Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft III

Oktober- bis Dezembersitzung

München 1918

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon.

Von F. Lindemann.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Dezember 1918.

Wie bei dem Parabelpolygon die Differentialgleichung aller Parabeln den Ausgangspunkt für die Behandlung des Problems in meiner früheren Abhandlung[1]) bildet, so hier bei dem allgemeinen Problem die Differentialgleichung fünfter Ordnung aller Kegelschnitte. Durch Einführung der Variabeln $z = x + iy$ und $z_1 = x - iy$ läßt sie sich in eine Differentialgleichung vierter Ordnung in z', z'', z''', $z^{(4)}$ umformen (wo die oberen Striche die Differentiation nach Z, d. i. nach der Variabeln in der Bildebene andeuten), deren linke Seite außer diesen Größen z', z'' . . . Funktionen von z_1 und z, z_1' und z' usf. enthält, die auf dem Rande des Polygons reell sind und sich infolgedessen als Funktion von Z bestimmen lassen, da ihre in den Brennpunkten der Kegelschnitte und in den Ecken des Polygons liegenden singulären Punkte bekannt sind, und da auch ihr Verhalten in den entsprechenden Bildpunkten sich bestimmen läßt. Es ergibt sich schließlich nach Ausführung einer Quadratur eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für z, deren Koeffizienten von den Lösungen W einer anderen Differentialgleichung abhängen, die dadurch gegeben wird, daß der Schwarzsche Differentialausdruck $\{W, Z\}$ gleich einer rationalen Funktion von Z sein muß. Die Formeln für

[1]) Diese Sitzungsberichte, oben S. 203 ff.

das Parabelpolygon entstehen, wenn die durch die erste Quadratur eingeführte willkürliche Konstante gleich Null genommen wird. Es entsteht dann eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Koeffizienten sich in den singulären Punkten verhalten wie rationale Funktionen (deshalb aber nicht, wie in meiner letzten Arbeit gesagt wurde, selbst rationale Funktionen sind).

§ 1. Die Differentialgleichung der Kegelschnitte.

Bei unserer Behandlung des Abbildungsproblems für ein Parabelpolygon gingen wir von der Differentialgleichung der Parabel

$$(1) \qquad 3\,\frac{d^2 y}{d x^2}\,\frac{d^4 y}{d x^4} - 5\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)^2 = 0$$

aus. Die linke Seite der Gleichung ist eine Reciprokante im Sinne Sylvesters[1]); zur Abkürzung wenden wir dessen Berechnungsweise an und setzen:

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = a, \quad \frac{d^3 y}{d x^3} = b, \quad \frac{d^4 y}{d x^4} = c, \quad \frac{d^5 y}{d x^5} = d;$$

dann erscheint die Gleichung (1) in der Form

$$(3) \qquad P \equiv 3\,a\,c - 5\,b^2 = 0.$$

Entsprechend benutzen wir jetzt die Differentialgleichung der allgemeinen Kurve zweiter Ordnung in der Form:[2])

$$(4) \qquad L \equiv 9\,a^2 d - 45\,a\,b\,c + 40\,b^3 = 0.$$

Die linke Seite läßt sich auf P und P'_x (den Differentialquotienten von P nach x) zurückführen; es ist nämlich

$$(5) \qquad P'_x = 3\,a\,d - 7\,b\,c;$$

---

[1]) Sylvesters Arbeiten über Reciprokanten sind abgedruckt in Bd. IV seiner Mathematical Papers, Cambridge 1912.

[2]) Diese Gleichung hatte ich a. a. O. unter Bezugnahme auf eine Abhandlung von Halphen abgeleitet. Wie Sylvester (l. c. p. 283 und 380) bemerkt, wurde sie schon von Monge aufgestellt: Corresp. sur l'École Polytechnique, Paris, II, 1809—13, p. 51—54.

folglich wird:

(6) $$L = 3a \cdot P'_x - 8b \cdot P.$$

In der Tat muß ja die Gleichung $L = 0$ auch von allen Parabeln erfüllt sein.

Ebenso muß sich L auf die linke Seite der Differentialgleichung aller Kreise, nämlich

(7) $$K \equiv (1 + t^2)b - 3a^2 t = 0, \quad \text{wo } t = \frac{dy}{dx},$$

zurückführen lassen. Es ist:

$$K'_x = (1 + t^2)\, c - 4abt - 3a^3$$
$$K''_x = (1 + t^2)\, d - 2act - 4b^2 t - 13a^2 b$$

und folglich:[1])

(8) $$-L \cdot a \cdot t = K \cdot (3ad - 13bc) + 13K'_x \cdot b^2 - 3K''_x ab.$$

In ähnlicher Weise wird man ein von gewissen Parametern abhängiges System von Kegelschnitten durch eine Differentialgleichung charakterisieren können; durch die linke Seite derselben und durch die Differentialquotienten dieser linken Seite wird sich dieser unserer Ausdruck L darstellen lassen. Es sei dies noch an einem weiteren Beispiele gezeigt.

Die Kegelschnitte mit gemeinsamem Mittelpunkt im Anfangspunkte, deren Hauptaxen mit den Koordinatenaxen zusammenfallen, sind gegeben durch:

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0, \quad \text{also: } Ax + Byt = 0$$
$$A + Bt^2 + Bay = 0;$$

durch Elimination von A und B findet man:

$$M \equiv t(y - xt) - axy = 0$$

folglich durch Differentiation nach x:

---

[1]) Das Bestehen von Relationen der Form (6) und (8) kann man auch aus einem allgemeinen Satze Sylvesters schließen, nach welchem das von ihm mit G bezeichnete Operationssymbol (a. a. O., p. 394), welches zur Ableitung höherer Reciprokanten aus niederen dient und die partiellen Differentialquotienten $a, b, c \ldots$ enthält, sich auf eine Differentiation nach x zurückführen läßt.

$M' = -bxy - 3axt$; dies gesetzt $= -M_1 x$; dann ist:

$$M_1' = cy + tb + 3a^2 + 3bt$$

$bM_1' - cM_1 = 4tb^2 + 3a^2 b - 3act$, gesetzt $= M_2$; dann ist

$$M_2' = 10ab^2 + t(5bc - 3ad),$$

also:

$$M_2(5bc - 3ad) - M_2'(4b^2 - 3ac)$$
$$= ab(45abc - 40b^3 - 9a^2 d) = -abL,$$

wenn L wieder durch (4) definiert ist. Nun wird:

$$M_1 = -\frac{M'}{x}, \quad M_1' = \frac{M' - xM''}{x^2}, \quad M_2 = \frac{bM' - bxM'' + cxM'}{x^2}$$

$$M_2' = \frac{1}{x^3}[(dx^2 - 2b)M' + 2bM''x - bx^2 M'''],$$

also:

$$abx^3 \cdot L = M'[x^2(4b^2 d - 5bc^2) + x(3abd - 5b^2 c)$$
$$+ 6abc - 8b^3] + M''[x^2(5b^2 c - 3abd) + x(8b^3 - 6abc)]$$
$$+ M'''bx^2(3ac - 4b^2).$$

Hier ist L eine Differentialinvariante für die Gruppe aller ebenen Kollineationen, M eine Differentialinvariante für die Gruppe der Transformationen $\xi = \alpha x$, $\eta = \beta y$. In analoger Weise wird sich allgemein eine Differentialinvariante einer Gruppe rational darstellen lassen durch die Differentialinvarianten einer Untergruppe und durch deren Differentialquotienten.

Es kommt (wie bei den Parabeln a. a. O.) darauf an, statt der Differentialquotienten von y nach x oder von x nach y die Differentialquotienten von x und y nach einem Parameter X einzuführen. Setzen wir

$$x' = \frac{dx}{dX}, \quad x'' = \frac{d^2 x}{dX^2}, \quad y' = \frac{dy}{dX}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dX^2} \cdots,$$

so ist bekanntlich:

$$t = \frac{y'}{x'}, \quad a = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}, \quad \text{und wenn}$$

$$U = y''x' - x''y', \quad U' = \frac{dU}{dX}, \quad U'' = \frac{d^2 U}{dX^2}$$

gesetzt wird:

$$a=\frac{U}{x'^3},\quad b=\frac{U'x'-3Ux''}{x'^5},$$

$$(9)\qquad c=\frac{U''x'^2-7U'x'x''+15Ux''^2-3Ux'x'''}{x'^7},$$

$$d=\frac{1}{x'^9}[U'''x'^3-12U''x'^2x''+57U'x'x''^2-10U'x'^2x''' \\ +U(48x'x''x'''-105x''^3-3x'^2x^{(4)})]$$

Diese Ausdrücke wären in die Gleichung (4) einzuführen. Es ist einfacher, zunächst den Differentialausdruck P umzuformen und dann L (d. i. die linke Seite von (4)) mittelst (6) zu berechnen. Es ergibt sich

$$P=\frac{1}{x'^{10}}[3\cdot U(U''x'^2-7U'x'x''+15Ux''^2-3Ux'x''') \\ -5\cdot(U'x'-3Ux'')^2]$$

$$(10)\qquad =\frac{1}{x'^9}[-9U^2x'''+9UU'x''+(3UU''-5U'^2)x'],$$

also ferner:

$$(10\,a)\qquad P'_x=\frac{P'_X}{x'}=\frac{1}{x'^{10}}[3UU'''x'+12UU''x''-7U'U''x' \\ +4U'^2x''+9UU'x''']$$

$$-\frac{9}{x'^{11}}[-9U^2x'''+9UU'x''+(3UU''-5U'^2)x']x''$$

$$=\frac{1}{x'^{11}}[81U^2x''x'''-9UU'(x'''x'+9x''^2)-(15UU'' \\ -41U'^2)x'x''+(3UU'''-7U'U'')x'^2]$$

und es wird:

$$(11)\qquad x'^{14}\cdot L=3UP'x'-8(U'x'-3Ux'')P,$$

wo P' den Differentialquotienten von P nach X bezeichnet, oder entwickelt:

$$(11\,a)\quad 27U^3x''x'''+45U^2U'x'x'''-27U^2U'x''^2+3U(9UU'' \\ -23U'^2)x'x''-(9U^2U'''-45UU'U''+40U'^3)x'^2=0.$$

§ 2. Die Differentialgleichung des Problems.

