Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche[1]).

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 2. März 1918.

Im Anschluß an eine in diesen Berichten von mir veröffentlichte Reihe von Arbeiten, die sich mit der Theorie der unendlichen Kettenbrüche beschäftigen, möchte ich im folgenden einige mir nützlich erscheinende Ergänzungen mitteilen. Dieselben beziehen sich zum Teil auf eine zweckmäßigere Anordnung und Gestaltung gewisser allgemeiner Konvergenzkriterien, zum anderen Teil auf die Konvergenz sogenannter eingliedrig limitär-periodischer Kettenbrüche bzw. einer noch etwas allgemeineren Kategorie, die ich als „nahezu" eingliedrig periodische bezeichnen möchte. Darunter verstehe ich hier Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, deren Teilzähler a_ν durchweg innerhalb einer gewissen Umgebung

---

1) [1] Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. 1898, S. 295.

[2] Über ein Konvergenz-Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern. 1899, S. 261.

[3] Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. 1900, S. 463.

[4] Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, S. 359.

[5] Über Konvergenz und funktionen-theoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche. 1910, S. 3.

[6] Über die Konvergenz periodischer und gewisser nicht-periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1917, S. 221.

Die betreffenden Arbeiten werden im Texte, soweit erforderlich, mit [1]—[6] zitiert.

irgend einer bestimmten Zahl a liegen. Einen Satz über die Konvergenz analog gearteter Kettenbrüche von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ hat zuerst Herr Perron in seinem Lehrbuche[1]) (S. 280) angegeben, und Herr von Pidoll (welcher den Satz, schon vor der Veröffentlichung, aus den Korrekturbogen kennen gelernt hatte) hat denselben (mit unwesentlichen Änderungen der Formulierung) in seiner Dissertation[2]) (S. 36) aufs neue bewiesen. Der von mir hier mitgeteilte entsprechende Satz dürfte, wie ich glaube, nach Fassung und Beweis den Vorzug ganz besonderer Einfachheit haben[3]) und liefert als unmittelbare Folgerung eine Behandlung des „limitär-periodischen" Falles, die kürzer und einfacher ist, als die früher von mir angegebene[4]).

§ 1.

§ I. Über zweckmässige Fassung und Anordnung gewisser Konvergenzkriterien für unendliche Kettenbrüche.

1. Während die Konvergenz bzw. Divergenz eines unendlichen Kettenbruches (einschließlich des besonderen Konvergenz- bzw. Divergenzcharakters) keine Änderung erleidet, wenn man ihn in einen äquivalenten überführt, so zeigen gewisse Konvergenzkriterien ein entgegengesetztes Verhalten, indem sie bei irgend einem bestimmten Kettenbruche eine Entscheidung liefern können, während sie bei unendlich vielen mit jenem äquivalenten vollständig versagen. Dies gilt insbesondere von

---

[1]) „Die Lehre von den Kettenbrüchen." Leipzig 1913.

[2]) „Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche." München 1912.

[3]) Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß Fassung und Beweisführung des Satzes in Bezug auf die hier nicht berührte Frage nach der Gleichmäßigkeit der Konvergenz für den Fall, daß die oben mit a_ν und a bezeichneten Größen Funktionen einer komplexen Variablen sind, nach bekannten Methoden leicht ergänzt werden können.

[4]) s. [5], S. 36.

einem häufig angewandten, für einen speziellen Fall zuerst von Seidel und Stern aufgestellten, von mir auf Kettenbrüche mit beliebigen komplexen Gliedern übertragenen Kriterium[1]), nach welchem der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ unbedingt konvergiert, wenn:

$$\text{(A)} \qquad |b_\nu| - |a_\nu| \geqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Transformiert man aber den betreffenden Kettenbruch in den ihm äquivalenten: $\left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^\infty$, so tritt an die Stelle der obigen Differenz für $\nu \geqq 2$ die folgende:

$$|c_\nu| \cdot (|b_\nu| - |c_{\nu-1} a_\nu|),$$

welche infolge der Willkürlichkeit von $c_{\nu-1}$, c_ν, auch wenn die Beziehung (A) besteht, jede beliebige reelle Zahl vorstellen kann. Nun habe ich zwar späterhin gezeigt[2]), daß man durch passende Anwendung einer Äquivalenz-Transformation jene Konvergenz-Bedingung in die folgende überführen kann:

$$\text{(B)} \qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (p_\nu > 1),$$

welche für alle äquivalenten Kettenbrüche gleiche Wirksamkeit besitzt[3]). Aber diese bis zu einem gewissen Grade zufällige chronologische Folge der beiden Kriterien (A) und (B) erscheint doch keineswegs als die wirklich logische, da ja das Kriterium (A), wie unmittelbar ersichtlich, einen speziellen Fall (nämlich: $p_\nu = |b_\nu|$) von (B) darstellt. Aus diesem Grunde hielt ich es neuerdings für wünschenswert, an die Spitze der ganzen Darstellung das Kriterium (B) zu stellen, dem ich nun-

[1]) s. [1], S. 311.

[2]) s. [3], S. 367.

[3]) Indem ja der Ausdruck $\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}$ ungeändert bleibt, wenn

$$\begin{array}{lll} a_\nu & \text{durch} & c_{\nu-1} c_\nu a_\nu \\ b_{\nu-1} & \text{„} & c_{\nu-1} b_{\nu-1} \\ b_\nu & \text{„} & c_\nu b_\nu \end{array}$$

ersetzt wird.

mehr (mit gewissen, im wesentlichen schon früher von mir hinzugefügten vervollständigenden Zusätzen) die folgende Form gebe:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (bei beliebigen komplexen a_ν, b_ν einschließlich $a_\nu = 0$) ist *unbedingt konvergent*, wenn eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen ϑ_ν existiert, derart daß: $\vartheta_1 < 1$ und für $\nu \geqq 2$:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 0 < \vartheta_\nu \leqq 1 \\ 0 \leqq \left|\dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu)^{1)}. \end{cases}$$

Dabei ist, falls $|a_1| > 0$[2]) stets:

$$\text{(1)} \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{1}{1-\vartheta_1} \cdot \left|\frac{a_1}{b_1}\right|,$$

außer wenn durchweg:

$$\text{(I')} \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = -\vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu) \neq 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

und zugleich:

$$\text{(I'')} \qquad \sum_2^\infty{}^\nu \frac{(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)\ldots(1-\vartheta_\nu)}{\vartheta_2 \vartheta_3 \ldots \vartheta_\nu} = +\infty,$$

in welchem Falle die Beziehung besteht:

$$\text{(1')} \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1}{1-\vartheta_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches bleibt auch noch im Falle $\vartheta_1 = 1$ erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (I') und (II'') gleichzeitig bestehen: der Kettenbruch ist alsdann *außerwesentlich divergent*[3]).

---

[1]) Der Vergleich mit der Bezeichnungsweise in (B) gibt: $\vartheta_\nu = \dfrac{1}{p_\nu}$.

[2]) Ist $a_1 = 0$, so konvergiert der Kettenbruch gegen Null, abgesehen von dem Einzelfalle, auf den sich die folgende Fußnote bezieht.

[3]) Bzw. von der Form $\dfrac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$.

