

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1918. Heft I

Januar- bis Märzszung

---

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



# Die Abbildung einer bewegten Ebene durch eine photographische Kammer mit Schlitzverschluss <sup>1)</sup>.

Von Max Lagally.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 2. März 1918.

Koordinatensystem und Bezeichnungen. Die äußere Orientierung der Aufnahmekammer sei durch die Höhe  $h$  des Aufnahmeortes über der horizontal gedachten Objektebene, den Neigungswinkel  $\nu$  der optischen Achse gegen die Objektebene und durch einen Kantungswinkel  $\alpha$  bestimmt, durch den die Haupthorizontale des Bildes in die Richtung der langen Seite des Bildrahmens übergeführt wird. Die innere Orientierung wird als bekannt vorausgesetzt; die Bildweite sei  $f$ . Ein Bildpunkt auf dem Positiv soll durch seine Lage in einem Koordinatensystem bestimmt sein, dessen  $X$ - und  $Y$ -Achse parallel zur langen, beziehungsweise kurzen Rahmenseite durch den Hauptpunkt des Bildes gehen; dieselben Richtungen sollen zwei Einheitsvektoren  $i$  und  $j$  haben, während  $k$  in Richtung der optischen Achse vom Hauptpunkt auf den optischen Mittelpunkt zu verläuft. Dann stellt

$$\mathfrak{A} = ix + jy - kf$$

den vom optischen Mittelpunkt nach einem Punkt des Bildes führenden Vektor dar.

---

<sup>1)</sup> Für verschiedene Winke bin ich den Herren Prof. S. Finsterwalder und E. Rudel zu Dank verpflichtet; eine gemeinsame Arbeit mit letzterem gab die Veranlassung zu dieser Untersuchung.

Es bedeute ferner:

$$n = (i \sin \kappa + j \cos \kappa) \cos \nu + k \sin \nu$$

einen Einheitsvektor in Richtung des Lotes  $h$  gegen den Zenith zu

Die Bewegung der Aufnahmekammer gegenüber der Objektebene besitzt eine fortschreitende Geschwindigkeit

$$\mathfrak{B} = iu + jv + kw$$

und eine Winkelgeschwindigkeit

$$\mathfrak{W} = ip + jq + kr.$$

Für den rechnerischen Ansatz ist es bequem, sich die Kammer fest zu denken und der Objektebene die Geschwindigkeiten  $-\mathfrak{B}$  und  $-\mathfrak{W}$  zuzuschreiben.

Infinitesimale projektive Transformation. Eine in der kleinen Zeit  $dt$  vor sich gehende Änderung der gegenseitigen Lage von Objekt und Kammer bringt eine infinitesimale projektive Transformation des Bildes hervor, die zunächst aufgestellt werden soll, und zwar in die von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{W}$  herrührenden Teile zerlegt. — Der vom Aufnahmeort nach einem Punkt der Objektebene führende Vektor  $\mathfrak{X}$  hängt mit dem Bildvektor  $\mathfrak{A}$  durch die Gleichung  $\mathfrak{X} = c\mathfrak{A}$  zusammen, wo  $c$  ein skalarer Faktor ist. Im Fall einer fortschreitenden Bewegung erleidet der Vektor  $\mathfrak{X}$  für jeden Objektpunkt in der Zeit  $dt$  die gleiche Änderung  $d\mathfrak{X} = -\mathfrak{B}dt$ . Die Verschiebung  $d_1\mathfrak{A}$  des Bildpunktes ist dann durch die Gleichung

$$-\mathfrak{B}dt = dc\mathfrak{A} + cd_1\mathfrak{A}$$

gegeben. Weil die Bildebene, in der die Verschiebung erfolgt, auf der optischen Achse senkrecht steht, ist  $(f d_1\mathfrak{A}) = 0$ ; also

$$-(f\mathfrak{B})dt = (f\mathfrak{A})dc$$

oder nach Rückkehr zu den Koordinaten

$$w dt = f dc; \quad dc = \frac{w}{f} dt.$$

$$\text{Folglich ist } d_1\mathfrak{A} = -\frac{1}{c} \left( \frac{w}{f} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \right) dt.$$

$c$  ist selbst von der Orientierung abhängig und im Bild von Punkt zu Punkt veränderlich. Die Einführung der Höhe ergibt

$$-h = (\mathfrak{X} n) = c(\mathfrak{A} n); \quad c = -\frac{h}{(\mathfrak{A} n)}.$$