Die Gleichung $L = 0$ ist für alle Kurven zweiter Ordnung erfüllt. Führt man statt der Variabeln x und y die Variabeln

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad z_1 = x - iy,$$

ein, so wird die allgemeinste Gleichung zweiten Grades in x, y ersetzt durch eine ebenso allgemeine Gleichung zwischen z und z_1. Dabei ist

$$z_1'' z' - z_1' z'' = -2i(y'' x' - x'' y').$$

Setzen wir also

$$(12) \quad -2iU = V = z_1'' z' - z_1' z'', \quad V' = \frac{dV}{dX} = z_1''' z' - z_1' z''' \ldots,$$

$$(12\text{a}) \quad H = \frac{1}{z'^9}[-9V^2 z''' + 9VV'z'' + (3VV'' - 5V'^2)z'], \quad H' = \frac{dH}{dX}$$

so geht zufolge (11) die Differentialgleichung $L = 0$ über in:

$$(13) \qquad 3V \cdot H' \cdot z' - 8(V'z' - 3Vz'')H = 0.$$

Gelingt es, die Ausdrücke V, V', V'' ... oder ihre Verhältnisse als Funktion von $Z = X + iY$ darzustellen, so gibt (13) eine Differentialgleichung, welche z als Funktion von X längs der das gegebene Flächenstück begrenzenden Kegelschnitte (d. h. in der Z-Ebene längs der reellen Axe) definiert und welche folglich nach dem Prinzipe der Fortsetzung auch für die ganze obere Halbebene z als Funktion von Z im Sinne der gestellten Abbildungsaufgabe liefert.

Als singuläre Punkte der Funktionen V, und damit der Integrale der Differentialgleichung (13), kommen auf dem Rande des gegebenen Flächenstückes die Ecken des Polygons in Betracht, im Innern desselben die Brennpunkte der den Rand bildenden Kegelschnitte, bzw. die diesen Punkten in der Halbebene $Y > 0$ entsprechenden Punkte. Der Beweis dafür ist genau, wie bei den Parabelpolygonen meiner früheren Abhandlung. Da die durch (12) gegebene Funktion V nur in Wendepunkten der Kurve verschwindet, auf welcher der Punkt x, y (d. i. z, z_1) liegt, so kommen andere singuläre Punkte nicht in

Betracht. Eine Ausnahme von dieser Betrachtung tritt ein, wenn einer der Kegelschnitte in eine gerade Linie ausartet; dann ist die Gleichung (13) identisch erfüllt. Man wird diesen Fall als Grenzfall im folgenden mit einschließen können.

§ 3. Die Ecken des Polygons als singuläre Punkte.

Die zu betrachtende Polygonecke liege im Nullpunkte ($z = 0$); wir denken uns eine Transformation gegeben, welche die beiden dort zusammenstoßenden Kegelschnitte in zwei unter dem gleichen Winkel zusammentreffende gerade Linien verwandelt; diese in der Umgebung der Stelle $z = 0$, welcher die Stelle $\zeta = 0$ entsprechen möge, konforme Abbildung sei durch die Gleichung

$$(14) \qquad z = F(\zeta)$$

dargestellt, in welcher die rechts stehende Funktion F noch von einer willkürlichen Funktion abhängt, da das aus der z-Ebene auf die ζ-Ebene abzubildende Gebiet in der Umgebung der Stelle $z = 0$ noch durch eine willkürliche Kurve (die den Winkelraum zwischen den beiden Kegelschnitten abschließt) begrenzt zu denken ist. Der eine Kegelschnitt sei durch die Gleichung

$$(14\,\mathrm{a}) \qquad z = \frac{a_1 t + a_2 t^2}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}$$

in seiner Parameterdarstellung gegeben; dabei sind a_1 und a_2 komplexe, hingegen c_0, c_1, c_2 reelle Konstante. Durch Auflösung ergibt sich hieraus

$$(14\,\mathrm{b}) \qquad t = \varphi(z) = f(\zeta),$$

wo die Funktion $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ holomorph ist, denn sie hat nur in den Brennpunkten des Kegelschnittes singuläre Punkte; sie hängt folglich auch holomorph von ζ ab. Reellen Werten von t entsprechen reelle Punkte des Kegelschnittes; und es kann die Funktion F so gewählt werden, daß ihnen auch reelle Werte von ζ zugehören. Durch die Transformation

$$(15) \qquad \zeta = Z^{\lambda}$$

werden dann, wenn $\lambda\pi$ den Winkel des Polygons an der Ecke $z = 0$ also auch den Winkel zwischen den beiden durch die Transformation (14) erzeugten geraden Linien bedeutet, diese beiden (den Kegelschnitten entsprechenden) Geraden der ζ-Ebene in die reelle Axe der Z-Ebene übergeführt, so daß auf dem ersten Kegelschnitte reellen Werten von ζ auch reelle Werte von Z entsprechen, und es werde

$$(16) \qquad t = f(\zeta) = f(X^{\lambda}) = \psi(X) = \varphi(z)$$

gesetzt. Sei nun

$$(16\text{a}) \qquad U = \frac{d^2 z_1}{dt^2}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dz_1}{dt},$$

so wird längs des ersten Kegelschnittes:

$$(17) \qquad \left(\frac{V'}{V}\right)_1 = \frac{U'}{U}\cdot\psi'(X) + 3\,\frac{\psi''}{\psi'}, \quad \text{wo } U' = \frac{dU}{dt},$$

$$= \left[\frac{U'}{U}\cdot\varphi'(F)\,F'(\zeta_1) + 3\,\frac{\varphi''(F)}{\varphi'(F)}\,F'(\zeta_1) + 3\,\frac{F''(\zeta_1)}{F'(\zeta_1)}\right]\zeta_1' + 3\,\frac{\zeta_1''}{\zeta_1'},$$

wo ζ_1' den Differentialquotienten von ζ_1 nach X bezeichnet und ζ_1 ein Punkt der Kurve (14 a) ist.

Der zweite Kegelschnitt sei durch die Gleichung

$$(17\text{a}) \qquad z = \frac{b_1\tau + b_2\tau^2}{e_0 + e_1\tau + e_2\tau^2}$$

in seiner Parameterdarstellung gegeben, und umgekehrt, analog zu (16):

$$\tau = \chi(z).$$

In der Z-Ebene geschieht der Übergang von dem ersten zum zweiten Kegelschnitte dadurch, daß man X durch $Xe^{\pi i\lambda}$ ersetzt; in der Umgebung von $z = 0$ wird damit jedem Punkte des ersten ein Punkt des zweiten Kegelschnittes zugeordnet. Man kann daher setzen:

$$(17\text{b}) \qquad \tau = \chi(z) = \chi(F(\zeta_2)) = \chi(F(\zeta_1 e^{\pi i\lambda})) = \Phi(t),$$

wo ζ_2 einen Punkt der Kurve (17a) bezeichnet. Auf dem zweiten Kegelschnitte ist dann:

$$(17\text{c})\quad \left(\frac{V'}{V}\right)_2 = \left[\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \cdot \chi'(F(\zeta_2))F'(\zeta_2) + 3\frac{\chi''(F(\zeta_2))}{\chi'(F(\zeta_2))}F'(\zeta_2) + 3\frac{F''(\zeta_2)}{F'(\zeta_2)}\right]\zeta_2' + 3\frac{\zeta_2''}{\zeta_2'},$$

wo nun:

$$(17\text{d})\qquad \zeta_2' = \zeta_1' e^{\pi i\lambda},\quad \frac{\zeta_2''}{\zeta_2'} = \frac{\zeta_1''}{\zeta_1'} = \frac{\lambda - 1}{X}.$$

Hier wird ferner, wenn man gemäß (17b) τ als Funktion von t auffaßt:

$$U_t = \Phi'(t)^3\, U_\tau,\quad \left(\frac{U'}{U}\right)_t = \left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \Phi'(t) + 3\frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)}.$$

Die Gleichungen (17) und (17c) gelten für die Punkte je eines der beiden Kegelschnitte; nach dem Prinzipe der stetigen Fortsetzung ist folglich für einen beliebigen Punkt ζ in der Umgebung der Stelle $\zeta = 0$ (bzw. $Z = 0$)

$$(18)\quad \begin{aligned} \frac{V'}{V} &= \left[\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \varphi'(F)F'(\zeta)\Phi'(t) + 3\frac{\varphi''(F)}{\varphi'(F)}F'(\zeta) + 3\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right. \\ &\quad \left. + 3\varphi'(F)F'(\zeta)\frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)}\right]\zeta' + 3\frac{\zeta''}{\zeta'} = \left[\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \chi'(F)F'(\zeta)\right. \\ &\quad \left. + 3\frac{\chi''(F)}{\chi'(F)}F'(\zeta) + 3\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right]\zeta' + 3\frac{\zeta''}{\zeta'}, \end{aligned}$$

wo nun t und τ als Funktionen von z bzw. ζ gemäß (14b) und (17b) einzusetzen sind. Diese Gleichung aber ist eine Identität; erstens nämlich haben wir:

$$\chi'(F) - \varphi'(F)\Phi'(t) = 0,$$

denn diese Gleichung ist mit der Identität

$$\Phi'(t) = \frac{d\tau}{dt} = \frac{\dfrac{d\tau}{dz}}{\dfrac{dt}{dz}}$$

gleichbedeutend, und hieraus folgt die weitere Identität

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \varphi'\frac{\Phi''}{\Phi'} = \frac{\chi''}{\chi'}.$$

