Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Optisches Drehungsvermögen und Schraubungsaxen regulärer Kristalle.

Von **A. Johnsen** in Kiel.

Vorgelegt von P. v. Groth in der Sitzung am 4. Mai 1918.

I. Entwicklung des Problems.

Die Schraubungsaxen wurden durch L. Sohncke[1]) in die Theorie der Kristallstruktur eingeführt. Die durch solche Axen ausgezeichneten Punktsysteme lassen sich auf zwei Gruppen verteilen. Entweder verläuft parallel jeder Axenschar eine gleichwertige mit entgegengesetztem Windungssinn oder nicht. Im letzteren Falle liegen Punktsysteme vor, die mit ihrem Spiegelbilde nicht kongruent sind und daher Kristallen entsprechen, die keinerlei Spiegelungen oder Drehspiegelungen besitzen; auf derartige Kristalle aber ist erfahrungsgemäß die optische Aktivität beschränkt. Daher hat L. Sohncke[2]) in jenen Schraubungsaxen eine Ursache des Drehungsvermögens aktiver Kristallarten erblickt und diesen den Besitz solcher Axen zugeschrieben; in der Tat konnte er durch Rechnung auf Grund Mallardscher[3]) Ansätze sowie durch Experiment zeigen, daß bestimmte hexagonale, rhomboedische und tetragonale Strukturen ein Drehungsvermögen in Richtung der optischen Axe aufweisen müssen.

Innerhalb des kubischen Kristallsystems sind erfahrungsmäßig tetartoedrische und vermutlich auch plagiedrische Kristallarten einer optischen Aktivität fähig; hier bewies Sohncke, daß gewisse tetartoedrische Strukturen ein Drehungsvermögen

1) L. Sohncke, Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879.

2) L. Sohncke, Zeitschr. f. Krist. 19. 541. 1891.

3) E. Mallard, Traité de cristallographie 2. 262. 1884.

in Richtung ihrer drei zweizähligen Schraubungsaxen ergeben. Die in der Literatur verbreitete Angabe, jener Physiker habe Drehungsvermögen nur für die genannten drei Richtungen nachweisen können, ist mißverständlich. Die Sache liegt nämlich so, daß Sohncke seine Untersuchung lediglich für jene drei Richtungen ausgeführt und ausdrücklich als unvollständig bezeichnet hat. Insonderheit ist bei Sohncke nicht die Rede von den vier dreizähligen Schraubungsaxen der tetartoedrischen Strukturen sowie von den plagiedrischen Aggregatzuständen, in denen außer drei vierzähligen und vier dreizähligen noch sechs zweizählige Schraubungsaxen auftreten.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß man für alle Richtungen eines regulär-tetartoedrischen oder -plagiedrischen Kristalles ein und dasselbe Drehungsvermögen erhält, wenn man eine sehr einfache Voraussetzung macht. Hierzu muß zunächst ein mathematischer Satz mitgeteilt sein, der anscheinend neu ist.

II. „Verallgemeinerter Kosinusquadratsatz."

Die fünf Platonischen Körper (Würfel, Oktaeder, Tetraeder, Ikosaeder und Pentagondodekaeder) unterliegen folgendem Gesetz. Umfaßt irgend eine Symmetrieaxenart n gleichwertige, also durch die Symmetrieoperationen des Polyeders ineinander übergehende Axen und bilden diese mit einer beliebigen Richtung R die n Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, so gilt

$$\sum_{r=1}^{n} \cos^2 \varphi_r = C, \tag{1}$$

wo C eine rationale Konstante darstellt; die Summe der n Kosinusquadrate ist also unabhängig von der Richtung R, was eine Verallgemeinerung des für rechtwinklige Koordinatensysteme bekannten Kosinusquadratsatzes bedeutet.[1])

III. Der skalare Charakter des Drehungsvermögens regulärer Kristalle.

Nehmen wir an, daß die optische Drehung regulärer Kristalle von den Schraubungsaxen ausgeht, so wird die von einer solchen