Damit ist für die aus der fortschreitenden Bewegung folgende Verschiebung der Bildpunkte der Ausdruck gewonnen:

$$1) \quad d_1 \mathfrak{A} = \frac{(\mathfrak{A} n)}{h} \left( \frac{w}{f} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \right) dt.$$

Um die aus der Drehung herrührende Verschiebung der Bildpunkte abzuleiten, denkt man sich das ganze Bündel der Bildvektoren um eine durch den optischen Mittelpunkt gehende Achse als Träger des Drehvektors  $\mathfrak{B} dt$  gedreht. Der Endpunkt jedes Bildvektors  $\mathfrak{A}$  wird hiebei um  $[\mathfrak{B} \mathfrak{A}] dt$  verschoben und liegt infolgedessen nicht mehr in der Bildebene, muß vielmehr vom optischen Mittelpunkt aus wieder in dieselbe projiziert werden; dies geschieht durch Multiplikation des durch die Drehung aus  $\mathfrak{A}$  hervorgegangenen Vektors  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + [\mathfrak{B} \mathfrak{A}] dt$  mit einem Skalar  $1 + \varepsilon$ , der so zu bestimmen ist, daß

$$(1 + \varepsilon) (\mathfrak{A}' f) = (\mathfrak{A} f) = -f \text{ ist.}$$

Die Ausführung dieser Multiplikation ergibt

$$(1 + \varepsilon) (\mathfrak{A} f) + (1 + \varepsilon) ([\mathfrak{B} \mathfrak{A}] f) dt = -f$$

und hieraus unter Weglassung von Gliedern höherer Ordnung

$$\varepsilon = \frac{([\mathfrak{B} \mathfrak{A}] f) dt}{f}.$$

Der neue Bildvektor wird somit:

$$\mathfrak{A}'' = (1 + \varepsilon) \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \left\{ [\mathfrak{B} \mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{B} \mathfrak{A}] f)}{f} \mathfrak{A} \right\} dt,$$

also die aus der Drehung folgende Verschiebung der Bildpunkte selbst

$$2) \quad d_2 \mathfrak{A} = \left\{ [\mathfrak{B} \mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{B} \mathfrak{A}] f)}{f} \mathfrak{A} \right\} dt.$$

Die aus der ganzen Bewegung folgende Verschiebung der Bildpunkte ist die Summe  $d\mathfrak{X} = d_1\mathfrak{X} + d_2\mathfrak{X}$ ; also:

$$3) \quad d\mathfrak{X} = \left\{ \frac{(\mathfrak{X} \mathfrak{n})}{h} \left( \frac{w}{f} \mathfrak{X} + \mathfrak{B} \right) + [\mathfrak{B} \mathfrak{X}] + \frac{([\mathfrak{B} \mathfrak{X}] \mathfrak{f})}{f} \mathfrak{X} \right\} dt.$$

Geht man zu Koordinaten über, so erhält man folgende Ausdrücke, die die geometrisch evidente Projektivität der Transformation auch analytisch sichtbar machen:

$$1 \text{ a) } \quad d_1 \mathfrak{X} = \frac{1}{hf} [(x \sin \kappa + y \cos \kappa) \cos \nu - f \sin \nu] [i(w x + f u) + j(w y + f v)] dt,$$

$$2 \text{ a) } \quad d_2 \mathfrak{X} = \frac{1}{f} [i(p x y - q(x^2 + f^2) - r y f) + j(p(y^2 + f^2) - q x y + r x f)] dt.$$

Die Schlitzverschluß-Verzerrung. Die bisher behandelte infinitesimale projektive Transformation ist dem Betrag nach mit der Zeit veränderlich. Weil nicht das ganze Bild durch gleichzeitige Belichtung entstanden ist, sondern dadurch, daß ein enger Schlitz mit beträchtlicher Geschwindigkeit über die Platte wanderte, kommt den Punkten eines jeden durch gleichzeitige Belichtung entstandenen Bildstreifens eine Verschiebung  $d\mathfrak{X}$  zu, deren Betrag von dem durch  $dt$  gekennzeichneten Zeitpunkt der Belichtung abhängig ist. Setzt man voraus (was der Wirklichkeit nicht ganz genau entspricht), daß der Verschluß mit konstanter Geschwindigkeit über die Platte läuft, und bezeichnet man die kleine Zeit, in der er den Weg 1 (cm) zurücklegt, mit  $\delta\tau$ , so ist der Zeitpunkt, in der ein zur Ordinate  $y$  gehöriger Streifen belichtet wurde, durch  $dt = y \delta\tau$  gegeben, wenn man als Nullpunkt der Zeit  $dt$  den Zeitpunkt einführt, in dem der Schlitz über den Mittelpunkt der Platte läuft. Für die Verschiebung aller Punkte des Bildes erhält man dann folgende „Schlitzverschluß-Verzerrung“:

$$4) \quad \delta \mathfrak{X} = \left\{ \frac{(\mathfrak{X} \mathfrak{n})}{h} \left( \frac{w}{f} \mathfrak{X} + \mathfrak{B} \right) + [\mathfrak{B} \mathfrak{X}] + \frac{([\mathfrak{B} \mathfrak{X}] \mathfrak{f})}{f} \mathfrak{X} \right\} y \delta \tau.$$

Geht man wieder zu Koordinaten über, so erhält man, nach den 6 Geschwindigkeitskomponenten  $u, v, w, p, q, r$  zerlegt, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{X} = & \left( i \frac{u}{h} \delta \tau + j \frac{v}{h} \delta \tau \right) [(x \sin \kappa + y \cos \kappa) \cos \nu - f \sin \nu] y \\ 4a) & + \frac{w}{h} \delta \tau (ix + jy) [(x \sin \kappa + y \cos \kappa) \cos \nu - f \sin \nu] \frac{y}{f} \\ & + p \delta \tau [ixy + j(y^2 + f^2)] \frac{y}{f} + q \delta \tau [-i(x^2 + f^2) - jxy] \frac{y}{f} \\ & + r \delta \tau [-iy + jx] y. \end{aligned}$$

Jede einer Geschwindigkeitskomponente entsprechende Verzerrung läßt sich darstellen als Produkt aus einem kleinen, dieser Geschwindigkeit proportionalen Faktor  $\varepsilon$  und einer Verzerrung, die dem Wert 1 dieses Faktors entsprechen würde. Die Faktoren  $\varepsilon$  sollen in folgender Weise definiert werden:

$$\begin{aligned} 5) \quad \varepsilon_1 &= \frac{u}{h} \delta \tau; \quad \varepsilon_2 = \frac{v}{h} \delta \tau; \quad \varepsilon_3 = \frac{w}{h} \delta \tau; \\ \varepsilon_4 &= p \delta \tau; \quad \varepsilon_5 = q \delta \tau; \quad \varepsilon_6 = r \delta \tau. \end{aligned}$$

Sie sind als kleine Winkel zu betrachten. Ferner sollen folgende Elementar-Verschiebungen eingeführt werden:

$\mathfrak{P}_1^I = ify$  eine Scherung parallel zur langen Rahmen-seite;

$\mathfrak{P}_2^I = jfy$  eine Affinität in Richtung der kurzen Rahmen-seite;

6)  $\mathfrak{P}_1^{II} = (ix + jy)y$  eine spezielle Zentralperspektive mit der  $x$  Achse als Achse;

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1^{II} &= (-iy + jx)y; \quad \mathfrak{Q}_2^{II} = ixy; \quad \mathfrak{Q}_3^{II} = jxy; \\ \mathfrak{Q}_4^{II} &= iy^2; \quad \mathfrak{Q}_5^{II} = jy^2; \end{aligned}$$

$$\mathfrak{Q}_1^{III} = (ix + jy) \frac{xy}{f}; \quad \mathfrak{Q}_2^{III} = (ix + jy) \frac{y^2}{f}.$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die 6 von den 6 Geschwindigkeits-Komponenten herrührenden Verzerrungen in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathfrak{A}_1 &= \varepsilon_1 [-\mathfrak{P}_1^I \sin \nu + (\mathfrak{Q}_2^{II} \sin \kappa + \mathfrak{Q}_1^{II} \cos \kappa) \cos \nu] \\
 \delta \mathfrak{A}_2 &= \varepsilon_2 [-\mathfrak{P}_2^I \sin \nu + (\mathfrak{Q}_3^{II} \sin \kappa + \mathfrak{Q}_5^{II} \cos \kappa) \cos \nu] \\
 7) \quad \delta \mathfrak{A}_3 &= \varepsilon_3 [-\mathfrak{P}_1^{II} \sin \nu + (\mathfrak{Q}_1^{III} \sin \kappa + \mathfrak{Q}_2^{III} \cos \kappa) \cos \nu] \\
 \delta \mathfrak{A}_4 &= \varepsilon_4 [\mathfrak{P}_2^I + \mathfrak{Q}_2^{III}] \\
 \delta \mathfrak{A}_5 &= \varepsilon_5 [-\mathfrak{P}_1^I - \mathfrak{Q}_1^{III}] \\
 \delta \mathfrak{A}_6 &= \varepsilon_6 \mathfrak{Q}_1^{II}.
 \end{aligned}$$