Die Identität (18) gilt insbesondere für $\zeta = \zeta_1$ und für $\zeta = \zeta_2$. Die linke Seite ist auf dem Rande (sowohl für $X > 0$ als für $X < 0$) reell, also auch die rechte Seite. Nun ist $\zeta' = \lambda Z^{\lambda-1}$ auf dem ersten Kegelschnitte reell, auf dem zweiten gleich einer reellen Zahl mal $e^{\pi i \lambda}$, während $\zeta'' : \zeta'$ nach (17 d) auf beiden Kurven reell ist. Infolgedessen läßt sich der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\text{(19)} \qquad & \left(\frac{U'}{U}\right)_r \varphi'(F) F'(\zeta) \Phi'(t) + 3\frac{\varphi''}{\varphi'} F'(\zeta) + 3\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} \\
& + 3\varphi'(F) F'(\zeta) \frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)}
\end{aligned}
$$

in eine nach Potenzen von $\zeta = Z^\lambda$ fortschreitende Reihe der Form

$$
\text{(19 a)} \qquad C_0 + C_1 Z^\lambda + C_2 Z^{2\lambda} + C_3 Z^{3\lambda} + \cdots
$$

entwickeln, die in der Umgebung von $Z = 0$ konvergent ist und reelle Koeffizienten C_i besitzt. Auf dem zweiten Kegelschnitte wird diese Reihe gleich (ab $X = R$ gesetzt)

$$
C_0 + C_1 R^\lambda e^{\pi i \lambda} + C_2 R^2 e^{2\pi i \lambda} + C_3 R^3 e^{3\pi i \lambda} + \cdots
$$

und muß dann infolge der Identität (18) gleich demselben Ausdrucke (19) sein, wenn man dort $\zeta = \zeta_1$ durch $\zeta_2 = \zeta_1 e^{\pi i \lambda}$ ersetzt, und muß ferner nach Multiplikation mit $e^{\pi i \lambda}$ (wegen des Faktors ζ_2') auf dieser zweiten Kurven ebenfalls reelle Werte annehmen, denn die linke Seite von (18) ist auf beiden Randkurven reell. Hieraus ergibt sich aber, daß alle Konstanten C_i gleich Null sind. Denselben Schluß kann man wiederholen, wenn man von dem nach obigem zu (19) äquivalenten Ausdrucke in der zweiten eckigen Klammer der Gleichung (18) ausgeht.

Der Übergang von der ζ-Ebene zur Z-Ebene geschah durch die Gleichung $\zeta = Z^\lambda$, welche den Winkelraum zwischen den beiden betrachteten Geraden der ζ-Ebene in seiner ganzen Ausdehnung auf die obere Halbebene ($Y > 0$) der Z-Ebene abbildet, während durch die Gleichung $z = F(\zeta)$ ein endlicher Teil aus der Umgebung der betrachteten Ecke ($z = 0$) des Polygons auf einen endlichen Teil des genannten Winkelraumes abgebildet wurde und dieser Teil dann auf die Halbebene weiter abzubilden war. Allgemein werden wir daher

(19 b) $$\zeta = Z^{\lambda} \cdot (c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \cdots)$$

zu setzen haben. Aus dem Verschwinden der in (19 a) eingeführten Konstanten C_i folgt daher nicht, daß der Quotient $V' : V$ gleich $3(\lambda - 1) X^{-1}$ zu setzen sei, sondern daß derselbe nur gleich diesem Ausdruck bis auf eine hinzutretende Potenzreihe ist, denn aus (19 b) erhält man an Stelle von (17 d) allgemein:

$$\frac{\zeta''}{\zeta'} = \frac{\lambda - 1}{X} + \gamma_0 + \gamma_1 X + \gamma_2 X^2 + \cdots$$

Ersetzen wir noch den Punkt $z = 0$ durch eine beliebige Ecke $z = a$ des Polygons mit dem Winkel $\lambda\pi$, und den Punkt $Z = 0$ durch einen beliebigen reellen Punkt $X = A$, so folgt, daß die Funktion

(20) $$\frac{V'}{V} - 3\,\frac{\lambda - 1}{Z - A}$$

in der Umgebung der Stelle $Z = A$ nicht mehr singulär ist; damit haben wir die erste Gleichung (20) meiner früheren Abhandlung (S. 209 dieser Sitzungsberichte) wieder gewonnen. Für Parabeln, auf die sich die damalige Untersuchung bezog, vereinfachen sich vorstehende Formeln dadurch, daß die Funktion U' identisch Null wird. Führt man die Funktion $f(\zeta)$ mittels (14 b) ein, so führt das Verschwinden des Ausdrucks (19) auf die Gleichung

$$f''(\zeta) = 0.$$

In der Umgebung von $Z = 0$ ist also im Falle des Parabelpolygons t eine quadratische Funktion von Z^{λ}:

(20 a) $$t = \alpha Z^{\lambda} + \beta Z^{2\lambda},$$

denn bei den Parabeln ist der Nenner der Gleichung (14 a) bzw. (17 a) durch 1 zu ersetzen.

Aus der an (20) geknüpften Bemerkung folgt das Resultat:

Wenn mit A_1, A_2 ... diejenigen Punkte der X-Axe in der Z-Ebene bezeichnet werden, die den Ecken a_1,

$a_2 \ldots$ des gegebenen Kegelschnittpolygons entsprechen sollen und sind $\lambda_1 \pi_1$, $\lambda_2 \pi_2$ ... die Winkel in diesen Ecken, so ist die Differenz

$$\frac{V'}{V} - 3 \sum_s \frac{\lambda_s - 1}{Z - A_s} \tag{21}$$

an den Stellen A_s nicht mehr singulär.

Hierbei sind die Zahlen λ_s von Null verschieden vorausgesetzt; auf den Fall $\lambda = 0$ kommen wir am Schlusse zurück (vgl. § 11).

§ 4. Die Brennpunkte als singuläre Punkte.

In denjenigen Brennpunkten der begrenzenden Kegelschnitte, welche im Innern des gegebenen Polygons liegen, verhält sich die Funktion $V' : V$ ebenso, wie es bei dem Parabelpolygon auseinandergesetzt wurde. Sind p und q Brennpunkte eines solchen Kegelschnittes, so erhält man durch Auflösung seiner in z und z_1 quadratischen Gleichung eine Formel der Form:

$$z_1 = az + b + A\sqrt{(z-p)(z-q)} = az + b + \sqrt{R}, \tag{22}$$

wo a, b und A Konstante bezeichnen, also durch Differentiation nach Z

$$z_1' = az' + \tfrac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} R' z'$$
$$z'' = az'' - \tfrac{1}{4} R^{-\frac{3}{2}} R'^2 z'^2 + \tfrac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} (R'' z'^2 + R' z'')$$

und hieraus:

$$V = z_1'' z' - z'' z_1' = \tfrac{1}{2} R^{-\frac{3}{2}} z'^3 (RR'' - \tfrac{1}{2} R'^2),$$

folglich, da die Klammer der rechten Seite gleich einer Konstanten ist:

$$\frac{V'}{V} = 3\frac{z''}{z'} - \frac{3}{2}\frac{R'}{R},$$

d. h. eindeutig in der Umgebung der beiden Punkte $z = p$ und $z = q$, demnach auch eindeutig an den entsprechenden Stellen der Halbebene $Y > 0$, insofern die Brennpunkte im Innern des Polygons liegen. Werden diese Stellen mit P und Q

bezeichnet und seien P_1 und Q_1 die konjugiert imaginären Punkte (also Punkte der unteren Halbebene), so ist folglich die Funktion

$$(23) \qquad \frac{V'}{V} - \frac{\delta}{Z-P} - \frac{\delta'}{Z-Q} - \frac{\delta_1}{Z-P_1} - \frac{\delta_1'}{Z-Q_1}$$

holomorph in der Umgebung dieser singulären Punkte; dabei sind δ, δ' gewisse Konstante und δ_1, δ_1' die konjugiert imaginären Konstanten. Wir werden in § 5 sehen, daß $\delta = \delta' = \delta_1 = \delta_1' = -\frac{3}{2}$ zu setzen ist.

Zur näheren Erläuterung dieser Schlüsse muß man das gegebene Polygon an dem betrachteten Kegelschnitte „spiegeln", was mittelst der Formel (22) geschieht, und dann verfolgen, was aus den Brennpunkten, die im Innern liegen, wird, genau wie bei den Parabeln in meiner früheren Arbeit. Wir kommen darauf in § 8 zurück.

§ 5. Die Integration der aufgestellten Differentialgleichung.

Die Gleichung (13) kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$3\frac{\Pi'}{\Pi} - 8\left(\frac{V'}{V} - 3\frac{z''}{z'}\right) = 0$$

und erlaubt also ein erstes Integral in der Gestalt:

$$3 \lg \Pi - 8 \lg V + 24 \lg z' = C$$

oder:

$$(24) \qquad \Pi^3 \cdot z'^{24} = C' V^8, \quad \Pi = C'' V^{\frac{8}{3}} z'^{-8},$$

wo C'' eine Konstante bedeutet; und die Gleichung (12a) wird infolgedessen:

$$-9 V^2 z''' + 9 V V' z'' + (3 V V'' - 5 V'^2) z' = C'' z' \cdot V^{\frac{8}{3}}$$

oder:

$$(25) \qquad z''' - \frac{V'}{V} z'' - \left(\frac{1}{3}\frac{V''}{V} - \frac{5}{9}\frac{V'^2}{V^2}\right) z' + C V^{\frac{2}{3}} z' = 0,$$

wo C wieder eine Konstante bedeutet. Ist letztere gleich Null, so erhalten wir die Gleichung, von welcher das Problem der konformen Abbildung eines Parabelpolygons abhängt, nämlich:

$$(25\,\text{a})\qquad z''' - \frac{V'}{V} z'' - \left(\frac{1}{3}\frac{V''}{V} - \frac{5}{9}\frac{V'^2}{V^2}\right) z' = 0.$$

Die Koeffizienten von z', z'' verhalten sich an den singulären Stellen wie rationale Funktionen, denn wir sahen in den beiden vorhergehenden Paragraphen, daß man für jeden singulären Punkt A_i eine Konstante ε_i so bestimmen kann, daß die Differenz

$$\frac{V'}{V} - \sum_i \frac{\varepsilon_i}{Z - A_i}$$

an der Stelle A_i nicht mehr singulär ist. Dabei kann A_i ein Punkt der reellen Axe (einer Ecke entsprechend) sein oder ein einem Brennpunkte entsprechender Punkt der Halbebene $Y > 0$, bzw. ein hierzu konjugierter Punkt der Halbebene $Y < 0$. In der Umgebung eines jeden singulären Punktes kann daher auf die Gleichung (25 a) die Fuchssche Theorie der linearen Differentialgleichungen angewandt werden. Für den singulären Punkt A lautet die determinierende Fundamentalgleichung:

$$(25\,\text{b})\qquad \varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2) - \varepsilon\varrho(\varrho - 1) + \tfrac{1}{9}(3\varepsilon + 2\varepsilon^2)\varrho = 0$$

oder:

$$\varrho^3 - \varrho^2(\varepsilon + 3) + \varrho\,\tfrac{2}{9}(\varepsilon + 3)^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\varrho' = 0,\quad \varrho'' = \tfrac{1}{3}(\varepsilon + 3),\quad \varrho''' = \tfrac{2}{3}(\varepsilon + 3).$$

Für eine Ecke des Polygons ist nach (20): $\varepsilon = 3(\lambda - 1)$, also die Lösung von der Form

$$z = a_i + (Z - A_i)^{\lambda_i}\mathfrak{P}_1(Z - A_i) + (Z - A_i)^{2\lambda_i}\mathfrak{P}_2(Z - A_i),$$

wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen bedeuten. Es ist dies in Übereinstimmung mit Gleichung (20 a). Um die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ aufzustellen, muß zuvor die Funktion V noch näher bestimmt sein; diese Bestimmung von V wird uns in § 7 beschäftigen.