Der Beweis, der sich zunächst dadurch etwas vereinfachen läßt, daß man den fraglichen Kettenbruch durch den ihm äquivalenten: $\left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $\left(\text{wo } a'_1 = a_1 \text{ und für } \nu \geqq 2\text{: } a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right)$ ersetzt, kann im wesentlichen so geführt werden, wie ihn auf meine Anregung Herr von Pidoll auf S. 9—12 seiner Dissertation gegeben hat, und bedarf zur vollständigen Abrundung nur noch zweier ohne besondere Schwierigkeit durchzuführender Zusätze, deren einer den Nachweis zu liefern hat, daß die besondere Beziehung (1′) bzw. die Divergenz, die sichtlich eintreten, wenn die Bedingungen (I′) und (I″) bestehen, auch wirklich nur in diesem Falle eintreten können; während der andere auf die Erörterung der hier ausdrücklich zugelassenen Möglichkeit[1]) sich bezieht, daß unter den a_ν die Null vorkommt.

2. *Aus dem vorstehenden Hauptkriterium* ergeben sich durch Spezialisierung der ϑ_ν zunächst jene besonderen Kriterienformen, die ich bereits an früherer Stelle[2]) in analoger Weise abgeleitet habe. Da hierbei für die ϑ_ν durchweg solche Zahlenfolgen ausgewählt werden, welche von den a_ν, b_ν gänzlich unabhängig sind, so besitzen diese Kriterien gleich dem Hauptkriterium für alle unter sich äquivalenten Kettenbrüche den *gleichen Grad von Wirksamkeit*. Dies ändert sich naturgemäß, wenn für die ϑ_ν Ausdrücke verwendet werden, in denen die a_ν oder b_ν vorkommen. Hier zeigt sich nun der Vorzug der jetzt gewählten Anordnung, insofern man auf diesem Wege einen besseren Einblick in die zu wirklich brauchbaren Ergebnissen führenden Möglichkeiten gewinnt. Als eine zweckmäßige Wahl erweist sich zunächst die Annahme:

$$(2) \qquad \vartheta_\nu = \frac{\varrho_\nu}{|b_\nu|},$$

wo ϱ_ν nach (I) der Bedingung zu genügen hat:

$$(3) \qquad 0 < \varrho_\nu \leqq |b_\nu| \qquad \text{für } \nu \geqq 2,$$

[1]) Im Hinblick auf diese Möglichkeit wurde bei der Fassung der Voraussetzung (I) auch die Annahme $\vartheta_\nu = 1$ zugelassen.

[2]) s. [3], S. 369—375.

während im allgemeinen $0 < \varrho_1 < |b_1|$ zu setzen ist und die Annahme: $\varrho_1 = |b_1|$ die bei der Fassung des Hauptkriteriums auf den Fall $\vartheta_1 = 1$ bezüglichen Einschränkungen erfordert.

Durch die Substitution (2) nimmt die zweite der Bedingungen (I) die Form an:

$$0 \leqq \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{\varrho_{\nu-1}}{|b_{\nu-1}|} \cdot \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{|b_\nu|} \qquad (\nu \geqq 2),$$

anders geschrieben:

$$(4) \qquad |b_\nu| \geqq \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \qquad (\nu \geqq 2),$$

so daß also, wenn nur diese Beziehung und außerdem die in (3) enthaltene und auch auf ϱ_1 bezügliche Teilbedingung besteht:

$$(4\,\mathrm{a}) \qquad \varrho_\nu > 0 \qquad (\nu \geqq 1),$$

die in Ungl. (3) enthaltene Beschränkung $\varrho_\nu \leqq |b_\nu|$ für $\nu > 2$ auf Grund der Beziehung (4) schon von selbst erfüllt ist und nur noch die Bedingung:

$$(4\,\mathrm{b}) \qquad b_1 \geqq \varrho_1$$

(mit den erforderlichen Einschränkungen für den Fall $|b_1| = \varrho_1$) einer ausdrücklichen Erwähnung bedarf.

Sind nun die Bedingungen (4), (4 a, b) erfüllt und zwar $|b_1| > \varrho_1$, so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und es ergibt sich aus der Beziehung (1) (mit Berücksichtigung von: $\frac{1}{1-\vartheta_1} = \frac{|b_1|}{|b_1| - \varrho_1}$), daß:

$$(5) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_\nu|}{|b_\nu| - \varrho_1},$$

abgesehen von jenem Ausnahmefalle, welcher bei gleichzeitigem Bestehen der beiden Beziehungen (I′), (I″) eintritt. Dabei würde die Beziehung (I′) hier zunächst folgendermaßen lauten:

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = -\frac{\varrho_{\nu-1}}{|b_{\nu-1}|} \cdot \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{|b_\nu|} \mp 0 \qquad (\nu \geqq 2),$$

und diese Beziehung besagt offenbar mit Rücksicht auf die Voraussetzung (4) dasselbe, wie die beiden folgenden zusammengenommen:

$$(6)\qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \qquad (\nu \geqq 2).$$

Infolge dessen nimmt die Bedingung (I''), wegen: $\frac{1-\vartheta_\nu}{\vartheta_\nu} = \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{\varrho_\nu} = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}\varrho_\nu}$, nach Hinzufügung des im übrigen einflußlosen Faktors $\frac{1}{\varrho_1}$ die Form an:

$$(7)\qquad \sum_2^\infty {}^\nu \frac{|a_2 a_3 \ldots a_\nu|}{(\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{\nu-1})^2} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu} = +\infty.$$

Sind sodann die Bedingungen (6) und (7) erfüllt, so findet man nach Gl. (1'):

$$(8)\qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - \varrho_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1}.$$

Die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ bleibt wiederum auch noch im Falle $|b_1| = \varrho_1$ (entsprechend der Annahme $\vartheta_1 = 1$) erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (6) und (7) bestehen. Alsdann wird auf Grund der Beziehung (8) zunächst:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = \frac{|b_2|}{|b_2| - \varrho_2} \cdot \frac{a_2}{b_2}$$

und, wenn man die beiden Bedingungen (6) für $\nu = 2$ wieder in die eine unmittelbar vorangehende zusammenzieht:

$$\frac{a_2}{b_1 b_2} = -\frac{|b_2| - \varrho_2}{|b_2|}$$

schließlich:

$$(9)\qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = -b_1,$$

also der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ außerwesentlich divergent (sc. wenn $|a_1| > 0$, dagegen von der Form $\frac{0}{0}$, wenn $a_1 = 0$).

Durch Zusammenfassung der in den Beziehungen (4)—(9) enthaltenen Ergebnisse gewinnt man also das folgende Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist *unbedingt konvergent*, wenn eine Folge positiver Zahlen ϱ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ existiert, derart daß:

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} |b_1| > \varrho_1 \\ |b_\nu| \geqq \dfrac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu+1}} + \varrho_\nu \qquad \text{für } \nu \geqq 2. \end{cases}$$

Dabei ist, falls $|a_1| > 0$, stets:

$$(\mathrm{c}) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1},$$

außer wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg:

$$(\mathrm{C}') \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu$$

und zugleich:

$$(\mathrm{C}'') \qquad \sum_2^\infty{}^\nu \frac{|a_2 a_3 \ldots a_\nu|}{(\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{\nu-1})^2} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu} = +\infty,$$

in welchem Falle an die Stelle der Ungleichung (c) die Gleichungen treten:

$$(\mathrm{c}') \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - \varrho_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches bleibt auch noch für $|b_1| = \varrho_1$ erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (C′) und (C″) gleichzeitig bestehen: der Kettenbruch ist dann *außerwesentlich divergent* (bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$)[1]).

