1 R_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 d\omega.$$

Beachtet man

$$\frac{dN}{dt} = 2M, \quad \frac{dP}{dt} = 2N + O,$$

so erhält man bei Integration des durch die Gleichungen

$$\frac{dN}{2M} = \frac{dP}{2N + O} = dt$$

zu ergänzenden Systems (4) die weiteren Invarianten

$$M^2 - 4\pi N = c_3, \tag{7}$$

$$P + \frac{M}{8\pi^2}(M^2 - 4\pi N - 2\pi O) = c_3, \tag{8}$$

die, ohne daß ihre besondere geometrische Bedeutung und ihre Verwertbarkeit für isoperimetrische sinngemäße Aufgaben hier näher untersucht wird, einfach als Fortsetzung der Invariantentabelle angeführt sein mögen.

Erweiterungen für euklidische Räume höherer Dimension liegen auf der Hand. Es möge die Durchführung noch für den vierdimensionalen Raum gestattet sein[1]).

Sind $R_1\, R_2\, R_3$ die drei Hauptkrümmungsradien, so nehmen wir als Bausteine außer dem Rauminhalt T einer geschlossenen Hyperfläche den Inhalt

$$S = \int R_1 R_2 R_3\, d\omega$$

der Hyperfläche und die beiden Integrale:

$$M_1 = \tfrac{1}{3} \int (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)\, d\omega,$$
$$M_2 = \tfrac{1}{3} \int (R_1 + R_2 + R_3)\, d\omega.$$

---

[1]) Über mehrdimensionale Krümmungstheorie vgl. Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie, Leipzig 1899, Kap. 21.

Die folgenden Gleichungen

$$\frac{dT}{S} = \frac{dS}{3M_1} = \frac{dM_1}{2M_2} = \frac{dM_2}{2\pi^2} = dt$$

geben dann die Zuwachsgrößen für T, S, M_1 und M_2 bei einer infinitesimalen Dilatation an und man erhält die Invarianten

$$\begin{aligned} &M_2^2 - 2\pi^2 M_1 = c_1, \\ &4\pi^4 S + 2M_2^3 - 6\pi^2 M_1 M_2 = c_2, \\ &8\pi^6 T - 4\pi^4 S M_2 - \frac{3M_2^4}{4} + 3\pi^2 M_1 M_2^2 = c_3, \end{aligned}$$

deren Eigenschaft an der Hand der für endliche Dilatationen geltenden Beziehungen

$$\begin{aligned} M_1(t) &= M_1 + 2tM_2 + 2t^2\pi^2, \\ M_2(t) &= M_2 + 2t\pi^2, \\ S(t) &= S + 3M_1 t + 3M_2 t^2 + 2t^3\pi^2, \\ T(t) &= T + tS + \frac{3t^2}{2} M_1 + t^3 M_2 + \frac{t^4\pi^2}{2} \end{aligned}$$

bestätigt werden können. Wer sich für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im R_4 interessiert, würde vermutlich mit diesen Invarianten zu tun haben.

§ 2. Integralinvarianten bei Dilatationen in der sphärischen Geometrie.

Wir wollen zunächst die in der Einleitung erwähnte Invariante von Bernstein ableiten. Ist F wieder Inhalt, L die Bogenlänge einer geschlossenen Kurve auf der Kugel, so ist bei infinitesimaler Dilatation genau wie in der (euklidischen) Ebene

$$dF = L\,dt, \quad dL = dt \int d\tau;$$

doch hat hier das Integral über den Kontingenzwinkel

$$\mathsf{T} = \int d\tau$$

nicht mehr den Wert 2π, sondern es steht mit dem Inhalt in der Beziehung $\quad F = 2\pi - \mathsf{T}.$

Man erhält also

$$\frac{d\mathsf{T}}{L} = \frac{dL}{\mathsf{T}} = dt$$

und hieraus

$$\mathsf{T}^2 + L^2 = (2\pi - F)^2 + L^2 = c_1^2 (\geqq 4\pi^2).$$

Man kann, was wir in der euklidischen Geometrie aus naheliegenden Gründen unterließen, hier das die Invariante bestimmende System auch benützen, um z. B. aus

$$\int \frac{dL}{\sqrt{c_1^2 - L^2}} = \arcsin \frac{L(t)}{c_1} = \operatorname{arctg} \frac{L(t)}{\mathsf{T}(t)} = t + c_2$$

auch die Darstellung der endlichen Dilatation

$$L(t) = L \cos t + \mathsf{T} \sin t$$
$$\mathsf{T}(t) = \mathsf{T} \cos t - L \sin t$$

zu gewinnen.