Ist die Parabel in der Form

(25c) $$Z = (\alpha' + i\alpha'')X^{\lambda} + (\beta' + i\beta'')X^{2\lambda}$$

durch ihre Parameterdarstellung gegeben, wobei Potenzen von X mit dem Exponenten $\lambda + 1$ vernachlässigt sind, und wo $a = 0$, $A = 0$ gedacht ist, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\delta = \frac{\alpha'' + 2\beta'' X^{\lambda}}{\alpha' + 2\beta' X^{\lambda}},$$

und, wenn X den Faktor $e^{\pi i}$ erhält, für die nächste Parabel

$$\frac{d'y}{d'x} = \frac{\alpha''\cos\lambda\pi + \alpha'\sin\lambda\pi + X^{2\lambda}(\beta''\cos 2\lambda\pi - \beta'\sin 2\lambda\pi)}{\alpha'\cos\lambda\pi - \alpha''\sin\lambda\pi + X^{2\lambda}(\beta''\cos 2\lambda\pi + \beta'\sin 2\lambda\pi)} = \operatorname{tg}\delta',$$

folglich für $X = 0$: $\operatorname{tg}\delta' = \operatorname{tg}(\delta + \lambda\pi)$, wie es sein muß.

Liegt der singuläre Punkt A in einem Brennpunkt, so muß die determinierende Fundamentalgleichung (25b) neben der Wurzel $\varrho = 0$ mindestens eine Wurzel $\varrho = 1$ haben. Es ergibt sich also

(25c) $$\varepsilon = 0 \text{ oder } \varepsilon = -\tfrac{3}{2}.$$

Im ersteren Falle ergibt sich als dritte Wurzel der Wert 2, im zweiten Falle der Wert $-\frac{1}{2}$. Da ε von Null verschieden sein muß, so kann nur dieser zweite Fall eintreten; es muß also für einen Brennpunkt $\varepsilon = -\frac{3}{2}$ genommen werden.

Das Verhalten der Integrale an der Stelle $Z = \infty$ wird in § 6 näher erörtert werden.

Ist in (25) C von Null verschieden, so kann die Fuchssche Theorie nicht angewandt werden; man findet aber in diesem Falle, sobald die Funktion V bekannt ist, durch folgenden Ansatz eine Lösung der Differentialgleichung.

Infolge der Relation (21) kann in der Umgebung der singulären Stelle A gesetzt werden:

(25b) $$V = (Z - A)^{3\lambda - 3} \cdot \mathfrak{P}(Z - A),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet. Multiplizieren wir also die linke Seite von (25) mit $(Z - A)^3$, so erscheint diese Differentialgleichung in der Form:

$$(Z-A)^3 z''' + (Z-A)^2 p_1(Z-A)\cdot z'' + [(Z-A)p_2(Z-A)$$
$$+ (Z-A)^{2\lambda+1} p_3(Z-A)] z' = 0, \tag{25 c}$$

wobei λ eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung derjenigen Differentialgleichung bezeichnet, welche aus (25) entsteht, wenn die Konstante C gleich Null ist. Wir schreiben diese Gleichung in der Form:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \cdot p_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [x p_2(x) + x^{2\varrho+1} p_3(x)] \frac{dy}{dx}$$
$$\equiv P(y) + x^{2\varrho+1} p_3(x) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{25 d}$$

und setzen für y eine nach n und ν genommene Doppelsumme ein:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{n\nu} \cdot x^{\nu}; \tag{25 e}$$

dann wird

$$P(y) = \sum_n \sum_\nu [g_{n\nu} f_0(n\varrho + \nu) + g_{n,\nu-1} f_1(n\varrho + \nu - 1) + \cdots$$
$$+ g_{n,1} f_{\nu-1}(n\varrho + 1) + g_{n0} f_\nu(n\varrho)] x^{n\varrho+\nu},$$

wenn

$$P(x^\varrho) = x^\varrho f(x, \varrho) = x^\varrho \sum_\nu f_\nu(\varrho) x^\nu,$$

$$f(x, \varrho) = \varrho(\varrho-1)(\varrho-2) + \varrho(\varrho-1) p_1(x) + \varrho p_2(x)$$

gesetzt wird. Es wird ferner:

$$x^{2\varrho+1} p_3(x) \frac{dy}{dx} = (\pi_0 + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \cdots)$$
$$\times \sum_n \sum_{\nu=0} [(n+2)\varrho + \nu + 1] g_{n\nu} x^{(n+2)\varrho+\nu}.$$

Ordnet man nun die linke Seite der Differentialgleichung nach Potenzen von x und setzt die Koeffizienten derselben einzeln gleich Null, so ergibt sich zur Bestimmung der Koeffizienten $g_{n\nu}$ das folgende System von Gleichungen:

$$g_{10} f_0(\varrho) = 0, \quad \text{also } f_0(\varrho) = 0,$$
$$g_{11} f_0(\varrho+1) + g_{10} f_1(\varrho) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{1\nu} f_0(\varrho+\nu) + g_{1,\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + g_{10} f_\nu(\varrho) = 0;$$

ferner $\quad g_{20} = 0, \quad g_{21} = 0, \ \ldots \ g_{2\nu} = 0;$

und weiter:

$$(3\varrho+1)\pi_0 g_{10} + g_{30} f_0(3\varrho) = 0,$$
$$(3\varrho+1)\pi_1 g_{10} + (3\varrho+2)\pi_0 g_{11} + g_{31} f_0(3\varrho+1) + g_{30} f_1(3\varrho) = 0,$$
$$(3\varrho+1)\pi_2 g_{10} + (3\varrho+2)\pi_1 g_{11} + (3\varrho+2)\pi_0 g_{12} + g_{32} f_0(3\varrho+2)$$
$$+ g_{31} f_1(3\varrho+1) + g_{30} f_2(3\varrho) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das erste System liefert die Koeffizienten $g_{1\nu}$, das zweite die Koeffizienten $g_{2\nu}$, welche sämtlich verschwinden, das dritte die Koeffizienten $g_{3\nu}$, vorausgesetzt, daß ϱ eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung der Gleichung $P(y) = 0$, nämlich

$$f_0(\varrho) = 0$$

bedeutet und daß in der Differentialgleichung (25d) im Faktor von $p_3(x)$ dieselbe Wurzel ϱ im Exponenten von x erscheint. Man erhält ferner:

$$g_{40} = 0, \quad g_{41} = 0, \quad \ldots \quad g_{4,\nu} = 0,$$
$$(5\varrho+1)\pi_0 g_{30} + g_{50} f_0(5\varrho) = 0,$$
$$(5\varrho+1)\pi_1 g_{30} + (5\varrho+2)\pi_0 g_{31} + g_{51} f_0(5\varrho+1) + g_{50} f_1(5\varrho) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{60} = 0, \quad g_{61} = 0, \quad \ldots \quad g_{6,\nu} = 0,$$
$$(7\varrho+1)\pi_0 g_{50} + g_{70} f_0(7\varrho) = 0,$$
$$(7\varrho+1)\pi_1 g_{50} + (7\varrho+2)\pi_0 g_{51} + g_{71} f_0(7\varrho+1) + g_{70} f_1(7\varrho) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

usw. Es ergeben sich also alle Koeffizienten $g_{n,\nu}$ mit geradem Index n gleich Null, während die mit ungeradem Index n aus diesem Systeme von linearen Gleichungen berechnet werden können. Vorausgesetzt ist dabei, daß keiner der Ausdrücke

$$f_0(\varrho+1), \; f_0(\varrho+2), \; \ldots \; f_0(3\varrho), \; f_0(3\varrho+1), \; \ldots$$
$$f_0(5\varrho), \; f_0(5\varrho+1), \; \ldots \; f_0(7\varrho), \; f_0(7\varrho+1), \; \ldots$$

verschwindet. Tritt dies ein, so würden Logarithmen in die Lösung eingehen können. Im allgemeinen erscheint hiernach ein Integral der Differentialgleichung (25d) in der Form (25e) durch eine unendliche Reihe dargestellt. Die Konvergenz dieser Reihe ist durch den allgemeinen Beweis für die Möglichkeit der Lösung des Abbildungsproblems mit gesichert. Da die Gleichung (25 d) von der zweiten Ordnung in y' ist, so kann ein zweites Integral durch Quadratur gefunden werden. Für unsere Abbildungsaufgabe kommt indessen nur das in (25 e) gefundene Integral in Betracht, da dieses die Verwandlung des Winkels π der Z-Ebene in den Winkel $\lambda\pi$ der z-Ebene in Analogie zu der für Parabeln geltenden Formel (25 c) für den singulären Punkt $x = 0$ $(Z = A)$ vermittelt.