[1]) Setzt man $\dfrac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} = \sigma_\nu \geqq 0$, so kann man dem vorliegenden Kriterium auch die folgende Form geben:

Existieren zwei Folgen von Zahlen $\varrho_\nu > 0$, $\sigma_\nu \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, derart daß:

3. Das vorstehende Kriterium nimmt besonders einfache Formen an (von denen die erste das zu Anfang erwähnte Kriterium (A), die zweite eine von mir auch schon angegebene Umformung des letzteren[1]), die dritte neu ist), wenn für ϱ_ν je eine der folgenden drei Annahmen gemacht wird:

$$\varrho_\nu = 1, \quad \varrho_\nu = |a_{\nu+1}|, \quad \varrho_\nu = \sqrt{|a_{\nu+1}|} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei im zweiten und dritten Falle infolge der Voraussetzung $\varrho_\nu > 0$ $(\nu > 1)$ durchweg $|a_\nu| > 0$ für $\nu \geqq 2$ anzunehmen ist. Mit dieser Zusatzbedingung ergibt sich sodann:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist *unbedingt konvergent*, wenn eins der folgenden drei Bedingungspaare erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{lll} (D) & |b_1| > 1, & |b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \\ (E) & |b_1| > |a_2|, & |b_\nu| \geqq |a_{\nu+1}| + 1 \\ (F) & |b_1| > \sqrt{|a_2|}, & |b_\nu| \geqq \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|} \end{array}\right\} \text{für } \nu \geqq 2,$$

und zwar genügt sein Wert, falls $|a_1| > 0$, je einer der folgenden drei Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} |b_1| \geqq \varrho_1, & |b_\nu| \geqq \varrho_\nu + \sigma_\nu \\ & |a_\nu| = \varrho_{\nu-1}\,\sigma_\nu \end{array}\right\} \text{für } \nu \geqq 2,$$

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (abgesehen von dem im Texte erwähnten Divergenzfall) unbedingt konvergent.

Die Richtigkeit dieses Kriteriums läßt sich überdies auch ganz unmittelbar durch das Hauptkriterium von Nr. 1 verifizieren. Man findet nämlich auf Grund der oben getroffenen Festsetzungen für $\nu \geqq 2$:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\,b_\nu}\right| \leqq \frac{\varrho_{\nu-1}\,\sigma_\nu}{(\varrho_{\nu-1} + \sigma_{\nu-1})\,(\varrho_\nu + \sigma_\nu)}$$

$$= \frac{\varrho_{\nu-1}}{\varrho_{\nu-1} + \sigma_{\nu-1}}\left(1 - \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu + \sigma_\nu}\right) = \vartheta_{\nu-1}\,(1 - \vartheta_\nu),$$

wo jetzt für $\nu \geqq 1$: $0 \leqq \vartheta_\nu = \dfrac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu + \sigma_\nu} \leqq 1$. Vgl. auch v. Pidoll, Dissertation, S. 13.

[1]) s. [4], S. 366.

$$\text{(d)} \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - 1}$$

$$\text{(e)} \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - |a_2|}$$

$$\text{(f)} \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - \sqrt{|a_2|}},$$

außer wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg:

$$\text{(D')} \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = |a_\nu| + 1 \text{ und zugleich: } \sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu| = +\infty$$

$$\text{(E')} \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu+1} b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = |a_{\nu+1}| + 1 \text{ und zugleich: } \sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu|^{-1} = +\infty$$

$$\text{(F')} \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|} \text{ und zugleich: } \sum_2^\infty{}^\nu \frac{1}{\sqrt{|a_\nu|}} = +\infty,$$

in welchen Fällen an die Stelle der Ungleichungen (d), (e), (f) die folgenden Gleichungen treten:

$$\text{(d')} \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1| - 1}{|b_1|} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \quad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - 1}$$

$$\text{(e')} \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - |a_2|} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{"} \quad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - |a_2|}$$

$$\text{(f')} \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - \sqrt{|a_2|}} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{"} \quad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - \sqrt{|a_2|}}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches bleibt auch erhalten, falls in den auf $|b_1|$ bezüglichen Bedingungen (D), (E), (F) das *Gleichheitszeichen* steht, außer wenn die besonderen Beziehungen (D'), (E'), (F') bestehen: der Kettenbruch ist alsdann *außerwesentlich divergent* (bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$).

Zusatz. Besteht die auf $|b_\nu|$ bezügliche Bedingung in (D), (E), (F) auch noch für $\nu = 1$, so reduzieren sich die Ungleichungen (d), (e), (f) auf die einfacheren:

$$(\mathrm{d}'') \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1, \qquad (\mathrm{e}'') \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < |a_1|, \qquad (\mathrm{f}'') \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \sqrt{|a_1|},$$

und gehen in die entsprechenden Gleichungen über, wenn die Spezialbedingungen (D'), (E'), (F') — und zwar die in der zweiten Kolonne stehenden auch noch für $\nu = 1$ — erfüllt sind.

4. Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um ein Versehen zu berichtigen, welches sich in einer im vorigen Jahrgange dieser Berichte von mir veröffentlichten Mitteilung findet. Ich habe daselbst[1]) bemerkt, daß das in § 2 jener Mitteilung von mir bewiesene, von Herrn van Vleck als Theorem 3 bezeichnete Konvergenzkriterium in dem Perronschen Lehrbuche nicht erwähnt werde. Das beruht aber, worauf mich Herr Perron aufmerksam gemacht hat, in sofern auf einem Irrtum, als in seinem Buche ein allgemeineres Kriterium angeführt wird (S. 268, Theorem 34), in welchem das in Frage stehende als spezieller Fall enthalten ist[2]). Und zwar geht jenes allgemeinere Kriterium aus dem gewöhnlich als van Vlecksches oder van Vleck-Jensensches bezeichneten durch eine einfache Äquivalenz-Transformation hervor, so daß unter Voraussetzung dieses letzteren Kriteriums der ganze von mir a. a. O. gegebene Beweis entbehrlich wird. Die fragliche Äquivalenz-Transformation gestaltet sich im übrigen besonders einfach, wenn man sich auf den Beweis des von mir behandelten Sonderfalles beschränken will. Zunächst läßt sich das als Grundlage dienende van Vlecksche Kriterium in folgender Weise aussprechen:

---

[1]) s. [6], S. 222, Fußn. 2.