Eine noch einfachere Invariante ist

$$\int d\varphi = \int \frac{d\tau}{\cos\varrho},$$

wobei $d\varphi$ den Winkel zweier unendlich benachbarten Normalen bedeutet und ϱ den (sphärischen) Krümmungsradius. Es besteht vermutlich (auf Grund geometrischer Betrachtungen über Kurve und Evolute) noch die Beziehung

$$\left(\int d\varphi\right)^2 \geqq \mathsf{T}^2 + L^2,$$

wobei das Gleichheitszeichen wieder nur für den Kreis gilt.

Sodann gehen wir zum *sphärischen Raum* über. Hier gilt die Euler-Mongesche Krümmungstheorie mit kleinen Änderungen. Wir denken uns jetzt eine Fläche durch ihre Krümmungslinien in infinitesimale Rechtecke zerlegt und bei jedem Rechteck die Flächennormalen in den Mittelpunkten der Seiten errichtet. Die Normalen schneiden dann einander paarweise in den Krümmungsmittelpunkten der Hauptschnitte; die Schnittwinkel seien $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$, die Krümmungsradien der Hauptschnitte R_1 und R_2. Dann ist das Oberflächenelement

$$dO = \sin R_1 \sin R_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

und die Oberfläche

$$O = \int\int \sin R_1 \sin R_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 .$$

Neben dem Rauminhalt (J) und der Oberfläche sollen noch die beiden Integrale

$$S = \tfrac{1}{2} \int\int \sin (R_1 + R_2) \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$
$$C = \tfrac{1}{2} \int\int \cos (R_1 + R_2) \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

in Betracht gezogen werden.

Für die Kugel, und vermutlich für sie allein, ist

$$\int\int d\varphi_1 \, d\varphi_2 = 4\pi .$$

Bei infinitesimaler Dilatation wird

$$dO = 2S\,dt, \quad dS = 2C\,dt, \quad dC = -2S\,dt, \quad dJ = O\,dt.$$

Demnach findet man Integralinvarianten aus

$$\frac{dO}{2S} = \frac{dS}{2C} = -\frac{dC}{2S} = \frac{dJ}{O} = dt.$$

Man erhält sofort

$$1) \quad S^2 + C^2 = c_1^2,$$
$$2) \quad O + C = c_1$$

und endlich aus $\qquad \dfrac{dJ}{O} + \dfrac{dC}{2S} = 0 \qquad$ oder

$$2\,dJ + \frac{(c_2 - C)\,dC}{\sqrt{c_1^2 - C^2}} = d\left(2J + c_2 \arcsin \frac{C}{c_1} + \sqrt{c_1^2 - C^2}\right) = 0$$

noch $\quad 3) \quad 2J + (O + C) \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{S}{C}\right) + S = c_3 .$

Daß diese Größen wirklich Invarianten sind, kann man mit Hilfe der für endliche Dilatationen geltenden Gleichungen nachträglich bestätigen, also aus den Formeln

$$C(t) = C \cos 2t - S \sin 2t,$$
$$S(t) = S \cos 2t + C \sin 2t,$$
$$O(t) = O + S \sin 2t + C(1 - \cos 2t),$$
$$J(t) = J + \int O(t)\,dt = J + Ot + \frac{S}{2}(1 - \cos 2t) + \frac{C}{2}(2t - \sin 2t).$$

Eine naheliegende Frage bedarf noch genauerer Untersuchung. Es müßte festgestellt werden, ob die Invarianten gewissen Ungleichheiten unterliegen, die nun für den Fall der Kugel in Gleichungen übergehen. Es ist noch nicht zu übersehen, ob man auf diesem Weg oder vielmehr Umweg über den sphärischen Raum schließlich zu einem einfacheren Beweis auch für die isoperimetrische Haupteigenschaft der Kugel im euklidischen Raum gelangen kann, ähnlich, wie ihn Bernstein für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises erbracht hat.