Bei einem Umgang von Z um den Punkt A ändert sich infolge der Gleichung (25) die Konstante C in der Differentialgleichung (25 d) um einen Faktor $e^{2\pi i(3\lambda - 3)}$, und unsere Lösung y geht in eine Lösung der so entstehenden neuen Differentialgleichung über, bei der alle Koeffizienten π_i der Reihe $p_3(x)$ sich um einen Faktor geändert haben.

In unserem Falle sind $\varrho = \lambda$ und $\varrho = 2\lambda$ Wurzeln der Fundamentalgleichung $f_0(\varrho) = 0$; man kann daher ein zweites Integral der Gleichung (25 d) auch auf folgendem Wege finden. Man setze

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_{n\nu} x^{\nu} \tag{25 f}$$

und führe die entsprechenden Rechnungen aus; dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&g'_{10} f_0(2\varrho) = 0, \text{ also } f_0(2\varrho) = 0,\\
&g'_{11} f_0(2\varrho + 1) + g'_{10} f_1(2\varrho) = 0,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&g'_{1\nu} f_\nu(2\varrho + \nu) + g'_{1,\nu-1} f_1(2\varrho + \nu - 1) + \cdots + g'_{10} f_\nu(2\varrho) = 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&g'_{20} = 0, \quad g'_{21} = 0, \ldots g'_{2\nu} = 0,\\
&(6\varrho + 1)\pi_0 g'_{10} + g'_{30} f_0(6\varrho) = 0,\\
&(6\varrho + 1)\pi_1 g'_{10} + (6\varrho + 2)\pi_0 g'_{11} + g'_{31} f_0(6\varrho + 1)\\
&\qquad\qquad + g'_{30} f_1(6\varrho) = 0,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&g'_{40} = 0, \ g'_{41} = 0, \ldots g'_{4,\nu} = 0,\\
&(10\varrho + 1)\pi_0 g'_{30} + g'_{50} f_0(10\varrho) = 0,\\
&(10\varrho + 1)\pi_1 g'_{30} + (10\varrho + 2)\pi_0 g'_{31} + g'_{51} f_0(10\varrho + 1)\\
&\qquad\qquad + g'_{50} f_1(10\varrho) = 0 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (25d) kann daher in der Form

$$C_0 + Cy + C_1 y_1 \tag{25g}$$

aufgestellt werden, wo y durch (25e), y_1 durch (25f) definiert sind und wo C_0, C und C_1 Integrationskonstante bedeuten.

§ 6. Der Einfluss des unendlich fernen Punktes der Z-Ebene.

Der unendlich ferne Punkt der Z-Axe soll kein singulärer Punkt der Abbildung sein; z muß sich also in der Umgebung desselben in der Form

$$z = c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_1}{Z^2} + \cdots$$

entwickeln lassen. Für den konjugiert-imaginären Wert gilt dann die Entwicklung

$$z_1 = c_0' + \frac{c_1'}{Z_1} + \frac{c_2'}{Z_1^2} + \cdots,$$

wo c_i' zu c_i konjugiert sein soll. Auf dem Rande, zu dem der Punkt $Z = \infty$ gehört, ist $Z = Z_1 = X$, folglich:

$$z_1'' z' - z_1' z'' = \frac{c_1 c_2' - c_2 c_1'}{X^6} + \cdots = \frac{1}{X^6}(b_0 + b_1 X^{-1} + b_2 X^{-2} + \cdots)$$

und somit gilt im Unendlichen die Entwicklung:

$$\frac{z_1''' z' - z''' z_1'}{z_1'' z' - z'' z_1'} = \frac{V'}{V} = -\frac{6}{X}(1 + b_1 X^{-1} + b_2 X^{-2} + \cdots), \tag{26}$$

wo mit b_1, b_2, ... Konstante bezeichnet sind, und zwar auch (nach dem Prinzip der Fortsetzung), wenn jetzt X durch den allgemeinen Wert Z ersetzt wird.

Um den Einfluß des Punktes $Z = \infty$ auf die Differentialgleichung (25) zu beurteilen, transformieren wir die letztere mittelst der Substitution

$$Z = T^{-1}. \tag{27}$$

Führt man zunächst statt V eine andere Funktion R mittelst der Gleichung

$$(28)\qquad \frac{V'}{V} = -\frac{3}{2}\frac{R'}{R}, \quad V = C' \cdot R^{-\frac{3}{2}}$$

ein, wo C' eine Konstante bedeutet, so nimmt die Differentialgleichung die einfachere Gestalt an:

$$(29)\qquad z''' + \frac{3}{2}\frac{R'}{R}z'' + \left(\frac{1}{2}\frac{R''}{R} + \frac{C}{R}\right)z' = 0,$$

die für einige Beispiele (unten § 10) zur Anwendung kommt; und infolge der Substitution (27) geht sie über in:

$$(30)\qquad \frac{d^3 z}{dT^3} + \left(6T - \frac{3}{2}\frac{R'}{R}\right)\frac{1}{T^2}\frac{d^2 z}{dT^2} + \left(6T^2 - 3\frac{R'}{R}T + \frac{1}{2}\frac{R''}{R} + \frac{C}{R}\right)\frac{1}{T^4}\frac{dz}{dT} = 0.$$

Zufolge (26) und (28) ist

$$\frac{3}{2}\frac{R'}{R} = 6T + 6b_1 T^2 + 6b_2 T^3 + \cdots, \quad \frac{R'}{R} = 4T + \cdots$$

Es ist ferner:

$$\frac{R''}{R} = \frac{d}{dZ}\left(\frac{R'}{R}\right) + \left(\frac{R'}{R}\right) = -\frac{4}{Z^2} - 8b_1\frac{1}{Z^3} - 12b_2\frac{1}{Z^4}\cdots + (4T + \cdots)^2$$

folglich:

$$6T^2 - 3\frac{R'}{R}T + \frac{1}{2}\frac{R''}{R} = T^2(6 - 12 - 2 + 8) + T^3(16 - 4)b_1 + \cdots$$

Es wird daher in der Gleichung (30) weder der Faktor von $\frac{d^2 z}{dT^2}$ noch der Faktor von $\frac{dz}{dT}$ an der Stelle $T = 0$ unendlich groß; die Funktion z verhält sich demnach an der Stelle $T = 0$ oder $Z = \infty$ regulär, wie es die Natur des Problems verlangt.

Im Faktor von $\frac{dz}{dT}$ ist allerdings das Glied mit CR^{-1} noch nicht berücksichtigt. Um es näher zu untersuchen, erinnern wir daran, daß zufolge (21), (23) und (26) die Funktion

$$\frac{V'}{V} - \sum_s \frac{\varepsilon_s}{Z - A_s}, \tag{31}$$

wo A_s die den Ecken oder den Brennpunkten der z-Ebene in der Z-Ebene entsprechenden Punkte (bzw. bei den Brennpunkten die konjugierten Punkte) und ε_s die zugehörigen Residuen bezeichnen, im Endlichen nicht unendlich wird, im Unendlichen aber sich verhält wie $-6\,Z^{-1}$. Zur näheren Bestimmung dieser Funktion dienen die folgenden Überlegungen:

Es ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} z' &= -z'_T \cdot T^2 = -\frac{dz}{dT} \cdot T^2, \\ z'' &= z''_T \cdot T^4 + 2\,z'_T \cdot T^3, \end{aligned} \tag{31a}$$

folglich:

$$V = z''_1 z' - z'_1 z'' = -(z''_1 z' - z'_1 z'')_T \cdot T^6, \tag{32}$$

wo der Index T an der Klammer (sowohl hier wie im folgenden) andeuten soll, daß die Differentiationen im Innern der Klammer nach T (statt nach Z) ausgeführt werden sollen. Weiter wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V'}{V}\right)_Z &= -\left(\frac{V'}{V}\right)_T T^2 - 6\,T, \\ \left(\frac{V''}{V}\right)_Z &= \left(\frac{V''}{V}\right)_T T^4 + 14\left(\frac{V'}{V}\right)_T T^3 + 24\,T^2, \end{aligned} \tag{33}$$

und hieraus:

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_Z = \left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_T \cdot T^4. \tag{34}$$

Die linke Seite ist reell auf der X-Axe und hat nur die in § 3 und § 4 besprochenen singulären Stellen. Hat ε_i wieder dieselbe Bedeutung wie in (31), so wird der Ausdruck

$$\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(Z-A_i)^2} - \frac{\beta_i}{Z-A_i}$$

an der Stelle A_i nicht mehr unendlich, wenn die Konstante β_i passend gewählt wird. Soll im Unendlichen kein singulärer Punkt von V liegen, so kann man demnach setzen:

$$\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = -\frac{1}{6}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(Z-A_i)^2} + \sum_i \frac{\beta_i}{Z-A_i} + C, \tag{35}$$

wo β_i und C Konstante bezeichnen. Mittelst der Transformation (27) und der Gleichung (34) ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_T &= -\frac{1}{6}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(T-B_i)^2} + \frac{1}{6}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)A_i}{T-B_i}\\ &-\sum\frac{A_i^2\beta_i}{T-B_i} - \frac{1}{T}\sum\left[\tfrac{1}{3}\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)A_i - A_i^2\beta_i\right]\\ &-\frac{1}{T^2}\sum\left[\tfrac{1}{6}\varepsilon_i(\varepsilon_i+6) - A_i\beta_i\right] + \frac{1}{T^3}\sum\beta_i - \frac{1}{T^4}C, \text{ wo } B_i = \frac{1}{A_i}.\end{aligned} \tag{36}$$

Damit diese Gleichung mit der Gleichung (35) formal übereinstimmt und damit kein singulärer Punkt an der Stelle $T=0$ entsteht, folgt:

$$\begin{aligned} C = 0,\ \sum\beta_i = 0,\ \sum A_i\beta_i &= \tfrac{1}{6}\sum\varepsilon_i(\varepsilon_i+6),\\ \sum A_i^2\beta_i &= \tfrac{1}{3}\sum\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)A_i.\end{aligned} \tag{37}$$

Das Verhalten von V im Unendlichen war durch die Gleichung (26) charakterisiert. Entwickelt man demnach beide Seiten von (35) nach Potenzen von Z^{-1}, so wird der Faktor von Z^{-2}
$$6 - \tfrac{1}{6}\cdot 36 = -\tfrac{1}{6}\sum\varepsilon_i(\varepsilon_i+6) + \sum_i A_i\beta_i;$$
beide Ausdrücke sind gleich Null, so daß die Bedingung (26) von selbst erfüllt ist. Der Faktor von Z^{-1} auf der rechten Seite von (35) ist infolge der zweiten Gleichung (37) gleich Null.