[2]) Der betreffende Satz findet sich übrigens auch am Schlusse der in der obigen Fußnote zitierten Jensenschen Arbeit mit dem Unterschiede, daß dort anstatt der lediglich notwendigen Existenz eines von Null verschiedenen $b_{2\nu+1}$ diejenige zweier konsekutiver $b_\nu \neq 0$, $b_{\nu+1} \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Sind die für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{1}{a_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^\infty$ notwendigen Bedingungen nämlich:

$$(1) \qquad \begin{cases} |b_{2\nu+1}| > 0 \text{ für mindestens } \textit{ein } \nu, \\ \sum_1^\infty{}^\nu |b_\nu| = +\infty \end{cases}$$

erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch, wenn die von Null verschiedenen a_ν gleichbezeichnet sind und für die β_ν eine Beziehung von der Form besteht:

$$(2) \qquad |\beta_\nu| \leqq \gamma |a_\nu|, \text{ wo } \gamma \text{ eine beliebige positive Zahl.}$$

Angenommen nun, es trete jetzt an die Stelle der letzten Ungleichung die Bedingung, daß die Zahlen $(-1)^\nu \cdot \beta_\nu$ (soweit sie von Null verschieden) gleichbezeichnet sein sollen. Dabei kann man, ohne die Allgemeinheit des Resultates zu beschränken, auf Grund einer bei Gelegenheit des oben erwähnten Beweises gemachten Bemerkung (a. a. O. S. 247) annehmen, daß diese $(-1)^\nu \cdot \beta_\nu$ dasselbe Vorzeichen haben, wie die a_ν. Man findet nun durch Äquivalenz-Transformation:

$$\left[\frac{1}{a_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^n = \frac{1}{c_0} \cdot \left[\frac{1}{a'_\nu + \beta'_\nu i}\right]_1^n,$$

wenn gesetzt wird:

$$c_{\nu-1}\, c_\nu = 1, \quad a'_\nu + \beta'_\nu i = c_\nu (a_\nu + \beta_\nu i) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Der ersten dieser Bedingung wird aber genügt, wenn man setzt:

$$c_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + (-1)^{\nu-1} i),$$

worauf sich ergibt:

$$a'_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(a_\nu + (-1)^\nu \beta_\nu), \quad \beta'_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\beta_\nu + (-1)^{\nu+1} a_\nu)$$

und, wegen der gleichen Vorzeichen von a_ν und $(-1)^\nu \beta_\nu$:

$$|a'_\nu| = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(|a_\nu| + |\beta_\nu|), \quad \beta'_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\big||a_\nu| - |\beta_\nu|\big|,$$

also:

$$|\beta'_\nu| \leqq |a'_\nu|$$

d. h. die Teilnenner des transformierten Bruches genügen der Bedingung (2). Da überdies:

$$|\alpha'_\nu + \beta'_\nu i| = |\alpha_\nu + \beta_\nu i| = |b_\nu|,$$

so erfüllt der transformierte Bruch auch die Bedingungen (1), ist somit für $n \to \infty$ konvergent, und das gleiche gilt also schließlich für den urspünglich gegebenen.

Da übrigens bei diesem Beweise die Bedingung (2) schon für $\gamma = 1$ erfüllt ist, so erkennt man unmittelbar, daß dabei die Tragweite des zu Grunde liegenden Kriteriums bei weitem nicht ausgenützt wird und daß daher das gewonnene Resultat einer merklichen Erweiterung fähig sein muß: diese Erweiterung besteht dann eben in dem oben erwähnten Jensen-Perronschen Satze.

§ 2. Über „nahezu" eingliedrig periodische und eingliedrig limitär-periodische Kettenbrüche.

1. Bedeutet a eine beliebige Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, für welche $|a| \geqq \frac{1}{4}$, so hat die quadratische Gleichung:

$$(1) \qquad y^2 - y - a = 0$$

zwei Wurzeln verschiedenen absoluten Betrages. Wird sodann die absolut genommen kleinere dieser Wurzeln mit z' bezeichnet, so konvergiert bekanntlich der eingliedrig periodische Kettenbruch $\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots$ gegen den Wert $-z'$[1]).

Dieses Resultat läßt sich nach einer besonderen, von der üblichen abweichenden Methode herleiten[2]), welche für den hier zu behandelnden allgemeineren Fall als Vorbild dienen kann[3]). Bezeichnet man mit z die andere, also die absolut genommen größere Wurzel der quadratischen Gleichung (1), so daß also:

$$(2) \qquad z + z' = 1, \quad z z' = -a, \quad |z'| < |z|,$$

so hat man zunächst identisch:

---

[1]) Über die auch noch im Falle $a = -\frac{1}{4}$ eintretende Konvergenz s. die Fußnoten auf Seite 78, 79.

[2]) Vgl. M. v. Pidoll, Dissert. S. 41.

[3]) Eine andere, gleichfalls auf der Substitution (2) beruhende Behandlung dieses Vorbildes s. [5], S. 36.

$$\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots + \frac{a|}{|1} + \cdots \equiv - \frac{zz'|}{|z+z'} - \frac{zz'|}{|z+z'} - \cdots - \frac{zz'|}{|z+z'} - \cdots$$

und, wenn noch gesetzt wird:

$$(3) \qquad \frac{z'}{z} = q, \quad \text{also: } |q| < 1,$$

so ergibt sich mit Hilfe einer einfachen Äquivalenz-Transformation:

$$(4) \quad \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots + \frac{a|}{|1} + \cdots = -z\left(\frac{q|}{|1+q} - \frac{q|}{|1+q} - \cdots - \frac{q|}{|1+q} - \cdots\right).$$

Nun ist aber nach einer bekannten Eulerschen Formel, betreffend die Umformung einer Summe in einen äquivalenten Kettenbruch:

$$1 + \sum_1^n{}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu = \frac{1|}{|1} - \frac{q_1|}{|1+q_1} - \frac{q_2|}{|1+q_2} - \cdots - \frac{q_n|}{|1+q_n}$$

und daher durch Übergang zum reciproken Werte:

$$1 - \frac{q_1|}{|1-q_1} - \frac{q_2|}{|1+q_2} - \cdots - \frac{q_n|}{|1+q_n} = \frac{1}{1+s_n},$$

wenn: $$s_n \equiv \sum_1^n{}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu \neq -1,$$

also schließlich:

$$(5) \qquad \frac{q_1|}{|1+q_1} - \frac{q_2|}{|1+q_2} - \cdots - \frac{q_n|}{|1+q_n} = \frac{s_n}{1+s_n}.$$

Daraus folgt aber, daß der vorliegende Kettenbruch für $n \to \infty$ in einen konvergenten übergeht, wenn s_n für $n \to \infty$ gegen einen von -1 verschiedenen Wert s konvergiert und daß in diesem Falle:

$$(6) \quad \left[\frac{q_1}{1+q_1}, \; -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^\infty = \frac{s}{1+s} \quad (\text{wo: } s \equiv \sum_1^\infty{}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu \neq -1),$$

während im Falle: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -1$ außerwesentliche Divergenz des Kettenbruches eintritt[1]).

---

[1]) Der Kettenbruch ist auch konvergent, wenn die Reihe „nach Unendlich" (im komplexen Sinne) divergiert, d. h. wenn: $\lim\limits_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$,

Die Anwendung dieses Ergebnisses auf Gl. (4), wobei jetzt, wegen $|q| < 1$, $s \equiv \sum_1^\infty \nu q^\nu = \frac{q}{1-q}$ wird, liefert sofort die gewünschte Beziehung:

$$\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots + \frac{a|}{|1} + \cdots = -zq, \text{ d. h. } = -z'[1]).$$

2. Ein beliebiger Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n$, wo $a_\nu \neq 0$, läßt sich zunächst rein formal stets auf die Formel (5) bringen (abgesehen von dem ersten Teilzähler d. h. schließlich einem dem Kettenbruche hinzuzufügenden Faktor). Setzt man nämlich für $\nu \geqq 1$:

$$(7) \qquad z_\nu + z'_\nu = 1, \quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}, \quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = q_\nu,$$

so findet man zunächst:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1}{z'_1} \cdot \left[\frac{z'_1}{z_1 + z'_1}, \quad -\frac{z_\nu z'_{\nu+1}}{z_{\nu+1} + z'_{\nu+1}}\right]_1^{n-1}$$

und hieraus durch Äquivalenz-Transformation:

$$(8) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1}{z'_1} \cdot \left[\frac{q_1}{1+q_1}, \quad -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^{n-1}.$$