Über diesen Grenzübergang zur euklidischen Geometrie sei schließlich noch eine Bemerkung gestattet. Er wird durchgeführt, indem man R_1 und R_2 ersetzt durch $R_1 : k$ und $R_2 : k$ und in Reihen entwickelt. Die Koeffizienten der Potenzen von k^{-1} sind dann Invarianten bei Dilatationen im euklidischen Raum. Berücksichtigt man z. B. nur k^{-2}, so wird

$$O \approx O k^{-2}, \quad C = \tfrac{1}{2} \int \int \cos\left(\frac{R_1 + R_2}{2k}\right) d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

$$\approx \int \left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 k^{-2}\right) d\omega$$

und man erhält aus (2) die Invariante

$$O - \int \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 d\omega = O - N,$$

die sich aus den in § 1 angegebenen Invarianten

$$M^2 - 4\pi O = c_1 \ (\S\ 1,\ 5)$$
$$M^2 - 4\pi N = c_2 \ (\S\ 1,\ 7)$$

zusammensetzen läßt.

§ 3. Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises in der hyperbolischen Ebene.

Wir gehen jetzt zur hyperbolischen Ebene über und wollen das in der Überschrift zum Ausdruck gebrachte Ziel verfolgen, von weiteren Untersuchungen dagegen absehen. Bezeichnet wieder F den Flächeninhalt, L die Länge einer geschlossenen doppelpunktfreien Kurve, $d\tau$ den Kontingenzwinkel und wird

$$\int d\tau = \mathsf{T}$$

gesetzt, so ist bei einer infinitesimalen Dilatation

$$dF = L\,dt,$$
$$dL = \mathsf{T}\,dt,$$

und hierzu kommt die Gleichung

$$F = \mathsf{T} - 2\pi,$$

die den Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und dem Integral T angibt. Man erhält also die Invariante aus

$$\frac{d\mathsf{T}}{L} = \frac{dL}{\mathsf{T}} = dt,$$

sie ist $$\mathsf{T}^2 - L^2 \equiv (F + 2\pi)^2 - L^2 = c.$$

Um die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises zu beweisen, muß man zeigen, daß die angegebene Funktion für alle vom Kreis verschiedenen Kurven kleiner ist als $4\pi^2$, denn dann eben erreicht bei gegebenem L der Flächeninhalt einzig und allein seinen größten Wert für den Kreis. Beim Kreis (vom Radius r) ist nämlich

$$F = 2\pi(ch\,r - 1), \quad L = 2\pi\,sh\,r$$

gerade $$(F + 2\pi)^2 - L^2 = 4\pi^2(ch^2 r - sh^2 r) = 4\pi^2.$$

Der Weg zu diesem Nachweis ist im wesentlichen das von Blaschke verschärfte Viergelenksverfahren von Steiner, erfordert aber einige trigonometrische Rechnungen, die nicht zu langwierig ausfallen dürfen.

Wir brauchen auch hier zunächst den Satz, daß unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten das Sehnenviereck den größten Inhalt besitzt. Das würde durch Übertragung der Baurschen Formel[1]) von der Kugel auf die hyperbolische Ebene ja sofort erwiesen sein. Es genügt aber, wie sich zeigen wird, wenn wir den Satz nur für ein Viereck mit paarweise gleichen Seiten $(a, b, c = b, d = a)$ beweisen.

---

[1]) Vgl. G. Hessenberg, Elementare Beweise für eine Maximumseigenschaft des Sehnenvierecks (Math. Abh. zum 50jährigen Doktorjubiläum von H. A. Schwarz, Berlin 1914, S. 76—83).

Bekannt ist, daß ein Viereck dann und nur dann Sehnenviereck ist, wenn die beiden Summen der Paare von Gegenwinkeln einander gleich sind. Denken wir uns nun unser spezielles Viereck durch die eine Diagonale in die beiden symmetrischen Hälften zerlegt, so ist in diesem Fall in jedem der beiden Teildreiecke der von den Seiten a und b eingeschlossene Winkel gleich der Summe der beiden anderen Winkel

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Die Maximaleigenschaft des Sehnenvierecks in dem hier beschriebenen Spezialfall ist also erwiesen, wenn der Satz bewiesen ist:

Der Inhalt eines Dreiecks, von dem die beiden Seiten a und b gegeben sind, erreicht seinen größten Wert, wenn der von a und b eingeschlossene Winkel γ gleich der Summe der beiden andern Winkel $\alpha + \beta$ ist.