Legt man für eine Ecke des Polygons den entsprechenden Punkt der Z-Ebene (etwa A_1) in den unendlich fernen Punkt, so folgt aus der letzten Relation (37): $\beta_1 = 0$, also:

$$\sum_{i=2}^{N}\beta_i = 0,\ \beta_1 A_1 = 0.\infty = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(\varepsilon_i+6) - \sum_{i=2}^{N}A_i\beta_i, \tag{38}$$

wo N die Anzahl der in Betracht kommenden Punkte A_i bedeutet.

Unter Voraussetzung der Gleichungen (37) haben wir in (35) eine Differentialgleichung zur Bestimmung von V; die weitere Behandlung dieser Differentialgleichung beschäftigt uns in § 7.

§ 7. Eigenschaften der Differentialgleichung (35).

Um die Gleichung (32) identisch zu befriedigen, führen wir mittelst der Gleichungen

$$(39)\qquad V=\left(\frac{dW}{dZ}\right)^3,\quad \frac{V'}{V}=3\,\frac{W''}{W'}$$

eine neue Funktion W von Z ein; es wird dann:

$$\frac{V''}{V}-\frac{2}{3}\left(\frac{V'}{V}\right)^2=3\,\frac{W'''}{W'}=3\,\{W,Z\}+\frac{9}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2,\ \text{oder}$$

$$(40)\qquad \frac{V''}{V}-\frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2=3\,\{W,Z\}=3\left[\frac{W'''}{W'}-\frac{3}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2\right],$$

wo nun auf der rechten Seite der bekannte Schwarzsche Differentialausdruck auftritt, dessen Eigenschaften von Cayley näher entwickelt wurden. Gemäß (35) bestimmt sich diese Funktion W aus der Gleichung:

$$(41)\qquad \{W,Z\}=-\frac{1}{18}\sum_i\frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(Z-A_i)^2}+\frac{1}{3}\sum_i\frac{\beta_i}{Z-A_i},$$

wobei die Konstanten β_i und A_i an die Bedingungen (37) gebunden sind.

Die Einführung der Funktion W läßt den invarianten Charakter der Differentialgleichung (35) gegenüber linearen Transformationen von Z deutlich hervortreten. Die Differentialgleichung wird dann:

$$(42)\qquad \frac{d^3z}{dZ^3}-3\,\frac{W''}{W'}\,\frac{d^2z}{dZ^2}-\left[\{W,Z\}-\tfrac{3}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2+C\,W'^2\right]\frac{dz}{dZ}=0.$$

Die Lösung der Abbildungsaufgabe erfordert also zunächst die Lösung der Differentialgleichung (41) zur Bestimmung von W, sodann die Bestimmung von V aus (35), und endlich die Bestimmung von z aus (25) nach der in § 5 gegebenen Methode.

Ersetzt man Z durch $\alpha T + \beta$, so ändert sich nur die Integrationskonstante C. Es bleibt die Wirkung der Transformation

$$Z = T^{-1}$$

zu untersuchen. Wir erhalten mit Hilfe der Gleichungen (31a) und der Gleichungen

$$\frac{d^3 z}{dZ^3} = -\frac{d^3 z}{dT^3}\cdot T^6 - 6\frac{d^2 z}{dT^2}\cdot T^5 - 6\frac{dz}{dT}T^4,$$

$$W'_Z = -W'_T \cdot T^2, \quad \left(\frac{W''}{W'}\right)_Z = -\left(\frac{W''}{W'}\right)_T \cdot T^2 - 2T,$$

$$\{W, Z\} = \{W, T\}\, T^4$$

in der Tat dieselbe Gleichung (42), wenn nur überall T statt Z geschrieben wird.

Die allgemeine Lösung W der Differentialgleichung (41) wird bekanntlich nach Kummer[1]) als Quotient zweier partikulären Integrale w_1 und w_2 einer linearen Gleichung der Form

$$w'' + pw' + qw = 0$$

gefunden, wobei $2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dZ}$ gleich der rechten Seite von (41) ist, also eine der beiden Funktionen p und q willkürlich bleibt. Beschreibt nun Z einen geschlossenen Weg um einen der singulären Punkte, so verwandelt sich W in eine lineare Funktion von W. Ersetzt man W durch $\alpha W + \beta$, wo α und β Konstante bedeuten, so bleibt die Gleichung (41) offenbar ungeändert; nur an Stelle der Konstanten C tritt eine andere Konstante. Es bleibt die Transformation

$$W = \Omega^{-1}$$

[1]) Programm des Gymnasiums Liegnitz, 1834, abgedruckt in Crelles Journal, Bd. 100.

zu untersuchen. Dann geht (42), indem z sich in ζ verwandelt, über in:

$$\begin{aligned}\frac{d^3\zeta}{dZ^3} - 3\left(\frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\frac{\Omega'}{\Omega}\right)\frac{d^2\zeta}{dZ^2} - \Bigg[\{\Omega, Z\} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 \\ + C\left(\frac{\Omega'}{\Omega^2}\right)^2\Bigg]\frac{d\zeta}{dZ} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Die Lösung ζ dieser Gleichung muß dann eine algebraische Funktion der Lösung z von (42) sein, wie die folgenden Betrachtungen zeigen.

§ 8. Die Fortsetzung der Abbildungsfunktion.

Wenn nämlich der Punkt z das Innere des Polygons verläßt und den begrenzenden Kegelschnitt K_1, der durch die Gleichung

$$f_1(z, z_1) = 0 \tag{44}$$

gegeben sei, überschreitet, so überschreitet der entsprechende Punkt Z die zu K_1 entsprechende Strecke L_1 der X-Axe und tritt in die untere Halbebene über. Enthält das gegebene Polygon keinen Brennpunkt des Kegelschnitts (44), so entspricht der unteren Halbebene ein Polygon, das von algebraischen Kurven begrenzt wird und sich an das gegebene Polygon längs des Kegelschnittes K_1 anlegt. Die Zahl seiner Ecken ist gleich der Zahl der Ecken des gegebenen Polygons, und die Winkel in diesen Ecken sind gleich den entsprechenden Winkeln des ursprünglichen Polygons.

Enthält aber das gegebene Polygon einen Brennpunkt des Kegelschnittes (44), so entspricht der Halbebene $Y < 0$ als „Spiegelbild" des gegebenen Bereiches längs des Kegelschnittes (44) ein Polygon, das sich durch zwei Blätter der zu (44) gehörigen Riemannschen Fläche (welche entsteht, wenn z_1 als Funktion von z aufgefaßt wird) erstreckt und sich erst nach zweimaligem Umgange schließt; die Zahl der Seiten und Ecken dieses Spiegelbildes ist doppelt so groß, als die entsprechende Zahl bei dem gegebenen Polygon.

Enthält endlich das gegebene Polygon die beiden Brennpunkte des Kegelschnittes (44), so ist das Innere desselben als aus zwei Blättern bestehend aufzufassen, auf denen zwei getrennte Polygone, die übereinander liegen und vollkommen kongruent sind, die Begrenzung bilden, so daß das Innere als zweifach zusammenhängend zu gelten hat. Ihm entspricht bei der „Spiegelung“ am Kegelschnitte (44) ein ringförmiger Bereich, der nach innen und außen je von einem Polygon algebraischer Kurven begrenzt wird und in dessen Inneren zwei Punkte liegen, die den beiden Brennpunkten (Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche) entsprechen. So geht z. B., wenn es sich um die Abbildung des Innern einer einzigen Ellipse handelt, dieses zweiblättrig gedachte Innere in einen Ring über, der sich um die gegebene Ellipse herumlegt und nach außen durch eine konfokale Ellipse begrenzt wird[1]).

Die besprochene Spiegelung an dem Kegelschnitte (44) wird durch die Gleichung

$$f_1(x+iy,\ \xi-i\eta)=0 \tag{45}$$

vermittelt, vermöge welcher jedem Punkte x, y des Polygon-Innern ein Punkt ξ, η des Spiegelbildes entspricht. Die einem andern begrenzenden Kegelschnitte

$$f_i(z, z_1)=0 \quad \text{oder} \quad \varphi_i(x, y)=0$$

entsprechende Kurve des Spiegelbildes ergibt sich durch Elimination von x und y aus der Gleichung $\varphi_i(x, y)=0$ und den beiden Gleichungen, in welche (45) sich auflöst, wenn man den reellen und den imaginären Teil der linken Seite für sich gleich Null setzt.

Der Kegelschnitt $f_1=0$ möge durch die Ecke a_1 von dem Kegelschnitt $f_2=0$ getrennt werden. Der Ecke a_1 entspreche der Punkt A_1 der X-Axe, der Kurve $f_2=0$ eine Strecke L_2 dieser Axe. Bei der Spiegelung am Kegelschnitt $f_1=0$ möge $f_2=0$ in eine Kurve $\psi_2=0$ übergehen. Überschreitet nun der Punkt z diese Kurve $\psi_2=0$, so überschreitet

[1]) Vgl. meine frühere Arbeit in Bd. 26 dieser Sitzungsberichte, 1896.

der entsprechende Punkt Z die Strecke L_2 und tritt dabei aus der Halbebene $Y < 0$ wieder in die obere Halbene $Y > 0$ ein. Letzterer entspricht jetzt in der z-Ebene ein Polygon, das aus dem Spiegelbilde des zuerst gegebenen Polygons (das aus ihm durch Spiegelung an $f_1 = 0$ entstanden war) durch weitere Spiegelung an der Kurve $\psi_2 = 0$ hervorgeht. Jedem Punkte z im Innern des gegebenen Polygons entspricht so zunächst ein Punkt $\xi - i\eta$ vermöge (45) im ersten Spiegelbilde und diesem ein Punkt $\xi = \xi' + i\eta'$ im zweiten Spiegelbilde vermöge der Gleichung

$$\psi_2(\xi' + i\eta', \ \xi - i\eta) = 0,$$

die für $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$ die Kurve $\psi_2 = 0$ darstellt. Die Funktion ζ ist also eine algebraische Funktion von z und muß der Differentialgleichung (43) genügen, wenn bei dem Umgange von Z um den Punkt A_1 aus W die Funktion Ω entstanden ist. So ergeben sich algebraische Beziehungen zwischen den Lösungen ζ und z zweier Differentialgleichungen, die zunächst durch transzendente Relationen verknüpft sind.