Damit diese Beziehung einen Sinn hat, ist nur erforderlich, daß für $\nu = 1, 2, \ldots n$ die z_ν durch die Bedingungen (7) als bestimmte, insbesondere auch von Null verschiedene Zahlen definiert sind (was dann ohne weiteres auch für die z'_ν und q_ν gilt). Und man findet dann schließlich auf Grund der Beziehungen (5) und (6):

---

insbesondere also, wenn die Reihe „eigentlich" divergiert. Man findet in diesem Falle aus Gl. (5):

$$\left[\frac{q_1}{1+q_1}, \quad \frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right] = 1.$$

[1]) Ist $q = 1$, d. h. $z = z' = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4}$, so wird: $\sum_1^\infty \nu q^\nu = +\infty$ und der Kettenbruch konvergiert also gegen den Wert $-\frac{1}{2}$. Der Umstand, daß hier die Konvergenz des Kettenbruches vermöge der Divergenz von $\sum q^\nu$ zu Stande kommt, stempelt diesen Fall zum Sonderfall.

$$(9) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{z_1'} \cdot \frac{s}{1+s} \qquad (s \neq -1),$$

d. h. der betreffende unendliche Kettenbruch ist konvergent, wenn die fragliche Bestimmbarkeit der z_ν sich auf jedes noch so große ν erstreckt und die Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu$ gegen einen von -1 verschiedenen Wert s konvergiert, während im Falle $s = -1$ der Kettenbruch wieder als außerwesentlich divergent erkannt wird.

3. Im Anschlusse an dieses Ergebnis beweisen wir jetzt den folgenden Satz über die Konvergenz eines „nahezu" eingliedrig-periodischen Kettenbruches:

Ist a eine von Null verschiedene[1]) Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, für welche $|a| \geqq \frac{1}{4}$, haben z, z', q die in Gl. (2) und (3) angegebene Bedeutung und setzt man:

$$(10) \qquad |\sqrt{q}| = \vartheta \qquad (\text{also: } 0 < \vartheta < 1);$$

genügt sodann die unbegrenzte Folge der Zahlen a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) der Bedingung:

$$(\mathrm{A}) \qquad \left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right| \leqq (1-\vartheta)^2 \qquad (\text{also: } |a_\nu| > 0 \text{ für } \nu \geqq 2),$$

so *konvergiert* der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ mit Ausnahme eines besonderen Falles, in welchem *außerwesentliche Divergenz* eintritt (bzw. die Form $\frac{0}{0}$ zum Vorschein kommt, falls $a_1 = 0$ sein sollte).

Der Kettenbruch *konvergiert* ausnahmslos und zwar *unbedingt*, wenn die a_ν der engeren Bedingung genügen:

[1]) Die Ausschließung der Annahme $a = 0$ erscheint durch die Formulierung der Voraussetzungen (A) und (B) von vornherein geboten. Im übrigen bemerke man, daß nach einem bekannten Konvergenzkriterium (s. [4], S. 371, (II)) der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ja ohnehin unbedingt konvergiert, falls durchweg $|a_\nu| \leqq \frac{1}{4}$, so daß also für diese Umgebung der Stelle $a = 0$ von vornherein ein einfacherer und wirksamerer Satz besteht, als der in Frage stehende für $a \neq 0$.

$$\text{(B)} \qquad \left| 1 - \frac{a_{\nu+1}}{a} \right| \leqq (1-\sigma)(1-\vartheta)^2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo σ die (allemal vorhandene)[1] zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$\text{(11)} \qquad \frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2}\sigma^2 + \sigma - 1 = 0$$

bedeutet.

Beweis. Um die beiden Bedingungsformen (A) und (B) so weit als möglich gleichzeitig zu behandeln, wollen wir zunächst von der (beide Formen umfassenden) Voraussetzung ausgehen:

$$\text{(A, B)} \qquad \left| 1 - \frac{a_{\nu+1}}{a} \right| \leqq \varrho(1-\vartheta)^2, \qquad \text{wo: } 0 < \varrho \leqq 1.$$

Wird sodann nach der Vorschrift von Gl. (7) gesetzt:

$$z_\nu + z'_\nu = 1, \quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}, \quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so folgt zunächst, wenn man in der ersten dieser Gleichungen ν durch $\nu+1$ ersetzt und sodann den Wert $z'_{\nu+1} = 1 - z_{\nu+1}$ in die zweite einführt:

$$z_\nu(1 - z_{\nu+1}) = -a_{\nu+1},$$

und man gewinnt daher die Rekursionsformel:

$$\text{(12)} \qquad z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}(z_\nu + a_{\nu+1}),$$

---

[1]) Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1+\vartheta^2}{1-\vartheta^2} = r,$$

so geht die quadratische Gleichung (11) nach Multiplikation mit r in die folgende über:
$$\sigma^2 + r\sigma - r = 0,$$
besitzt also die beiden Wurzeln:
$$\tfrac{1}{2}\left(-r \pm \left|\sqrt{r^2+4r}\right|\right),$$
deren eine wegen:
$$r < \left|\sqrt{r^2+4r}\right| < r+2$$
wesentlich positiv und zugleich < 1 ist.

vermöge deren nach willkürlicher Annahme von z_1 die gesamte Folge der z_ν für $\nu \geqq 2$ eindeutig bestimmt ist, sofern es nur gelingt, jenen Anfangswert z_1 so auszuwählen, daß niemals ein $z_\nu = 0$ zum Vorschein kommen kann. Um dieses Ziel zu erreichen, bilden wir aus Gl. (12):

$$z - z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}\left(z_\nu (z - 1) - a_{\nu+1}\right),$$

anders geschrieben, mit Berücksichtigung von: $z - 1 = -z'$ und: $zz' + a = 0$ (so daß es also freisteht, innerhalb der äußeren Klammer den Summanden $zz' + a$ hinzuzufügen):

$$z - z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}\left(z'(z - z_\nu) + (a - a_{\nu+1})\right).$$

Hieraus durch Division mit z:

$$1 - \frac{z_{\nu+1}}{z} = \frac{z}{z_\nu}\left(\frac{z'}{z}\left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right) + \frac{a}{z^2}\left(1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right)\right)$$

und, wegen: $\frac{z'}{z} = q$, $\frac{a}{z^2} = -\frac{zz'}{z^2} = -q$:

$$1 - \frac{z_{\nu+1}}{z} = q \cdot \frac{z}{z_\nu}\left(\left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right) - \left(1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right)\right),$$

also schließlich:

$$(13) \qquad \left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| \leqq \vartheta^2 \cdot \left|\frac{z}{z_\nu}\right| \cdot \left(\left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| + \left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right|\right).$$

Bezüglich des Anfangswertes z_1 treffen wir nun die Festsetzung:

$$(14) \qquad 1 - \frac{z_1}{z} = \varrho\vartheta(1 - \vartheta) \quad \text{d. h.} \quad z_1 = (1 - \varrho\vartheta(1 - \vartheta))\,z$$

und zeigen, daß dann für jedes $\nu \geqq 2$ die Beziehung gilt:

$$(15) \qquad \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| < \varrho\vartheta(1 - \vartheta).$$