Zwischen dem Inhalt

$$\varepsilon = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel γ besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{th\,\frac{a}{2}\,th\,\frac{b}{2}\,\sin\gamma}{1 + th\,\frac{a}{2}\,th\,\frac{b}{2}\,\cos\gamma},$$

die aus den Neperschen Formeln für das schiefwinklige Dreieck zu gewinnen ist[1]). Bezeichnen wir die festgehaltenen Werte der hyperbolischen Tangensfunktionen der halben Seiten mit t_1 und t_2, so handelt es sich also um das Maximum von

$$f(\gamma) = \frac{\sin\gamma}{1 - t_1 t_2 \cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{N}.$$

Aus

$$f'(\gamma) = \frac{\cos\gamma\,(1 - t_1 t_2 \cos\gamma) - \sin\gamma\, t_1 t_2 \sin\gamma}{N} = \frac{\cos\gamma - t_1 t_2}{N^2} = 0$$

[1]) Hinsichtlich der trig. Formeln der hyperbolischen Geometrie sei auf H. Liebmann, Nichteuklid. Geometrie, 2. Aufl. (1912), Kap. III verwiesen.

erhält man
$$\cos\gamma = t_1 t_2,$$
und dieser Wert ist möglich, da die Funktion
$$th\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$
kleiner als Eins ist. Es tritt auch tatsächlich ein Maximum ein, denn es ist
$$f''(\gamma) = -\frac{\sin\gamma}{N^2} - (\cos\gamma - t_1 t_2)\left(\frac{1}{N^2}\right)' < 0.$$

Nach den Neperschen Formeln ist dann
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{1 - th\frac{a}{2}\,th\frac{b}{2}}{1 + th\frac{a}{2}\,th\frac{b}{2}} = \cot\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Da ferner wegen
$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$
keine Unsicherheit über die Auflösung dieser Gleichung besteht (wie dies doch bei der entsprechenden Untersuchung für die sphärische Geometrie eintreten würde), erhält man
$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Damit ist der ausgesprochene Satz für das Dreieck und das symmetrische Viereck bewiesen.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir das Viergelenkverfahren an. Wir betrachten also ein Polygon mit einer geraden Anzahl gegebener, gleich großer Seiten und weisen nach, daß sein Inhalt so lange vergrößert werden kann, als die Ecken nicht sämtlich auf demselben Kreis liegen. Wir verbinden eine beliebige Ecke P mit der Gegenecke Q, die dadurch bestimmt ist, daß der Polygonzug PQ gerade der halbe Umfang ist. Ohne Änderung des Umfangs ersetzt man dann das Polygon durch ein anderes mit gleichem Umfang, das größeren Inhalt hat und zur P-Diagonale symmetrisch liegt, indem man den Teil mit größerem Inhalt an PQ spiegelt. Auch wenn beide Teile gleichen Inhalt haben, nimmt man diese Spiegelung vor, um eine symmetrische Figur zu erhalten. Liegen in diesem neuen, zu PQ symmetrischen Polygon nicht alle Ecken auf dem über PQ als Durchmesser errichteten Kreis, so dürfen insbesondere auch nicht alle Paare R, R' von Punkten, die zu PQ symmetrisch liegen, mit P und Q auf einem Kreis gelegen sein. Dann zieht man die Sehnen

$$PR,\ RQ,\ PR' = PR,\ PQ' = PQ$$

und macht die Gelenke der vier Polygonzüge zwischen P und R, P und R', Q und R, Q und R' steif. Man kann jetzt (nach dem Viereckssatz) unter Beibehaltung des Umfangs des Polygons und des Inhalts der bei diesem Vorgang mit sich kongruent bleibenden Polygonsegmente, die über den vier Sehnen stehen, den Inhalt des Vierecks $PRQR'$, dessen Seiten unverändert bleiben, und damit zugleich den Inhalt des Polygons vergrößern, ohne die Seiten zu ändern.