Das zweite Spiegelbild hat wegen der Konformität der Beziehungen an den Ecken dieselben Winkel wie das zuerst gegebene Polygon. Die Koeffizienten von $\frac{d^2\zeta}{dZ^2}$ und $\frac{d\zeta}{dZ}$ in (43) müssen daher sich in der Nähe des Punktes A_1 ebenso verhalten wie die Koeffizienten der von z befriedigten Differentialgleichung (42). In der Tat ist, wenn $\Omega = W^{-1}$ gesetzt wird:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\varepsilon_1}{Z - A_1} + \cdots = 3\,\frac{W''}{W'} = \frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\,\frac{\Omega'}{\Omega},$$

also:

$$W' = (Z - A)^{\eta}(\cdots), \quad \text{wo } \eta = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\Omega = (Z - A)^{-\eta - 1}(\cdots), \quad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{-\eta + 1}{Z - A} + \cdots,$$

$$\frac{\Omega''}{\Omega'} = \frac{-\eta - 2}{Z - A} + \cdots, \quad \frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\,\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\eta}{Z - A} + \cdots$$

und bekanntlich $\{W, Z\} = \{\Omega, Z\}$. Bei einem vollständigen Umgange von Z um mehrere singuläre Punkte A_i wird also im allgemeinen W ersetzt durch eine lineare Funktion von W von der Form $\frac{\alpha W + \beta}{W}$, denn obige Betrachtung würde gestört werden, wenn auch noch $\Omega +$ konst. an Stelle von Ω gesetzt wird.

Für einen Umgang des Punktes Z um einen einzelnen singulären Punkt A kommt ferner die Bemerkung am Schlusse von § 5 in Betracht (S. 470).

§ 9. Die Kreisbogen-Polygone.

Es bleibt zu untersuchen, wie sich die Schwarzsche Abbildung der Kreisbogenpolygone in die vorstehenden Untersuchungen einordnet. Dazu dienen die obigen Gleichungen (7) und (8). Wir setzen wieder

$$z = x + iy,\quad z_1 = x - iy,\quad 2x = z + z_1,\quad 2iy = z - z_1;$$

dann wird:

$$t = \frac{dy}{dx} = i\,\frac{dz - dz_1}{dz + dz_1},\quad 1 + t^2 = \frac{4\,dz\,dz_1}{(dz + dz_1)^2},$$

$$a = \frac{d^2y}{dx^2} = 8\,\frac{d^2z_1(dz)^2 + d^2z(dz_1)^2 - dz\,dz_1(d^2z + d^2z_1)}{(dz + dz_1)^4}.$$

Durch Einführung der oben mit U und V bezeichneten Ausdrücke mittels der Gleichungen (9) und (12) wird der durch (7) definierte Differentialausdruck K:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{x'^7}\left[(U'x' - 3Ux'')(x'^2 + y'^2) - 3U^2y'\right] \\ &= \frac{i}{4x'^7}\left[V'(z' + z_1')z'z_1' - 3V(z'' + z_1'')z'z_1' - \tfrac{3}{2}V^2(z' - z_1')\right]. \end{aligned}$$

Nun ist identisch:

$$\begin{aligned} 2(z'' + z_1'')z'z_1' + V(z' - z_1') &= 2(z'' + z'')z'z_1' + (z_1''z' - z_1'z'')(z' - z_1') \\ &= (z_1''z' + z''z_1')(z' + z_1'), \end{aligned}$$

und folglich:

$$4x'^7 \cdot K = i(z' + z_1')\left[z_1''' z' - z''' z_1' - \tfrac{3}{2}(z_1''^2 z'^2 - z''^2 z_1'^2)\right]$$

(46) $$= i(z' + z_1') z'^2 z_1'^2 \left[\{z_1, X\} - \{z, X\}\right],$$

wenn man den Schwarzschen Ausdruck

$$\{z, X\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2, \quad \text{wo } z' = \frac{dz}{dX} \text{ etc.}$$

in üblicher Weise einführt. Ferner ist bekanntlich nach Cayley:

$$\{z_1, X\} - \{z, X\} = \{z_1, z\}\left(\frac{dz}{dX}\right)^2,$$

$$2x'^6 \cdot K = i z'^4 z_1'^2 \{z_1, z\}.$$

In Variabeln z, z_1 erhalten wir so die Differentialgleichung aller Kreise in der bekannten Form $\{z_1, z\} = 0$. Dieser Ausdruck für K ist in (8) einzuführen. In Rücksicht auf die Relationen

$$K_x' = \frac{K_X'}{x'}, \quad 3ad - 13bc = P_x' - 6bc, \quad K_x'' = \frac{K_X''}{x'^2} - \frac{K_X' \cdot x''}{x'^3}$$

kann dies mit Hilfe der Gleichungen (10a) und (11) leicht geschehen. Es ist indessen nicht notwendig, hier näher darauf einzugehen; es genügt, darauf hinzuweisen, daß die Differentialgleichung $L = 0$ der Kurven zweiter Ordnung infolge der Gleichung (46) sich in der Form

$$\Psi \cdot (3ad - 13bc) \cdot x'^3 + 13\,\Psi_X' \cdot x'^2 \cdot b^2 - 3(\Psi_X'' \cdot x' - x'' \Psi_X')ab = 0$$

schreiben läßt, wo

$$\Psi = \frac{z'^2 z_1'^2}{2x'^6}\left[\{z_1, X\} - \{z, X\}\right], \quad 2x' = z' + z_1', \quad 2x'' = z'' + z_1''.$$

Da für jeden Punkt des Kreises Ψ, Ψ_X', Ψ_X'' identisch Null sind, so geht hieraus hervor, daß die Gleichung $L = 0$ für ein Kreispolygon ihre Bedeutung für Lösung des Abbildungsproblems verliert. Die Kreisbogenpolygone nehmen daher eine Ausnahmestellung ein; für sie führt eine besondere Untersuchung des Differentialausdrucks $\{z, X\}$ nach Schwarz zum Ziele.

§ 10. Beispiele.

1. Eine einzelne Ellipse. Für eine solche kann man von dem Ansatze[1])

$$(47)\qquad \frac{z'}{\sqrt{(z-p)(z-q)}} = C\,\frac{1}{\sqrt{(Z-A)(Z-B)(Z-A_1)(Z-B_1)}}$$

ausgehen, oder

$$z' = C\sqrt{\frac{T}{R}},\quad \text{wo}\quad T = (z-p)(z-q),$$
$$R = (Z-A)(Z-B)(Z-A_1)(Z-B_1);$$

dabei sind A, B die Punkte, welche den Brennpunkten p, q der Ellipse in der Halbebene $Y > 0$ entsprechen, und A_1, B_1 sind die konjugierten Punkte der unteren Halbebene. Es wird dann

$$z'' = -\tfrac{1}{2}C\frac{\sqrt{T}}{R^{3/2}}\cdot R' + \tfrac{1}{2}C\frac{1}{\sqrt{RT}}\cdot T'\cdot z',\quad \text{wo}\quad T' = \frac{dT}{dz},$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{R'}{R}z' + \frac{C^2}{2}\frac{T'}{R},$$
$$z''' = -\frac{1}{2}\frac{R'}{R}z'' - \tfrac{1}{2}z'\left(\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2}\right) + \frac{C^2}{2}\frac{T''}{R}z' - \frac{C^2}{2}\frac{T'}{R^2}R',$$
$$= -\frac{3}{2}\frac{R'}{R}z'' - \left(\frac{1}{2}\frac{R''}{R} + \frac{C^2}{R}\right)z',\quad \text{da}\quad T'' = 2.$$

Der Differentialquotient z'_X genügt also in der Tat einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung der verlangten Form, wie sie in (29) aufgestellt wurde. Die Koeffizienten sind in diesem Falle rationale Funktionen von Z.

2. Das Polygon wird durch Bögen konfokaler Ellipsen und Hyperbeln begrenzt. Nach den früher von mir gegebenen Resultaten[2]) wird die Aufgabe auf eine Gleichung der Form

---

[1]) Vgl. meine früheren Arbeiten, insbesondere Bd. 26 dieser Sitzungsberichte, S. 401 ff., 1896.

[2]) Vgl. diese Sitzungsberichte, Bd. 25, S. 219 ff., 1895.

(48) $$\frac{z'}{\sqrt{z^2 - e^2}} = \sqrt{R(Z)}$$

zurückgeführt, wo $x = e$ und $x = -e$ die Brennpunkte des konfokalen Systems bezeichnen und R eine rationale Funktion von Z ist. Letztere verschwindet an den Stellen der X-Axe, welche Ecken des Polygons mit dem Winkel $\frac{3}{2}\pi$ entsprechen, und wird unendlich an den Stellen, welche Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ zugehören, außerdem in den Stellen der X-Axe, welche den Brennpunkten entsprechen, falls diese als Ecken auftreten. Die Elimination von e^2 geschieht ebenso wie bei der Gleichung (47). Es wird, wenn $T = z^2 - e^2$ gesetzt wird:

$$z' = \sqrt{TR}, \quad z'' = \frac{1}{2}\frac{R'}{R} z' + \tfrac{1}{2} T' R,$$

$$z''' = \frac{1}{2}\frac{R'}{R} z'' + \tfrac{1}{2} z'\left(\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2}\right) + R z' + \tfrac{1}{2} T' R'$$

$$= \frac{3}{2}\frac{R'}{R} z'' + z'\left[\frac{1}{2}\frac{R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + R\right].$$

Es ergibt sich also in der Tat wieder eine Differentialgleichung der verlangten Form (29). Die oben mit R bezeichnete Funktion ist jetzt mit R^{-1} bezeichnet.