Denn, angenommen, es sei für irgend ein $\nu \geqq 1$:

$$(15\text{a}) \qquad \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| < \varrho\vartheta(1 - \vartheta),$$

so folgt zunächst:

$$\left|\frac{z_\nu}{z}\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right)\right|$$
$$\geqq 1 - \varrho\vartheta(1-\vartheta)$$
$$> 1 - (1 - \vartheta) = \vartheta$$ (mit Ausschluß der Gleichheit selbst für $\varrho = 1$)

und daher:

(16) $$\left|\frac{z}{z_\nu}\right| < \frac{1}{\vartheta} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Mit Berücksichtigung der Annahme (15a) und der Voraussetzung (A, B) ergibt sich also aus Ungl. (13):

(15b) $$\left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| < \vartheta^2 \cdot \frac{1}{\vartheta}(\varrho\vartheta(1-\vartheta) + \varrho(1-\vartheta)^2) = \varrho\vartheta(1-\vartheta)$$

und, da aus der Festsetzung (14) folgt, daß:

$$\left|1 - \frac{z_1}{z}\right| = \varrho\vartheta(1-\vartheta),$$

mithin die Annahme (15a) für $\nu = 1$ erfüllt ist, so gilt in der Tat die behauptete Ungleichung (15) für jedes $\nu \geqq 2$.

Daraus folgt zunächst, daß alle z_ν von Null verschieden ausfallen.

Des weiteren läßt sich zeigen, daß die q_ν einen gewissen echten Bruch niemals übersteigen. Man hat nämlich auf Grund der Definitionsgleichungen (3) und (2):

$$|q - q_\nu| = \left|\frac{z'}{z} - \frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{1-z}{z} - \frac{1-z_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{1}{z_\nu} - \frac{1}{z}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{z}\right| \cdot \left|\frac{z}{z_\nu}\right| \cdot \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right|$$

und sodann:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z+z'}{z}\right| = |1+q| \leqq 1 + |q|,$$

also mit Benützung von Ungl. (15), (16) für $\nu \geqq 1$:

(17) $$\begin{cases} |q - q_\nu| < (1 + |q|)\cdot\varrho(1-\vartheta) \\ \qquad\qquad < (1+\vartheta^2)(1-\vartheta) \end{cases}$$ (selbst für den Fall $\varrho = 1$).

Ferner ist:

$$|q_\nu| = |q - (q - q_\nu)| \leq |q| + |q - q_\nu|$$

und daher schließlich:

(18) $$|q_\nu| < \vartheta^2 + (1 + \vartheta^2)(1 - \vartheta) = 1 - \vartheta(1 - \vartheta)^2 < 1.$$

Daraus ergibt sich aber, daß die Reihe $\sum q_1 q_2 \ldots q_\nu$ konvergent ist und zwar auch im Falle $\varrho = 1$, d. h. wenn lediglich die Voraussetzung (A) besteht.

Wird dann wieder gesetzt:

$$\sum_1^\infty{}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu = s,$$

so ist also nach dem in Nr. 2 gesagten der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergent, ausgenommen den einzigen Fall $s = -1$, in welchem er außerwesentlich divergiert (bzw. die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, falls $a_1 = 0$ ist).

Es bleibt noch zu zeigen, daß das Eintreten dieses Divergenzfalles — übrigens auch für jeden der Kettenbrüche: $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_{n+1}^\infty$ für $n \geq 1$ — ausgeschlossen erscheint, falls die engere Bedingung (B) erfüllt ist, daß also unter dieser Voraussetzung stets $|1 + s|$ von Null verschieden ausfällt.

Man hat nun:

$$|1 + s| = \left|\frac{1}{1-q} + \left(s - \frac{q}{1-q}\right)\right| \geq \frac{1}{1+|q|} - \left|s - \frac{q}{1-q}\right|$$

und daher:

(19) $$|1 + s| > 0, \quad \text{wenn:} \quad \left|s - \frac{q}{1-q}\right| < \frac{1}{1+|q|}.$$

Um das letztere nachzuweisen, hat man zunächst:

(20) $$\left|s - \frac{q}{1-q}\right| = \left|\sum_1^\infty{}^\varkappa (q_1 q_2 \ldots q_\varkappa - q^\varkappa)\right| \leq \sum_1^\infty{}^\varkappa |q_1 q_2 \ldots q_\varkappa - q^\varkappa|$$

und sodann:

$$q_1 q_2 \ldots q_\varkappa - q^\varkappa = (q - (q - q_1)) \ldots (q - (q - q_\varkappa)) - q^\varkappa,$$

also (da das Glied $q^{\varkappa}$ bei Ausführung der Multiplikation sich weghebt:

(21) $$|q_1 q_2 \dots q_{\varkappa} - q^{\varkappa}| \leqq (|q| + |q - q_1|) \dots (|q| + |q - q_{\varkappa}|) - |q|^{\varkappa}.$$

Aus der ersten der Ungleichungen (17) findet man, wegen $|q| = \vartheta^2 < \vartheta$:

$$|q - q_\nu| < \varrho (1 + \vartheta)(1 - \vartheta) = \varrho (1 - |q|) \qquad (\nu \geqq 1)$$

und daher im Anschlusse an die Voraussetzung (B) für $\varrho = 1 - \sigma$ (wo: $0 < \sigma < 1$):

$$|q| + |q - q_\nu| < |q| + (1 - \sigma)(1 - |q|) = 1 - \sigma (1 - |q|).$$

Hiernach ergibt sich aus Ungl. (21):

$$\begin{aligned} |q_1 q_2 \dots q_{\varkappa} - q^{\varkappa}| &< (1 - \sigma(1 - |q|))^{\varkappa} - |q|^{\varkappa} \\ &< \varkappa (1 - \sigma (1 - |q|)^{\varkappa - 1} \cdot (1 - \sigma)(1 - |q|), \end{aligned}$$

so daß die Ungleichung (20) durch die folgende ersetzt werden kann:

(22) $$\left| s - \frac{q}{1-q} \right| < (1 - \sigma)(1 - |q|) \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa}\, \varkappa (1 - \sigma (1 - |q|))^{\varkappa - 1}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_1^{\infty} {}^{\varkappa}\, \varkappa (1 - \sigma (1 - |q|))^{\varkappa - 1} = \left(\frac{1}{\sigma (1 - |q|)} \right)^2$$

und daher:

$$\begin{aligned} \left| s - \frac{q}{1-q} \right| &< \frac{1 - \sigma}{\sigma^2 (1 - |q|)} = \frac{1 - \sigma}{\sigma^2} \cdot \frac{1 + \vartheta^2}{1 - \vartheta^2} \cdot \frac{1}{1 + |q|} \\ &< \frac{1}{1 + |q|}, \end{aligned}$$

wenn:

$$\frac{1 - \sigma}{\sigma^2} \cdot \frac{1 + \vartheta^2}{1 - \vartheta^2} = 1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1 - \vartheta^2}{1 + \vartheta^2} \cdot \sigma^2 + \sigma - 1 = 0,$$

übereinstimmend mit Voraussetzung (11).

Somit ist auf Grund von Ungl. (19) der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^{\infty}$ sicher **konvergent**, wenn die Voraussetzung (B) erfüllt ist. Und da deren Wirksamkeit bei Weglassung beliebig vieler Anfangsglieder keine Einbuße erleidet, so konvergiert er unbedingt.

4. Ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a \neq 0$, so wird $\left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right|$ für hinlänglich große ν beliebig klein, etwa für $\nu \geq m$ klein genug, daß die Bedingung (B) des vorigen Satzes für $\nu \geq m$ erfüllt ist, also der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_m^\infty$ unbedingt konvergiert und demgemäß $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ höchstens außerwesentlich divergiert, falls durchweg $|a_\nu| > 0$. Da dieses Ergebnis auch im Falle $a = 0$ bestehen bleibt (vgl. S. 80, Fußn. 1), so ergibt sich für jeden solchen „limitär-periodischen" Kettenbruch der Satz:

Ist $|a_\nu| > 0$ (für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$), $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, wo a jede beliebige Zahl sein kann, mit Ausschluß der reellen negativen, die numerisch $\geq \frac{1}{4}$, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ höchstens außerwesentlich divergent und zum mindesten nach Weglassung einer passenden Anzahl von Anfangsgliedern unbedingt konvergent.

Da ferner für einen Kettenbruch von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ im Falle $|b_\nu| > 0$ die Äquivalenzbeziehung besteht:

$$(23)\quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^\infty, \quad \text{wo: } a'_1 = \frac{a_1}{b_1} \text{ und für } \nu \geq 2:\ a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu},$$

so folgt, daß ein solcher Kettenbruch schon den Charakter eines limitär-periodischen Kettenbruches besitzt, falls:

$$(24)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = a',$$

wo a' nur den zuvor der Zahl a auferlegten Beschränkungen zu genügen hat, damit der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab unbedingt konvergiert.

Hierzu wäre offenbar hinreichend, daß der betreffende Kettenbruch in dem üblichen Sinne limitär-periodisch, daß also etwa:

$$(25) \qquad \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu \to \infty} b_\nu = b \neq 0,$$

$\left(\text{wo } \frac{a}{b^2} \text{ nicht gleichzeitig reell negativ und numerisch } \geq \frac{1}{4}\right)$.

Andererseits verlangt aber die Bedingung (24) offenbar erheblich weniger. Bezeichnet man z. B. mit (ω_ν), (ε_ν) zwei Folgen positiver Zahlen, die den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu = +\infty, \quad \lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0, \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{\omega_\nu}{\omega_{\nu-1}} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_{\nu-1}} = 1,$$

mit (a_ν), (b_ν) wieder die durch die Bedingungen (25) charakterisierten Zahlenfolgen, so haben auf Grund der Äquivalenzbeziehung (23) auch die beiden Kettenbrüche: $\left[\frac{\omega_\nu^2\, a_\nu}{\omega_\nu\, b_\nu}\right]_1^\infty$, $\left[\frac{\varepsilon_\nu^2\, a_\nu}{\varepsilon_\nu\, b_\nu}\right]_1^\infty$ limitär-periodischen Charakter, obschon die Teilzähler und -nenner des ersten den Grenzwert ∞ besitzen, diejenigen des zweiten (insbesondere also dessen Teilnenner entgegen der zweiten Bedingung (25)) gegen 0 konvergieren.

Hat man ferner zwar: $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$, dagegen: $\lim\limits_{\mu \to \infty} b_{2\mu-1} = b' \neq 0$, $\lim\limits_{\mu \to \infty} b_{2\mu} = b'' \neq 0$, so folgt: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} = \frac{a}{b' b''}$, so daß also auch in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ den Charakter eines limitär-periodischen besitzt, obschon die $b_{2\mu-1}$, $b_{2\mu}$ verschiedenen Grenzwerten zustreben.

5. Der Wert $a = -\frac{1}{4}$ gehörte bei dem Satze über die Konvergenz des limitär-periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (wo: $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$) schon zu den ausdrücklich ausgeschlossenen. Aber gleichwie die Annahme $a = -\frac{1}{4}$ für den schlechthin periodischen Kettenbruch $\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots$ einen besonderen Fall

von Konvergenz liefert (vgl. S. 79 Fußn. 2), so kann auch der limitär-periodische Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ zum mindesten von einer gewissen Stelle ab noch (unbedingt) konvergieren, auch wenn: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$. Es liegt zunächst die Vermutung nahe, daß dies insbesondere der Fall sein dürfte, wenn von einer gewissen Stelle ab durchweg: $|a_\nu| \leqq \frac{1}{4}$. Und die Richtigkeit dieser Vermutung wird in der Tat durch Anwendung eines bekannten (in Fußn. 1, S. 80 erwähnten) Konvergenz-Kriteriums bestätigt. Danach ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ bei $|a_\nu| \leqq \frac{1}{4}$ (für $\nu \geqq 2$) stets unbedingt konvergent[1].

Einigermaßen überraschend erscheint es dagegen, daß bei $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$ auch dann noch Konvergenz stattfinden kann, wenn für jedes einzelne ν: $|a_\nu| > \frac{1}{4}$. Dies folgt aber aus einem anderen, der gleichen Quelle, wie das eben angeführte, entstammenden Konvergenz-Kriterium[2]), auf Grund dessen der Kettenbruch:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{-\dfrac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^\infty$$

(der auch durch den äquivalenten $\left[-\frac{\nu^2}{2\nu+1}\right]_1^\infty$ ersetzt werden kann) noch unbedingt konvergiert, obschon ja jeder Teilzähler numerisch oberhalb $\frac{1}{4}$ liegt und $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$ ist.

Es hat keine Schwierigkeit, sich direkt davon zu überzeugen, daß hier der in den Fußnoten S. 78, 79 erwähnte Sonderfall vorliegt, bei dem die Konvergenz auf der („eigentlichen") Divergenz der dort mit $\sum q_1 q_2 \ldots q_\nu$ bezeichneten Reihe beruht. Wegen $a = -\frac{1}{4}$ hat nämlich die quadratische Gleichung (1) die Doppelwurzel $\frac{1}{2}$, so daß also (s. Gl. (3)):

---

[1]) Außerwesentliche Divergenz würde nur eintreten, wenn: $a_2 = -\frac{1}{2}$ und für $\nu \geqq 3$ durchweg: $a_\nu = -\frac{1}{4}$.

[2]) s. [4], S. 372, III.

$$z = z' = \tfrac{1}{2}, \qquad q = 1$$

und sodann (s. Gl. (7)):

$$z_\nu + z'_\nu = 1, \; z_\nu z'_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)^2}{4(\nu+1)^2 - 1} = \frac{\nu+1}{2\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{2\nu+3} \quad (\nu \geqq 1).$$

Wird jetzt z_1 so fixiert, daß:

$$z_1 = \left(\frac{\nu+1}{2\nu+1}\right)_{\nu=1} \quad \text{d. h. } z_1 = \tfrac{2}{3},$$

so folgt allgemein für $\nu \geqq 1$:

$$z_\nu = \frac{\nu+1}{2\nu+1}, \quad z'_{\nu+1} = \frac{\nu+1}{2\nu+3}, \quad \text{also: } q_\nu = \frac{z'_\nu}{z_\nu} = \frac{\nu}{\nu+1},$$

und daher auf Grund der Beziehungen (8) und (5):

$$\left[\frac{-\dfrac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^n = -\frac{s_n}{1+s_n}, \quad \text{wo: } s_n \equiv \sum_1^n{}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu = \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{\nu+1},$$

mithin schließlich:

$$\left[\frac{-\dfrac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^\infty = -1.$$

Nachtrag zu dem Aufsatze:

Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte etc.