Man kann also in der Tat den Inhalt unter Beibehaltung der Seiten so lange vergrößern, als die Ecken noch nicht sämtlich auf einem Kreis liegen. Damit ist die Maximaleigenschaft des Sehnenpolygons, vielmehr des regulären $2m$-Ecks, noch nicht bewiesen. Sie ergibt sich erst durch den Nachweis der Existenz des Maximums für den Inhalt, wie ihn Blaschke durchgeführt hat, und wie er sich mit geringen Modifikationen auf die hyperbolische Geometrie überträgt; mit Modifikationen lediglich formaler Natur.

Der nächste Schritt ist, daß wir beim *regulären Polygon* die Beziehung

$$(2\pi + F)^2 - L^2 < 4\pi^2$$

nachweisen. Das würde wohl auf recht unbequeme Rechnungen führen, wenn wir die Seiten keiner Beschränkung unterwerfen; für unseren Zweck genügt es, wenn man die Seiten so klein nimmt, als dies der Gang des Beweises wünschenswert erscheinen läßt.

Es sei also r der Radius, n die Anzahl der Seiten, daher $\frac{\pi}{n}$ der Winkel gegenüber $\frac{s}{2}$ in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Ecken der Mittelpunkt des regulären Polygons, eine Ecke und eine benachbarte Seitenmitte sind. Bezeichnet man mit τ den Außenwinkel zwischen einer Seite und der Verlängerung der nächsten Seite, so ist der zweite Winkel in dem benützten rechtwinkligen Dreieck

$$\frac{\pi - \tau}{2}$$

und weiter $$2\pi + F = n\tau.$$

Wir haben also den Wert von

$$\mathsf{T}^2 - L^2 = 4n^2\left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{s^2}{4}\right)$$

zu untersuchen. Dabei ist auf Grund der Formeln für das rechtwinklige Dreieck der hyperbolischen Geometrie

$$sh\,\frac{s}{2} = shr\sin\frac{\pi}{n} = u$$

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = chr\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = v.$$

Weiter ist, wenn wir die Glieder bis zur dritten Ordnung (n^{-3}) beibehalten

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

$$\frac{\tau}{2} \approx v - \frac{v^3}{3} \approx chr\left(\frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 ch^3 r$$

$$\approx \frac{\pi}{n}\,chr\left(1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^3\frac{sh^2 r}{3}\right)$$

und daher

$$\frac{\tau^2}{4} \approx \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 ch^2 r\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 sh^2 r\right).$$

Entsprechend findet man auch

$$\sin\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

und $$\frac{s}{2} \approx u - \frac{u^3}{6}$$

auch $$\frac{s^2}{4} \approx \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 sh^2 r \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 ch^2 r\right).$$

Es ist daher für hinreichend groß gewähltes n bis einschließlich Größen von der Ordnung n^{-2} bei unserem Polygon

$$(2\pi + F)^2 - L^2$$

$$= 4n^2 \frac{\pi^2}{n^2}\left(ch^2 r - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 sh^2 r\, ch^2 r - sh^2 r - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 sh^2 r\, ch^2 r\right)$$

$$= 4\pi^2\left(1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 ch^2 r\, sh^2 r\right) < 4\pi^2.$$

Mit der Ableitung dieser Ungleichheit sind aber jetzt alle Mittel gegeben, die man zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises braucht. Man kann jetzt, dem Gedankengang von Blaschke (a. a. O., S. 31) vollständig parallel gehend, durch Annäherung der zu untersuchenden Kurve mit Hilfe eines einbeschriebenen Polygons V^* mit einer geraden Anzahl von lauter gleichen Seiten nachweisen, daß für die Kurve niemals

$$(2\pi + F)^2 - L^2 > 4\pi^2$$

sein kann, daß also

$$(2\pi + F)^2 - L^2 \leq 4\pi^2$$

ist. Ist die Kurve kein Kreis, so kann man bei festgehaltenem L noch F in $F' > F$ durch das Viergelenkverfahren überführen und wegen

$$(2\pi + F)^2 - L^2 < (2\pi + F')^2 - L^2 \leq 4\pi^2$$

ist hiermit erwiesen, daß in der oben stehenden Beziehung das Gleichheitszeichen nur für den Kreis gilt.

Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auch für die hyperbolische Geometrie sichergestellt.