Hiebei bedeutet  $\mathfrak{P}$  eine projektive,  $\mathfrak{Q}$  eine nicht projektive Verschiebung. Alle  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  sind in  $x, y, f$  homogen vom 2. Grad. Die römischen Ziffern, die bei  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  als oberer Index auftreten, geben den Grad in  $x, y$  an. Weil  $|ix + jy|$  höchstens gleich der halben Bilddiagonale werden kann, die im allgemeinen wesentlich kleiner als die Bildweite  $f$  ist, sind die Höchstbeträge der Verschiebungen eines jeden Grades im Verhältnis der halben Diagonalen zur Bildweite kleiner als die Höchstbeträge der Verschiebungen des nächst niedrigeren Grades, also von kleinerem Einfluß auf die Verzerrung des Bildes. Zwischen den 6 Elementar-Verschiebungen 2. Grades bestehen 2 lineare Gleichungen;  $\mathfrak{P}_1^{II}$  und  $\mathfrak{Q}_1^{II}$  sind nur der Einfachheit halber eingeführt.

Die Unschärfe des Bildes. Die Verzerrung  $\delta \mathfrak{A}$  an irgend einer Stelle  $x, y$  des Bildes kann man als die Verschiebung des Bildpunktes während der Zeit  $y \delta \tau$  auffassen, in der der Schlitz den Weg von der Plattenmitte bis zur Ordinate  $y$  zurücklegt. Ist die Schlitzbreite  $\sigma$ , so ist  $\sigma \delta \tau$  die Zeit  $T$ , die jeder Punkt belichtet (Belichtungszeit), während der Schlitz über ihn hinweggeht. Die während dieser Zeit stattfindende Verschiebung  $\mathfrak{U}$  des Bildpunktes äußert sich als Unschärfe, und zwar ist

$$8) \quad \mathfrak{U} = \frac{\sigma}{y} \delta \mathfrak{A} = \frac{T}{y \delta \tau} \delta \mathfrak{A}$$

$$\text{oder } \mathfrak{U} = \left\{ \frac{(\mathfrak{A} n)}{h} \left( \frac{w}{f} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \right) + [\mathfrak{B} \mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{B} \mathfrak{A}] f)}{f} \mathfrak{A} \right\} T.$$

Die Unschärfe ist also zum Unterschied von der Schlitzverschluß-Verzerrung eine projektive Verschiebung der Bild-

punkte; sie läßt sich in analoger Weise wie diese zerlegen, was hier nicht näher ausgeführt werden soll; insbesondere sind jedoch die zu den Elementar-Verschiebungen  $\mathfrak{P}_1^I$  und  $\mathfrak{P}_2^I$  gehörigen Unschärfen

$$u(\mathfrak{P}_1^I) = \sigma if \text{ und } u(\mathfrak{P}_2^I) = \sigma jf$$

über das ganze Bild hin nach Richtung und Größe konstant.

Wenn während der Aufnahme nur eine fortschreitende Bewegung vorhanden war, so überwiegt der projektive Teil der Verzerrung über den nicht projektiven, und der konstante Teil der Unschärfe über den veränderlichen. In ähnlicher Weise bewirkt eine reine Drehung um eine Parallele zur Platte bis auf unprojektive Glieder höherer Ordnung dieselbe Art von Verzerrung und Unschärfe wie fortschreitende Bewegung in Richtung der dazu senkrechten Parallelen zur Platte. Dagegen heben sich bei gezielten Aufnahmen, wenn während der Aufnahme die Kammer so bewegt wird, daß die optische Achse durch einen festen Punkt des Objektes geht, die von Fortschreitung und Drehung herrührenden projektiven Verzerrungen 1. Grades auf; ebenso der konstante Teil der Unschärfe. Verzerrung und Unschärfe wachsen also rasch gegen die Ecken des Bildes zu. Ähnliche Verhältnisse hat eine reine Drehung der Kammer um die optische Achse zur Folge.