(Jahrgang 1916, S. 209.)

Bekanntlich beruht die wesentliche Bedeutung der zu einer Reihe $\sum a_\nu$ gehörigen Hölderschen bzw. Cesàroschen Grenzwerte auf deren Zusammenhang mit der Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$, also, mit Beibehaltung der a. a. O. eingeführten Bezeichnungen, auf Beziehungen von der Form:

$$\text{(1a)} \lim_{x\to 1} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) \quad \text{bzw.} \quad \text{(1b)} \lim_{x\to 1} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}.$$

Nun ist durch den Nachweis der Äquivalenz jener beiden Grenzwertformen nicht nur der ziemlich umständliche Hölder-sche Beweis[1]) der Relation (1 a) völlig entbehrlich geworden, da deren Gültigkeit nunmehr ohne weiteres aus der verhältnismäßig leicht zu beweisenden Relation (1 b)[2]) folgt, sondern es haben die $S_n^{(\varkappa)}$ vermöge ihres einfacheren Bildungsgesetzes die $\mathfrak{M}_k(s_n)$ nahezu vollständig verdrängt. Bei dieser Sachlage scheint es vielleicht nicht ganz überflüssig, darauf hinzuweisen, daß vermöge des zwar den $\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$, nicht aber den $S_n^{(\varkappa)}$ zukommenden rein iterativen (und zugleich distributiven) Charakters, nachdem nun einmal die Äquivalenz der beiden Grenzwertformen erwiesen ist, gewisse Zusammenhänge sich ganz unmittelbar übersehen lassen, deren Feststellung bei ausschließlicher Verwendung der $S_n^{(\varkappa)}$ eine verhältnismäßig umständliche Rechnung oder die Verwendung sonstiger besonderer Hilfsmittel erfordert. Zur näheren Begründung dieser Bemerkung diene folgendes. Aus der Identität:

$$\begin{aligned}(n+1)\, s_n &= \sum_0^n{}^{\nu} (n+1-\nu)\, a_\nu + \sum_0^n{}^{\nu} \nu\, a_\nu \\ &= \sum_0^n{}^{\nu} s_\nu + \sum_0^n{}^{\nu} \nu\, a_\nu\end{aligned}$$

folgt durch Division mit $(n+1)$:

$$(2_0) \qquad s_n = \mathfrak{M}_1(s_n) + \mathfrak{M}_1(n\, a_n)$$

und hieraus durch $\varkappa$-malige Mittelwertbildung:

$$(2) \qquad \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) = \mathfrak{M}_{n+1}(s_n) + \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(n\, a_n)$$

für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$, übrigens für $\varkappa = 0$ mit Gl. (2_0) zusammenfallend, wenn man, wie bisher, $\mathfrak{M}_0(s_n)$ die Bedeutung von s_n beilegt. Besteht nun für irgend ein $\varkappa \geqq 0$ eine Beziehung von der

[1]) Math. Ann. 20 (1882), S. 535.

[2]) Wenn man noch die bekannte Transformation zu Hilfe nimmt:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu\, x^\nu = (1-x)^{\varkappa+1} \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} s_\nu^{(\varkappa)}\, x^\nu,$$

im wesentlichen zuerst bewiesen von Appell: Paris C. R. 87 (1878), p. 690. Vgl. auch dieser Berichte Bd. 31 (1901), p. 522.

Form $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_n) = s$, so ergibt sich aus Gl. (2) unmittelbar der folgende Satz:

(A) Weiß man, daß $\sum a_\nu$ zum mindesten von der Ordnung $\varkappa + 1$ reduzibel ist, so bildet die Beziehung:

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(n\, a_n) = 0$$

die *notwendige* und *hinreichende* Bedingung dafür, daß $\sum a_\nu$ schon von der Ordnung $\varkappa$ reduzibel ist. Dies gilt auch für $\varkappa = 0$, sofern man unter *Reduzibilität von der Ordnung* 0 die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ versteht.

Auf Grund dieses Satzes kann man aus der Voraussetzung $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_n) = s$ die Konvergenz von $\sum a_\nu$ dann und nur dann erschließen, wenn:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(n\, a_n) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_{\varkappa}(n\, a_n) = \cdots = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1(n\, a_n) = 0.$$

Da aber andererseits schon aus: $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1(n\, a_n) = 0$ für jedes $\lambda > 1$ folgt: $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_\lambda(n\, a_n) = 0$, so findet man:

(B) Weiß man, daß die Reihe $\sum a_\nu$ von irgend einer (beliebig hohen) Ordnung *reduzibel* ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre *Konvergenz* in der Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1(n\, a_n) = 0.$$

Auf Grund des Cauchyschen Grenzwertsatzes ist aber diese letztere Beziehung sicher erfüllt, wenn: $\lim_{n \to \infty} n\, a_n = 0$, und somit folgt weiter:

(C) Für die *Konvergenz* einer bereits als *reduzibel* erkannten Reihe $\sum a_\nu$ ist *hinreichend*, daß:

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} n\, a_n = 0.$$

Anders ausgesprochen:

Eine *divergente* Reihe $\sum a_\nu$ mit verschwindendem $\lim_{n \to \infty} n\, a_n$ kann niemals *reduzibel* sein.

In dieser letzten Form wurde der Satz zuerst von Herrn G. H. Hardy[1]) ausgesprochen. Die Kürze des von ihm gegebenen Beweises ist jedoch in sofern nur eine scheinbare, als derselbe nicht unerhebliche funktionentheoretische Ergebnisse zu Hilfe nimmt (nämlich die Relation (1 b) und einen bekannten Tauberschen Satz über die Konvergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $x = 1$), während hier zunächst der Satz (B) ganz unmittelbar aus der rein formalen Identität (2) hervorgeht und für die Herleitung von (C) dann nur noch der Cauchysche Grenzwertsatz erforderlich ist.

Auch die Sätze (A) und (B) finden sich bei Hardy[2]) mit dem Unterschiede, daß es sich dort immer um Reduzibilität im Cesàroschen Sinne handelt und daß demgemäß bei dem Analogon zu Satz (B) an die Stelle des Hölderschen Grenzwertes $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_1 (n a_n)$ der entsprechende zur Reihe $\sum \nu a_\nu$ gehörige Cesàrosche Grenzwert tritt. Der Beweis gestaltet sich infolgedessen merklich umständlicher, während man andererseits mit Hilfe der Äquivalenz der betreffenden Grenzwerte aus dem hier gegebenen Satze (B) dessen Hardysche Form unmittelbar herleiten könnte. Herr Hardy benützt übrigens diese letztgenannten Sätze zum Beweise einer interessanten Verallgemeinerung des Satzes (C), welche aussagt, daß die Bedingung (5) durch die folgende, wesentlich weiteren Spielraum gewährende:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, |n a_n| < + \infty \tag{5 a}$$

ersetzt werden kann. Und für diesen Beweis sind dann, wie ausdrücklich zugegeben werden soll, die Hölderschen Mittelbildungen wohl kaum verwendbar.

[1]) Proc. London Math. Soc. (2), 8 (1910), p. 302.

[2]) A. a. O. p. 304.