3. Es soll die halbe Ellipse, welche den einen Brennpunkt $z = +e$ enthält, auf die Halbebene abgebildet werden. Hier sind zwei Ecken mit den Winkeln $\lambda_1 \pi = \lambda_2 \pi = \frac{\pi}{2}$ vorhanden; ihnen mögen die Punkte $X = A$ und $X = B$ entsprechen. Ferner möge dem Brennpunkte der Punkt $Z = C + iD$ zugehören; dann ist zunächst W aus der Gleichung (41), d. i. der Gleichung

$$\{W, Z\} = \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-A)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-B)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-C-iD)^2}$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-C+iD)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\beta_1}{Z-A} + \frac{\beta_2}{Z-B} + \frac{\beta_3}{Z-C-iD}\right.$$
$$\left.+ \frac{\beta_4}{Z-C+iD}\right)$$

zu bestimmen; denn hier ist $\varepsilon = 3\lambda - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$ für die Punkte A und B, und nach (25c) hat ε für die Punkte $C \pm iD$ hier zufällig denselben Wert $-\frac{3}{2}$; β_4 ist konjugiert imaginär zu β_3. Nach (37) ist dabei:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0,\ \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3(C + iD) + \beta_4(C - iD) = -\tfrac{9}{2},$$

$$\beta_1 A^2 + \beta_2 B^2 + \beta_3(C + iD)^2 + \beta_4(C - iD)^2 = -9(A + B + 2C).$$

Nimmt man insbesondere $A = \infty$, $B = 0$, $C = 0$, $\beta_3 - \beta_4 = -\gamma i$, wo γ reell ist, so wird nach (38):

$$\{W, Z\} = \frac{3}{8}\frac{1}{Z^2} + \frac{3}{4}\frac{Z^2 - D^2}{(Z^2 + D^2)^2} + \frac{1}{3}\frac{\beta^2 D^2 + \gamma Z}{Z(Z^2 + D^2)}.$$

Die Konstanten D und γ bestimmen sich durch die halbe große Axe und die Exzentrizität der Ellipse. Die Lösung geschieht durch den Quotienten zweier Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei singulären Punkten.

Die Spiegelung an der kleinen Axe der Ellipse, die das Flächenstück begrenzt, ergibt die andere Hälfte der gegebenen Ellipse. Eine Spiegelung an letzterer selbst verwandelt das Flächenstück in einen Halbring, begrenzt von der gegebenen Halbellipse, einer dazu konfokalen Halbellipse und zwei Strecken der begrenzenden Axe, auf der das Spiegelbild 4 Ecken mit Winkeln von je 90^0 hat; und so geht dies weiter.

4. Das abzubildende Flächenstück wird begrenzt von zwei Ellipsen mit gemeinsamem Mittelpunkte und gemeinsamen Axen, die sich auf der kleinen Axe berühren. Liegen beide Brennpunkte im Innern der kleineren Ellipse, also keiner im Innern des Flächenstückes, so lautet die Differentialgleichung (41) (indem $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -3$ zu nehmen ist und $\beta_i = 3\beta_i'$ gesetzt ist):

$$\{W, Z\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(Z - A)^2} + \frac{1}{(Z - B)^2}\right\} + \frac{\beta_1'}{Z - A} + \frac{\beta_2'}{Z - B}$$

mit den Bedingungen

$$\beta_1' + \beta_2' = 0,\ \beta_1' A + \beta_2' B = -1,\ \beta_1' A^2 + \beta_2' B^2 = -(A + B)$$

oder, wenn $A = \infty$, $B = 0$ genommen wird:

$$\{W, Z\} = \frac{1}{2} \frac{1}{Z^2}.$$

Das allgemeine Integral ist eine lineare Funktion von $\log Z$:

$$W = \frac{\alpha + \beta \lg Z}{\gamma + \delta \lg Z},$$

also:

$$W' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma + \delta \lg Z)^2} \cdot \frac{1}{Z}, \quad \frac{W''}{W'} = \frac{-2}{\gamma + \delta \lg Z} \cdot \frac{\delta}{Z} - \frac{1}{Z}.$$

Diese Werte sind in die Differentialgleichung (42) einzusetzen. Das Auftreten der Logarithmen, das durch die Winkel von der Größe Null bedingt ist, wird im folgenden noch näher besprochen.

§ 11. Ecken des Polygons mit dem Winkel Null.

Im letzten Beispiel haben wir das Auftreten einer Polygonecke mit dem Winkel $\lambda = 0$ als Grenzfall einer Ecke mit $\lambda > 0$ behandelt. Eine direkte Ableitung der betreffenden Formeln kann in folgender Weise geschehen. Wir denken uns eine Transformation

$$z = F(\zeta)$$

gegeben, durch welche der eine der beiden sich berührenden Kegelschnitte in eine gerade Linie, der andere in einen diese Linie berührenden Kreis übergeführt wird. Der Berührungspunkt liege an der Stelle $\zeta = 0$, und die gerade Linie sei die reelle Axe der ζ-Ebene. Durch die Formel[1])

$$\zeta = (a + b \lg Z)^{-1}, \tag{49}$$

wo a und b reell sind, werden dann der Kreis und die Gerade auf die Z-Ebene derartig abgebildet, daß den beiden Kurven die reelle Axe der Z-Ebene entspricht und daß einem halben

[1]) Vgl. Schwarz, Crelles Journal, Bd. 75; gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 228 ff.

Umgange um den Punkt $Z = 0$ (wobei $\lg X$ um πi wächst) in der ζ-Ebene ein Übergang von der geraden Linie zu dem berührenden Kreise entspricht. Der geraden Linie entspreche der durch die Gleichung (14 a), d. i.

$$z = \frac{a_1 t + a_2 t^2}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}$$

dargestellte Kegelschnitt. Aus ihr ergibt sich t als Funktion von z, die in der Umgebung von $z = 0$ eindeutig ist; und es sei wieder:

$$t = \varphi(z) = f(\zeta),$$

also auch an Stelle von (16):

$$t = f(\zeta) = f((a + b \log X)^{-1}) = \psi(X).$$

In Gleichung (17) ist jetzt auf der rechten Seite

$$\zeta_1' = \frac{-b}{(a + b \lg X)^2} \cdot \frac{1}{X}, \quad \frac{\zeta_1''}{\zeta_1'} = \frac{-2b}{(a + b \lg X)} \cdot \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2},$$

und somit wieder reell; in Gleichung (17 c) dagegen wird:

$$\frac{\zeta_2''}{\zeta_2'} = \frac{2b}{a + b \lg R + b\pi i} \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2},$$

wenn R den absoluten Wert von X bezeichnet, und dieser Ausdruck ist nicht reell, so daß die an die Gleichung (17), (17 c) und (18) geknüpften Überlegungen nicht mehr anwendbar sind. Um wieder einen Ausdruck zu erhalten, der auf beiden Kegelschnitten rational von X abhängt und reell ist, bilden wir

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_1 = \psi_1'(X)^2 \left[\frac{U''}{U} - \frac{7}{6}\left(\frac{U'}{U}\right)^2\right]_t - \psi_1''(X)\left(\frac{U'}{U}\right)_t$$
(50)
$$+ 3\{\psi_1, X\},$$

wenn wieder $\{\psi, X\}$ den schon oben in (40) eingeführten Differentialausdruck bezeichnet, und auf dem zweiten Kegelschnitte:

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_2 = \psi_2'(X)^2 \left[\frac{U''}{U} - \frac{7}{6}\left(\frac{U'}{U}\right)^2\right]_r - \psi_2''(X)\left(\frac{U'}{U}\right)_r$$
(50 a)
$$+ 3\{\psi_2, X\},$$

wenn sich der Index 1 auf die erste, der Index 2 auf die zweite Kurve bezieht. Hierin ist nach der bekannten Cayleyschen Formel

$$\{\psi_1, X\} = \{f_1, \zeta_1\}\left(\frac{d\zeta_1}{dX}\right)^2 + \{\zeta_1, X\},$$

$$\{\psi_2, X\} = \{f_2, \zeta_2\}\left(\frac{d\zeta_2}{dX}\right)^2 + \{\zeta_2, X\},$$

wenn f_1 und f_2 analog zu f in (16) definiert sind, und weiter

$$\{\zeta_1, X\} = \{\zeta_2, X\} = \frac{1}{2}\frac{1}{X^2},$$

also reell auf beiden Kurven. Infolgedessen können auf die übrigen Glieder der rechten Seite von (50) und (50a) die früheren Schlüsse (Entwicklung nach Potenzen von ζ_1 bzw. ζ_2) angewandt werden, aus denen gefolgert wurde, daß alle Koeffizienten der Entwicklungen verschwinden müssen.

Hier handelt es sich um Entwicklungen nach Potenzen von $(a + b \lg X)^{-1}$ und von $(a + b\pi i + b \lg X)^{-1}$.

Da aber die Abbildung (49) nicht das Flächenstück, auf welches sich die Abbildung $z = F(\zeta)$ bezog, sondern nur einen Teil desselben auf die Halbebene $Y > 0$ konform überträgt, indem die Gleichung (49) sich auf eine durch zwei sich berührende Kreise gebildete Sichel bezieht, so hat man allgemeiner statt (49) zu setzen:

$$\zeta^{-1} = (a + b \lg Z)(a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \cdots)$$

und dann ergibt sich, daß die Funktion

$$\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{Z^2} - \frac{\gamma}{Z}$$

an der Stelle $Z = 0$ nicht mehr singulär ist. Auch wenn die begrenzenden Kegelschnitte sich in den Polygonecken berühren, geschieht daher die Bestimmung von V durch eine Differentialgleichung der Form (36) oder mittels der Funktion W durch eine Gleichung der Form (41).

Zusatz zu Seite 216 f. dieses Bandes.

„Das Verhalten der Funktionen V_{31}' und V_{21}' im Unendlichen bedarf noch der näheren Untersuchung; vgl. darüber oben S. 471 ff.“