Die Fälschung der Orientierung. Die projektiven Teile der durch den Schlitzverschluß hervorgebrachten Verzerrungen und die so entstandenen Abweichungen von der durch einen Zentralverschluß erzeugten Perspektive haben zur Folge, daß sowohl die äußere als auch die innere Orientierung der Kammer während der Aufnahme verändert erscheint. Setzt man, was bei ebenen Objekten gestattet ist, die zu der verzerrten Perspektive gehörige Bildweite = der Bildweite der Kammer, so äußert sich die Fälschung der Orientierung durch den Schlitzverschluß am auffälligsten in einer Veränderung der Lage des Hauptpunktes. Es soll wenigstens für die beiden Verzerrungen erster Ordnung  $\mathfrak{P}_1^I$  und  $\mathfrak{P}_2^I$ , die sich stets zu einer schiefen Affinität zusammensetzen, ein graphisches Ver-





punkt der neuen Involution wird. Im gleichen Verhältnis wie alle Strecken auf dem Träger der Involution ändert sich auch der Abstand des Punktes, von dem aus sie als Rechtwinkel-Involution projiziert wird. Man hat also, um den neuen optischen Mittelpunkt  $0'$  zu finden, in  $M'$  ein Lot zu errichten, dessen Länge durch die Gleichung  $0'M' : 0M = M'A : MA$  bestimmt ist. Damit ist auch der zu jeder beliebigen, z. B. der unveränderten Brennweite  $f$  gehörige Neigungswinkel  $\nu'$  und Hauptpunkt  $H'$  bekannt.

Die Durchbiegung der Bilder von Geraden. Die nicht projektiven Teile der Schlitzverschluß-Verzerrung haben zur Folge, daß sich die Geraden der Objektebene im allgemeinen nicht als Gerade abbilden, sondern eine Durchbiegung erleiden. Als obere Grenze für den Biegungspfeil hat man den Betrag der Verzerrung  $\delta\mathfrak{A}$  in den Punkten, in denen die betreffende Gerade den Bildrand trifft, kann also zu ihrer Bestimmung die Kurvensysteme benutzen, welche die Elementar-Verschiebungen darstellen; jedoch wird diese obere Grenze nur in 2 Fällen, nämlich bei  $\Omega_1^{\text{II}}$  für Gerade durch den Mittelpunkt und bei  $\Omega_2^{\text{II}}$  für Parallele zur kurzen Rahmenseite wirklich erreicht.

Um die Gleichung der Kurven zu finden, welche durch die Schlitzverschluß-Verzerrung aus den Geraden des nicht verzerrten Bildes hervorgehen, kann man von Gleichung (4a) mit vereinfachten Koeffizienten ausgehen. Es sei  $\delta\mathfrak{A} = i\delta x + j\delta y$  gesetzt, und die Koordinaten eines Punktes in dem verzerrten Bild mit  $\xi = x + \delta x$ ,  $\eta = y + \delta y$  bezeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned} 9) \quad \xi &= x + [a + cx + dy + x(hx + ky)]y\delta\tau \\ \eta &= y + [b + cx + fy + y(hx + ky)]y\delta\tau. \end{aligned}$$

Es sei

$$10a) \quad Ax + By + C = 0$$

die Gleichung einer Geraden im ursprünglichen System. Dann folgt nach Multiplikation der Gleichungen (9) mit  $A$  bzw.  $B$ :

$$\begin{aligned} A\xi + B\eta &= -C + [A(a + cx + dy) + B(b + cx + fy) \\ &\quad - C(hx + ky)]y\delta\tau. \end{aligned}$$

In dem Faktor von  $\delta\tau$  kann man unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in  $\delta\tau$  die Größen  $x, y$  durch  $\xi, \eta$  ersetzen; dann ergibt sich die deformierte Kurve als Kegelschnitt

$$10\ b) \quad - (Ac + Be - Ch) \delta\tau xy - (Ad + Bf - Ck) \delta\tau y^2 \\ + A\xi + (B - (Aa + Bb) \delta\tau) y + C = 0.$$

Die Diskriminante ist  $(-Ac - Be + Ch)^2 \delta\tau^2$ ; sie ist für reelle Werte der Koeffizienten größer als Null oder höchstens gleich Null, und zeigt, daß außer Geraden nur Hyperbeln und Parabeln als Bilder von Geraden möglich sind.

---