[1]) Ob (1) auch für gewisse andere Polyeder gilt, bleibt zu unter-

Axe A verursachte Drehung α_φ einer Richtung R um so geringer sein, je mehr sich der Winkel φ zwischen A und dem Lichtstrahl R dem Werte $\frac{\pi}{2}$ nähert, so daß α_φ ein Maximum α für $\varphi = 0$ und gleich Null für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird; wir setzen die Drehung α_φ einer variablen Richtung R gleich dem Produkt aus α und einer jenen Bedingungen genügenden Funktion $f(\varphi)$ des Winkels φ, also

$$\alpha_\varphi = \alpha \cdot f(\varphi). \tag{2}$$

Nun sind aber n untereinander gleichwertige Schraubungsaxen A und somit n Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ vorhanden, so daß man für die Gesamtdrehung der Polarisationsebene des Strahles R erhält

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{\varphi_r} = \alpha \sum_{r=1}^{n} f(\varphi_r). \tag{3}$$

Überdies haben wir im allgemeinsten Fall mehrere Arten von Schraubungsaxen, nämlich drei vierzählige Axen A_w, vier dreizählige Axen A_o und sechs zweizählige Axen A_d, deren jede in ihrer eigenen Richtung die Drehung α_w bzw. α_o bzw. α_d verursacht. Daher geht (3) in folgendes Gleichungstripel über

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{r=1}^{3} \alpha_{\varphi_r} &= \alpha_w \sum_{r=1}^{3} f(\varphi_r) \\ \sum_{r=1}^{4} \alpha_{\varphi_r} &= \alpha_o \sum_{r=1}^{4} f(\varphi_r) \\ \sum_{r=1}^{6} \alpha_{\varphi_r} &= \alpha_d \sum_{r=1}^{6} f(\varphi_r). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Den oben an die Funktion $f(\varphi)$ gestellten Bedingungen wird offenbar genügt, wenn man annimmt

$$f(\varphi_r) = \cos^2 \varphi_r. \tag{5}$$

Setzt man demnach $\cos^2 \varphi_r$ rechtsseitig in (4) ein, so ergibt sich in Übereinstimmung mit (1)

---

suchen. Übrigens fand Herr O. Toeplitz (Kiel), nachdem ihm dieser Satz mitgeteilt war, zwischen C und n die Beziehung $C = \frac{n}{3}$.

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{3} a_{\varphi_r} = a_w \\ \sum\limits_{r=1}^{4} a_{\varphi_r} = {}^4/_3\, a_o \\ \sum\limits_{r=1}^{6} a_{\varphi_r} = 2\, a_d. \end{cases}$$

Die Konstante C von (1) wird hier also gleich 1 bzw. $^4/_3$ bzw. 2.

Die rechten Seiten von (6) sind frei von φ. Folglich ist der Drehungswinkel aktiver regulärer Kristalle unabhängig von der Richtung des Strahles, einerlei, welche und wieviele der verschiedenen Arten von Schraubungsaxen optisch wirksam sind. Dieses Ergebnis folgt aus dem mathematischen Satze (1) und aus der Annahme, daß gemäß (5) die optische Drehung, welche von irgend einer Schraubungsaxe A auf eine beliebige Strahlrichtung R entfällt, proportional dem Quadrate des Kosinus von $\widehat{AR}$ ist. Wieweit diese Voraussetzung (5) physikalisch berechtigt erscheint, müssen künftige Untersuchungen zeigen.[1])

Kiel, den 1. März 1918.

---

[1]) **Anm. während des Druckes.** Herr Seb. Finsterwalder (München) machte mich gütigst auf folgendes aufmerksam. Aus $\Sigma \cos^2 \varphi$ = constans ergibt sich, daß auch $\Sigma \sin^2 \varphi$ konstant ist. Nun stellt aber $\Sigma \sin^2 \varphi$ das Trägheitsmoment punktförmiger Masseneinheiten, die auf einer Kugel vom Radius Eins liegen, in bezug auf einen beliebigen Kugeldurchmesser dar, welcher mit den nach jenen Massenpunkten verlaufenden Radien die Winkel φ bildet. Liegen nun diese Massenpunkte so wie die Berührungspunkte eines eingeschriebenen oder umgeschriebenen regelmäßigen (Platonischen) oder halbregelmäßigen (Archimedischen) Polyeders, so degeneriert das in bezug auf das Kugelzentrum gebildete Trägheitsellipsoïd zu einer Kugel, d. h. das Trägheitsmoment ist dann unabhängig von der Richtung des als Trägheitsaxe betrachteten Kugeldurchmessers und es wird $\Sigma \sin^2 \varphi$ = constans. Mithin gilt auch unser Satz $\Sigma \cos^2 \varphi$ = constans ebenso für die halbregelmäßigen wie für die regelmäßigen Körper.